TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

O. Annaorazow, B. Kömekow, H. Geldiýew, A. Öwezow

ALGEBRA WE SANLAR NAZARYÝETI

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat – 2010

O. Annaorazow, B. Kömekow, H. Geldiýew, A. Öwezow

Algebra we sanlar nazaryýeti. – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda algebra we sanlar nazaryýeti dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

Giriş

Mälim bolşy ýaly ylmy-tehniki progresiň häzirki pajarlap ösýän döwründe matematikany çuňňur öwrenmekligiň zerurlygy öňkä garanyňda has artdy. Bu okuw kitbynda ýokary algebranyň esasy düşünjeleri beýan edilýär. Okuw kitaby algebra dersi boýunça okuw maksatnamalaryna doly gabat gelýär. Getirilýän nazary maglumatlary berkitmek üçin köp sanly anyk mysallar işlenip görkezilýär. Okuw kitaby matematika hünärini ele alýan talyplara niýetlenendir.

1.Çyzykly deńlemeler sistemasyny çözmegiń Gauss (näbellileri yzygiderli ýok etmek) usuly

Algebranyń mekdep kursunyń esasy öwrenýän meselesi bolup, deńlemäni çözmek meselesi durýardy. Bu meseläni öwrenmeklik aý=b, $a \neq 0$ san görnüşdäki bir näbellili çyzykly deńleme diýilip atlandyrylýan deńlemäni öwrenmekden başlanypdy. Sońra bu meseläni öwrenmeklik aşakda görkezlen 2-ugur boýunça dowam etdirilipdi.

1) 2 näbellili 2 sany ýa-da 3 näbellili 3 sany çyzykly deńlemeleriń sistemasyny çözmek.
2) Bir näbelliden kwadrat deńlemäni ($aý^2$+bý+c=0) hem-de bir näbelliden ýokary, derejeli deńlemeleriń käbir hususy ýagdaýlaryny öwrenmeklik.

Algebranyń häzirki öwreniljek kursunda bu görkezilen ugurlaryń ikisi hem özleriniń has umumy ýagdaýda öwrenilmeklerine mynasyp bolýarlar. Ýagny biz islendik sanda näbellileri bolan islendik sandaky çyzykly deńlemeleriń sistemasyny şeýle hem bir näbelliden islendik derejeli deńlemeleriń käbir görnüşlerini öwrenmek göz öńünde tutulýandyr. Goý bize N sany näbellileri bolan S sany çyzykly deńlemeleriń sistemasy berlen bolsun. Bu sistemany ýazmak üçin indiki belgilemeleri girizeliń:

Näbellileri indekslenen Ý harpy bilen ($ý_1, ý_2, \ldots, ý_n$); sistemanyń deńlemeleri tertipleşdirilen hasap edip, onuń i-nji deńlemesinde saklanýan $ý_j$ näbelliniń kofisientini a_{ij} bilen Mysal üçin: (a_{23} sistemanyń 2-nji deńlemesindäki $ý_3$ näbelliniń kofisienti) we B_i bilen i-nji deńlemäniń azat çlenini belgiläris.

Onda öwreniljek sistema indiki ýaly ýazylar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i,\ i = 1,2,\ldots,S \qquad (1)$$

Bu sistemanyń koeffisientlerinden indiki tablisany düzmek mümkindir.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{S1}a_{S2}\ldots a_{Sn} \end{pmatrix}$$

Bu S sany setirleri hem-de n sany sütünleri bolan tablisany (s Ý n) ölçegli gönüburçly matrisa diýip atlandyrýarlar. Bu tablisany düzýän a_{ij} sanlara,onuń elementleri diýilýär. S=n bolan ýagdaýynda bu matrisa n-nji tertipli kwadrat matrisa diýilip aýdylýar. Onuń çep ýokarky burçundan aşaky sag burçuna gidýän diagonalyna ýagny a_{11}, a_{22}, a_{nn} elementlerden düzülen diagonala matrisanyń baş diagonaly, beýleki diagonalyna bolsa onuń gapdal diagonaly diýilip aýdylýar.

Kesgitleme: Eger-de (1)-nji sistemanyń haýsy hem bolsa 2 sany deńlemelerinden galanlaryny üýtgetmän ol 2 deńlemeleriniń bolsa, özara orunlaryny çalşyrylyp, täze bir sistema alynan bolsa, ońa (1) sistemadan 2 görnüşli elementar özgertmäniń üsti bilen alnypdyr diýilýär. Eger-de käbir çyzykly deńlemeler sistemasy (1) sistemadan käbir deňlemesinden galanlaryny üýtgetmän onuň bu 1 deňlemesiniň ornuna bolsa onuň käbir hemişelik sana köpeldilen başga bir deňlemesi bilen jemi alynan bolsa, bu täze sistema (1) sistemadan 2 görnüşli elementar özgertmäniň üsti bilen alnypdyr diýilýär.

Kesgitleme: Eger-de (1) sistemadaky näbellileriň ornuna degişlilikde $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sanlary goýanmyzda onuň her bir deňlemesi toždestwo öwrülýän bolsa (kanagatlanýan bolsa), onda $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sanlaryň toplumuna bu sistemanyň çözüwi diýilýär.Ol çözüw $Ý_1=K_1$, $Ý_2=K_2, \ldots, Ý_n=K_n$, ýa-da $(K_1, K_2 \ldots K_n)$ görnüşünde belgilenýär.

Çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözüwe eýe bolmazlygy hem mümkindir. Bu ýagdaýda oňa kökdeş däl (ylalaşmaýan ýa-da sygyşmaýan) sistema diýilýär. Mysal üçin:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$ sistema kökdeş däldir. Çünki onuň deňlemeleriniň çep taraplary deň bolup, sag taraplary bolsa dürlidirler. Şoňa görä-de, bu deňlemeleriň ikisi hem bir bada näbellileriň hiç bir bahasynda hem kanagatlanyp bilmez.

Kesgitleme: Eger-de çyzykly deňlemeler sistemasynyň çözüwi bar bolsa, oňa kökdeş (ylalaşýan ýa-da sygyşýan) sistema diýilýär. Kökdeş sistemanyň çözüwi ýek-täk bolsa, oňa kesgitlenen tersine ýagdaýda (çözüwlerniň sany 1-den köp bolsa), oňa kesgitlenmedik sistema diýilýär.

Kesgitleme: Şol bir ölçeglerdäki (deň sandaky näbellileri bolan şol bir mukdardaky deňlemeleriň sistemalary) 2 sany çyzykly deňlemeleriň sistemalarynyň ikisi hem bir bada ýa kökdeş bolmasalar ýa-da kökdeş halatlarynda ikisi hem şol bir çözüwlere eýe bolsalar bu sistemalara ekwiwalent (ýa-da deňgüýçli) sistemalar diýilýär.

Eger-de berlen çyzykly deňlemeler sistemasynda tükenikli sanda 1 we 2 görnüşli elementar özgertmeleri ýerine ýetirmek bilen alynýan täze sistemanyň başdaky sistema bilen ekwiwalent bolandygyny görmek kyn däldir.

Indi (1) sistemany çözmek üçin ulanylýan Gauss usulyny öwrenmeklige girişeliň. (1ž) çyzykly deňlemeler sistemasynyň birinji deňlemesinden galanlaryndan Ý$_1$ näbellini ýok eder ýaly, elementar özgertmeleri geçireliň şunlukda biz umumylyga hiç bir şikes, ýetirmeýän $a_{11} \neq 0$ şert kanagatlanýar diýip hasap etjekdiris. Bu ýagdaýda (1) sistemanyň 1-nji deňlemesini $\frac{a_{21}}{a_{11}}-e$ köpeldip, 2-nji deňlemesinden aýralyň soňra bu 1-nji deňlemäni $\frac{a_{31}}{a_{11}}-e$ köpeldip sistemanyň 3-nji deňlemesinden we şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen sistemanyň soňky deňlemesinden onuň 1-nji deňlemesini $\frac{a_{S1}}{a_{11}}-e$ köpeldip aýrarys. Şeýlelikde indiki sistemany alarys:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2,\\
a'_{32}x_2 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3,\\
a'_{S2}x_2 + \ldots + a'_{Sn}x_n &= b'_S\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Bu alnan sistemada onuň 1-nji 2 deňlemelerinden galanlaryndan ý$_2$ näbellini ýok edýän elementar özgertmeleri geçireliň şunlukda biz umumylyga hiç hili şikes ýetirmeýän, $a'_{22} \neq 0$ talap ýerine ýetýär diýip hasap etjekdiris. Mundan başga-da bu alnan sistemada çep tarapyndaky koffisentleriniň ählisi 0-la deň bolan deňleme ýok diýip hasap etçekdiris. Eger-de şeýle deňleme bar bolaýsa, onda onuň azat çleniniň 0-la deňdigine ýa-da deň däldigine baglylykda alnan sistemada bu deňlemäni alyp taşlap, onuň galan deňlemelerniň sistemasynda ýokarda aýdylan özgertmeleri geçirmek hakynda ýa-da bu alnan sistemanyň şeýle hem oňa ekwiwalent bolan başga berlen deňlemeler sistemasynyň kökdeş däldigi hakynda netijä geleris. Onda bu alnan sistemanyň ilkinji 2 deňlemesini boluşlary ýaly ýazyp onuň 3-nji, 4-nji we şuňa meňzeşlikde iň soňky deňlemesinden bu

sistemanyň 2-nji deňlemesini degişlilikde $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$, $\frac{a'_{42}}{a'_{22}}$ we şuňa

meňzeşlikde $\frac{a'_{S2}}{a'_{22}}$ sanlara köpeldip, aýryp alarys:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ a''_{t3}x_3 + \ldots + a''_{tn}x_n &= b''_t \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Bu ýerde t≤S çünki geçirilýän özgertmeler netijesinde sistemadaky deňlemeleriň sanynyň azalmagy mümkindir. Bu alnan sistemada ýokarda aýdylan näbellilerniň koffisentleriniň ählisi 0-a deň bolan azat çleni 0-dan tapawutly bolan deňleme bar bolaýsa alnan sistemanyň şeýle hem oňa ekwiwalent bolan 1-nji sistemanyň kökdeş däldigi hakyndaky netijä geleris. Eger-de şeýle deňleme ýok bolaýsa, onda ýokarda görkezilşi ýaly näbellileri yzygiderli ýok etmekligi dowam etdirmek bilen indeks görnüşdäki kökdeş bolan sistema alnar.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ a^{(k-1)}_{kk}x_k + \ldots + a^{(k-1)}_{kn}x_n &= b^{(k-1)}_k \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Bu ýerde $k \le t,\quad k \le n$ bolup, $a_{11} \ne 0,\ a'_{22} \ne 0,\ a''_{33} \ne 0,\ a^{(k-1)}_{kk} \ne 0.$

Eger-de bu alnan sistemada k=n bplaýsa onda ol üçburçlyk gönüşündäki ýagdaýa eýe bolar.

$$\left.\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\
&\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2,\\
&\qquad a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3,\\
&\qquad a_{n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)},\\
&\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Bu ýerde: $a_{11} \neq 0,$ $a'_{22} \neq 0,$ $a_{n-1}^{(n-2)},_{n-1} \neq 0,$ $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ alnan sistemanyň ýeketäk bolan çözüwi aşakdaky ýol bilen tapylýandyr. Onuň soňky deňlemesinden ýn näbelli üçin $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$ ýeketäk bolan bahasyny tapýarys. Soňra bu tapylan bahany iň soňkynyň öň ýanyndaky deňlemede ornuna goýmak bilen x_{n-1} näbelli üçin ýeketäk kesgitlenýän bahany taparys. Şu usulda (5) sistemanyň deňlemelerinde aşakdan ýokarlygyna hereket etmek bilen be ýleki $x_{n-2},$ $x_{n-3},$ $x_2,$ x_1 näbellileriň hem ýeke-täk bolan bahalaryny taparys.

Şeýlelikde (1) sistema elementar özgertmeleriň üsti bilen (5) görnüşli üçburçluk ýagdaýyna getirlen ýagdaýynda ol kesgitlenendir. Eger-de indi (4) sistema k< n diýsek, onda bu sistema trapesiýa görnüşe eýe bolup, (onuň soňky deňlemesindäki näbellileriň sany birden köpdir) ol şeýle hem oňa ekwiwalent bolan birinji sistema tükeniksiz çözüwe eýedirler, başgaça aýdanyňda ol sistemalar kesgitlenen däldirler. Bu çözüwleri tapmak üçin (4) sistemanyň soňky deňlemesindäki näbellileriň birden galanlaryny Mysal üçin ýk-dan beýlekilerini "beýlekilerini" "azat näbelliler" diýip atlandyryp, hem-de olara erkin bahalary berip, bu ýk näbelliniň şol bahalara bagly ýeke-täk bolanbahasyny taparys. Soňra bu tapylan bahany (4) sistemanyň deňlemeleriniň soňkysynyň öň ýanyndaky ornuna goýmak bilen ýk-1 näbelli üçin ýeketäk bahany taparys. Soňra şu prosesi sistemanyň deňlemelerine aşakdan ýokarlygyna dowam etdirmek bilen galan $ý_{k-2},\ldots,ý_2,ý_1$ näbellileri üçin hem azat näbellilere bagly bolan ýeketäk bahalary taparys. Şu usul üçin (4) sistemaň azat näbellilere berlen erkin bahalaryna bagly çözüwi tapylar. Ýöne azat näbellileriň bahalaryny tükeniksiz köp dürli usullar bilen saýlamak mükinçiligini̇ň bardygyny nazara alsak k‹ n bolan halatynda (4) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwine eýe bolarys. Şeýlelik bilen indiki netijä eýe bolarys. Gauss usuly bilen islendik çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmek mümkin bolup, eger-de sistemada elementar özgertmeleri geçirenimizde çep tarapyndaky kofisentleriň ählisi 0-a deň bolan azat çleni bolsa, 0-dan tapawutly bolan deňleme alynaýsa, onda alynan sistemamyz şeýle hem oňa ekwiwalent bolan başda berlen sistemamyz kökdeş däl bolar, tersine ýagdaýda ýagny agzalan görnüşdäki deňlemä gabat gelinmese onda sistema kökdeşdir. Ol elementar özgertmeler netijesinde ýa k‹ n-den bolan trapesiýa görnüşli diýilýän (4) ýagdaýa üçburçluk görnüşli diýilýän (5) ýagdaýa getiriler. Şunlukda eger-de ol (4) görnüşe eýe bolan bolsa, berlen sistema kesgitlenmedikdir. Eger-de (5) görnüşe eýe bolan bolsa ol kesgitlenendir.

Bellikler:

1) Gauss usuly uniwersal bolup ol çyzykly deňlemeleriň islendik sistemasyn çözmäge ulanylyp bilinýär.

2)Bu usul örän ýönekeý bolup, birmeňzeş hasaplamalara esaslanandyr. (Özgertmeler geçirenimizde her gezek deňlemeleriň birinden başga birini käbir sana köpeldilip aýrylýar). Şonuň üçinde sistemany çözmekde EHM-den peýdalanylan halatlarynda bu usul has oňaýlydyr.

3)Sistemany Gauss usulyndan peýdalanyp çözenimizde bu usul berlen sistemanyň koefisentleriniň hem-de azat çlenleriniň üsti bilen onuň kökdeşdigi ýa-da däldigi, kesgitlenendigi ýa-da däldigi hakynda netijä gelmäge mümkinçilik bermeýär diňen netijä gelmek üçin biz sistemany doly çözmeli bolýarys.

Indi (1) çyzykly deňlemeler sistemasynyň deňlemelerniň ählisiniň azat çlenleriniň 0-a deň bolan hususy ýagdaýyna ýagny birjynysly çyzykly deňlemeleriň sistemasyna seredeliň.

....

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Bu sistema elmydama kökdeşdir. Çünki onuň (0,0,…,0) çözüwiniň bardygy düşnüklidir. Eger-de şeýle sistemada deňlemeleriň sany S, näbellileriň n sanyndan az bolaýsa ($s<n$ bolsa) onda bu sistema elementar özgertmeleriň üsti bilen diňe trapesiýa görnüşine getiriler. Bu diýildigi şeýle sistemanyň çözüwleriniň sany tükeniksiz köp bolup, onuň 0-däl çözüwe (näbellileriniň käbiriniň bahalarynyň 0-dan tapawutly bolan çözüwi) eýedigini alarys.

2. 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjiler olaryň çyzykly deňlemeleriň kwadiratik sistemasyny çözmäge ulanylşy (Kramer düzgüni)

Goý bize 2 sany näbellileri bolan 2 sany çyzykly deňlemeleriň sistemasy berlen bolsun.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Bu sistemanyň matrisasy diýlip, onuň näbellileriniň kofisentlerinden düzlen 2-nji tertipli kwadratik matrisa aýdylýar.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Bu matrisanyň a_{11} we a_{22} elementlerinden düzülen diagonalyna onuň baş diagonaly beýlekisine bolsa gapdal ýa-da 2-nji diagonaly diýilýär. (1) sistema-nyň 1-nji deňlemesini a_{22}-2, 2-nji deňlemesini bolsa ($-a_{12}$) köpeldilip alnan deňlemeleri goşalyň.

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot ý_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \qquad (3)$$

Edil şuňa meňzeşlikde (1) sistemanyň 1-nji deňlemesini ($-a_{21}$)-e, 2-nji deňlemesini bolsa a_{11}-e köpeldip, alnan deňlemeleri goşmak bilen taparys.

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\acute{y}_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \qquad (4)$$

3 we 4 deňlemeleriniň näbellileriniň kofisentleri meňzeşdirler. Şol kofsenti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2-nji matrisa degişli bolan 2-nji tertipli kesgitleýji ýa-da ýöne (1)-nji sistemanyň kesgitleýjisi (determinanty) diýip atlandyralyň. Görnüşi ýaly 2-nji tertipli kesgitleýji degişli matrisanyň baş diagonalynyň elementlerniň köpeltmek hasylyndan onuň, beýleki diagonalynyň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyndan alynan san bolýan eken. (3) we (4) deňlemeleriň sag taraplaryndaky aňlatmalar hem 2-nji tertipli kesgitleýji görnüşinde ýazylyp bilerler. Hakykatdan hem ola-ryň 1-nji sütünini (1) sistemanyň azat çlenleriniň sütüni bilen çalşyrylyp alynan b-azat çlen.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1a_{12} \\ b_2a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

Ikinjisi bolsa, Δ-kesgitleýjiniň 2-nji sütünini bu azat çlenlar sütüni bilen çalşyrylyp alynan

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_1 \\ a_{21}b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

kesgitleýjilerdir.

Şeýlelikde (1) sistemanyň $\Delta \neq 0$ şerti kanagatlandyran halatynda ýeke-täk çözüwi bar bolup, ol (3) we (4) deňliklerden tapylýan deňlikler bilen kesgitlenilýän çözüwdir.

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad (5)$$

$$\Delta x_1 = \Delta_1 \ (3),\ \Delta x_2 = \Delta_2 \ (4) \qquad X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

(1) sistemanyň $\Delta \neq 0$ bolan ýagdaýynda bar bolan ýeke-täk çözüwiniň görkezilen görnüşde tapylyş usulyna Kramer düzgüni onuň tapylyş (5) formulalaryna bolsa, Kramer formulalary diýilýär.

Indi bolsa, 3 sany näbellileri bar bolan, 3 sany çyzykly deňlemeleriň sistemasyna seredeliň.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Onuň matrisasynyň $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$ (7) görnüşde ýazyljakdygy düşnüklidir. (6) sistemanyň 1-nji deňlemesini $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ sana, 2-nji deňlemesini $a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$ sana, 3-nji deňlemesini bolsa $a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$ sana köpeldip alynan deňlemeleri tarapma-tarap goşup, meňzeş näbellili çlenleri toplanymyzdan soňra

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\cdot \acute{Y}_1 =$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}ab_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33} \qquad (8)$$

Bu deňlikde çep tarapyndaky skobkanyň içindäki aňlatmany (7)-nji matrisanyň kesgitleýjisi diýip atlandyryp, hem-de ony görnüşünde belgiläp,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Onda $\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})$
(6) sistemanyň $\Delta \neq 0$ bolan ýagdaýynda, $ý_1$ näbellisine baha tapmak üçin (8) deňligiň onuň iki tarapyny hem $\Delta \neq 0$ sana bölmelidigi düşnüklidir. Şunlukda 3-nji tertipli Δ - kesgitleýjiniň kesgitlemesinden onuň hasaplanyş formulasynyň çylşyrymlydygyna garamazdan onuň hasaplanyş düzgüniň aňsatlyk bilen ýatda saklanyp bilinjekdigini belläliň. Hakykatdan hem Δ-kesgitleýji degişli (7) matrisanyň elementlerniň 3-3-den alynýan köpeltmek hasyllarnyň algabraýik jemi bolup, bu köpeltmek hasyllarnyň alamatlary indiki aşakda getiriljek iki sany düzgüne görä kesgitlenýändirler,

$$\text{I } (+) \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} \qquad \text{II } (-) \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Diýmek bu kesgitlemeden peýdalansak (8) deňligiň sag tarapa hem 3-nji tertipli kesgitleýji bolup onuň Δ-kesgitleýjiden birinji sütüniň ornuna (6) sistemanyň azat çlenleriniň sütüni ýazylan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

kesgitleýji bolýandygyny görmek kyn däldir.

Edil şuňa meňzeşlikde ý2 we ý3 näbelliler üçin hem adalatly bolan

$$\{\Delta \cdot X_2 = \Delta_2 \quad \text{we} \quad \Delta \cdot X_3 = \Delta_3\} \tag{9}$$

Bu ýerde deňliklere eýe bolarys.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{23} b_3 a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

Şeýlelikde (6) sistemanyň Δ-kesgitleýjisiniň 0-dan tapawutly bolan ýagdaýynda $(\Delta \neq 0)$ ýeketäk çözüwi bar bolup, ol çözüw (8) we (9) deňlikler den olaryň 2 taraplaryny hem bu Δ-sana bölmek bilen tapylýandyrlar. Ýagny

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \tag{10}$$

(6) sistemanyň $\Delta \neq 0$ bolanda bar bolan ýeketäk çözüwniň tapylmagynyň (10) formulalaryna Kramer formulalary bu düzgüniň özüne bolsa Kramer düzgüni diýlip aýdylýar. Ýokarda aýdylanlardan Kramer düzgünininiň 2 sany we 3 sany näbellileri bolan çyzykly deňlemeleriň kwadyratik sistemalaryny çözmäge diňe olryň degişli kesgitleýjileri 0-dan tapawutly bolan halatlarynda ulanylyp bilinýändiginden görýäris. Ýöne mysal işleneninde çözülmegi talap edilýän şeýle sistemanyň kesgitleýjisiniň 0-a deň bolup çykmagy bu sistemanyň kökdeşdäldigini aňladýan däldir. Ol diňe bu sistemanyň kesgitlenen däldigini (bu diýildigi sistema ýa kökdeş däldir ýa-da kökdeş halatynda kesgitlenmedikdir) aňladýandyr.

3. Çalşyrmalar we ornuna goýmalar

Geljekgi temalar öwrenilende tükenikli sandaky elementleri bolan köplükleriň häsýetlerine degişli käbir düşünjeleri hem-de tassyklamalary öwreneliň. Goý, bize erkin n sany elementleriň $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ köplügi berlen bolsun.biz-iň meselelermizde bu köplügüň elementleriniň tebigatynyň hiç kimi rol oýnama-ýandygy üçin biz seredilýän M köplük 1-nji n sany natural sanlaryň köplügi diýip kabul etjekdiris: Ýagny $M = \{1,2,...,n\}$ bolsun. Bu köplügiň elementlerni dürli usullar bilen ýerleşdirip ýazmak müňkindir. Mysal üçin : n=3 bolanda M ={1,2,3} bolup, onuň elementlerni

1,2,3; 1,3,2; 2,1,3;
2,3,1; 3,1,2; 3,2,1;

Ýaly dürli usullar bilen ýerleşdirip ýazmak müňkindir:

Kesgitleme: Berlen 1,2,…,n sanlaryň islendik tertipde ýerleşdirip, ýazylmagyna bu sanlardan çalşyrma diýlip aýdylýar, ýokarda getirlen mysaldaky 1,2,3 sanlaryň 6 sany dürli görnüşdäki ýazgylarynyň her biri bu sanlardan çalşyrmadyr. Indiki tasyklama birinji n sany natural sanlardan dürli çalşyrmalaryň mümkin bolanlarynyň sanyny bilmäge mümkinçilik berýändir:

Teorema: Birinji n sany 1,2,…,n natural sanlardan mümkin bolan dürli çalşyrmalaryň sany n! (n-faktorial) $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n$ köpeltmek hasylyna deňdir.

Subudy: 1-nji n sany natural sanlardan çaşyrmany umumy ýagdaýda $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (1) Bu ýerde i_s-leriň her biri 1,2,…,n sanlaryň haýsy hem bolsa birni kabul edip olaryň iki sany dürlisi birmeňzeş baha kabul edip bilýändäldir. Ýagny $k \neq l$ bolanda $i_k \neq i_l$ (l-el) görnüşde ýazylýandyr. Bu ýazgydaky i_1 – element n sany dürli usullar bilen saýlanyp biliner çünki ol 1,2,…,n sanlaryň islendik birini kabul edip bilýändir. Eger-de i_1 - elementiň bahasy belli bolsa, onda i_2 elemente derek 1,2,…,n sanlaryň arasynda i_1 tarapyndan baha der-egne kabul edilmedikleriniň (olaryň sany n-1) islendik biri alnyp biliner. Bu diýdigi i_2 elementiň (n-1) sany dürli usullar bilen saýlanylmak müňkin-çiliginiň bardygyny aňladýar: Şeýlelikde i_1 we i_2 elementler bilelikde $n\cdot(n-1)$ sany dürli usulda saýlanmak mümkinçiligine eýedirler.

Şu prossesi dowam etdirmek üçin ahyr soňunda (1) ýazgydaky soňky i_n elementiň diňe ýeketäk usul bilen saýlanylyp bilinýändigine eýe bolarys. <u>Bu diýildigi</u> (1) ýazgynyň $n\cdot(n-1)\ldots2\cdot1=n!$ sany dürli görnüşe eýe boljakdygyny alarys.***Teorema subut edildi.***

Kesgitleme: Çalşyrmada i we j elementler, $i>j$ kanagatlandyryp, i el-ement j – den öňürti gelse olar inwerssiýa (tertipsizlik) emele getirýärler diýilip aýdylýar.

Eger-de çalşyrmadaky inwersiýalaryň sany (ol i-harpy bilen belgilenýär) jübüt bolsa, çalşyrmanyň özüne hem jübüt tersine ýagdaýda täk çalşyrma diýilýär.

Mysal üçin: 4,1,2,3,5 çalşyrmadaky inwerssiýalaryň sanyny: $i=3+1+0+0=4$ jübüt bolanlygyna görä, bu çalşyrma hem jübütdir. Eger-de berlen çalşyrmada käbir iki sany elementlerinden galanlarny öňki orunlarynda saklap bu 2 elemenleriň bolsa özara orunlarynlaryny çalşyrsak täze bir çalşyrmany alarys. Soňky çaşyrma başdaky çalşyrmadan şol iki sany elementleriň transpozissiýalary netijesinde alnypdyr diýlip aýdylýar. Şol 2 elementlere bolsa, transponirlenýän elementler diýilýär.

Mysal üçin: 5,3,1,4,2 çalşyrmadan 2 we 3 elementleriň transpozissiýasy netijesinde alynandyr. Indiki häsýetleri belläp geçeliň.

Teorema: $n \le 2$ bolanda n elementden düzmek mümkin bolan ähli jübüt çalşyrmalaryň sany täk çalşyrmalaryň sanyna ýagny n!ň2 deňdir.

Teorema: Çalşyrmadaky geçirilýän islendik iki sany elementleriň transpozissiýasy onuň jübütligini üýtgedýändir. Indi 1-nji 4 sany natural sanlardan iki sany çalşyrmanyň birini beýlekisiniň aşagynda ýazyp, olary ýaý skobkalar bilen gurşalyň:

$\begin{pmatrix} 4123 \\ 2134 \end{pmatrix}$ bu 4-nji derejeli ornuna goýmanyň belgisi bolup, ol

4 2 2 -geçýär 1 1 geçýär. Ýa-da 1 öz ornunda saklanýar. 2 3 – e geçýär, 3 4-e geçýär diýlip okalýar. Kesgitlemeden görnüşi ýaly 4-nji derejeli ornuna goýma 1-nji 4 sany natural sandan çalşyrmadan edil şol sanlardan başga bir çalşyrma geçmekligi aňladýandyr. Başgaça aýdanyňda ol {1,2,3,4} sanlaryň köplügininiň öz-özüne özara bu belgili şekillendirmesidir. Edil şuňa meňzeşlikde n-nji derejeli ornuna goýmada kesgitlenýändir. Kesgitlemeden görnüşi ýaly ýokarda

berlen 4-nji derejeli ornuna goýma birnäçe usullar bilen ýazylyp berilmekleri mümkindir. Olaryň biri beýlekisinden sütünleriniň transpozissiýalary arkaly alnyp bilinýärler.

Mysal üçin: Ýokarda getirlen 4-nji derejeli ornuna goýmany indiki görnüşde ýazmak mümkindir.

$\begin{pmatrix} 3124 \\ 4132 \end{pmatrix}$ bu ýazgy ýokarda berileninden 1-nji we 4-nji sütünleriň transpozissiýalary arkaly alynýandyr. $E = \begin{pmatrix} 12...\eta \\ 12...n \end{pmatrix}$ Berlen n derejeli ornuna goýma n-nji derejeli tožedestwen ornuna goýma diýilip aýdylýar. Eger-de iki sany birmeňzeş derejeli A we B ornuna goýmalaryň A B köpeltmek hasylynyň olaryň yzygiderli ýerne ýetirmeklerinden hasyl bolýan şol derejedäki ornuna goýma bolýandygyny.

Mysal üçin:

$$A=\begin{pmatrix} 4132 \\ 2143 \end{pmatrix} \qquad we \qquad B=\begin{pmatrix} 1243 \\ 2134 \end{pmatrix}$$

bolanlarynda netije:

$AB = \begin{pmatrix} 4132 \\ 1234 \end{pmatrix}$ bolýandygyny hasaba alsak, bu E-toždestwen ornuna goýmanyň islendik A şonuň derejesi üçin deň derejeli ornuna goýma bilen, $E^{\cdot} A=A^{\cdot} E=A$ deňlikleri kanagatlandyrýandygyny aňsatlyk bilen göreris. Bu deňlikleriň adalatlydyklaryny ornuna goýmanyň kesgitlemesinden almak mümkindir. Sebäbi kesgitlemä görä, toždestwen ornuna goýmada ähli elementler öz orunlarynda ütgemän galýandyrlar. Şonuň üçinde A we E ornuna goýmalar yzygiderli ýerine ýetirlenlerinde olaryň tertibi hiç hili rol oýnamazdan netijede alynýan şekillendirme A ornuna goýmanyň aňladýan şekilendirmesi bilen gabat gelýändir.

Kesgitleme: A ornuna goýmanyň ters ornuna goýmasy A^{-1} diýilip, $A^{-1}=A^{-1\cdot} A=E$ deňlikleri kanagatlandyrýan ornuna goýma aýdylýar.

Onda ornuna goýmalaryň köpeltmesiniň birmeňzeş derejedäki ornuna goýmalary üçin kesgitlenýändigini nazara alsak A^{-1} derejedäki ornuna goýmanyň derejesiniň A-nyň derejesi bilen gabat gelmelidigini alarys:

Mysal: $A = \begin{pmatrix} 4132 \\ 2143 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2143 \\ 4132 \end{pmatrix}$ ornuna goýmanyň tersi A^{-1}; ornuna goýmadyr. Hakykatdan hem muny subut etmek üçin bize: $AA^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ deňlikleriň ýerne ýetýändiklerini görkezmek ýeterlikdir. Diýmek islendik ornuna goýmanyň aşaky hem-de ýokarky setirlerniň özara orunlaryny çalşyrmak üçin oňa ters ornuna goýmany almak mümkin eken.

$$A\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2143 \\ 2143 \end{pmatrix} = E$$

Kesgitleme: Eger-de ornuna goýmanyň aşaky hem-de ýokarky setirlerinde_bar bolan inwersiýalaryň umumy sany jübüt bolsa, oňa jübüt täk bolaýsa onuň özüne-de täk ornuna goýma diýilýär.
Ornuna goýmadaky inwersiýalaryň umu-my sanyny I harpy bilen belgiläp, ony kesgitlemä göää ýokarky setirindäki inwerisiýalaryň i_1 we aşaky setirindäki inwerisiýalaryň i_2 sanlarynyň jemi görnüşünde: Ýagny $I=i_1+i_2$ ýaly kesgitleýärler.

Mysal üçin: A ornuna goýma $A = \begin{pmatrix} 4132 \\ 2143 \end{pmatrix}$

$I = i_1+i_2=(3+1)+(1+0+1)=6$ bolanlygy üçin jübüt ornuna goýmadyr.
Ornuna goýmanyň n derejesiniň 2-den kiçi bolmadyk halatynda AB=BA deňligiň ýerne ýetmezligi mümkindir.

4.Islendik tertipli kesgitleýjiler olaryň ýönekeý häsýetleri

Islendik n-natural san üçin n-nji tertipli kesgitlenjini kesgitlemek üçin 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjileriň aňlatmalaryny jemiň alamatynyň üsti bilen ýazalyň.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum (-1)^s a_1\alpha_1, a_2\alpha_2,$$

Bu ýerde $\alpha_1\alpha_2$ $\overline{\quad 1,2}$ sanlardan käbir çalşyrma, $S-\begin{pmatrix}1,2 \\ \alpha_1\alpha_2\end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryň umumy sany bolup, jem alamaty ähli mümkin bolan, α_1,α_2 çalşyrmalar boýunça alynýandyr.

Edil şuňa meňzeşlikde

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= \sum (-1)^s a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_3\alpha_3$$

Bu ýerde $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 1,2,3$ sanlardan çalşyrmadyr;

$S-\begin{pmatrix}1,2,3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryň sany bolup, hem ähli mümkin bolan $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ çalşyrmalar boýunça alynýandyr. (2) we (3)-nji tertipli kesgitleýjileriň aňlatmalarynyň ýokarda berlen jem alamatynyň üsti bilen ýazgylaryndan alynýan umumy kanuna laýyklary n-nji tertipli kesgitleýjileriň kesgitlemesi üçin ulanalyň şol ýazgylara görä, (2) we (3)-nji tertipli kesgitleýjiler olaryň degişli matrisalarynyň dürli setirlerinden hem-de dürli sütünlerinden bir-birden element alynyp, düzülen iki sany ýa-da üç sany (degişlilikde) elementleriň köpeltmek hasyllarynyň ähli mümkin bolanlarynyň algebraik jemidir. Bu jemiň goşulysynyň alamaty bolsa, onuň indek-slerinden düzülen ornuna goýmanyň jübütdigine ýa-da täkdigine baglylykda (+) ýa-da (-) bolýandyr.

Goý bize n-nji tertipli kwadrat matrisa berlen bolsun.

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Kesgitleme: (1) matrisa degişli bolan. (ýada 1-nji matrisanyň kesgitleýlisi diýilip) n-nji tertipli kesgitleýji diýilip, her bir goşulyjysy bu matrisanyň dürli setirlerinden hem-de dürli sütünlerinden bir-birden element alynyp düzülen n-sany elementleriň köpeltmek hasyly bolan algabraik jeme aýdylýar.

Bu jemiň goşulyjylarynyň sany n! bolup, onuň her bir çleniniň alamaty kööeltmek hasylyny düzýän elementleriň indekslerinden

....

düzülen ornuna goýmanyň jübütdigine ýa-da täkdigine baglylykda (+) ýa-da (-) bolýandyr. Şeýle hem ýokarda aýdylan görnüşdäki köpeltmek hasyllarnyň ähli mümkin bolanlaryny bu jemde goşulyjy bolup, hyzmat edýändirler. Şeýlelikde (1) matrisa degişli kesgitleýjini hem (2)-nji we (3)-nji tertipli kesgitleýjilere meňzeşlikde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$$ görnüşinde belgilesek, ol ýokarda berlen

kesgitlemeden indiki görnüşde matematiki aňladylyp biliner.

$$\Delta = \sum (-1)^s a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 a_n\alpha_n;$$

Bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 1,2,…,n sanlardan çalşyrma.

$S - \begin{pmatrix} 1,2,...,n \\ \alpha_1\alpha_{2...}\alpha_n \end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryň sany.

$\sum$ - ähli mümkin bolan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ çalşyrmalary boýunça alynýandyr.

Indi n-nji tertipli kesgitleýjilere degişli ýönekeý häsýetleri öwreneliň.

Kesgitleme: $\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}a_{n1} \\ a_{12}a_{22}a_{n2} \\ a_{1n}a_{2n}a_{nn} \end{pmatrix}$ (1) matrisanyň setirlerini degişli sütünler edilip alnan matrisa (1) marisadan transponirlenip alnandyr diýilýär. (Soňky matrisa (1) matrisanyň transponirleneni hem diýilýär). Edil şuňa meňzeşlikde degişli düşünje kesgitleýji üçin hem berilýändir.

Häsiýet:1. Trasnsponirleme kesgitleýjini üýtgetmeýär bu diýildigi.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \overline{\Delta}=\begin{vmatrix} a_{11}a_{21}a_{n1} \\ a_{12}a_{22}a_{n2} \\ a_{1n}a_{2n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hakykatdan hem n-nji tertipli kesgitleýjiniň kesgitlemesine görä, Δ-nyň her bir $a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 ... a_n\alpha_n$ (2) (görnüşdäki her) çleni Δ-kesgitleýjide hem çlen bolup hyzmat edýändir. Şünki onuň her bir köpeljisi bu kesgitleýjide hem dürli setirlerde hem-de dürli sütünlerde ýerleşendirler. Bu diýildigi Δ-nyň her bir çleniniň $\overline{\Delta}$-da hem, hem-de tersine çlen bolýandygyny aňladýar.Onda bu çleniň Δ *we* $\overline{\Delta}$ kesgitleýjilerdäki alamatlarnyň hem gabat gelýändiklerini görkezmek galýar 2-nji çleniň Δ-daky alamaty ornuna goýmadaky $\overline{\Delta}$-ky alamaty bolsa, $\begin{pmatrix} 1,2...n \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \alpha_1,\alpha_2...\alpha_n \\ 1,2...n \end{pmatrix}$ (4) ornuna goýmadaky inwersiýalaryň sanlary bilen kesgitlenýändirler. Ýöne (3) we (4) ornuna goýmadaky inwersiýalaryň sanlary birmeňzeşdirler. Şünki olar biri-birinden setirlerniň ýerleşiş tertipli bilen tapawutlanýarlar. Bu diýildigi Δ *we* $\overline{\Delta}$ kesgitleýjileriň birmeňzeş goşulçulara eýe bolan algabraik jemleridiginden başgada olaryň bir meňzeş goşulyjylarynyň alamatlarnyň hem gabat gelýändiklerini aňladýandyr. Diýmek Δ *we* $\overline{\Delta}$ kesgitleýjiler biri-birine deňdirler.

Bellik: Bu subut edilen häsýetden kesgitleýjiniň setirlerniň hem-de sütünlerniň deňgüşlidikleri (deň hukuklydyklary) gelip çykýandyr. Şoňa gäde, kesgitleýjiniň setirlerne mahsus bolan häsýetleriň ählisi onuň sütünleri üçin hem-de dogrydyr. Şeýlelikde glejekde öwreniljek kesgitleýjiniň ýönekeý häsýetleri onuň setirleri üçin aýdylsada şol häsýetleriň sütünler üçin hem adalatlydyklarny hasaba almalydyrys.

Häsiýet:2. Diňe nol elementlerden durýan (ähli elementleri o-la deň) setiri özünde saklaýan kesgitleýji o-la deňdir. Hakykatdan hem Δ-nyň her bir (2) çleniniň dürli setirlerden hem-de dürli sütünlerden bir-birden element alnyp düzülen köpeltmek hasylydygna görä, ol diňe

0-l elementleri özünde saklaýan setirden hem bir elementi köpeliji görnüşünde saklaýandyr. Bu diýildigi (2)-nji köpeltmek hasylynyň 0-la deň boljakdygyny aňladýar. Onda seredilýän ýagdaýda Δ-ta kesgitleýji diňe 0-dan duryan goşuljylaryň. Bu bolsa onuň 0-la deňdigini aňladýar. Eger-de i-setiriň ähli elementleri 0-la deň bolsalar ýagny: $a_{i1} = a_{i2} = ... = a_{in} = 0$ bolsa onda kesgitleýjä görä,

$\Delta = \sum (-1)^s a_1 \alpha_1 a_1 \alpha_2 a_n \alpha_n = \sum (-1)^s 0 = 0.$ häýetiň subuduny aňladar.

Häsiýet:3. Kesgitleýjini islendik iki setirniň transpozisiýasy onuň diňe alamatyny ütgetýär. Hakykatdanda hem Δ-ta kesgitleýjiniň i we j setirlerniň özara orunlarny çalşyryp galan setirlerini bolsa öňki orunlarynda goýyp, alnan kesgitleýji Δ_0- görnüşinde belgilenen bolsun. (hakykatdan hem) kesgitleýjiniň kesgitlemesinden Δ-nyň her bir $a_1\alpha_1, a_2\alpha_2, a_n\alpha_n$ (2) çleni Δ_0-da-da çlen bolup hyzmat edýändir. (çünki onuň köpelijileri Δ-da-da dürli setirlerde hem-de dürli sütünlerde ýerleşendirler). Diýmek Δ *we* Δ_0 kesgitleýjiler meňzeş goşulyjylaryň algabraik jemleridir. Ýöne şol bir (2)-nji çleniň alamaty bu kesgitleýjilerde dürlüdir. Sebäbi i>j bolan halatynda (2)-nji Δ-da

$$\begin{pmatrix} 1,2...j...i...n \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_j...\alpha_i...\alpha_n \end{pmatrix}$$ (3) ornuna goýmanyň jübütligi bilen

kesgitlenilýän alamata Δ_0-da bolsa,

$$\begin{pmatrix} 1,2,...i...j...n \\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_j,\alpha_i...\alpha_n \end{pmatrix}$$ (4) ornuna goýmanyň jübütligi

bilenkesgitlenilýän alamata eýedir. Ýöne (3) we (4) ornuna goýmalar garşylykly jübütliklere eýedirler. ((3) we (4) ornuna goýmalarda aşaky setirleriň birmeňzeşdikleri i we j elementleriň transpozisiýalarynyň elementleriň ýerleşýän sütünlerine täsir etmeýänligindendir.) Diýmek Δ *we* Δ_0 birmeňzeş goşuljylaryň algabraýik jemleri bolup, meňzeş goşuljylar bu jemlerde garşylykly alamatlara eýedirler.

Häsiýet: 2 sany meňzeş setirleri bolan kesgitleýji 0-a deňdir. Hakykatdan hem goý Δ-da i we j-nji setirler birmeňzeş bolsunlar ýagny islendik k=1,2,…,n $a_{ik}=a_{jk}$ bolsun. Eger-de bu kesgitleýjide i-nji we j-nji setirleriň transpozisiýalaryny gejirsek onda (3) –häsiete görä, täze alnan Δ_0-berlen Δ-a garşylykly alamat bilen deňdir. Ýagny $\Delta_0=-\Delta$ 2-nji bir tarapdan meňzeş setirleriň transpozisiýalary netijesinde alnan täze kesgitleýji berlen Δ-kesgitleýjiniň özüne deň bolar. Ýagny $\Delta_0=\Delta$ onda soňky 2 deňlikleri deňeşdirmek bilen $\Delta=-\Delta$ bolmalydygyny taparys. Bu ýerden $2\Delta=0$ $\Delta=0$ deňlige eýe bolar.

Häsiýet:5 Eger-de kesgitleýjiniň bir setiriniň ähli elementlerini şol bir k hemişelik sana köpeltsek, onda Δ-kesgitleýjiniň özi hem bu k sana köpeldiler.

Ýagny $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ a_{i1}...a_{in} \\ a_{n1}...a_{nn}\end{vmatrix}$ *bolanda* $\overline{\Delta}=\begin{vmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ka_{i1}...ka_{in} \\ a_{n1}...a_{nn}\end{vmatrix}=k\cdot\Delta$

hakykatdan hem kesgitleýjiniň kesgitlemesine görä.

$$\overline{\Delta}=\sum(-1)^s a_1\alpha_1...(ka_i\alpha_i)...a_n\alpha_n=k\cdot\sum(-1)^s\cdot a_1\alpha_1...a_i\alpha_i...a_n\alpha_n=k\cdot\Delta$$

Bellik: Subut edilen häsýetden kesgitleýjiniň setiriniň ýa-da sütüniniň (ähli elementleriniň umumy köpeljisi kesgitlemäniň alamatynyň önüme çykarylyp alynýandygy gelip çykýandyr.)

Kesgitleme: Eger-de kesgitleýjiniň käbir setirleriniň ähli elementleri onuň başga bir setirlerniň degişli elementlerinden şol bir hemişelik sana köpeldilip alynýan bolsalar onda bu setirlere proporsional setirler diýilýär.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & 12 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ kesgitleýjide 1-nji we 3 setirler proporsiýonaldyrlar. Çünki 3 setiriň elementlerini 1-nji setiriň degişli elementlerinden 3 –e köpeldip, alyp bolýar.

Häsiýet:6 Proporsional setirleri bolan kesgitleýji 0-la deňdir. Hakykatdan hem eger-de Δ-nyň (her bir elementi) j-nji setrleriň her bir elementini onuň i-nji setiriniň degişli elementinden k sana köpeldip alynýan bolsa, ýagny $a_{jm}=k\cdot a_{im}$ deňlik her bir m nomer üçin dogry bolsa, onda ýokarda edilen bellige görä j setiriň ähli

elementleriniň k hemişelik köpeljisini kesgitleýjiniň alamatlarynyň öňüne çykarsak, onda bu kesgitleýjiniň özünde i-nji we j-nji setirler meňzeş bolarlar. Şoňa göräde bu kesgitleýji 0-la deňdir.
Häsiýet:7 Eger-de n-ji tertipli Δ-kesgitleýjiniň käbir mysal üçin i-nji setirniň ähli elementleri iki sany goşulyjylaryň jemleri ýagny $a_{ij}=b_j+c_j$, j=1,2,…,n (5) görnüşde aňladylyp, bilinýän bolsalar, onda Δ-nyň özi hem iki sany $\Delta^{/}$ *we* $\Delta^{//}$ n-nji tertipli kesgitleýjileriň jemi görnüşinde aňladylyp alynýandyr. Bu kesgitleýjileriň şol i-nji setirlerinden galanlary Δ-nyň degişli setirleri bilen gabat gelýändirler. Olaryň i-nji setirleri bolsa, birinde diňe b_j 1-nji goşulyjylardan beýlekisinde bolsa, 2-nji c_j goşylyjylaryndan durýandyr.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ b_1+c_1\ldots b_n+c_n & \\ a_{n1}\ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ b_1\ldots & b_n \\ a_{n1}\ldots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}\ldots & a_{1n} \\ c_1\ldots & c_n \\ a_{n1}\ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=\Delta^{/}+\Delta^{//}$$

hakykatdan hem n-nji tertipli kesgitleýjiniň kesgitlemesine görä,

$$\Delta=\sum(-1)^s a_1\alpha_1\ldots a_2\alpha_2\ldots a_i\alpha_i+a_n\alpha_n=\sum(-1)^s a_1\alpha_1\ldots a_2\alpha_2\ldots(b_{\alpha i}+c_{\alpha i})\ldots a_n\alpha_n=$$

$$=\sum(-1)^s a_1\alpha_1\ldots a_2\alpha_2\ldots b_{\alpha_i}\ldots a_n\alpha_n+\sum(-1)^s a_1\alpha_1\ldots a_2\alpha_2\ldots c_{\alpha i}\ldots a_n\alpha_n=\Delta^{/}+\Delta^{//}$$

Bellik: Bu häsiýet 2 sany goşuljylar üçin subut edilen hem bolsa, ol islendik tükenikli sandaky goşuljylar üçin hem orunlydyr.
Kesgitleme: Eger-de kesgitleýjiniň käbir setirniň Mysal üçin i-nji setirniň her bir a_{im} elementini galan setiriň degişli elementlerniň şol bir hemişelik sanlara köpeltmek hasyllarynyň jemi güşünde aňlatmak mümkin bolsa, ýagny şeýle bir $k_1,k_2,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_n$ hemişelik sanlar bor bolup, $a_{im}=k_1a_{1m}+k_2a_{2m}+k_{i-1}a_{i-1m}+$ $+k_{i+1}a_{i+1m}+\ldots+k_na_{nm}$ deňlik her bir m nomer üçin ýerine ýetýän bolsa, kesgitleýjiniň i-nji setiri onuň galan setirleriniň çyzykly kombinasiýasyndan durýar diýilip aýdylýar. Ýokardaky aňlatmamyzda käbir k sanlaryň 0-la deň bolmaklary hem mümkindir. (Hususan ählisiniň hem).
Häsiýet:8 kesgitleýjiniň käbir setiri onuň galan setirleriniň çyzykly kombinasiýasy bolsa, şeýle kesgitleýji 0-la deňdir. Bu häsiýetiň subudy (7) (6) (4) häsiýetlerden gelip çykýandyr.

Häsiýet:9 Eger-de kesgitleýjiniň 1 setirniň elementlerine onuň başga bir setirniň degişli elementlerini şol bir hemişelik k sana köpeldilip, goşulsa kesgitleýji üýtgemeýär. Ýagny

$$\begin{vmatrix} a_{11}\dots & a_{1n} \\ a_{i1}\dots & a_{in} \\ a_{j1}\dots & a_{jn} \\ a_{n1}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\dots & a_{1n} \\ a_{i1}+ka_{j1}\dots a_{in} & +ka_{jn} \\ a_{j1}\dots & a_{jn} \\ a_{n1}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

deňlik dogrydyr.

Bu häsiýeti subut etmek üçin ýazylan deňligiň sag tarapyndaky kesgitleýjiniň 2 sany onuň özüniň tertibindäki kesgitleýjileriň jemine deňdiginden olaryň i-nji
setirlerinden galanlarynyň bu kesgitleýjiniň degişli setirleri bilen gabat gelýändiklerinden hem-de bu goşuljylaryň biriniň i-nji we j-nji setirleriniň proporsionaldyklaryna görä, onuň 0-la deňdiginden peýdalanmak ýeterlikdir. Ýagny :

$$\begin{vmatrix} a_{11}\dots & a_{1n} \\ a_{i1}ka_{ji}\dots a_{in}k & a_{jn} \\ a_{j1}\dots & a_{jn} \\ a_{n1}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ a_{i1}\dots a_{in} \\ a_{j1}\dots a_{jn} \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ ka_{j1}\dots ka_{jn} \\ a_{j1}\dots a_{jn} \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ a_{i1}\dots a_{in} \\ a_{j1}\dots a_{jn} \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bellik: Bu häsýetde aýdylan k sanyň otrisatel bolmagynyň hem mümkindigine görä, bu häsiýeti kesgitlenýjiniň käbir setiriniň ýa-da sütniniň bir elementinden galanlarynyň, ählisiniň o-la öwrülmekleri üçin geçirlýän özgertmäni ýerine ýetirmäge ulanylmakda amatlydyr. Mysal üçin:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 34 \\ 0 & 1 & 25 \\ 6 & 7 & 14 \\ 7 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -13 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

5.Dürli tertipdäki minorlar. Algebraýik doldurgyçlar.

Goý bize n-nji tertipli Δ-kesgitleýji we k $1 \le k \le n-1$ san berlen bolsun.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n} \\ a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n} \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjide erkin k sany setirleri hemde k sany sunleri saýlap alyp olaryň kesişmesinde duran elementlerden matrissa düzsek onuň k-njy tertipli kwadrat matrissa boljakdygy düşnüklidir. Şeýle usul bilen alynan islendik k-njy tertipli kwadrat matrissanyň kesgitleýjisine berilen Δ-kesgitleýjiniň k-njy tertipli minory diýilýär. Mysal üçin: Δ-da ilkinji 2 sany setiri hem-de ilkinji 2 sany sütüni saýlap alsak, onda olaryň kesişmelerinde duran elementlerden. 2-nji tertipli kwadrat matrissany düzeris. $\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$

Onuň $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ kesgitleýjisi Δ-nyň 2-nji tertipli minorlarynyň biridir kesgitlemeden görnüşi ýaly Δ-nyň islendik a_{ij} elementi onuň birinji tertipli minory hasap edilip alynýar. (Bu kesgitleýjide 1 setir hem 1 sütün saýlanylyp alynandygyny aňladýar. Berlen k-njy tertipli minoryň elementleriniň duran (ýerleşen) setirlerini hem-de sütünlerini çyzanymyzdan soň Δ-nyň bir gezek hem çyzylmadyk elementlerinden (n-k)-njy tertipli kwadrat matrissany düzmek mümkindir onuň kesgitleýjisine bu k-njy tertipli M minoryň goşmaça (ýa-da dolduryjy) minory diýilýär we ol $M^{ň}(n-k)$ görnüşinde belgilenýär. Aslynda k-njy tertipli minoryň belgilemesi üçin M_k bilen belgiläp ulanylýandyr. Ýokarda mysal görnüşinde getirlen,

$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$ 2-nji tertipli minoryň goşmaça minory,

$M'_{(n-2)} = \begin{vmatrix} a_{33}a_{3n} \\ a_{n3}a_{nn} \end{vmatrix} - (n-2)$-nji tertipli kesgitleýjidir.

Hususan birinji tertipli $M_{ij}=a_{ij}$ minoryň (Δ-nyň a_{ij} elementiniň) goşmaça minory $M^{ň}_{ij}$ Δ-da i-nji setir hem-de j-nji sütün çyzanymyzdan soňçyzylman galan elementlerden düzülen (n-1) -nji tertipli kesgitleýjidir. Mysal üçin:

$M'_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}a_{2n} \\ a_{32}a_{3n} \\ a_{n2}a_{nn} \end{vmatrix}$ kesgitleýjidir kesgitleýjiniň elementleriniň algebraik

dolduryjy diýilip (A_{ij}) onuň $(-1)^{i+j}$ alamat bilen alynan goşmaça $M^{ň}_{ij}$ minoryna aýdylýar. Ýagny $A_{ij}=(-1)^{i=j}M^{ň}_{ij}$.

Eger-de Δ-nyň k-njy tertipli minory onuň $i_1,i_2,\ldots,i_k$ nomerli setirlerinde hem-de $j_1,j_2,\ldots,j_k$ nomeri sütünlerinde ýerleşen bolsa, onda onuň algebraik doldurgyjy diýlip onuň $(-1)^{sm}$ (bu ýerde $S_n=(i_1+i_2+\ldots+i_k)+(j_1+j_2+\ldots+j_k)$), Şol alamat bilen alynan goşmaça minoryna aýdylýar.

Teorema: Δ-kesgitleýjiniň islendik k-njy tertipli minorynyň onuň algebraýik doldurgyjyna köpeltmek hasyly bu kesgitleýjiniň käbir çlenlerinde duryan algebraýik çemdir. Bu çemiň goşuljylarynyň alamatlary hem olaryň kesgitleýjidäki alamatlary bilen gabat gelýändirler.

Subudy: Ilki bilen teoremany k-njy tertipli **M** –minoryň Δ-nyň çep ýokarky burçunda ýagny onuň birinji k setirlerinde hem-de birinji k sütünlerinden ýerleşen ýagdaýy üçin subut edeliň:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k}\ldots a_{1,k+1}\ldots a_{1n} \\ a_{k1}\ldots a_{kk}\ldots a_{k,k+1}\ldots a_{kn} \\ a_{k+1,1}a_{k+1,k}a_{k+1,k+1}a_{k+1,n} \\ a_{n1}\ldots a_{nk}\ldots a_{n,k+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

M k-njy tertipli minoryň islendik çlenini ýazsak, ol: $a_{1_{\alpha_1}}\ a_{2_{\alpha_2}}\ a_{k_{\alpha_k}}$ (1) görnüşde ýazylýar. Bu ýerde $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k-1{,}2\ldots k$ sanlardan çalşyrmadyr. Bu çleniň alamaty $(-1)^l$, $L-\begin{pmatrix}1{,}2\ldots k \\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_k\end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryň umumy sany, bolar. Edil şuňa meňzeşlikde **M**^{ň} goşmaça minoryň erkin $a_{k+1},b_{k+1}\cdot a_{k+2},b_{k+2}\cdot a_nb_n$ (2) çlenine alsak, (bu ýerde $\begin{pmatrix}b_{k+1},b_{k+2}\ldots b_n \\ k+1,k+2,n\end{pmatrix}$ sanlardan çalşyrmadyr.

Onuň alamaty $(-1)^{l'}$, bu ýerde $l'-\begin{pmatrix}k+1k+2\ldots n \\ b_{k+1}b_{k+2}\ldots b_n\end{pmatrix}$ ornuna goýmadaky inwersiýalaryň sany, bolar.

Biziň bu seredýän ýagdaýmyzda S_M :

$$S_M=(1+2+\ldots k)+(1+2\ldots k)=2(1+2\ldots k)=k(k+1)$$

Islendik biri jübüt bolsa, şol köpeltmek hasyl hem jübüt bolýar. S_M jübüt bolanlygyna görä, M minoryň algebraýik doldurgyjy.

Onuň $M^{ň}$ goşmaça bolen gabat geler. Şeýlelikde bizi M. $M^{ň}$ köpeltmek hasyly we bu algebraýik goşuljylarynyň alamatlary gyzyklandyrýar. M. $M^{ň}$ köpeltmek hasylynyň

$a_1\alpha_1 \quad a_k\alpha_k \quad a_{k+1}B_{k+1} \; a_nB_n$ (3) erkin çlenini alsak, onuň alamaty

$(-1)^l \cdot (-1)^{l'} = (-1)^{l+l'}$ bolar. Çünki $\begin{pmatrix} 12...k...k+1...n \\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k...B_{k+1}...B_n \end{pmatrix}$

ornuna goýmadaky inwersiýalaryň umumy sany hem α_k-laryň β_k-lar bilen hiçhili inwersiýa emele getirmeýändiklerine görä, (α-laryň hiç biri, β-laryň hiç birnden uly däldir) $\alpha_i \le k$ $\beta_i \ge k+1$ ikinji bir tarapdan (3) köpeltmek hasylynyň köpeljileri Δ-ta kesgitleýjide dürli setirlerde hem-de dürli sütünlerde ýerleşendirler. Onda bu köpeltmek hasyly Δ-ta kesgitleýjiniň käbir çlenidir. Bu diýildigi M· $M^{ň}$ köpeltmek hasyly käbir algebraýik jem bolup, onuň her bir goşuljysy Δ-nyň hem goşuljysydyr. Ýöne ýokarda edilen bellige görä, bu goşuljynyň Δ-ky alamatynyň hem $(-1)^{l+l'} - e$, deňdigi gelip çykýar. Şeýlekikde M· M köpeltmek hasyly Δ-ta kesgitleýjiniň käbir çlenlerinden duryan algebraýik jem bolup bu goşuljylaryň alamatlary olaryň Δ-ky alamatlary bilen gabat gelýändirler. Bu bolsa, teoremanyň tasyklamasynyň özidir.

Indi Δ-nyň M minory onuň islendik $i_1 < i_2 < ... < i_k$ nomerli setirlerinde hem-de $j_1 < j_2 < ... < j_k$ nomerli sütünlerinde ýerleşen bolsun. Setirleriniň hem-de sütünleri transpozissiýalarynyň ýardamynda bu minory kesgitleýjiniň çep ýokarky burçuna süşüreliň. Munuň üçin ilki bilen i_1 setiriň (i_1=1) –nji setir bilen transpozissiýasyny soňra (i_1-1-nji setiriň ornundaky) i_1-2-nji setir bilen we şuňa meňzeşlikde ol tä Δ-nyň 1-nji setirniň ornuny eýeleýänçä özünden ýokardaky ähli goňşy setirler bilen transpozissiýalaryny geçireliň. Munuň üçin umumy (i_1-1) sany goňşy setirleriň transpozissiýalarny geçirmek bolar. Soňra berlen kesgitleýjiniň i_2 setirniň özünden ýokardaky goňşy setirler bilen yzly yzyna (i_2-2) sany transpozissiýalaryny geçirip, onuň kesgitleýjiniň 2-nji setirniň ornuny eýelemegini gazanarys. Şu prosessi dowam etdirmek bilen ahyr soňunda (i_k-k) sany goňşy setirleriň transpozissiýalarynyň ýardamynda i_k-njy setiriň kesgitleýjiniň k-njy setirniň ornuny eýelemegini gazanarys. Şu gejirlen $(i_1-1)+(i_2-2)+...+(i_k-k)=i_1+i_2+...+i_k-(1+2+...+k)$ sany goňşy setirleriň transpozissiýalary **M** minory 1-nji k sany setirlere süşürer edil şuňa meňzeşlikde $j_1+j_2+\ldots+j_k-(1+2+\ldots+k)$ sany goňşy sününleriň geçiren transpozissiýalary M minory kesgitleýjiniň 1-nji k sany sütünlerne süşürer şeýlelikde Δ kesgitleýjide gejirlen $i_1+i_2+...+i_k+j_1+j_2+...+j_k-2(1+2+...+k)$ goňşy setirleriň hem-de goňşy sütünleriň transpozissiýalary täze alnan $\Delta^/$-kesgitleýjide M-k-njy tertipli minoryň ilkinji k setirlerde hem-de ilkinji k sütünlerde ýerleşmegni üpjün eder. Şu özgertmeler netijesinde M minoryň goşmaça $M^ň$ minorynyň ütgemeýändigi düşnüklidir. Çünki onuň onuň elementleri transpozisiýalarda goltaşmaýarlar, hem-de goňşy sütünleriniň transpozissiýalarynyň ýerne ýetirýändiklerine görä onuň setirleriniň hem-de sütünleriniň başdaky tertipleri hem saklaýandyr, teoremanyň subut edilen bölegne görä, $M \cdot M^ň$ köpeltmek hasyly $\Delta^/$-kesgitleýjiniň käbir çlenleriniň algebraýik jemi bolup, bu jemiň her bir goşuljysynyň alamaty onuň $\Delta^/$-däki alamaty bilen gabat gelýändir ýöne kesgitleýjiniň ýönekeý häsýetlerinden onuň islendik iki setirniň transpozissiýasy diňe kesgitleýjiniň alamatyny ütgedýändigine görä, täze alnan $\Delta^/$-kesgitleýjiniň öňki Δ-dan $(-1)^{S_M}-2(1+2+...+k)=(-1)^{S_M}$ sana köpeltmek bilen alnyp bilinjekdigi bellidir. Şeýlelikde $(-1)^{S_M}\cdot M\cdot M^/$ köpeltmek hasyly (bu bolsa, Δ-nyň M minorynyň özüniň algabraýik doldurgyjyna köpeltmek hasylydyr) Δ-ta kesgitleýjiniň käbir çlenleriniň algebraik jemidir. onuň her bir goşuljysynyň alamaty bu goşuljynyň Δ-ta kesgitleýjiniň düzümidäki alamaty bilen gabat gelýändir.

$$\Delta^/=(-1)^{S_M}\Delta .$$

6.Kesgitleýjileri hasaplamak (kesgitleýjini setiri boýunça dagytmak; Laplas teoremasy)

Islendik n natural san üçin n-nji tertipli Δ-ta kesgitleýjini aňladýan 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjileriňkä meňzeş aňlatmalary ýazmaklygyň anyk düzgüni ýokdyr.

Emma ýokary tertipli kesgitleýjileriň hasaplanmagy üçin olaryň kesgitlemesinden ugur alyp, onuň aňlatmasyny ýazyp,şol aňlatma göräde, bu kesgitleýjiniň bahasyny hasaplamak mümkinjiligi bar bolsada, ol oňaýsyz usuldyr. Şonuň üçinde ýokary tertipli ksgitlýjileri hasaplamaklygyň düzgüni öwrenmek ähmiýete eýedir. Goý bize n-nji tertipli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{i1}a_{i2}...a_{in} \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$$ kesgitleýji berlen bolsun we i $1 \le i \le n$ (1 bilen n arasyndaky erkin bir nomer bolsun).

Bu i-nji setiriň ähli elementleriniň olaryň algebraýik doldurgyçlarna köpeltmek hasyllarna seredeliň.

$$a_{i1} \cdot A_{i1}, \qquad a_{i2} \cdot A_{i2}, \qquad a_{in} \cdot A_{in} \qquad (1)$$

geçen temada subut edilen teoremadan bu köpeltmek hasyllarynyň her biri Δ-kesgitleýjiniň käbir çlenleriniň algebraýik jemi bolup, ol goşuljylaryň alamatlary hem olaryň Δ-daky alamatlary bilen gabat gelýändir. (Biz bu ýerde her bir a_{im}, $1 \le m \le n$ elementiň Δ-nyň 1-nji tertipli minorylygyndan ugur alýarys). Eger-de 1-nji (1) sistemadaky köpeltmek hasyllarynda bar bolan, algebraýik doldurgyçlary degişli goşmaça minorlar bilen çalşyrsak hem-de her bir goşmaça minoryň (n-1)-nji tertipli kesgitleýjini nazara alsak bu köpeltmek hasyllarynyň her biri degişli alamatlary bilen alnan elementiň goşmaça minoryna köpeltmek hasylyna öwrilen we ol köpeltmek hasyllaryň her biri Δ-nyň (n-1) ! çlenleriniň algebraýik jemi bolar. $a_{ik}A_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k} \cdot M_{ik}^{/} = (-1)^{i+k} a_{ik}M_{ik}^{/}$

2-nji bir tarapdan (1) sistemanyň 2-sany dürli köpeltmek hasyllary birmeňzeş çlenleri saklaýan algebraýik jemler däldir.

Hakykatdan hem Mysal üçin : $a_{i1}A_{i1}$ *we* $a_{i2}A_{i2}$ köpeltmek hasyllaryna seretsek olaryň i-nji setirinden biriniň a_{i1} elementi özünde saklaýan Δ-nyň käbir çlenleriniň algebraýik jemidigne beýlekisiniň bolsa, bu setirden a_{i2} elementi özünde saklaýan Δ-nyň käbir çlenleriniň algebraýik jemdigini alarys kesgitlemä görä, kesgitleýjiniň her bir jileniň her setirden hem-de her sütünden bir-birden element alnyp düzülen n sany elementleriň köpeltmek hasylydygy görä, bu 2 sany köpeltmek hasyly meňzeş çlenleri özünde saklap bilmezler. Diýmek (1) sistemanyň her bir köpeltmek hasylnyň Δ-nyň (n-1)! sany goşulyjylarynyň algebraýik jemdigine hem-de ol köpeltmek hasyllarynyň sanynyň n – e deňdigini we ýokarda bellenilen bellige görä, bu köpeltmek hasyllarynyň 2 sany dürlisiniň Δ-nyň şol bir çleni saklap bilmeýänligine görä n-nji tertipli Δ-kesgitleýjiniň n! sany goşuljylarynyň her biri bu köpeltmek hasyllarynyň birine we diňe birine girip bilýändigini alarys (şunlukda Δ-nyň ähli n! sany goşulyjylary bu köpeltmek hasyllarynyň goşuljylar bolup girýändirler) diýmek indiki deňligi alarys

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in},$$

$$\forall_i (1 \le i \le n) \qquad (2)$$

2-nji formula kesgitleýjini i-nji setiri boýunça dagatmagyň formulasy diýip aýdylýar. Şeýlelikde subut edilen gatnaşykdan (teoremany setiri boýunça) kesgitleýjini subudy boýunça dagytmagyň teoremasy diýilýän indiki tasyklamany alarys.

Teorema: Kesgitleýjiniň islendik setirniň ähli elementleriniň özleriniň algebraýik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi bu kesgitleýjiniň özüne deňdir : Ýagny islendik i nomer üçin

$$\forall 1 \le i \le n \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad \text{k 1-den n-e çenli.}$$

Edil şuňa meňzeş tassyklama kesgitleýjiniň sütünleri üçin hem dogrydyr. Bu ýagdaýda alynýan fomulany ýagny $\forall 1 \le m, \le n$

nomer üçin $$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{im}A_{im}$$

i 1-den n-e çenli deňligi kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyň formulasy diýip atlandyrýarlar. Bu alynan furmulalardan görnüşi ýaly n-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamaklyk birnäçe (n-1)-nji tertipli kesgitleýjileri hasaplamaklyk bilen çalşyrylýandygyny görýäris. Şunlukda saýlanyp alynan setirde ýa-da sütünde (saýlanan) 0-la deň elementleriň sany näçe köp bolsa, şonçada bu formulany ulanmak oňaýlydyr. Sebäbi 0-la deň bolan elementleriň algebraýik doldurgyçlaryny hasaplamaklygyň zerurlygy ýokdur. Şunuň üçinde bu teoremany ulanyp kesgitleýjini hasaplamaga başlamazdan öňürti kesgitleýjiniň ýönekeý häsiýetlerini ulanmak bilen onuň käbir setiriniň ýa-da sütüniniň mümkin boldugyça köp elementlerini 0-la öwürmäge çalyşýarlar. Kesgitleýjini setiri boýunça dagytmagyň teoremasyny özünde hususy hal görnüşinde saklaýan Laplas teoremasy ady bilen belli indiki tassyklamany subutsyz getireliň.

Teorema: (Laplas teoremasy). Goý n-nji tertipli Δ kesgitleýjide erkin k $\left(1 \le k \le n-1\right)$ setir (ýa-da k sany sütün) saýlanyp alynan bolsun.Onda bu saýlanyp alynan setirlerde (ýa-da sütünlerde) düzmek mümkin bolan ähli k-njy tertipli minorlaryň özleri algebraýik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi bu kesgitleýjiniň özüne deňdir.

7. Käbir hususy görnüşdäki kesgitleýjileri hasaplamaklygyň düzgünleri

1.Eger-de kesgitleýjiniň baş diagonalyndan bir tarapda ýatan elementleriň ählisi 0-a deň bolsa, OA kesgitleýji baş diagonalyň elementleriň köpeltmek hasylyna deňdir.

Ýagny,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ 0 & a_{22}...a_{2n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot ... \cdot a_{nn}.$$

Bu düzgüni matematiki induksiýanyň usulundan peýdalanyp, aňsatlyk bilen subut edip bileris. Hakykatdan hem aýdylan tasyklama 2-nji tertipli kesgitleýji üçin dogrydyr.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}0 = a_{11}a_{22}$$

Bu tasyklama tertibi n-1-e çenli bolan ähli kesgitleýjiler üçin dogry hasap edip, (ýerne ýetýär hasap edip), onuň n-nji tertipli kesgitleýji üçin hem adalatlydygyny gö rkezeliň. (Induktiw talap diýilýär) hakykatdan hem berlen kesgitleýjiniň onuň 1-nji sütüni boýunça

dagytmak $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ 0 & a_{22}...a_{2n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & ...a_{2n} \\ 0 & a_{33}...a_{3n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix}$ deňlik alynar.

Induktiw talaby deňligiň sag tarapyndaky (n-1) –nji tertipli kesgitleýji üçin ulansak

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}...a_{2n} \\ 0 & a_{33}...a_{3n} \\ 0 & 0...a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}...a_{nn}$$

deňlik alynar we ol öň ýanyndaky deňlik bilen tasyklamany subudyny berer.

2.Wandermond kesgitleýjisi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1...1 \\ a_1 & a_2...a_n \\ a_1^2 & a_2^2...a_n^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1}...a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j\le i\le n} (a_i - a_j)$$

Ähli mümkin bolan tapawutlaryň köpeltmek hasylyna deňdir. Hakykatdan hem tassyklama 2-nji tertipli kesgitleýji üçin ýerne ýetýändigini görmek aňsatdyr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Onda bu tassyklama tertibi (n-1)-e çenli bolan ähli Wandermond kesgitleýjileri üçin adalatly diýip hasap edip, (induktiw talap) onuň n-nji tertipli Wandermond kesgitleýjisi üçin hem dogrudugyny görkezeliň. Bu ýagdaýda aýdylan tassyklamanyň matematiki induksiýa usulunyň ýardamynda subudy ýerne ýetirildigi bolardy onda berlen n-nji tertipli Wandermond kesgitleýjisiniň 2-nji setirinden onuň 1-nji setirini a_1 –e köpeldip aýyryp, 3-nji setirden bolsa, 2-nji setirnini a_1-e köpeldip aýyryp, we şuňa meňzeşlikde ahyr soňunda iň soňky setirinde onuň öň ýanyndaky setirini a_1-e köpeldip aýyrmak bilen alarys.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & a_2 \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_n^2 \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} \dots a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & a_2 - a_1 a_n - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 \cdot a_2 a_n^2 - a_1 \cdot a_n \\ 0 & a_2 - a_1 \cdot a_2^2 a_n^3 - a_1 \cdot a_n^2 \\ 0 & a_2^{n-1} a_1 a_2^{n-2} a_n^{n-1} a_1 a^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}^{/} = M_{11}^{/} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 \dots a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) \dots a_n(a_n - a_1) \\ a_2^2(a_2 - a_1) \dots a_n^2(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \dots a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ a_2 & a_3 \dots a_n \\ a_2^2 & a_3^2 \dots a_n^2 \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} \dots a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot \prod \left(a_i - a_j\right) =$$

$$= \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_j) \cdot \prod \left(a_i - a_j\right) = \prod \left(a_i - a_j\right).$$

$$2 \le j < i \le n \qquad\qquad 2 \le j < i \le n \quad 1 \le j < i \le n$$

kesgitleýjiniň ýönekeý häsiýetlerinden hem-de subut edilen tassyklamadan

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} a_2^{n-1} \dots a_n^{n-1} \\ a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \\ a_1 a_2 \dots a_n \\ 11 \dots 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_j - a_i)$$ deňligiň ýerne ýetýändigini almak

kyn däldir. Eger-de n-nji tertipli Δ kesgitleýji $\begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_1^{/} \end{vmatrix}$, Bu

ýerde M_1-k-njy tertipli kwadrat matrisalar M_2 –(k$\times$n-k) ölçegli göniburçly matrisa. 0-(n-k$\times$k) ölçegli 0 elementden durýan o-l matrisa görnüşdäki kesgitleýji bolsun. Onda $\Delta = |M_1| \cdot |M_1^{/}|$ deňlik dogrydyr.

8.Islendik sandaky näbellileri bolan çyzykly deňlemeleriň kwadrat sistemasyny çözmäge Kramer düzgüni.

Goý bize n sany näbellileri bolan çyzykly deňlemeleriň kwadrat sistemasy.

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad +\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

berlen bolsun onuň näbellileriniň kafisentlerinden düzülen kesgitleýji

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2)$$

şerti kanagatlandyrýan bolsun. (0-a deň däl bolsun) j-nomer $1 \le j \le n$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan islendik nomer bolsun. 1-nji sistemanyň 1-nji deňlemesini A_{1j}-e 2-nji deňlemesini A_{2j}-e we şuňa meňzeşlere iň soňky n-nji deňlemesini bolsa, A_{nj}-e köpeldip alynan aňlatmalary goşup soňra birmeňzeş näbelli çlenleri toplaşdyranymyzdan soň alarys:

$0 \le r_1 < b$ (2) $= b_1A_{1J} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}$ (3)

$$\left(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj}\right)x_1 + \left(a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj}\right)\cdot x_2 =$$

$$= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj} \ (4) \quad \left(a_{1n}A_{1j} + a_{2n}x_nA_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj}\right)\cdot x_n$$

Bize öňden belli bolşuna görä, $\Delta - ny \ \Delta \ \Delta$ n-nji sütüni boýunça dagytsak.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots a_{nj}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Eger-de bu deňligiň sag tarapyndaky aňlatmada $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ sanlary $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sanlar bilen çalşyrsak onda alynýan $b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$ aňlatma $\triangle$ -kesgitleýjide onuň j-nji sütünleriniň $b_1,b_2,\ldots,b_n$ sanlaryň sütüni bilen çalşyrlyp kesgitleýjä deň bolar.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

(çünki bu elementleriň algebraik doldurgyçlary olaryň özlerine bagly däldirler) onda bu kesgitleýjini Δ_j diýip belgilesek

$\Delta_j = b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}$ bolar.

Bu diýildigi (4) deňligiň sag tarapynyň Δ_j kesgitleýjä (Δ -dan onuň j-nji sütüni (1) sistemany azat çlenleriniň sütüni bilen çalşyrlyp alnan kesgitleýjä) deňdigini aňladýar. 2-nji bir tarapdan bize belli bolan kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyň formulasyna görä, islendik k nomer üçin $1 \le k \le n$ $a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\ldots+a_{nk}A_{nk}=\Delta$ bolýandygy bellidir ýöne ýokarda ýazylan

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots b_2\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1A_{1j+}b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj} \quad (5)$$

deňlikde $b_1,b_2,\ldots,b_n$ sanlary Δ -nyň başga bir t-nji sütüniň ($m \neq j$)elementleri bilen çalşyrsak alynýan

$$a_{1m}A_{1j} + a_{2m}A_{2j} + \ldots + a_{nm}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1m}\ldots a_{1m}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2m}\ldots a_{2m}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ldots a_{nm}\ldots a_{nm}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

bolýandygyna eýe bolarys.Bu diýildigi (deňligiň çep tarapyny okasak) kesgitleýjiniň 1(m-nji) sütüniniň ähli elementleriniň onuň başga bir (j-nji) sütüniniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň 0-la deňdigini aňladýar. Şeýlelikde bu alynan gatnaşygy ýokarda getirlen kesgitleýjini sütüni boýunça dagytmagyň formulasy bilen birleşdirip, indiki görnüşde ýazmak mümkindir.

$$a_{1m}A_{1j}+a_{2m}A_{2j}+...+a_{nm}A_{nj}=\begin{cases}\Delta,\ j=m & bolanda\\ 0,\ j\neq m & bolanda\end{cases} \qquad (6)$$

Şeýlelikde (4) deňlik (6)-njy gatnaşyklary peýdalanmak bilen indiki görnüşde ýazylar.

$$\Delta\cdot x_j=\Delta_j \qquad (7) \qquad \Delta-\left(a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+...+a_{nj}\cdot A_{nj}\right)$$

Onda $\Delta\neq 0$ diýlip edilen şerte görä, bu deňlikden Ý$_j$ –näbelli üçin ýeketäk bolan $X_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ bahany taparys. $j(1\leq j\leq n)$ nomeriň erkindigine görä, $X_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ X_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},...,X_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$ (8) deňlikler bilen näbellilere ýeketäk bolan bahalar kesgitlenilýär.

(8) deňliklere <u>Kramer formulalary</u> diýilip aýdylýar. Hem-de Δ kesgitleýjisi 0-a deň bolmadyk n-sany näbellileri bolan çyzykly deňlemeleriň kwadrat sistemasyny çözmekligiň bu usulyna <u>Kramer düzgüni</u> diýilýär. (8) formulalar bilen tapylýan näbellileriň bahalarynyň (1) sistemanyň çözüwi bolýanolygyny görmek aňsatdyr. Hakykatdan hem (1)sistemanyň islendik i-nji $(1\leq i\leq n)$ deňlemesiniň çep tarapynda näbellileriň (8)deňlikler bilen tapylýan bahalaryny orunlaryna goýsak.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+...+a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta}=$$

$$=a_{i1}\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_nA_{n1}}{\Delta}+a_{i2}\cdot\frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+...+b_nA_{n2}}{\Delta}+...+a_{in}\frac{b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+...+b_nA_{nn}}{\Delta}=$$

$$\cdot\ =\frac{1}{\Delta}\{b_1\left(a_iA_{11}+a_{i2}A_{12}+...+a_{in}A_{1n}\right)+b_2\left(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+...+a_{in}A_{2n}\right)+$$

$$+...+b_i\left(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}\right)+...+b_n\left(a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+...+a_{in}A_{nn}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta}b_i\Delta=b_i.$$

Soňky deňlik näbellileriň Kramer formulalary boýunça tapylan bahalarynyň sistemasynyň i-nji deňlemesini kanagatlandyrýandygyny görkezýär. I-nomeriň erkindigine görä, bolsa ol bahalaryň sistemasynyň deňlemeleriniň ähli̇sini kanagatlandyrýandyklaryny görýäris. Indi çyzykly deňlemeler sistemasynyň hususy ýagdaýyna ýagny n-sany näbellileri bolan bir jynysly çyzykly deňlemeleriň kwadrat sistemasyna

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, i = 1,2,...,n \qquad (9)$$

seredeliň. Bu sistemanyň kofisentlerinden düzülen

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ a_{n1} a_{n2} ... a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

bolan halatynda onuň çözüwini tapmak üçin Kramer formulasyndan peýdalananmyzda olaryň sanowjylaryndaky Δ_i kesgitleýjileriniň i-nji sütünleriniň diňe 0-lardan durýandyklaryna görä, olaryň ählisi hem 0-la deň bolup, näbelliler üçin $ý_1=0, ý_2=0,\ldots,ý_n=0$ bolan bahalary taparys. Diýmek n näbellili birjynysly çyzykly deňlemeleriniň kwadrat sistemasynyň Δ kesgitleýjisi 0-la deň bolmasa, onda ol sistema ýeketäk 0 çozüwe eýedir.

Bellik: çyzykly deňlemeleriň kwadrat sistemasynyň kesgitleýjisi $\Delta \neq 0$ bolsa onda bu sistema ýeketäk çözüwe eýedir. We ony tapmak üçin Kramer formulalaryndan peýdalanmak mümkin. Kramer düzgüniniň ähmiýetli talapy diňe Δ-ni hasaplamak arkaly sistemanyň çözüwiniň ýeketäkdigi ýa-da däldigi hakynda netije çikaryp bolýar. (Birden $\Delta = 0$ bolaýsa, onda sistemanyň ýa çözüwiniň ýokdygy ýa-da onuň çözüwiniň ýeketäk däldigi hakynda netijä gelmeli bolarys) Kramer düzgüniniň näbellileriň n sany uly bolan ýagdaýynda n+1 sany n-nji tertipli kesgitleýjileri hasaplamaklygy talap edýändigine görä, onuň zähmeti köp talap edýän oňaýsyz usulygydygy gelip çykýandyr. (Şu manyda Gauss usuly has oňaýly hasap edilýär). Ol usul bilen sistemany çözmek n uly bolanda (näbellileriň sany köp bolanda) diňe ýekeje n-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamak bilen deňgüýşlidir.

9. Halka we meýdan

Islendik sanlaryň M köplügine halka diýlip aýdylýar,eger-de bu köplükden alnan islendik iki sanyň jemi, tapawudy hem-de köpeltmek hasyly ýene-de şu köplüge degişli sanlar bolýan bolsa.

Eger-de,M köplügiň islendik iki sany sanlarynyň jemi, tapawudy we köpeltmek hasyly bilen birlikde ondan alnan islendik sanyň nol däl sana bolan paýy hem şu köplüge degişli san bolsa, bu köplüge meýdan emele getirýär diýilip aýdylýar.

Mysal üçin :

a) Ahli bitin polozitel sanlaryň köplügi halkany emele getirmeýärler.Çünki,iki sany polozitel sanlaryň tapawudynyň bu köplüge degişli bolmazlygy hem mümkindir.

b) Ahli bitin sanlaryň köplügi halkany emele getirýändir.Çünki islendik iki sany bitin sanyň jemi,tapawudy hem-de köpaltmek hasyly ýene-de bitin sandyr.

c) Ahli bitin sanlaryň köplügi meýdan emele getirýän däldir. Çünki bu kölükden alnan bitin sanyň başga bir nul däl bitin sana gatnaşygynyň bitin san bolmazlygy mümkindir.

d) Ahli rasional sanlaryň toplumy meýdany emele getirýändir ler.

Hakykatdan hem, eger-de $\frac{p_1}{q_1}$ *we* $\frac{p_2}{q_2}$ $(p_2 \neq 0)$ rasional sanlar

üçin 1) $\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 \pm p_2 q_1}{q_1 q_2}$ -rasional

2) $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ - rasional

1) $\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2}$ -rasional.

Edil şuňa meňzeşlikde,islendik elementli M köplük üçin hem halka we meýdan düşüňjeleri kesgitlenýändirler.

Kesgitleme. Islendik elementleriň M köplüginde elementleri goşmak hem-de köpeltmek amallary kesgitlenip bu amallar orun çalşyrma, utgaşdyrma häsiýetlere eýe bolup, olar bilelikde paýlaşdyrma kanun bilen baglanşykly bolsalar, ýagny bu köplügiň islendik a,b,c elementleri üçin :

$a \cdot b = b \cdot a$

$$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$$

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

talaplar ýerine ýetýän bolsa,şeýle hem goşmak amaly üçin oňa ters bolan aýyrmak amaly hem bu köplükde kesgitlenen bolsa, onda M köplügine erkin elementleriöplügi diýilýär.

Kesgitleme. Eger-de erkin elementleriň halkasynda nul däl elmenti bölmek amaly hem kesgitlenen bolsa, onda oýdan emele getirýär diýilýär.

Teorema. Islendik sanlar meýdanynda rasional sanlar meýdany saklanýandyr.

10.Ters matrisa

Eger-de,n-nji tertipli A kwadrat matrisanyň kesgitleýjisi nuldan tapawutly bolsa,oňa aýratyn däl, tersine ýagdaýda bolsa aýratyn matrisa diýlip aýdylýar.

Bu kesgitlemeden hem-de kesgitleýjileri köpeltmegiň teorema-syndan birnäçe sany n-nji tertipli matrisalaryň köeltmek hasylynyň aýratyn däl bolmaklary üçin zerur hem ýeterlik şert bolup ol matrisalaryň her biriniň aýratyn däl matrisa bolmalydygy hyzmat edýändir.

$A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ -aýratyn däl bolmaklary üçin A_i -leriň her birleri aýratyn däldir.

$A_1, A_2, ..., A_k$ aýratyn däl bolsa, A_i -leriň her biri aýratyn däl we tersine.

$$0 \neq |A_1 A_2 ... A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... |A_k|$$

Şeýle hem birnäçe n-nji tertipli matrisalaryň köpeltmek hasylynyň aýratyn bolmaklygynyň zerur hem ýeterlik şertiniň olaryň hiç bolmanda biriniň aýratyn matrisa bolmaklygydygyny subut etmek aňsatdyr,ýagny:

2) $A_1 A_2 ... A_k$ -aýratyn

3) A_i -leriň hiç bolmanda biri aýratyndyr

tassyklamalaryň ekwiwalentdigi hem kesgitleýjileri köpeltmegiň teoremesyndan gelip çykýandyr.

Eger-de n-nji tertipli A matrisa üçin $AA^{-1} = E$, deňligi kanagatlandyryýan A^{-1} matrisasyna A -nyň sagyndan ters matrisasy diýilýär. Edil şuňa meňzeşlikde $A^{-1}A = E$ deňligi kanagatlandyryýan A^{-1} matrisa A-nyň çepinden ters matrisa diýilýär.

Eger-de, käbir B matrisa bir agtyň özünde A-nyň hem sagyndan, hem çepinden ters matrisalary bolup hyzmat edýän bolsa, ýagny, (1) $B \cdot A = A \cdot B = E$ deňlikler ýerine ýetýän bolsa, onda B matrisa A-nyň ters matrisasy diýilýär we ol A^{-1} görnüşde belgilenýär.

Ters matrisanyň kesgitlemesindäki ulanylan E birlik matrisa islendik A berlen tertipdäki matrisa bilen EA=AE=A (2) deňlikleri kanagatlandyryýan ýeke -täk matrisadyr.

n-nji tertipli A matrisa aýratyn bolan halatynda onuň sagyndan hem,çepinden hem ters matrisasy ýokdur.Bu halatda ters matrisa hakynda asla gürrüň hem bolup bilmez.

Hakykatdan hem, aýratyn A matrisanyň sagyndan tersiniň, ýagny $AA^{-1} = E$ deňligi kanagatlandyryýan A^{-1} derejeli matrisanyň ýokdugyny görkezeliň. $AA^{-1} = E$ deňlikde kesgitleýjileri köpeltmegiň teoremasyny ulanyp taparys :

$$0 = |A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

Bu alnan mümkin däl deňlik biziň aýratyn matrisa üçin sagyndan ters matrisanyň bardygy hakyndaky eden gümanymyzyň hädogrudygyny görkezýär.

Indi n-nji tertipli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa aýratyn däl $(\Delta = |A| \neq 0)$ bolanda onuň ters matrisasyny hasaplamagyň formulasyny getireliň. Bu matrisanyň elementleriniň algebraik doldurguçlaryndan düzülen :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}...A_{1n} \\ A_{21}A_{22}...A_{2n} \\ .... \\ A_{n1}A_{n2}...A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa A matrisanyň özara matrisasy diýilýär.A-nyň ters matrisasyny A^* matrisany köpeltmek bilen ýagny :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}A^* = \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}...A_{n1} \\ A_{12}A_{22}...A_{n2} \\ .... \\ A_{1n}A_{2n}...A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & ... & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & ... & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ .... & & & \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & ... & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (3)$$

formula görä hasaplanylýar.

Bellik. Berlen aýratyn däl matrisanyň ters matrisasy ýeke-täkdir.

Bellik.Mysal işlenende ilki bilen berlen matrisanyň aýratyn däldigine göz ýetirmelidiris.Eger-de, ol aýratyn bolaýsa,onuň ters matrisasy ýokdur.

Berlen matrisa aýratyn däl bolan halatynda bu matrisanyň elementleriniň algebraik doldurguçlaryny tapyp soňra olary (3) formulanyň deňlikleriniň haýsy hem bolsa birinde goýýarys.Ters matrisa düşünjesi käbir matrisa deňlemelerini çözmekde hem ulanmak mümkindir.Hakykatdan hem,eger-de A,B matrisalar n-nji tertipli bolup olardan A aýratyn däl bolanda $AX = B \; weYA = B$ görnüşli deňlemeleri çözmek üçin A^{-1} ters matrisanyň şerte görä barlygyndan peýdalanyp.

$X = A^{-1}B \; we \; Y = BA^{-1}$ formulalara görä amala aşyrylyp biliner. Ol formulalar berlen deňlemeleriň iki tarapyny hem A^{-1} matrisa degişlilikde çepinden hem-de sagyndan köpeltmek bilen alynýandyr.

11. Çyzykly deňlemeleriň kwadrat ulgamyny çözmegiň matrisa usuly

Ýokarda kesgitlenilen kwadrat matrisalary köpeltmegiň düzgüni gönüburçly matrisalar üçin hem käbir şertleriň ýerine ýetmeginden ulanylýandyr.

Eger-de, $A(kxn)$ *we* $B(lxm)$ gönüburçly matrisalar berlen bolsa, AB köpeltmek hasylynyň kesgitlenen bolmaklygy üçin birinji A köpelijiniň sütünleriniň sany n,ikinji B köpelijiniň setirleriniň l sanyna deň bolmalydyr. Şunlukda alynýan matrisanyň setirleriniň sany A-nyň setirleriniň k sanyna, sütünleriniň sany bolsa B-niň sütünleriniň m sanyna deňdir.

Indi näbellileriň koeffisentlerinden dýzýlen kesgitleýjisi noldan tapawutly bolan n sany näbellileri saklaýan çyzykly deňlemeleriň

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

kwadrat sistemasyny çözmekligiň matrisa usulyny öwreneliň

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

belgilemeleri girizmek bilen berlen bu sistemany $AX = B$ (2) görnüşde ýazyp bileris.

$\Delta = |A| \neq 0$ bolandygyna görä geçen temada edilen bellikden ikinji matrisa deňlemäniň çözüwiniň $X = A^{-1}B$ (3) formula görä tapylyp bilinýändigini alarys.Onda ters matrisany hasaplamagyň formulasyndan peýdalanmak bilen (3) deňlikden

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \dots\\ \Delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\Delta_1}{\Delta}\\ \frac{\Delta_2}{\Delta}\\ \dots\dots\\ \frac{\Delta_n}{\Delta}\end{pmatrix}$$ (bu ýerde $\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k - \Delta$ kesgitleň i-nji sütünininiň (1) sistemanyň azat çlenleriniň sütüni bilen çalşyryp alnan Δ_i kesgitleýjiniň bu i-nji sütüni boýunça dagytmasydyr).

Soňky alnan deňlikde iki matrisanyň deňliginiň kesgitlemesinden peýdalanmak bilen (degişli elementleriň deň bolmaklaryndan)

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (4)$$

Bu alnan deňlikler (1) sistemanyň näbellilerine kesgitli bahalary bermek bilen onuň ýeke-täk çözüwie eýedigini aňladýandyrlar.Şeýle hem bu deňlikler Kramer formulalarynyň hut özüdir.

12. Köpçlenler halkasy

X näbelliden $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ (1) görnüşdäki aňlatma n tertipli deňleme diýilýär.

Bu deňlemäniň çözüwini tapmak ony kanagatlandyrýan X näbelliniň ähli bahalaryny tapmakdyr.Bu deňlemäni çözmekligi adatça onuň çep tarapyny

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0$$

diýip belgilesek,bu $f(x)$ aňlatma n derejeli köpçlen diýilýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly n=0 bolanda a sana nul derejeli köpçlen hökmünde garalýandygy gelip çykýandyr.Şeýle hem, nul san hem köpçlen hökmünde seredilip ol derejesi kesgitli bolmadyk ýeke-täk köçlendir.

Kesgitlemedäki a_i *sanlara* $f(x)$ köpçleniň koeffisentleri diýilýär.

Eger-de, $f(x)$ köpçlen berlen birlikde başgada bir

$$g(x) = b_0x^s + b_1x^{s-1} + \dots + b_{s-1}x + b_s, \quad b_0 \neq 0$$

köpçlen berlen bolsa, onda $n \geq s$ bolanda olaryň jemi diýilip n-den uly bolmadyk

$$f(x) + g(x) = d_0 x^n + d_1 x^{n-1} + ... + d_{n-1} x + d_n$$

köpçlene düşünilýändir.Şunlukda $d_i = a_i + b_i$, $i = \overline{0,n}$ deňlik bilen kesgitlenilýän bolup,n>s bolanda $b_{s+1} = b_{s+2} = ... = b_n = 0$.

Biz şu kesgitlemede hem-de geljekde birmeňzeş derejeleriň öňündäki koeffisentleri gabat gelýän köpçlenler diýip düşunjekdiris.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly n=s bolanda $f(x) + g(x)$ jemiň derejesiniň n-den kiçi bolmagy hem mümkindir.

$g(x)$ *we* $f(x)$ köpçlenleriň köpeltmek hasyly diýlip $g(x) \cdot f(x)$ görnüşli belgilenýän we köpelijiler näbellileriň derejeleriniň artýan tertibinde ýagny,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \ a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_s x^s, \ b_s \neq 0$$

Yazylan ýagdaýynda

$$f(x) g(x) = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + ... + \theta_{n+s} x^{n+s}$$

n derejeli ýazylan deňlemä aýdylýar.Bu kesgitlemeden

$$\theta_0 = a_0 b_0, \theta_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \theta_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$f(x)$ köpçlene garşylykly köpçlen diýilip :

$-f(x) = -a_0 - a_1 x - ... - a_n x^n$ görnüşdäki köpçlene aýdylýar.

Bu ýagdaýda $f(x)$ bilen muňa garşylykly bolan $-f(x)$ jeminiň nul köpçleni ýagny, $f(x) + (-f(x)) = 0$ deňligiň ýerine ýetýändigi aýdyňdyr.

Bu kesgitlemeden $f(x)$ köpçlenden $g(x)$ köpçleni aýrylanda alynýan,olaryň tapawudy bolan $f(x) - g(x)$ köpçleniň $f(x)$ we $g(x)$-a garşylykly bolan $g(x)$ köpçlenleriň $f(x) + (-g(x))$ jemi görnüşinde hasaplanyp bilinjekdigi gelip çykýandyr.Şeýlelikde,ähli köpçlenleriň köplüginde olary goşmak hem-de köpeltmek amallary bilen birlikde goşmak amalyna ters bolan aýyrmak amalynyň hem kesgitlenendigi gelip çykýandyr.

Kesgitlemä görä köpçlenleri goşmak hem-de köpeltmek amallarynyň kommutatiw,assossiýatiw häsiýetleri kanagatlandyrmak bilen birlikde disturbutiw kanun bilen baglanşyklydyklary hem gelip çykýandyr.Diýmek, ähli köpçlenleriň köplügi halkany emele getirýändir.

Iki sany nul däl köpçlenleriň paýynyň elmydama köpçleni bermeýändigini hasaba alsak,köpçlenler köplüginde bölmek amalynyň kesgitlenmeýändigi gelip çykýandyr.Bu diýildigi köpçlenleriň köplüginiň halkany emele getirmegi bilen birlikde meýdany emele getirmeýändigi gelip çykýandyr.

Indiki tassyklama köpçlenler üçin galyndyly bölünmegiň algoritmi ady bilen meşhurdyr.

T Islendik $f(x)\, we\, g(x)$ köpçlenler üçin ýeke-täk kesgitlenilýän $q(x)$ *we* $r(x)$ köpçlenleri bar bolup, $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ (2) deňlik ýerine ýetýändir.Bu ýerde $r(x)$ ýa nula deňdir ýa-da ol derejesi $g(x)$-yň derejesinden kiçi köpçlendir ;

(2) deňlikdäki $q(x)$ köpçlenine $f(x) - y\ g(x)$-a bölenimizde ýetýän paý, $r(x)$-a bolsa bu bölmedäki galýan galyndy diýilýär.

13. Galyndyly bölmegiň algoritmi

Teorema1: Islendik f(ý) we g(ý) köpçlenler üçin ýeketäk kesgitlenilýän ş(ý) we r(ý) köpçlenleri bar bolup olardan r(ý) ýa 0-a deňdir, ýa-da g(ý)-iň derejesinden kiçi derejeli köpçlen bolup f(ý)=g(ý)·ş(ý)+r(ý) (*) deňlik ýerine ýetýändir.

Bu deňlikde ş(ý) köpçleni f(ý) köpçleni g(ý) köpçlene bölünende ýetýän paý. r(ý) bolsa bu bölünmedäki galyndy diýlip aýdylýar.

Bu tassyklamany subut etmek üçin ilki bilen aýdylan gatnaşygy kanagatlandyrýan ş(ý) hem-de r(ý) köpçlenleriň ýeketäk kesgitlenýändiklerini, soňra bolsa şeýle köpçlenleriň bardyklaryny görkezmelidiris.

Bu tassyklama algebrada örän köp ulanylyşlara eýe bolmak bilen, geljekki öwrenilmelerde ulanylyşlaryň mysallary örän köp duş geler. Olardan biri bolup Ewklid algoritminiň yzygiderli bölünmeklerini görkezmek mümkündir.

Indi bolsa birnäçe mysallara garalyň.

14. Köpçlenleriň bölüjilik häsiýetleri.

Goý koeffisentleri kompleks holdan tapawutly $f(ý)$ we $\varphi(ý)$ köpçlenler berilen bolsun. Eger-de $f(ý)$ köpçlen $\varphi(ý)$-e bölünende galyndy hola deň bolsa $f(ý)$ $\varphi(ý)$- e bölünýär, bu ýagdaýda $\varphi(ý)$-e $f(ý)$-iň bölüjisi diýilýär.

$\varphi(ý)$-niň $f(ý)$ köpçleniň bölüjisi bolmagynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup $\psi(ý)$ köpçleniň tapylyp

$$f(ý)= \varphi(ý)\, \psi(ý) \qquad (1)$$

deňligiň ýerine ýetmekligi hyzmat edýändir.

Hakykatdan eger $\varphi(ý)$ $f(ý)$-niň bölüjisi diýsek, $\psi(ý)$-iň ornuna $f(ý)$-ni $\varphi(ý)$-e bölenimizde ýetýän paýyň alynmalydygy,tersine eger-de (1) deňlik ýerine ýetende

$$f(ý)= \varphi(ý)ş(ý)+r(ý)$$

deňlikde $r(ý)=0$ bolandygy aýdyňdyr.

(1) deňlikde $\psi(ý)$-iň hem $f(ý)$ köpçleniň bölüjisi bolýandygy,şeýle hem $\varphi(ý)$-iň derejesiniň $\varphi(ý)$-iň derejesiniň $f(ý)$-iňkiden uly däldigi düşnüklidir.

Eger-de $f(ý)$ we $\varphi(ý)$ köpçlenleriň ikisiniň hem koeffisientleri rasional ýa-da hakyky bolsalar onda $\psi(ý)$-niň koeffisientleri hem degişlilikde rasional ýa-da hakykydyrlar.Ýöne rasional ýa-da hakyky koeffisientli köpçleniň koeffisientleri Rasional ýa-da hakyky bolmadyk bölüjä hem eýe bolmagy mümkindir. Mysal üçin, $ý^2+1=(ý+i)\,(ý-i)$

Geljekde köp ulanyşlara eýe bolan indiki häsiýetleri belläp geçeliň.

1. **Eger-de $f(ý)$ $g(ý)$-e $g(ý)$ bolsa $h(ý)$-e bölünýär bolsa,onda $f(ý)$ hem $h(ý)$-a bölünýändir.**
2. **Eger-de $f(ý)$ we $g(ý)$ $\varphi(ý)$-e bölünýän bolsalar olaryň jemi hem-de tapawudy hem $\varphi(ý)$-e bölünýärler.**
3. **Eger-de $f(ý)$ $\varphi(ý)$-e bölünýän bolsa F9Ý)-iň islendik $g(ý)$-e köpeltmek hasyly hem $\varphi(ý)$-e bölünýändir.**
4. **Eger-de $f_1(ý),f_2(ý),.......,f_k(ý)$ köpçlenleriň her biri $\varphi(ý)$-e bölünýän bolsa,onda islendik $g_1(ý),g_2(ý).......g_k(ý)$ köpçlenler üçin $f_1(ý)g_1(ý)+f_2(ý)g_2(ý)+.............+f_k(ý)g_k(ý)$ hem $\varphi(ý)$-e bölünýändir.**

5. **Islendik f(ý) köpçlen nolunjy derejeli islendik köpçlene bölünýär.**
6. **Eger-de f(ý) φ(ý)-e bölünýän bolsa, onda ol islendik c≠0 san bilen cf(ý) köpçlene hem bölünýär.**
7. **c≠0 san bilen cf(ý) köpçlenler we diňe şolar f(ý)-iň özüniň derejesine deň bolan derejeli bölüjileridir.**
8. **f(ý) we g(ý) köpçlenleriň biri-birine bölünmeleriniň zerur hem ýeterlik şerti c≠0 san bilen g(ý)=cf(ý) deňligiň ýerine ýetmekligidir.**
9. **c≠0 san bolanda f(ý) we cf(ý) köpçlenleriň biriniň işlendik bölüjisi beýlekisiniň hem bölüjisidir.**

15. Iki köpçleniň iň uly umumy bölüjisini tapmagyň Ýewklid algoritmi.

Goý f(ý) we g(ý)-islendik köpçlenler bolsun. Eger-de φ(ý) bu köpçlenleriň her biriniň bölüjisi bolsa,onda oňa şol köpçlenleriň umumy bölüjisi diýilýär. f(ý) we g(ý) köpçlenleriň umumy bölüjisi bolup, hususan, islendik nolunjy derejeli köpçleniň hyzmat etjekdigi düşnüklidir. Bu iki köpçlenleriň başga umumy bölüjisi ýok bolsa, onda olara öz-ara ýönekeý diýilýär. Umumy ýagdaýda bu köpçlenleriň ý-e bagly bolan umumy bölüjä hem eýe bolmagy mümkindir. f(ý) we g(ý) köpçlenleriň umumy bölüjisi bolan d(ý) olaryň beýleki umumy bölüjileriniň her birine bölünýän bolsa bu d(ý) berilen f(ý) we g(ý) köpçlenleriň iň uly umumy bölüjisi diýilýär we d(ý)=(f(ý),g(ý)) görnüşinde belgilenýär.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{f(ý)=g(ý)ş_1(ý)+r_1(ý),} \\ \mathbf{ş(ý)=r_1(ý)ş_2(ý)+r_2(ý),} \\ \mathbf{r_1(ý)=r_2(ý)ş_3(ý)+r_3(ý),} \\ \mathbf{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \mathbf{r_{k-2}(ý)=r_{k-1}(ý)ş_k(ý)+r_k(ý),} \\ \mathbf{r_{k-1}(ý)=r_k(ý)ş_{k+1}(ý)} \end{array}\right\} \qquad \mathbf{(1)}$$

(1) deňlemedäki r_1(ý),r_2(ý),.........r_k(ý) galyndylaryň derejeleriniň degişlilikde g(ý), r_1(ý),r_2(ý),.......,r_{k-1}(ý) derejelerinden kiçidikleri düşnüklidir.Şeýle hem bu deňliklerde aşakdan ýokary hereket etmek

bilen r_k(ý) köpçlene r_{k-1}(ý),r_{k-2}(ý),.....,r_1(ý),g(ý) we f(ý) köpçlenleriň ählisiniň bölünýändiklerini, başgaça aýdanyňda r_k(ý)-niň f(ý) we g(ý) köpçlenleriň umumy bölüjisidigini alarys.
φ(ý) bilen f(ý) köpçlenleriň islendik bir umumy bölüjisini belgiläp (1) deňliklerde ýokardan aşaklygyna hereket etmek bilen φ(ý)-e r_1(ý),r_2(ý),.......,r_k(ý) galyndylaryň ählisiniň bölünýändiklerine eýe bolarys. Bu diýildigi f(ý) we g(ý) köpçlenleriň umumy bölüjisi bolan r_k(ý)-niň olaryň islendik φ(ý)-umumy bölüjisine bölünýändigine,ýagny r_k(ý)=(f(ý),g(ý)) bolýandygyna eýe bolarys.
Bellik. Köpçlenleriň bölüjilik häsiýetlerinden iki sany köpçlenleriň iň uly umumy bölüjisiniň nolynjy derejeli köpeliji takyklygynda kesgitlenýändigi gelip çykýar. Şeýlelikde iki sany köpçlenleriň öz-ara ýönekeý bolmaklarynyň zerur hem ýeterlik şertiniň olaryň iň uly umumy bölüjisiniň bire deň bolmaklygy diýip tassyklamak adalatlydyr.

16. Köpçleni çyzykly iki çlene bölmegiň Gorner usuly

Goy bize $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,\ a_0 \neq 0$
n derejeli köpçlen we $x - c$, bu ýerde c käbir kompleks san,berlen bolsun. $f(x)$ köpçleni $x - c$ çyzykly z çlene bölenimizde ýetýän paýy we galyndyny tapmak üçin Gorner usuly diýilýän indiki düzgünden peýdalanmak mümkindir.Ýokarda aýdylan galyndy bölünýän algoritmden bu ýagdaýda ýeke-täk kesgitlenilýän

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$$

paý we bu bölünmedäki galyndyny berýän käbir r kompleks san bar bolup, $f(x) = (x - c)[b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}] + r$ deňlik ýerine ýetýändir. Onda

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + (b_{n-1} - cb_{n-1})x + $$
$$+ r - cb_{n-1}$$

deňlikden birmeňzeş derejeleriň öňündäki koeffisenyleri deňeşdirmek bilen

$$a_0 = b_0$$
$$a_1 = b_1 - cb_0$$
....
$$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2}$$
$$a_n = r_1 - cb_{n-1}$$

deňlikleri ýa-da başgaça aýdanymyzda

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = a_1 + cb_0$$
$$b_2 = a_2 + cb_1$$
....
$$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$$
$$r = a_n + cb_{n-1}$$

bolýandyklaryny alarys.Bu bölünmäni ýerine ýetirmek üçin Gorner tablisasynyň

	a_0	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 =$ $= a_1 + cb_0$	$b_2 =$ $= a_2 + cb_1$		$b_{n-1} = a_{n-1} +$ $+ b_{n-2}c$	$r = a_n + cb_{n-1}$

17. Köpçleni çyzykly ikiçlenleriň köpeltmek hasylyna dagytmak

Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasy diýilýän indiki tassyklamany subutsyz getireliň:

Derejesi birden kiçi bolmadyk islendik san koeffisenleri bolan köpçleniň umumy ýagdaýda kompleks bolan hiç bolmanda bir köki bardyr. Goý $n \geq 1$ bolup,

$$f(ý)= a_0ý^n+a_,ý^{n-1} +... + a_n \qquad (1)$$

n- nji derejeli köpçlen berilen bolsun.

Ýokarda getirilen esasy teorema bu köpçleniň kompleks ýa-da hakyky bolan α_1 kökiniň bardygy, şoňa görä-de

$$f(ý)= (ý-\alpha_1)\,\varphi(ý)$$

aňlatmanyň adalatlydygyny aňladýar. Bu ýerde φ (ý)-niň kompleks ýa-da hakyky koeffisentleri bolan köpçlendigine görä, esasy teoremadan onuň käbir α_2 köke eýedigi alynar.

Şeýlelikde $f(ý)= (ý-\alpha_1)(ý-\alpha_2)\psi(ý)$ aňlatma alynar. Bu pikir ýöretmäni dowam etdirmek bilen n-nji derejeli f(ý) köpçleniň n sany çyzykly köpeljileriň köpeltmek hasyly görnişindäki aňlatmasyny alarys. $f(ý)= a_0(ý-\alpha_1)(ý-\alpha_2)...(ý-\alpha_n)$. (2)

a_0 koeffisentiň alynmagy onuň ornuna başga bir b - san alynyp skobkalary açsak f(ý)-niň baş çleniň $a_0ý^n$ bolandygyna garamazdan onuň $bý^n$ bilen gabat gelmelidigini, bu ýerde $a_0 =b$ bolmalydygyny taparys. (2) aňlatmanyň f(ý) köpçlen köpelijiler tertibi takyklygynda şol görnüşdäki ýeke- täk aňlatmadygy düşnüklidir. Tersine, ýagny f(ý) üçin

$$f(ý)= a_0(ý-\beta_1)(ý-\beta_2)...(ý-\beta_n) \qquad (3)$$

dagytma hem adalatly diýseň, (2) we (3) aňlatmalardan

$$a_0(ý-\alpha_1)(ý-\alpha_2).......(ý--\alpha_n)=a_0(ý-\beta_1)(ý-\beta_2)......(ý--\beta_n) \qquad (4)$$

gatnaşyk alynar. Eger-de α_i ähli β_i –lerden tapawutly diýsek (4)-de ý-iň ornuna -α_i goýmak bilen bu deňligiň çep tarapynyň 0, sagynyň bolsa 0-dan tapawutly bolýandygyny alarys. Diýmek her bir α_i käbir β_i sana deň hemde tersine bolmalydyr. Bu ýerden entek (3) we (4) aňlatmalaryň gabat gelýändikleri alynýan däldir. Hakykatdan hem α_i –leriň arasynda öz-ara deňleriniň bar bolmaklary mümkindir. Goý olaryň 8 sanysy α_i-e deň bolup β-leriň arasynda α_i-e deňleri t sany bolsun diýeliň. s=t bolýandygyny görkezmelidiris.s>t diýsek (4) gatnaşygyň iki tarapyny hem $(ý-\alpha_i)^t$ derejä bölmek bilen alynan deňligiň çepinde $(ý-\alpha_i)$ köpeliji bar bolup sagynda şeýle köpeliji saklanýan däldir. Bu bolsa ýokarda aýdylana tersdir. Şeýlelikde (2) dagytma ýeke-täkdir. Birmeňzeş köpelijileri toplaşdyrmak bilen $f(ý)=a_0(ý-\alpha_1)^{k1} (ý-\alpha_2)^{k2}....(ý-\alpha_l)^{kl}$, (5) bu ýerde $k_1+ k_2+.....+k_l=n$ aňlatma eýe bolarys. Şunlykda $\alpha_1, \alpha_2,......, \alpha_l$ sanlaryň sanlaryň arasynda deňleri ýokdyr. (5) aňlatmadaky k_i san(i=1,2,.......,l) α_i kökiň f(ý)-däki gaýtalygydyr. Hakykatdan hem bu gaýtalyk s_i bolsa $k_i\le s_i$ bolan kesgitlemä görä $f(ý)=(ý-\alpha_i)^{s_i} \varphi(ý)$. Bu deňlikde $\varphi(ý)$-ni onuň çyzykly köpelijilere dagytmasy bilen çalşyryp f(ý) köpçleniň (2)-den tapawutly bolan çyzykly köpelijilere dagytmasyny alarys. Bu bolsa şeýle dagytmanyň ýeke-täkligine garşylykly netije bolar.

18. Köpçleniň kökleri

Eger-de $f(ý)=a_0ý^n+a_1ý^{n-1}+.........+a_n$ (1) käbir köpçlen,c bolsa käbir san bolanda $f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+....+a_n$ sana (f(ý)-de näbelliniň ornuna c sany goýmakdan alynan) f(ý) köpçleniň ý=c nokatdaky bahasy diýilýär.

Eger-de f(ý)=0 bolsa, onda sana f(ý) köpçleniň köki diýilýär (başgaça aýdanyňda c san f(ý)=0 deňlemäniň köki diýildigidir). Eger-de f(ý) köpçleni birinji derejeli (başgaça çyzykly köpçlene) köpçlene bölenimizde galyndynyň ya nolunjy derejeli,ya-da 0 köpçlen boljakdygy düşnüklidir. Indiki tassyklama bu galyndyny bölmäni yerine yetirmezden tapmaga esas beryär.

TEOREMA: f(ý) köpçleni ý-c ikiçlene bölenimizde galýan galyndy f(c) baha deňdir.

Subudy: Hakykatdan hem f(ý)=(ý-c)ş(ý)+r, bu ýerde r käbir san deňlikde ý=c nokatdaky bahany deňligiň, iki tarapynda hem hasaplamak bilen f(c)=(c-c)ş(c)+r=r bolýandygyna, ýagny tassyklama eýe bolarys.

NETIJE: c sanyň f(ý) köpçleniň köki bolmagynyň zerur hem ýeterlik şerti f(ý)-niň ý-c çyzykly ikiçlene bölünmegidir.

Şeýlelikde Gorner usuly diýilýän f(ý) köpçleni ý-c çyzykly ikiçlene bölmegiň indiki usuly öwrenilmäge mynasypdyr.

Goý $f(ý)=a_oý^n+a_1ý^{n-1}+... +a^n$ (2)

we f(ý)=(ý-c)ş(ý)+r (3)

bolup, $ş(ý)=b_0ý^{n-1}+b_1ý^{n-2}+...+b_{n-1}$ bolsun. (3) deňlikde ý näbelliniň birmeňzeş derejeleriniň koeffisentlerini deňeşdirmek bilen taparys:

$$a_0=b_{0,}$$
$$a_1=b_1-cb_{0,}$$
$$a_2=b_2-cb_{1,}$$
$$........$$
$$a_{n-1}=b_{n-1}-c\,b_{n-2,}$$
$$a_n=r-c\,b_{n-1}.$$

Bu ýerden $b_0=a_0$, $b_n=cb_{n-1}+a_n$, k=1,2,..., n-1 deňlikler alynar. Şeyle hem $r=cb_{n-1}+a_n$ bolar.

Gorner usulynyň köpçleniň nokatdaky bahasyny hasaplamaga ulanylmagynyň hem mümkindigini belläliň.

Eger-de f(ý) köpçlen $(ý-c)^k$ derejä bölinip $(ý-c)^{k+1}$ derejäde bölinmeýän bolsa, c san f(ý)-iň k gaýta (kratny) köki diýilyär.

k sana bolsa c kökiň f(ý) köpçlendäki gaýtalanmasy diýilýär.

Indiki tassyklama adalatlydyr.

Eger-de c san f(ý)- iň k - gaýta köki bolsa, onda k>1 bolanda ol f(ý)- niň (k-1)- gaýta kökidir. Şunlukda k=1 bolaýsa c san $f^{n}(ý)$ önümiň köki däldir.

19. Hakyky koeffisentli köpçlenleriň kompleks kökleriniň çatyrymlylygy

Kompleks sanlar algebrasynyň esasy teoremasynda alynýan netijelerden birine seredeliň.

Goý hakyky koeffisentli $f(ý)= a_0ý^n+a_1ý^{n-1}+... + a_{n-1}ý+a_n$ köpçlen α- kompleks köke eýe bolsun, ýagny

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+...+a_{n-1}\alpha+a_n=0$$

deňlik adalatly bolsun. Bu deňlikdäki ähli sanlary çatyrymlylary bilen çalşyrsak hem bu deňlik ýerine ýeter. $a_0,a_1,..., a_n$ hem-de 0 sanlaryň hakykatdyklaryna görä olar bu çalşyrmadan üýtgewsiz galarlar, şeýlelikde $a_0\alpha^{-n}+a_1\alpha^{-n-1}+...+a_{n-1}\alpha^-+a_n=0$, ýagny $f(\alpha^-)=0$.

deňlige eýe bolarys. Bu diýildigi, eger-de α- kompleks san hakyky koeffisentli f(ý) köpçleniň köki bolsa, onuň α^- çatyrymlysy hem f(ý) köki bolýandygyny aňladýar. Diýmek f(ý) köpçlen $\varphi(ý)= (ý-\alpha) (ý-\alpha^-)= ý^2-(\alpha+\alpha^-) ý +\alpha\alpha^-$ (1)

koeffisentleri hakyky bolan, kwadrat üççlene bölünýändir. Şundan ugur alyp, f(ý)-de αwe α^- kökleriň birmeňzeş gaýtalyklara eýediklerini görkezeliň. Bu kökler degişlilikde k we l gaýtalylyklara eýe hem-de k>l bolsun diýeliň.

Onda f(ý) köpçlen $\varphi^l(ý)$ derejä böliner, ýagny

$$f(ý)= \varphi^l(ý)\,ş(ý)$$

deňlik ýerine ýetip, ş(ý) paý hakyky koeffisientli bolmalydyr(hakyky koeffisentli köpçlenleleriň paýy bolýandygyna görä). Ýöne ş(ý), ýokarda aýdylanyna ylalaşman, α kompleks sany özüniň (k-l) gaýta köki höküminde saklaýan hem bolsa α^- san onuň köki däldir. Bu ýerden k=l bolmalydylygy alynar. Diymek, hakyky koeffisentli köpçlenleriň kompleks kökleriniň ikibir çatyrymlydyklary düşniklidir. Şeýlelikde indiki netije alynar:

Her bir hakyky koeffisentli f(ý) köpçlen köpeldijileriň tertibi takyklygynda ýeke-täk usul bilen özüniň a_0 baş koeffisentiniň hem-de onuň hakyky köklerine degişli ý-α görnüşdäki çyzykly hem-de çatyrymly köklerine degişli bolan

$$\varphi(ý)=ý^2-(\alpha+\bar{\alpha})ý+\alpha\bar{\alpha}$$

görnüşdäki kwadrat köpçlenleriň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladylýandyr.

20. Wiýet formulalary

Goý, baş koeffisiýenti bire deň bolan n-nji derejeli

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

köpçleniň kökleri $\alpha_{1,}\alpha_{2,}...\alpha_n$ bolsun.Onda köpçleni çyzykly ikiçlenleriň köpeltmek hasylyna dagytmaklygyň düzgüninden

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$$

aňlatmany alarys. Bu deňligiň sag tarapyndaky skobkalary köpeldişdirip meňzeş çlenleri toplaşdyrmak bilen alynan koeffisiýenleri (1) ýazgydaky degişli koeffisinler bilen deňeşdirip,Wiýet fiormulalary diýilýän indiki deňlikleri alarys:

$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n),$$

$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

....

$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-2}\alpha_n+...+\alpha_2\alpha_3...\alpha_n),$$

$$a_n=(-1)^n\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n$$

Görşimiz ýaly k-njy deňligiň sag tarapy k-nyň jübütdigine ýa-da täkdigine baglylykda goşmak ýa-da aýyrmak alamaty bilen alynan k sany kökleriň ähli mümkin bolan köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir. Şeýle hem bu deňlikler n=2 bolanda elementar algebradaky kwadrat üç çleniň kökleri bilen koeffisiýenleriniň arasyndaky baglanşyklary aňladýan gatnaşyklara öwrülýänler.

Wiýet formulalary köpçleni onuň kökleriniň üsti bilen aňlatmaklygyň oňaýly usulydyr. Şunlukda f(ý) baş koeffisiýentli birden tapawutly a_0 a_0 san bolsa, bu formulalary ulanmak üçin, köpçleniň köklerine hiç hili täsir etmeýän,onuň ähli koeffisiýenlerini bu a_0 sana bölüp çykmalydyrys. Şeýlelikde,bu ýagdaýda,Wiýet formulalary ähli koeffisiýenleriň bu baş koeffisiýente paýlary üçin aňlatmalary berýändirler.

21. Kardano formulasy.

Esasy teorema gora san koefisienyli islendik n-nji derejeli kopclenin n sany kompleks koklerinin bardygy gelip cykyandyr.Yone bu tassyklama ol koklerin bardygyny anlatmak bilen caklenip, olary tapmaklygyn usulyny bermeyar. Seyle meselanin cozgudini kwadrat denlemanin koklerini tapmagyn formulasyna menzes bolan formulany tapmaklyga urunmakdan baslap gozlediler.
Goy, $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ (1) islendik san koeffisientleri bolan kub denleme berilen bolsun. Bu denlemedaki y nabellini

$$\mathbf{y=}\, x-\frac{a}{3} \qquad \textbf{(2)}$$

denlik bilen baglansykly ý nabelli bilen calsyralyn. Onda taze nabellinin kwadraty saklanmayan
$ý^3 + pý + ş = 0$ (3) gornusdaki denlemani alarys.
Egerde (3) denlemanin kokuni tapsak (2) gatnasykdan (1) denlemanin hem kokuni tapap bileris. (3) denleme esasy teorema gora uc sany kompleks koklere eyedir. Goy $ý_0$ bu koklerin biri bolsun.Taze u komekci nabellini alyp $f(u)=u^2 - ý_0 u - \frac{p}{3}$ kopcleni owrenelin. onun koeffisientlerinin kompleks sanlardygyna gora bu kopclen iki sany α we β kompleks koklere eye bolap Wiyet formulasyna gora $\alpha+\beta = ý_0$, (4). $\alpha\times\beta=-\frac{p}{3}$, (5)
denlikler dogrudyr. (3)-denlemeler $ý_0$-yn (4)-den anlatmasyny goymak bilen alarys:

$$(\alpha+\beta)+p(\alpha+\beta)+q=0$$

ya-da basgaca,

$$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0$$

Yone (5)-den $3\alpha\beta+p=0$ alynyp biz $\alpha^3+\beta^3=-q$ **(6)**

denlige eye bolarys. Ikinji bir tarapdan (5) denlik $\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$ (7)

bolyandygyny anladyar. Diymek (6) we (7) denliklerden α^3

hemde β^3 sanlaryn $z^2 + şz - \frac{p^3}{27} = 0$ (8)

kompleks koeffisentli kwadrat denlemanin kokleridigini alarys. Ony cozmek bilen $z_{1.2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, yada bu yerden

$\alpha = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ $\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ gatnasyklary alarys.

Seylelik bilen (3) denlemanin koklerini onun koeffisentlieinin usti bilen anladylyan

$$ý_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Kordano formulasy diyilyan denlige eye bolarys.

Kub köküň uc sany bahalara eyediginine gora (9) denlikler α we β ululyklaryn her birine uc baha beryandir. Yone Kardano formulasyny ulanylanda bu bahalar erkin utgasdyrlyp bilinmeyarler: α -nyn berilen bahasyna β -nyn uc bahalarynyn dine (5) serti kanagatlandyryany alynyandyr.

Goy $\alpha_1 - \alpha$ radikalyn uc bahasynyn islendik biri bolsun. Onda galan iki bahalary α_1 -in $\sqrt[3]{1}$ köküň ε we ε^2 bahalaryna kopelt-mek hasyly gornusinde tapylyarlar : $\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon$ $\alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2$ β_1 bilen β -nyn uc bahalarynyn $\alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$ denligi kanagatlandyryan bahasyny belgilalin. Onda beyleki iki bahalary $\beta_2 = \beta_1\varepsilon$ we $\beta_3 = \beta_1\varepsilon^2$ bolarlar. Seylelikde $\varepsilon^3 = 1$ bolandygyna gora

$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1\beta_1\varepsilon^3 = \alpha_1\beta_1 = -\frac{p}{3}$ bolup, α_2 baha β_3 bahanyn gabat gelyandigini goryaris. Suna menzeslikde α_3 baha β_2-nin degislidigini alarys. Seylelide (3) denlemanin ahli uc koklerini tapmaklygyn

ý1$= \alpha_1 + \beta_1$, ý2$= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2$, ý3$= \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon$

duzgunlerini alarys.

Köpçleniň köklerini takmynan tapmak.Sturm sistemasy.

Bize belli bolsuna gora san koeffisentli kopclenin koklerini tapmaklygyn umumy tari yokdyr. Yone birnace amaly meselelerin cozgudi kopclenlerin, ka halatlarda bolsa oran yokary derejeli kopclenlerin koklerini owrenmeklik bilen baglansyklydyr.Hakyky koeffisientli kopclenin hakyky koklerininsanyny, bu kokleri gursayan aracakleri tapmaklygyn tarleri owrenilendir. Seyle hem koklerin takmynan tapylsynyn tarleri hem dernelendir. Bir entek amaly meselelerde seyle koklerin berilen takyklykda tapylan bahalaryny kesgitlemek hem yeterlikdir. Hakayky koeffisientli f(ý) kopclenin hakyky koklerini owrenmekligi bu kopclenin grafigini owrenmekden baslamak amatly hem peydalydyr. Bu kopclenin hakyky kokleri bolup onun grsfiginin Oý okuny kesyan nokatlarynyn absissalarynyn hyzmat etjekdikleri dusnuklidir. Hakyky koeffisientli f(ý) kopclenin hakyky koklerinin anyk sanyny tapmaklygyn in onayly bolup Sturm tari hyzmat edyar. Gayta kokleri bolmadyk hakyky koeffisentli f(ý) kopclene seredelin (bu talabyn kanagatlanmadyk yagdayynda kopcleni onun ozunin we onuminin uly umumy bölijisine böleris).

Tukenikli sandaky noldan tapawutly hakyky koeffisentli kopclenlerin f(ý)=f_0(ý), f_1(ý), f_2(ý),…,f_s(ý) (1)

kopclenin tertiplesdirilen sistemasy ucin

1) (1) sistemanyn gonsy kopclenleri umumy koke eye dal;
2) Sonky f_s(ý) kopclenin hakyky koki yokdur;
3) Egerde α san (1) sistemanyn icki f_k(ý), $1 \le k \le s-1$ kopclenlerinin birinin koki bolsa, onda $f_{k-1}(\alpha)$ we $f_{k+1}(\alpha)$ bahalar durli alamatkydyr.

4) Egerde α san f(ý) kopclenin hakyky koki bolsa f(ý) f_1(ý) kopeltmek hasyly ý artmak bilen α nokatdan gecende alamatyny minusdan plyusa geciryar.

talaplar yerine yetyan bolsa, ona f(ý) kopclen ucin Sturm sistemasy diyilyar. Hakyky koklerin sanyny tapmaklyga Sturm sistemasynyn peydalaylsyny gorkezelin. Egerde c hakyky sany f(ý) kopclenin koki bolmasa, (1) bolsa bu kopclen ucin Sturm sistemasy diysek f(c), f_1(c), f_2(c),…, f_s (c) hakyky sanlaryn sistemasyna seretsek we ondaky nola den bolanlaryny cyzsak we w(c) bilen cyzylman galanlaryn sistemasyndaky alamat calysmalaryn sanyny belgilesek, bu W(c) sany f(ý) kopclen ucin (1) Sturm sistemasyndaky ý=c bolanda alamat calysmalaryn sany diyip atlandyrsak indiki tassyklama adalatlydyr.

TEOREMA(Sturm teoremasy) Egerde a<b bolanda a we b hakyky sanlar gayta koki bolmadyk f(ý) kopclenin kokleri bolmasalar, onda W(a)$\geq$W(b) hemde W(a)-W(b) tapawut f(ý) kopclenin a we b sanlar arasyndaky hakyky koklerinin sanyna dendir.

Hakyky koeffisentli gayta koki bolmadyk f(ý) kopclen ucin elmydama Sturm sistemasyny duzulisinin bir tarini gorkezelin: f_1(ý)=f ‘(ý) diysek, Sturm sistemasynyn 4) talaby kanagatlanyar. Hakykatdan hem α - f(ý) –in hakyky koki bolsa,onda f ‘$(\alpha) \neq 0$. Egerde f ‘(α)>0 bolsa f ‘(ý)>0 densizlik α nokadyn towereginde yerine yetyandir, sona gorade α nokatdan gecende f(ý) minusdan plyusa alamatyny uytgedyandir. Bu aydylany f(ý) f_1(ý) kopeltmek hasyly ucin hem dogrudyr. Edil suna menzes pikir yoretmeler f ‘(α)<0 bolanda hem adalatlydyr. Sonra f(ý)-i f_1(ý)-e bolyaris we bu bolmanin ters alamaty bilen alynan galyndysyny f_2(ý) hokuminde alarys: f(ý)=f_1(ý) $ş_1$(ý) – f_2(ý). Seylelikde,egerde f_{k-1}(ý) we f_k(ý) edyan tapylan bolsalar, onda f_{k+1}(ý) hokmunde f_{k-1}(ý) –i f_k(ý)-e bolenmizde galyan galyndy ters alamaty bolen alarys: f_k(ý)= f_k(ý) $ş_k$(ý)- f_{k+1}(ý) (2) Beyan edilen duzgun f(ý) we f ‘(ý) kopclenler ucin ulanylan Yewklid algoritiminden tapawutlydyr.

22. n-ölçegli wektorlar ginişligi

Çyzykly deňlemeleriň ulgamylarynyň umumy nazarýetini gurmak üçin wektor giňişligi düşünjesi zerurdyr.

Analitiki geometriýadan belli boluşyna görä tekižligiň her bir nokady (koordinatalar oklary belli bolanlarynda özüniň iki sany koordinatalary tekizligiň her bir wektory bolsa özüniň iki sany kompatentalary hakyky sanlaryň iki sanysynyň tertiplişdirilen ulgamysy bilen kesgitlenýändir.Şuňa meňzeşlikde üç ölçegli giňişligiň her bir nokady özüniň üç sany koordinatalary bilen,giňişligiň her bir wektory bolsa özüniň üç sany komponentalary bilen kesgitlenýär.

Ýöne geometriýada,mehanikada we fizikada üç sany hakyky sanlaryň ulgamysynyň berilmegi bilen doly kesgitlenmeýän obýektler hem öwrenilýändirler.Mysal üçin üç ölçegli giňişlikde şarlaryň toplumy öwrenilende şaryň doly kesgitlenen bolmagy üçin onuň merkeziniň koordinatalarynyň we radiusynyň,ýagny dört sany hakyky sanlaryň tertipleşdirilen ulgamysynyň berilmegi zerurdyr.

Bu mysaldan görnüşi ýaly n sany hakyky sanlaryň ähli mümkin bolan tertipleşdirilen ulgamylarynyňöwrenilmegi ähmiýeti eýedir.

N sany sanlaryň tertipleşdirilen

$$\alpha = (a_1, a_2,... a_n) \quad (1)$$

ulgamysyna n-ölçegli wektor diýilýärf.Bu ýagdaýda a_i,I=1,2,..., n sanlara α wektoryň kompanentalary diýilip aýdylýar.Eger-de α bilen n -ölçegli

$$\beta = (b_1, b_2,... b_2) \quad (2)$$

wektoryň degişli kompanentalary deň bolsalar bu iki wektorlaryň özleri hem deň hasap edilýärler.

(1) we (2) wektorlaryň jemi diýilip her bir kompanentasy olaryň degişli komponentalarynyň jemine deň bolan

$$\alpha+\beta =(a_1+b_1, a_2+b_2,... a_n+b_n) \quad (3)$$

wektora aýdylýar. Wektorlary goşmak amalynyň orun çalşyrma we utgaşdyrma häsiýetlerine eýedigi bu kesgitlemeden görünýändir.

Nul wektor diýilýan

$$0 = (0, 0,... 0) \qquad (4)$$

wektorlar goşulanda nolyň ornyny tutýandyr.

Hakykydan hem

$$\alpha+0=(a_1+0, a_2+0,\dots a_n+0)=(a_1, a_2,\dots a_n)=\alpha$$

α wektorya garşylykly diýilip

$$-\alpha=(-a_1,-a_2,\dots -a_n) \quad (5)$$

wektora aýdylýar. $\alpha+(-\alpha)=0$ deňlik aýandyr. Şeýle hem goşmak amal;yna ters aýyrmak amalynyňbaradygy hem aňsatlyk bilen görkezilip biliner.Hakykyatdan hem (1) we (2) wektorlaryň tapawudy bolup

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad \text{wektor,ýagny}$$

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1\ a_2-b_2\dots\ a_n-b_n) \quad (6)$$

wektor hyzmat eder.

α wektoryň k sana köpeltmek hasyly diýilip

$$k\alpha=(k\,a_1, k\,a_2,\dots k\ a_n) \quad (7)$$

wektora aýdylýar.

Bu kesgitlemeden

$$k(\alpha\pm\beta)=k\alpha\pm k\beta \quad (8)$$

$$(k\pm l)\alpha=k\alpha\pm l\alpha \quad (9)$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha \quad (10)$$

$$1*\alpha=\alpha \quad (11)$$

$$0*\alpha=0 \quad (12)$$

$$(-1)\alpha=-\alpha \quad (13)$$

$$k*0=0 \quad (14)$$

eger-de $k\alpha=0$ bolsa ýa $k=0$,ýa-da $\alpha=0$.(15)

n-ölçegli wektoryň ählisisniň toplumy özünde kesgitlenen wektorlary goşmak we sana köpeltmek amallary bilen n-ölçegli wektorlaryň giňişligi diýilip aýdylýar.

23.Wektorlaryň çyzykly baglanşyklylygy

Eger-de n-ölçegli wektorlar α we β üçin käbir k san bar bolup $\beta=k\alpha$ deňlik ýetýän bolsa β wektor α wektora proporsional diýilýär. Hususan,0 wektor islendik α wektora proporsionaldyr. $(0=0*\alpha)$,Eger-de $\beta=k\alpha$ bolup $\beta\neq 0$ bolsa bu ýerden $k\neq 0$ bolup $\alpha=k^{-1}\beta$ deňlik alynar.Bu diýildigi proporsionallygyň nul däl wektorlar üçin simmetrik häsiýete eýedigini aňladýar.

Eger-de käbir $\boldsymbol{l_1, l_2,\dots l_n}$ sanlar bar bolup

$$\beta=\boldsymbol{l_1\ \alpha_1,\ l_2\ \alpha_2,\dots\ l_n\alpha_n}$$

Deňlik dogry bolsa β wektora $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_s$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy diýilip aýdylýar.

Kesgitleme: $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{r-1}, \alpha_r$ $(r \geq 2)$ (1)

wektorlaryň hiç bolmanda biri golanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolsa,olar çyzykly baglanşykly,tersine ýagdaýda bolsa,çyzykly baglanşyksyz diýilip aýdylýar.Bu kesgitlemäni indiki görnüşde hem bermek mümkindir.

Kesgitleme: Eger-de hiç bolmanda biri nuldan tapawutly bolan $k_1, k_2, \dots, k_r$ sanlar bar bolup.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_r\alpha_r \quad (2)$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa (1) ulgamy baglanşykly diýilip aýdylýar. Bu iki kesgitlemeleriň ekwiwaletdiklerini subut etmek aňsatdyr.Şeýle hem ikinji kesgitlemäniň ulgamydaky wektorlaryň sany bire deň bolanda hem ulanylyp bilnjekdigi aýdyňdyr:diňe bir α wektordan durýan ulgamynyň çyzykly baglanşykly bolmagynyň zerur hem eterlik şerti bu α wektoryň nul wektor bolmaklygydyr. Hakykatdan hem, eger-de $\alpha=0$ bolsa,onda islendik $k=0$ üçin hem $k\alpha=0$ boljakdygy düşnüklidir.Tersine,ege-de $k\alpha=0$ we $k=0$ bolsa $\alpha=0$ alynar.

Teorema 1. (1) ulgamynyň käbir bölek ulgamysy baglanşykly bolsa,onda ulgamynyň özi hem baglanşyklydyr.

Subuty. Hakykatdan hem göý (1) ulgamyda $s<r$ bolup $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ wektorlar hiç bolmandfa biri noldan tapawutly k_i bilen

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,...,k_s\alpha_s = 0$$

deňligi kanagatlandyrýan bolsunlar.Bu ýagdaýda ýerine ýetýän

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+,...,k_s\alpha_s + 0*\alpha_{s+1} +... + 0*\alpha_r = 0$$

deňlikden (1) ulgamynyň çyzykly baglanşykdygy alynar.

Netije 1. Iki sany deň ýa-da umuman iki sany proporsional wektorlary bolan,şeýle hem nul wektory saklaýan islendik ulgamy çyzykly baglanşyklydyr.

2.Eger-de (1) ulgamy çyzykly baglanşyksyz bolsa,onda onuň islendik bölek ulgamysy hem çyzykly baglanşyksyzdyr.

n-ölçegli wektor giňişliginiň
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1,0,0,...,0), \\ \varepsilon_2 &= (0,1,0,...,0), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n &= (0,0,0,...,1) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wertorlary birlik wektorlar diýilip atlandyrylýarlar.
(3) ulgamy çyzykly baglanşyksyzdyr. Goý

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+... + k_n\varepsilon_n=0$$

bolsun.Çep tarapynyň (k_1, k_2, …., k_n) wektora deňdigine görä soňky deňlikden

$$(k_1, k_2, …., k_n)=0$$

deňlik,ýagny her bir i=1,2,... n nomer üçin k = 0 bolmalydygyna geleris.

Diýmek soňky belliklerden n-ölçegli wektor ginişliginde n sany wektordan durýan çyzykly baglanşyksyz wektorlaryň (3) ulgamysyny bardygyny görýäris.

<u>Teorema 2</u> s>n bolanda n-ölçegli wektorlaryň islendik s sanysyndan durýan ulgamy çyzykly baglanşyklydyr.

Subuty. Goý bize

$$\alpha_1=(a_{11}, a_{12},..., a_{1n})$$
$$\alpha_2=(a_{21}, a_{22},..., a_{2n})$$
$$............... .....$$
$$\alpha_s=(a_{s1}, a_{s2},..., a_{sn})$$

wektorlar ulgamysy berlen bolsun.Hiç bolmanda biri nuldan tapabutly bolan we

$$k_1 \alpha_1, k_2 \alpha_2, …., k_s \alpha_s = 0$$

deňligi kanagatdyrýan k, k, … k sanlaryň bardygyny görkezmelidiris (4) deňlikden alynýan

$$\left.\begin{aligned} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + ... + a_{s1}k_s &= 0 \\ a_{21}k_2 + a_{22}k_2 + ... + a_{s2}k_s &= 0 \\ ....& \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + ... + a_{sn}k_s &= 0 \end{aligned}\right\}(5)$$

ulgamy k_1,k_2, …. k_s näbellelerden n çyzykly deňlemeleriň ulgamysy bolup belli boluşyna gärä nul däl çözüwe eýedir.Bu diýildigi (4) deňlemäni kanagatlandyrýan hemmesi nul bolmadyk
k_1,k_2, …. k_s sanlaryň bardygyny aňladýar.Teorema subut edildi.

Kesgitleme. n-ölçegli wektorlaryň

$$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r \ (6)$$

çyzykly baglanşyksyz ulgamysyna islendik Be-n-ölçegli wektory

goşulanda ol çyzykly baglanşykly ulgamy öwrülse oňa maksimal çyzykly baglanşyksyz ulgamy diýilýä.Bu ýagdaýda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r,\beta$ wektorlaryň çyzykly baglanşyklylygynyň islendik aňlatmasynda β-nyň koeffisiýenti nuldan tapawutly bolmalydyr.
Ýokarda aýdylanlardan n-ölçegli wektorlaryň n sanysyndan burýan islendik çyzykly baglanşyksyz ulgamysynyň maksimaldygy hem-de bu giňişligiň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz ulgamysynyň n-den köp bolmadyk wektorlary saklaýandygy gelip çykýar.Şeýle hem n-ölçegli islendik çyzykly baglanşyksyz ulgamysynyň hiç bolmanda bir maksimal çyzykly baglanşyksyz ulgamysynda saklanýandygy gelip çykýandyr.

Eger-de β wektor $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ (7) wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy bolsa,onda adatça β (7) ulgamynyň üsti bilen çyzykly aňladylýar diýilýär.Umuman

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_s (8)$$

wektorlaryň her biri (7) ulgamynyň üsti bilen çyzýykly aňladylýan bolsa (8) ulgamy (7)-niň üsti bilen çyzykly aňladylýar diýilýär.
Ulgamynyň başga ulgamynyň üsti bilen çyzykly aladylmagy düşunjesi tranzitiw häsiýete eýedir.

Eger-de wektorlaryň iki sany ulgamylarynyň her biri beýlekisiniň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa olara ekwiwalent ulgamylar diýilýär.Çyzykly aňladylmanyň tranzitiwliginden käbir wektor ekwiwalent ulgamylaryň biri bilen çyzykly aňladylýan bolsa,onuň beýleki ulgamylaryň üsti bilen hem çyzykly aňladylyp bilinjekdigini alarys.Indiki tassyklama bolsa teorema ady bilen bellidir.

Teorema 3. N-ölçegli wektor giňişliginiň wektorlarynyň,iki

(I) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$

(II) $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$

Ulgamynyň birinjisi çyzykly baglanşyksyz we ikinjiniň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa,ondfa birinji ulgamynyň wektorlarynyň sany ikinjisindäkiden köp däldir,ýagny $r \le s$

Subudy. R>s diýiliň.şerte görä

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1s}\beta_s \\ \alpha_2 &= a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2s}\beta_s \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r &= a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + ... + a_{rs}\beta_s \end{aligned}\right\}(9)$$

deňlikler dogry bolup olaryň koeffisentleri s-çegli wektorklaryň r sanysynyň

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1s}) \\ \gamma_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2s}) \\ .... \\ \gamma_r = (a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rs}) \end{array}\right\}$$

Ulgamysyny düzýärler.Şeýlelikde r>s bolanda olaryň çyzykly baglanşyklydyklary belli bolyp jiç bolmanda biri nuldan tapawutly $k_1, k_2 ,..., k_s$ sanlar tapylyp

$$k_1\,\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_r\,\alpha_r=0$$

deňlik ýerine ýetýändir.Bu ýagdaýda (9)-dan

$$\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} = 0,\ j=1,2,\ldots,s \ (10)$$

deňlikler alynar.Onda

$$k_1 a_1 + ... + k_r a_r = \sum_{i=1}^{r} k_i a_i = \sum_{i=1}^{r} k_i (\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \beta_j) = \sum_{j=1}^{s} (\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij}) \beta_j = 0$$

deňlik alynyp (I) ulgamynyň çyzykly baglanşyklylygy hakynda netijäni alaryş.Başdaky dumanymyza ters bolan bu netije tassyklamanyň subutyny berýär.

Netije 1. Çyzykly baglanşyksyz iki sany ekwiwalent ulgamylardaky wektorlaryň sany birmeňzeşdir.

Netije 2. n-ölçegli wektor ginişliginiň islendik maksimal çyzykly baglanşyjksyz ulgamysyndaky wektorlaryň sany n-e deňdir.

Netije3. Eger-de wektorlaryň çyzykly baglanşykly ulgamysynda iki sany maksimal çyzyklu baglanşyksyz bölek ulgamylary alynan bolsa olarda saklanýan wektorlaryň sany deňdir.

Berilen wektorlar ulgamysynyň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek ulgamysyna girýän wektorlaryň sanyna bu ulgamynyň rangy diýilip aýdylýar.

Teorema 4. Goý çyzykly baglanşyksyz bolmaklary hökman bolmadyk n -ölçegli wektorlaryň iki sany

$$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r \quad (11)$$

$$\text{we} \quad \beta_1,\beta_2,...,\beta_s \quad (12)$$

ulgamylary berilen bolup (11) ulgamynyň rabgy k sana (12) ulgamynyňky bolsa l sana deň bolsun.Eger-de (11) ulgamy (12) -niň üsti bilen çyzykly aňladylýan bolsa,onda $k \leq l$ eger-de ol sistemlar ekwiwalent bolsalar k=l gatnaşyk dogrydyr.

24.Matrisanyň rangy

n-ölçegli wektorlaryň berilen ulgamynynyň baglanşyklydygy ýa-da baglanşyksyzlygy hakyndaky sowalyň ýüze çykmagy tebigydyr.Bu sowalyň jogabyny tapmagyň bir usuly matrisanyň rangy düşünjesi bilen ýakyndan baglanşyklydyr.

Goý

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn} \end{pmatrix}$$

matrisadaky ölçegleri görkesýän s we n sanlar özara hiç hili baglanşykda bolmasynlar.A matrisanyň çyzykly baglanşyksyz sütünleriniň maksimal sanyna,başgaça aňda A matrisanyň sütünleriniň ulgamynyň rangyna bu matrisanyň rangy diýilip aýdylýar.

A matrisada erkin k setir we k sütün ($k \leq \min(s,n)$) saýlanan bolsun.Olaryň kesişmesinde duran elementlerden düşülen k-njy minory diýilip aýdylýar. Bizi A-nuyň nuldan tapawutly A-nyň ähli k-njy tertipli minorlary nula deň bolanlarynda onuň k-dan uly tertipli minorlarynyň hem ählisiniň nula deňdigi hakyndaky aýdyň tassyklama örän peýdalydyr.Hakykatdan hem bu tassyklamany subut etmek üçin $k<k+j \leq \min(s,n)$ bolan (k+j)-nji tertipli minory onuň k sany sütüni boýünça Laplas teoremasyna görä dagytmak ýeterlikdir.

Teorema. *(matrisanyň rangy hakyndaky)* Matrisanyň noldan tapawutly minorlarynyň iň ýokary tertipli bu matrisanyň rangyna deňdir.

Subuty. Goý A matrisanyň nuldan tapawutly minorlarynyň iň ýokary tertipli r-e deň bolsun.Umumylygy kemeltmekden

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{1r}, a_{1,r+1} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}, a_{rr}, a_{r,r+1} \dots a_{2n} \\ a_{r+1,1} \dots a_{r+1,r} a_{r,r+1} \dots a_{r+1,n} \\ a_{s1} \dots a_{sr}, a_{s,r+1} \dots a_{sn} \end{pmatrix}$$

matrisanyň çep ýokary burçyndaky r-nji tertipli D minory nuldan tapawutly bolsun diýeliň.Onda A-nji birinji r sany sütünleri özara çykykly baglanşyksyzdyrlar,tersiine ýagdaýda D=0 bolardy.

A matrisanyň $r<l\le n$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan her bir l-nji sütüniniň onuň birinji r sütünleriniň çyzykly kombinasiýasy bolýandygyny görkezeliň.Islendik $1\le i\le s$ nomerde (r+1)nji tertipli (d minory i-nji setiriň we l-nji sütüniň gurşamagy bilen alynýan)

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} a_{1l} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} a_{1l} \\ a_{i1} \dots a_{ir} a_{il} \end{vmatrix}$$

Komekçi kesgitleýjini düzeliň.i-nji islendik bahasynda Δ_i = 0.Hakykatdan hem,eger-de i>r bolsa Δ_i (r+1)nji tertipli minopr bolup ol nula deň bolar.Eger-de $i\le$ r bolsa Δ_i iki sany deň setirleri bolan kesgitleýji hököminde nula deň bolar.Δ_i -niň saňky setiriniň elementleriniň algebraýik doldurgyçlaryna seredeliň. a_{il} elementleriniň algebraik doldurgyçy D minor bolar.Eger-de $1\le j\le r$ bolanda Δ_i kesgitleýjidäki a_{il} elementiň algebraik doldurgyçy

$$A_j=(-1)^{r+1+j}\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,j-1} a_{1,j+1} \dots a_{1r} a_{1l} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{r,j-1} a_{r,j+1} \dots a_{rr} a_{rl} \end{vmatrix}$$

Bolup ol i nomere bagly däldir.Şeýlelikde Δ_i -ni soňky setiri boýünça daytmak bilen alarys

$$a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+\dots+a_{ir}A_r+a_{i1}D=0$$

Bu ýerden $D\neq 0$ bolanlygyna görä

$$a_{il}=-\frac{A_1}{D}a_{i1}-\frac{A_2}{D}a_{i2}-\dots-\frac{A_r}{D}a_{ir}$$

Deňligi ähli i=1,2,…,s nomerler üçin taparys.Koeffisientleriň i-e bagly däldiklerinden A matrisanyň l-nji sütüniniň ilkinji r sütünleriniňdegişlilikde $-\frac{A_1}{D},-\frac{A_2}{D},...,-\frac{A_r}{D}$ koeffisientler bilen alynan çyzykly kombinasiýasydygyny alýarys.

Şeýlelikde A matrisanyň sütünleriniň ulgamysynda r sany sütünlerden durýan maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek ulgamyny tapdyk,başgaça aýdanyňda A matrisanyň rangynyň r-e deňdigini subut etdik.Teorema subut edildi.

Bu teorema matrisanyň rangyny hasaplamagyň usulyny berýändir.Şoňa görä-de ol berilen wektorlar ulgamysynyň çyzykly baglanşyklydygyny ýa-da däldigini anyklamak üçin hem peýdalanylyp biliner.

Matrisanyň rangyny hasaplamagyň indiki düzgünini aldyk: Matrisanyň rangy hasaplananda kiçi tertipli minorlardan ýokary tertipli minorlara geçmelidiris.Eger-de nuldan tapawutly käbir k-njy tertipli D minory gurşaýanlaryny hasaplap çykmak ýeterlikdir:olaryň ählisi nula deň bolsa matrisanyň rangy k sana deň bolar.

Netije 1 Her bir matrisanyň çyzykly baglanşyksyz setirleriniň maksimal sany onuň çyzykly baglanşyksyz sütünleriniň maksimal sanyna,ýagny onuň rangyna deňdir.

Netije 2 n-nji tertipli kesgitleýjiniň nula deň bolmaklygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup onuň setirleriniň arasyndaky çyzykly baglanşyklylygyň bar bolmaklygydyr.

25. Çyzykly deňlemelr ulgamyny derňemek.

Deňlemeleriniň sany näbellileriniň sany bilen deýň bolmazlygy hem mümkin çyzykly deňlemeleriň ulgamysyny öwreneliň

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+...+a_{sn}x_n=b_s \end{array}\right\}(1)$$

Ilki bilen bu ulgamynyň kökdeşligi hakyndaky meseläni öwrenjekdiris.Indiki

$$A=\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...,a_{1n} \\ a_{21},a_{22},...,a_{2n} \\ .... \\ a_{s1},a_{s2},...,a_{sn} \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},...,a_{1n}b_1 \\ a_{21},a_{22},...,a_{2n}b_2 \\ .... \\ a_{s1},a_{s2},...,a_{sn}b_s \end{pmatrix}$$

Matrisalar degişlilikde (1) ulgamynyň koeffisienlerinden düzülen hem-de n giňildilen matrisalary diýilip atlandyrylýarlar.

A matrisanyň rangynyň A-nyň rangyndan kiçi däldigi aýandyr.Hakykatdan hem A -nyň sütünleriniň islendik maksimal çyzykly baglanşyksyz bölek ulgamysy A matrisanyň sütünleriniň käbir maksimal çyzykly baglanşyksyz ulgamysynda saklanýandyr.

Kroner-Kapelli teoremasy.Çyzykly deňlemeler ulgamysynyň kökdeşlygynyň zerur hem ýeterlik şerti bolup giňeldilen matrisa bilen koeffisientlerden düzülen matrisanyň ranglarynyň deň bolmaklygy hyzmat edýändir.

Subuty 1.Göý (1) kökdeş we k, k , ..., k onuň kökleriniň biri bolsun.Bu sanlary (1) ulgamydaky näbellileriň ornuna goýsak s sany tojdestwoloryň ulgamysyna eýe bolarys.Oňa görä A-nyň soňky sütüniniň beýbeki sütünleriniň çyzykly kombinasiýasyndan dyrýandygyny alarys.Başgaça aýdanyňda A-nyň her bir sütüni A-nyň sütünleriniň çyzykly kompinasiýasydyr.Tersine A-nyň her bir sütün hem A-nyň sütünleriniň çyzykly kompinasiýasydyr.Diýmek A we A matrisalaryň sütünlerinden duryan ulgamylar özara ekwiwalentdirler,onda ýokarda getirlen tassyklamadan A we A matrisalaryň ranglarynyň deňdigini alarys.

2.Goý r(A)=r(A) bolsun.Bu ýagdaýda A-nyň islendik maksimalçyzykly baglanşyksyz sütünleriniň ulgamysy A matrisada hem çyzykly baglanşyksyz sütünleriň maksimal ulgamysy bolup hyzmat eder,onda A-nyň soňky sütüni hem bu maksimal ulgamynyň sütünleriň çyzykly kombinasiýasydyr.Şeýlelikde käbir k_1, k_2,... k_n, sanlar bar bolup A-nyň soňky sütüni A –nyň sütünleriniň bu koeffisientler bilen alynan çyzykly kombinasiýasy görnüşinde aňladylar.Diýmek k_1, k_2,... k_n sanlar (1) ulgamynyň käbir çözüwidir.Teorema subut edildi.

Bu tassyklama mysal işlemekde ulanylanda ilki A-nyň rangyny hasaplamaly,munuň üçin A-nyň bu minory gurşap alýar ähli minorlary nula deň bolan nuldan tapawutly käbir M minaryny taparys.Soňra A matrisanyň A-da saklamaýan ýone M-minory gurşaýan ähli minorlarynyň hasaplaýarys.

Eger-de (1) ulgamynyň häsiýetlendiriji kesgitleýjileri diýilýän bu minorlaryň ählisi nula deň bolsalar r(A)=r(A) bolup (1) ulgamy kökdeş bolar.Şoňa göräde aýdylan tassyklama indiki görnüşde hem aýdylyp biliner.

Teorema.Çyzykly deňlemeleriň ulgamysynyň kökdeşliginiň zerur hem ýeterlik şerti bolup ähli häsiýetlendiriji kesgitleýjileriniň nula deň bolmaklygy hyzmat edýändir.

(1) ulgamy kökdeş bolan halatynda onuň bar bolan çözüwlerini tapmaklyk indiki usulda amala aşyrylýar.Goý r(A)=r bolsun.Onda A matrisanyň çyzykly baglanşyksyz setirleriniň maksimal sany hem r – e deňdir.Anyklyk üçin A-nyň ilkinji r setirleri çyzykly baglanşyksyz diýeliň.Bu ýagdaýda A-nyň ilkinji r setirler hem çyzykly baglanşyksyzdyrlar.A we A matrisalaryň ranglarynyň deňliginden (1) ulgamynyň islendik deňlemesiniň käbir koeffisientler bilen alynan ilkinji r sany deňlemesiniň jemi görnüşinde aňladyljakdygy gelip çykýandyr.Bu diýildigi (1) ulgamynyň ilkinji r deňlemeleriniň ulgamysynyň islendik umumy çözüwiniň ähli ulgamynyň hem çözüwi boljagynyu aňladýar.Diýmek bizi

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ &.................................... \\ &a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{aligned}\right\} (2)$$

ulgamynyň çözüwlerini öwrenmek ýeterlikdir.(2) ulgamynyň näbellilerniň koeffisientlerinden düzülen matrisanyň setirleriniň çyzykly baglanşyksyzdyklaryna,başgaça aýdanyňda onuň koeffisientlerinden düzülen matrisanyň rangynyň r bolanlygyna görä r <= n bolmak bilen bu matrisanyň r-nji tertipl minorlarynyň hiç bolmakda biri nuldan tapawutlydyr.Eger-de r=n bolsa (2) kwadrat ulgamy bolup ýeke-täk çözüwe eýedir.

Eger-de r<n diýsek,kesgitlilіküçin ilkinji r näbellileriň koeffisientlerinden düzülen r-nji tertipli minor nula deň däl diýsek (2) ulgamynyň ähli deňlemelerinde $ý_{r+1}$, $ý_{r+2}$,…,$ý_n$ näbellileri deňlikleriň

sagyna geçirip we olara $c_{r+1},c_{r+2},\ldots,c_n$ bahalary saýlap r sany $ý_1,ý_2,...,ý_r$ näbellilerde

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}c_{r+1}-...-a_{1n}c_{n,}\\
&a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}c_{r+1}-...-a_{2n}c_{n,}\\
&....................................\\
&a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+...+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}c_{r+1}-...-a_{rn}c_{n,}
\end{aligned}\right\}(3)$$

ulgamyny alarys.

Bu ulgamy Kramer düzgüni ulanarlykly bolup, ol ýeke-täk $c_1,c_2,...,c_r$ çözüwe eýedir.Onda $c_1,c_2,...,c_r.,c_{r+1},..,\ c_n$ sanlar toplumynyň (2) ulgamynyň çözüwidigi alynar.Ýöne $c_{r+1},c_{r+2},\ldots,c_n$ bahalaryň “azat näbelliler” diýilýän **$ý_{r+1}$, $ý_{r+2},\ldots,ý_n$** üçin erkin saýlanylyp bilinýänliginden bu usul bilen (2) ulgamynyň tükeniksiz köp çözüwlerini taparys.Ilkinji bir tarapdan (2) ulgamynyň islendik çözüwi görkezilen usul bilen tapylyp biliner.

Teorema(kesgitlilik kriterisi) Kökdeş ulgamynyň kesgitli bolmagynyň zerur hem ýeterli serti bolup onuň matrisasynyň rangynyň ulgamynyň näbellileriniň sanyna deň bolmagy hyzmat edýändir.

26. Birjynysly çyzykly deňlemeleriň ulgamy

Geçen temadaky alynan netijeleri birjynysly çyzykly deňlemeleriň

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\
&a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0\\
&....................................\\
&a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+...+a_{sn}x_n=0
\end{aligned}\right\}(1)$$

ulgamsy üçin ulanalyň.Kroneker-Kapelli teoremasyndan bu ulgamynyň hemişe kökdeşdigini görmek kyn däldir.Munuň şeýledigine bu ulgamynyň hiç bolmanda nul çözüwe eýedigi bilen hem göz ýetirmek mümkindir.

Eger-de r(a)=r bolup r=n bolsa onda nul çözüw (1) ulgamynyň ýeke-täk özüwinden başga nul däl çözüwe hem eýedir we bu ýagdaýda bar bolan çözüwleri tapmak n sany näbellileri bolan n çyzykly birjynysly deňlemeleriň ulgamysynyň nul däl çözüwe eýe bolmagynyň zerur hem ýetrlik şerti bolup bu ulgamynyň kesgitleýjisiniň nula deň bolmaklygydygy düşnüklidir.Çüňki bu ýagdaýda r(A)<n bolar.

Birjynysly çyzykly deňlemeleriň ulgamysynyň çözüwleriniň käbir häsiýetlerini belläp geçeliň.

1. Eger-de $\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$ (1) ulgamynyň çözüwi bolsa onda islendik k hemişelik san üçin $k\beta$ wektor hem (1) ulgamynyň çözüwidir.
2. (1) ышыеуьфтнň шыдутвшл $\gamma = (c_1,c_2,...,c_n)$ we $\beta=(b_1,b_2,...,b_n)$ çözüwleri üçin $\beta+\mu$ jem hem bu ulgamynyň çözüwidir.

Umuman aýdanyňda birjynysly çyzykly deňlemeleriň (1) ulgamysynyň çözüwleriniň islendik çyzykly kombinasiýasy hem bu ulgamynyň çözüwidir.

Şeýlelikde (1) ulgamynyň n ölçegli wektorlar görnüşinde aňladylýar çozüwleriň toplumyndan çyzykly baglanşyksyzlarynyň maksimal ulgamysyny bolup almak mümkindir.Birjynysly çyzykly deňlemeleriň ulgamysynyň çözuwleriniň çyzykly baglanşyksyzlarynyň islendik maksimal ulgamysyna ol ulgamynyň çözüwleriniň fundamental ulgamysy diýilip aýdylýar.

Fundamental ulgamynyň diňe (1) ulgamynyň koeffisientle-rinden düzülen matrisanyň rangynyň näbellileriň sanyndan kiçi bolan ýagdaýynda bolup biljekdigi düşnüklidir.Şunlukda (1) ulgamynyň bar bolan fundamental ulgamylary ekwiwalent bolup birmeňzeş sandaky çözüwlerden durýarlar.

Teorema. Eger-de çyzykly birjynysly deňlemeleriň (1) ulgamynyň koeffisientlerinden matrisanyň r rangy näbellileriň n sanyndan kiçi bolanda onuň çözüwleriniň islendik fundamental ulgamysy n-r sany çözüwlerden durýar.

Subuty. Üçin (n-r)-iň (1) ulgamynyň azat näbellilerniň sanyny aňladýandygyny bellemelidiris.Goý,olar $ý_{r+1},...,ý_1$ bolsunlar.(n-r) -nji tertipli nuldan tapawutly indiki d kesgitleýjä garalyň

$$d = \begin{vmatrix} c_{1,r+1}, c_{1,r+2} \cdots c_{1n} \\ c_{2,r+1}, c_{2,r+2} \cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-r,r+1}, c_{n-r,r+2} \cdots c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjiniň i-nji ($i \leq i \leq n-r$) setiriniň elementlerini erkin näbellilere baha deregine alsak, $\acute{y}_1, \acute{y}_2, ..., \acute{y}_r$ näbelliler üçin ýeke-täk bahalary,ýagny (1) ulgamynyň kesgitli bir çözüwini taparys.Ol çözüi

$$\alpha_i=(c_{i\,1},c_{i\,2},..\,.,c_{i\,r},c_{i,r+1},..., c_{i\,n})$$

Şeýle usul bilen tapylýan $\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_{n-r}$ ulgamy (1)-iň çözüwleriniň fundamental ulgamysydyr.Hakykatdan hem setirleri α_i wektorlaryň komponentalary bolan matrisanyň (n-r)-nji tertipli nuldan tapawutly d minorynyň bardygy aýandyr.Ikinji bir tarapdan

$$\beta=(b_1,b_2,..., b_r.b_{r+1},...,b_n)$$

(1) ulgamynyň çözüwe diýsek onuň $\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_{n-r}$ wektorlaryň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyny görmek kyn däldir.

α bilen ($i=1,2,\ldots,n-r$) n-r-ölçegli wektor hököminde seredilýän d kesgitleýjiniň i-nji setirini belgiläliň.Onda

$$\beta=(b_{r+1}, b_{r+2},..., b_n)$$

belgilesek (n-r) sany çyzykly baglanşyksyz $\alpha\check{z}_1,... \alpha\check{z}_{n-r}$ wektorlar bilen $\beta\check{z}$ wektory goşmak bilen bilelikde alynan

$$\alpha_1^{\;1}, \alpha^1{}_2,..., \alpha^1{}_{n-r},\beta^1$$

çyzykyly baglanşykly ulgamydyr.Diýmek käbir $k_1,k_2,\ldots,k_{n-r}$ sanlar bar bolup $\beta^1=k_1\alpha^1{}_1 +k_2\alpha^1{}_2+... +k\,\alpha^1{}_{n-r}$ (*)

deňlik ýerine ýetýändir.

Şunlukda $\delta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}-\beta$

görnüşde kesgitlenilýän n ölçegli wektor (1) ulgamynyň çözüwleriniň çyzykly kombinasiýasy bolmak bilen bu ulgamynyň çözüwidir.Ýöne (*) gatnaşykdan görnüşi ýaly δ çözüwdäki azat näbellileriň ählisiniň bahalary nula deňdirler.Onda (1) ulgamynyň näbellileriň nula deň bahalarynda alynýan ýeke-täk çözüwi nul çözüwdir,ýagny $\delta=0$ bolýandyr.$\beta=k_1\alpha_1+... +k_{n-r}\alpha_{n-r}$

Bellik Teoremadan birjynysly çyzykly deňlemeler ulgamysynyň çözüwleriniň ähli fundamental ulgamylaryna d kesgitleýji hököminde nuldan tapawutly ähli (n-r) tertipli kesgitleýjileri almak bilen eýe bolarys diýmäge esas berýär.

Indi birjynysly we birjynysly däl ulgamylaryň çözüwleriniň arasyndaky baglanşygy öwreneliň. Goý

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\} (2)$$

Ulgamy berilen bolsun.Çyzykly birjynysly deňlemeleriň ýagny(2)-den azat çlenleri nullar bilen çalşyrylyp alynan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\} (3)$$

Ulgamy (2) üçin getirilen dililip aýdylýar.(2) we (3) ulgamylaryň çözüwleri arasyndaky baglanşyklar hakynda indiki häsiýetlerden hem netije çykar mak mümkin.

1. (2) ulgamynyň islendik çözüwi bilen getirlen (3) ulgamynyň islendik çözüwiniň jemi ýene-de (2) ulgamynyň çözüwidir.$C=(c_1,c_2,...,c_n)$-(2) ulgamynyň,$d=(d_1,d_2,...d_n)$-(3) ulgamynyň çözüwleri diýsek $C+d=(c_1+d_1,\dots,c_n+d_n)$ hem (2) –niň çözüwidir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j + d_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}d_j = b_k + o = b_k$$

2. (2) ulgamynyň islendik iki çözüwleriniň tapawudy getirlen (3) ulgamy üçiň çözüwdir.

Hakykatdan hem,eger-de

$C=(c_1,c_2,...,\ c_n)$ we $C^1=(c^1{}_1,c_2{}^1,...,\ c_n{}^1)$ (2) –niň çözüwleri bolsalar $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j - c_j^1) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j^1 = b_k - b_k = 0$

27. Çyzykly giňişlikler

Goý R(a,b,…) elementler köplüginde onuň her bir a we b elemenleriniň jübütine bu köplügiň käbir a+b (olaryň jemi diýilýän) elementini degişli edýän düzgün-goşmak amaly bilen birlikde R köplügiň her bir a elementine we α -hakyky sana R köplügiň a ementiniň α hakyky sana köpeltmek hasyly diýilýän αa ýeke-täk elemntini degişli edýän düzgün-elementiň hakyky sana köpeltmek diýilýän amal kesgitlenen bolsun.Bu köplügiň elementleri wektorlar, onuň özi bolsa hakyky çyzykly giňişlik diýilip atlandyrylýan eger-de bu amallar üçin indiki aksiomalar ýerine ýetýän bolsa

I. Goşmak amaly kommutatiw $a+b=b+a$

II. Goşmak assosiatiw $(a+b)+ca+(b+c)$

III. R köplügiň nul elementi diýän her bir a϶R üçin $a+0=a$ deňligi kanagatlandyrýan ýeke-täk element bardyr.

IV. R köplügiň her bir a elementi üçin oňa garşylykly diýilip atlandyrylýan we $a+(-a)=0$ deňligi kanagatlandyrýan a-nyň garşylyklysy diýilýan –a element bardyr.

V. islendik a,b϶R we α -hakyky san üçin $\alpha(a+b)a=\alpha a+\alpha a$

VI. islendik a϶R we α hem β hakyky sanlar üçin $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$

VII. islendik a϶R we α hem β hakyky sanlar üçin $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$

VIII. islendik a϶R üçin $1*a=a$

Bu aksiomalardan gelip çykýan käbir häsiýetleri belläliň.

1.$\alpha*a=0$ bolsa ýa $\alpha=0$ ýa-da $a=0$ Hakykatdan hem
$\alpha a=\alpha(a+0)=\alpha a+\alpha*0 \Rightarrow \alpha*0=\alpha a-\alpha a=0$.
$\alpha a=(\alpha+0)a=\alpha a+0*a \Rightarrow 0\alpha=\alpha a-\alpha a=0$ Umuman
$\alpha*a=0$ bolup $\alpha\neq 0$ bolsa $a=1*a=\alpha*\alpha^{-1}*\alpha=\alpha^{-1}*0=0$.

2.$\alpha(-a)=-\alpha a$. Hakykatdan hem $\alpha a=+\alpha(-a)=\alpha ä a+(-a)ö=0$

3.$(-\alpha)a=-\alpha a$.Hakykatdan hem $\alpha a+(-\alpha)a=ä\alpha+(-\alpha)öa=0*a=0$

4.$\alpha(a-b)=\alpha ä a+(-b)ö=\alpha a+\alpha(-b)=\alpha a+(-\alpha b)=\alpha a-\alpha b$

5.$(\alpha-\beta)a=ä\alpha+(-\beta)öa=\alpha a+(-\beta)a=\alpha a-\beta a$

Eger-de hakyky çyzykly giňişligiň kesgitlemesindäki sanlar köplüginden bolmalydyklary hakyndaky talap olaryň islendik kompleks sanlar bolup bilmekleri bilen çalşyrylsa biz kompleks çyzykly giňişligiň kesgitlemesine alýarys.Hakyky çyzykly giňişligiň mysaly bolup n-ölçegli hakyky wektor giňişligi hyzmat edip biler.

28. Çyzykly giňişligin bazisi we ölçegi

Elementleri ý,y,… bolan R-erkin hakyky çyzykly giňişligi öwreneliň.

R giňişligiň ý,y,…,z elemntleriniň çyzykly kombinasiýasy diýilip olartyň käbir hakyky sanlar köpeltmek hasyllarynyň islendik jemine aýdylýar.

Kesgitleme 1. Eger-de R giňişligiň ý,y,…z elementleri üçin hiç bolmanda biri nuldan tapawutly $\alpha,\beta,\ldots\mu$ hakyky sanlar bar bolup

$$\alpha ý+\beta y+\ldots+\mu z=0 \quad (1)$$

deňlik ýerine ýetýan bolsa ol elementlere çyzykly baglanşykly diýilýär.

Çyzykly baglanşykly bolmadyk ý,y,...,z elementlere çyzykly baglanşyksyz diýilip aýdylşgara aýdanyňda (1) deňlik diňe $\alpha=\beta=\ldots=\mu=0$ bolanda ýerine ýetýan bolsa ý,y,…,z elementlere çyzykly baglanşyksyz diýilýär.

Teorema 1. R giňişligiň ý,y,…,z elementleriniň çyzykly baglanşykly bolmaklarynyň žerur hem ýetirlik şerti bolup olaryň biriniň galanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolmaklygy hyzmat edýär.

Subuty. 1.Zerurlygy.Göý ý,y,…,z elementler çyzykly baglanşykly bolsun,onda (1= deňlık $\alpha,\beta,\ldots,\mu$ sanlaryň hiç bolmanda biri nuldan tapawutly bolanda ýerine ýetýändir.Kesgitlilik üçin $\alpha\neq 0$ diýeliň,onda $\lambda=-\dfrac{\beta}{\alpha},\ldots,\psi=-\dfrac{\mu}{\alpha}$ belgiläp ý=αy+…μz (2)

bolýandygyna geleris.

2.Ýeterlikligi.Goý ý,y,…,z elementleriň biri (mysal üçin ý) galanlarynyň çyzykly kombinasiýasy bolsan.Bu ýda $\alpha,\ldots,\mu$ sanlar bar bolup (2) deňlik ýerine ýetýär;onda

$$(-1)ý+\lambda y+\ldots+\mu z==0 \quad (3)$$

alynar.-1,λ,...,μ sanlaryň biri nuldan tapawutly bolanlygyna görä ý,y,..., z elementler çyzykly baglanşyklydyrlar.Teorema subut edildi.

Indiki tassyklamalaryň subutlary aňsatdyr.

1. Eger-de ý,y,...,z elementleriň arasynda nul element bar bolsa olar çyzykly baglanşyklydyrlar, ý=0 bolanda (2) $\alpha=1$, $\beta=0$,..., $\mu=0$ ýagdaýda ýerine ýetýär.
2. ý,y,..., z elementleriň käbirleri çyzykly baglanşykly bolsalar olaryň ählisi hem çyzykly baglanşyklydyrlar.

Hakykatdan hem y,…,z çyzykly baglanşykly elementler bolsa hiç bolmanda biri nuldan tapawutly $\beta,\ldots,\mu$ sanlar5 bilen $\beta y+\ldots+\mu z=0$ deňlik kanagatlanar. Onda olar hem-de $\alpha=0$ san bilen (2) deňlik hem dogry bolar.

Kesgitleme. R giňişligiň $l_1,l_2,...,l_n$ çyzykly baglanşyksyz elementlerine bu giňişligiň bazisi diýilip aýdylýar,eger-de R giňişligiň islendik ý elementi üçin $ý_1,ý_2,...,ý_n$ hakyky sanlar bar bolup

$$ý= ý_1 l_1+ý_2l_2+... +ý_n l_n \quad (4)$$

aňlatma ýerine ýetýän bolsa, bu ýagdaýda (4) deňlige ý elementiň $l_1,l_2,...,l_n$ bazise görä ýeke-täk usul bilen dagytmak mümkindir.Goý ý element üçin (4) deňlikde başga-da

$$ý= ý_1^1 l_1+ý_2^1 l_2+... +ý_n^1 l_n \quad (5)$$

dagytma bar bolsun. Onda (4)-den (5) i tarapma-tarap aýryp alarys.

$$(ý_1-ý_1^1)l_1+(ý_2-ý_2^1)l_2 +.... +(ý_n-ý_n^1)l_n = 0 \quad (6)$$

Bazis elementleriň baglanşyksyzdyrlaryna görä (6)-dan

$$ý_1-ý_1^1= ý_2-ý_2^1=... = ý_n-ý_n^1=0$$

Deňlikler gelip çykar.Bu ýerden $ý_1= ý_1^1, ý_2=ý_2^1,..., ý_n=ý_n^1$

Teorema. R çyzykly giňişligiň islendik iki elementi goşulanda olaryň islendik bazise görä koordinatalary hem goşulýarlar,islendik elementi islendik λ sana köpeldilende bolsa bu elementiň ähli koordinatalary hem λ sana köpeldilýärler.

Subuty. Goý $l_1,l_2,...,l_n$ -R giňişligiň islendik bir bazisi bolsun

$$ý=ý_1l_1+ý_2l_2+... + ý_nl_n \text{ we } y= y_1l_1+y_2l_2+... + y_nl_n$$

giňişligiň erkin elementleri diýeliň,onda

$$ý+y=(ý_1+y_1)l_1+(ý_2+y_2)l_2+... + (ý_n+y_n)l_n$$

$$\lambda ý=(\lambda ý_1)l_1+(\lambda ý_2)l_2+... +(\lambda ý_n)l_n$$

deňlikler çyzykly giňişligiň kesgitlemesinden alynarlar.

Kesgitleme. R çyzykly giňişlikde n çyzykly baglanşyksyz elementler bar bolup,onuň islendik (n+1) sany elementleri çyzykly baglaşykly giňişlige n ölçegli diýilip ayar.Şunlukda n sana R giňişligiň ölçegi diýilýär.Adatça R giňişligiň ölçegi dim(R) görnüşde belgilenýär.

Kesgitleme. R çyzykly giňişlikde islän sanyňdaky çyzykly baglanşyksyz elementler bar bolsa oňa tükeniksiz ölçegli diýilýär.

Teorema.Eger-de dim(R) = n bolsa,onda bu giňişligiň islendik n sany çyzykly baglanşyksyz elementleri onuň bazise düzýärler.

Subuty.Goý $l_1,l_2,...,l_n$ -n sany baglanşyksyz elementleriň islendik ulgamysy (şeýle ulgamynyn barlygy kesgitlemeden gelip çykýar) bolsun.Onda R giňişligiň islendik ý elementi bilen bileleikde alynan

$$ý,l_1,l_2,...,l_n$$

Ulgamy çyzykly baglanşyklydyr,ählisi nula deň däl $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$

sanlar bilen

$$\alpha_0 ý+\alpha_1 l_1+... +\alpha_n l_n = 0 \quad (7)$$

$\alpha \neq 0$ bolanlygyndan (tersine ýagdaýda $l_1,l_2,...,l_n$ çyzykly baglanşykly bolardy)

$$x = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_0})l_1+(-\frac{\alpha_2}{\alpha_0})l_2....(-\frac{\alpha_n}{\alpha_0})l_n = x_1^1 l_1 + ... + x_n l_n$$

-erkin ý elementiň $l_1,l_2,...,l_n$ elementleriň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyna eýe bolarys.Teorema subut edildi.

Teorema. Eger R çyzykly giňişlik n elemntden durýan bazise eýe bolsa,onda dim(R)=n

Subuty.Goý $l_1,l_2,...,l_n$ n elemntleriň ulgamysy R giňişligiň bazisi bolsun.Teoremanyň subuty üçin R-iň islendik (n+1) sany $l_1,l_2,...,l_n$ elementleriň çyzykly baglanşyklydyklaryny görkezmek ýeterlikdir.Bu elementlere bazse görä dagytmal bilen

$$Ý_i=a_{i1}l_1+ a_{i2}\, l_2+...+ a_{in}\, l_n,\ i=1,2,....,n+1$$

Deňlikleri alarys.Bu ýerde a_{ik} -käbir hakyky sanlardyr.

$ý_1,ý_2,....,ý_{n+1}$ elementleriň çyzykly baglanşyklylydy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12},..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},..., a_{2n} \\ .... \\ a_{n+1,1}, a_{n+1,2},..., a_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

Matrisanyň setiriniň çyzykly baglanşyklylygy bilen deňdir.Ýöne bu matrisa tertibi n-den ýokary bolan minora eýe bolup bilmez.Onda onuň setirleri çyzykly baglanşyklydyr.Teorema subut edildi.

29. Çyzykly giňişlikleriň izomorflygy.

Birmeňzeş ölçegli dürli çyzykly giňişlikleriň olarda kesgitlenilen amallara görä iş ýüzünde biri-birinden tapawutlanmaýandyklaryny göreliň.

Kesgitleme. Eger-de erkin R we Rž çyzykly giňişlikleriň elementleriň arasynda özara birbelgili degişlilik bar bolup,oňa görä R ginişligiň ý,y, elementlerine Rž giňişligiň ýž,yž elemente ýž+yž islendik λ hakyky san üçin λý elemente λýž element degişli bolsalar bu R we Rž giňişliklere izomorf diýilýär.

Eger-de R we Rž çyzykly giňislikler izomorf bolsalar R giňişligiň nul elementine Rž giňişlikde hem nul element degişlidr.R we Rž çyzykly giňişlikler izomorf bolup, R-iň ý,y,…,z elementlerine Rž-iň ýž,yž,…,zž elementleri degişlilikde degişli bolsalar αý+βy+…+μz çyzykly kombinasiýanyň R-iň nul elementi bolmagynyň zerur hem ýeterlik şerti αýž+βyž+…+μzž çyzykly kombinasiýanyň nula deň bolmaklygydyr.Şeýlelikdeindiki tassyklamar dogrudyrlar.

1.R we Rž izomorf bolsalar olarydaky çyzykly baglanşykly däl elementleriň maksimal sany birmeňzeşdir;

2.Iki izomorf diňişlikler birmeňzeş ölçeglidirler.

Teorema. Islendik iki sany n ölçegli R we Ržçyzykly giňişlikler izomorfdyrlar.

Subudy.R-de käbir $l_1,l_2,...,l_n$ bazisi,Ržbolsa $l_1,l_2,...,l_n$ bazisi saýlalyň.R giňişligiň $ý=ý_1l_1+ý_2l_2+... + ý_nl_n$ elementine Rž-de $ý=ý_1l_1+ý_2l_2+... + ý_nl_n$ elementi degişli edeliň Şeýle usul bilen kesgitlenen degişlilik özara birbelgilidir.

Şeýleleikde bize R-iň ý,y elementlerine degişlilikde Ržiň ýž,yž elementleri degişli bolanlarynda R-iň ý+y hem-de λý (λ-hakyky san) elementlerine degişlilikde Rž-iň ýž+yž hem-de λý elementleriň degişlidiklerini hasaba alaýmak galýar.Teorema subut edildi.

30. Çyzykly giňişlikleriň bölek giňişlikleri

R çyzykly giňişligiň käbir L bölek köplüge indiki talaplary kanagatlandyrsyn.

1. Eger-de ý,y elementler L bölekköplüge degişli bolsalar, ý+y jem hem bu bölekköplüge degişlidir.

2. Eger-de ý element L bölekköplüge degişlli bolsa,islendik λ-hakyky san bolanda λý element hem L bölek köplügiň elementidir.

Ýokarda getirlen 1 we 2 häsiýetlere eýe L bölek köplük üçinm çyzykly giňişlikleriň 8 sany aksiomalarynyň hem ýerine ýetýändiklerine göz ýetirmek kyn däldir.Hakykyatdan hem olaryň 3-nji we 4-njilerinden galanlary R çyzykly giňişligiň ähli elementleri üçin dogrudyrlar.3 we 4 aksiomalaryň dogrudyklary ýэL üçin λ=0 bolanda 0 λ=-1 bolanda ý-iň garşylykly –ý elemente öwrülýänliginden alynar.

Kesgitleme. R çyzykly giňişligiň 1 we 2 häsiýetlere eýe islendik L bölek köplügine bölek giňişlik diýilýär.

R çyzykly giňişligiň bölek giňişliginiň ýonekeý mysaly bolup diňe 0 elementden durýän bölek köplük hem-de Rž giňişligiň özi hyzmat edip biler.Bu bölek giňişliklere hususy bolmadyk diýilýär.

Kesgitleme.R giňişligiň ý,y,…,z elementleriniň $\alpha,\beta,\ldots,\mu$ hakyky sanlar bilen ýazylýan $\alpha ý+\beta y+\ldots+\mu z$ görnüşdäki ähli elementleriniň köplügine ý,y,…,z elementleriň çyzykly gabygy diýilýär we ol L(ý,y,…,z) ýaly belgilenýär. Indiki bir tarapdan ý,y,…,z elementleri özüde saklaýan bölekgiňişlikleriň her biri bu elementleriň islendik çyzykly kombinasiýasyny hem özünde saklaýandyr.Şeýlelikde bu bölekgiňişlikleriň her biri L(ý,y,…,z) gabygy özünde dolulygyna saklaýandyr.

Bu kesgitlemelerden n ölçegli R çyzykly giňişligiň islendik bölek giňişliginiň ölçeginiň n-den uly däldigi gelip çykýandyr.

Ege-de R giňişlikde käbir $l_1,l_2,...,l_n$ bazis saýlanan bolsa onuň L bölek giňişliginiň bazis elementleriniň bu bazise düşmezlikleri hem mümkindir.Ýöne indiki tassyklama dagrudyr.

Teorema1. Eger-de $l_1,l_2,...,l_k$ elementler n-ölçegli R çyzykly giňişligiň k-ölçegli bölekgiňişliginiň bazisini düzýän bolsalar,onda ony R-iň $l_1,l_2,...,l_n$ elementleri bilen baziser bolar ýaly doldurmak mümkindir.

Subudy. Eger-de k<n bolsa,Э l_{k+1}ER bolup $l_1,l_2,...,l_k,l_{k+1}$ çyzykly baglanşyksyz bolar (tersine ýagdaýda dim(R)=k bolar).Soňra,eger-de k+1<n bolsa Э bolup çyzykly baglanşyksyz bolar (tersine ýagdaýda dim=(R)=k+1 bolar).Bu pikir ýöretmeleri dowam edip teoremanyň subudyny alarys.

Teorema 2. dim(L(ý,y,…,z)) ý,y,…,z elementleriň arasyndaky çyzykly baglanşyksyzlarynyň maksimal sanyna deňdir.Husysy ý,y,…,z elementleriň sanyna deňdir.(bu elementleriň özleri bolsa L(ý,y,…,z) gabygyň bazisini düzýärler).

Subuty. ý,y,…,z elementleriň arasynda r sany çyzykly baglanşyksyzlary bar bolup,islendik (r+1) sany bolsa çyzykly baglanşykly bolsun.Onda ý,y,…,z elementleriň her biriniň elementleriň çyzykly kombinasiýasy bolanlygyna görä L(ý,y,…,z) gabygyň her bir elementiniň hem elementleriň çyzykly kombinasiýasy bolanlygyna düşnüklidir.Bu bolsa çyzykly baglanşyksyz elementleriň L(ý,y,…,z) gabygyň bazisini düzýändigini aňladýar.Teorema subut edildi.

31. Bölek giňişlikleriň jemi we kesişmesi

Goý L_1 we L_2 – R çyzykly giňişligiň bölekgiňişlikleri bolsun.R giňişligiň L_1 we L_2 bölekgiňişlikleriň ikisinde degişli bolan ähli elementleriniň toplumyna (ol R-iň bölekgiňişligidigi düşnüklidir) L_1 we L_2 bölekgiňişlikleriň kesişmesi diýilýär.

R giňişligiň ähli y+z,y϶L_1 we y϶L_2 görnüşde aňladylýan elementleriniň köplügi hem L_1 we L_2 bölekgiňişlikleriň jemi diýilip atlandyrylýan bölekgiňişligi emele getirýändirler.

Teorema.Tükenikli ölçegli R çyzykly giňişligiň L_1 we L_2 bölek giňişlikleriniň ölçeglerini jemi olaryň jeminiň we kesişmesiniň ölçegleriniň jemini deňdir.

Subuty. L_0 bilen L_1 we L_2 –leriň kesişmesine L bilen bolsa olaryň jemini belgiläliň.dim(L_0)=k hasap edip,onda

$$l_1,l_2,...,l_n \quad (1)$$

Bazisi saýlalyň. Bilişimize görä (1) bazisi L_1 bölekgiňişligiň

$$l_1,l_2,...,l_n ,g_1,..., g_l \quad (2)$$

Bazisine çenli we L_2 –niň

$$l_1,l_2,...,l_n ,f_1,..., f_m \quad (3)$$

Bazisine çenli dolduralyň. Maksada ýetmek üçin

$g_1,..., g_l$,$l_1,l_2,...,l_n$,$f_1,..., f_m$ (4)

Elementleriň L-niň bazisini düzýändiklerini görkezmek ýeterlikdir.Munuň üçin olaryň çyzykly baglanşyksyzdyklaryny hem-de her bir ý϶L elementiň (4) ulgamynyň üsti bilen çyzykly aňladylýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Ilki bilen

$$\alpha_1 g_1+...+\alpha_l g_l +\beta_1 l_1+... +\beta_k l_k+\mu f_1+... \mu_m f_m=0 \quad (5)$$

Ýa-da $\alpha_1 g_1+...+\alpha_l g_l +\beta_1 l_1+... +\beta_k l_k = -\mu f_1+... \mu_m f_m$ (6)

Bolsun diýeliň(6) –nyň çep tarapynyň L_1-iň,sag tarapyna bolsa L_2-niň elementi bolýandygyna görä olar L_0 bölek giňişligiň elementleridir.Onda (6)-nyň sag tarapy (1) elementleriň käbir çyzykly kombinasiýasydyr $-\mu_1 f_1-...-\mu_m f_m =\lambda_1 l_1+...+\lambda_k l_k$ (7)

(3)-iň bazisdigine görä (7) deňlik diňe bolanlarynda mümkindir.bu ýagdaýda (5) deňlikde alynar,ýöne ol diňe bolanlarynda mümkindir.Diýmek (5) diňe koeffisisentleriň ählisi nula deň bolanlarynda mümkindir.Başgaça aýdanyňda (4) çyzykly baglanşyksyzdyrlar.L jemiň her bir ý elementi (2) we (3) ulgamylaryň çyzykly kombinasiýalary bolan elementleriniň jemi bolanlygyna görä (4) ulgamynyň elementleriniň çyzykly kombinasiýasydyr.Bu diýildigi (4) ulgamy L jemiň bazisidir.Teorema subut edildi.

32. Hakyky Ewklid giňişlikleri

Kesgitleme. Indiki iki sany talaplary kanagatlandyrýan çyzykly giňişlide hakyky Ewklid giňişligi diýilip aýdylýar.

I. R giňişliginiň islendik ý we y elementleri üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýän we (ý,y) görnüşde belgilenýän käbir hakyky sany degişli edýän düzgün kesgitlenen bolsun.

II. Bu düzgün aşakdaky dört aksiomalary kanagatlandyrýar.

1).(ý,y)=(y,ý) (kommutatiwlik);

2).($ý_1$ +$ý_2$y)=(ý,y)+($ý_2$,y) (assasiatiwlik);

3).(λý,y)=λ(ý,y), islendik λ hakyky san üçin (birjynysly)

4).(ý,ý)>0,eger-de ý$\neq$ 0 bolsa ;(ý,ý)=0,eger-de ý=0 bolsa.

33. Koşi-Bunýakowskiniň deňsizligi

Teorema. Her bir Ewklid gişliginde islendik iki sany ý,y elementleri üçin Koşi –Bunýankowskiý deýilýän (ý,y)^2<=(ý,ý)(y,y) (1) deňsizlik dogrudyr.

Subuty. Her bir λ hakyky san üçin skalýar köpeltmäniň dördünji aksiomasyna görä (λý-y,λý-y)=>0

bolup, beýleki aksiomalardan gelip çykýar.Ýöne ol deňsizligiň zerur hem ýeterlik şerti çep tarapyndaky kwadrat üç çleniň diekriminantynyň polozitel däldigi hyzmat edýändir.

$$(ý,y)^2\text{-}(ý,ý)(y,y)<= 0 \quad (2)$$

Diýmek tassyklama adalatlydyr.teorema subut edildi.

Kesgitleme. Eger-de çyzykly R giňişligi üçin

I.Onuň her bir ý elementi üçin bu elementiň normasy (ýa-da uzynlygy)diýilýän we ||ý|| görnüşde belgilenýän käbir hakyky sany degişli edýän düzgün kesgitlenen bolsa,

II.Bu düzgün indiki üç sany aksioma tabyn bolsa

1) ||ý||>0,eger-de ý$\neq$ 0 we ||ý||=0 eger-de ý=0 bolsa;

2) ||λý||=|λ| ||ý|| deňlik islendik ý element we λ-hakyky san üçin ýerine ýetýän bolsa;

3) Islendik iki sany ý we y elementler çüin üçburçluk (ýa-da Minkowskiý) deňsizligi diýilýän

||ý+y||<=||ý||+||y|| (3)

densizlik dogrudyr.

Tapallar ýerine ýetýän bolsa,oňa normirlenen diýilýär.

Teorema. Her bir Ewklid giňişliginiň ý elementiniň normasyny

||ý||= $\sqrt{(x,x)}$ (4)

deňlik bilen kesgitläp ony normirlenen etmek mümkindir.

Subuty. Kesgitlemäniň ikinji talabynyň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.Normanyň 1-nji aksiomasy skalýar köpeltmäniň 4-nji häsiýetinden,2-nji aksiomasy bolsa skalýar köpletmäniň 1-nji we 3-nji aksiomalarynda dogrudygyny barlamak ýeterlikdir.Koşi-Bunýokowskiý deňsizligini

|(ý,y)|<= $\sqrt{(x,x)*}\ \sqrt{(y,y)}$

görnüşde ýazyp,bu ýazgydan hem-de skalýar köpeltmäniň aksiomalaryndan we normanyň kesgitlemesinden peýdalanmak ýeterlikdir.

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,(x+y)} = \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} <=$$

$$<= \sqrt{(x,x)+2\sqrt{(x,x)\sqrt{(y,y)}}\,(y,y)} =$$

$$= \sqrt{\left[\sqrt{(x,x)}+\sqrt{(y,y)}\right]^2} = \|x\|+\|y\|$$

Teorema subut edildi.

Netije.Elementiň normasy (4) deňlik bilen kesgitlenýän Ewklid giňişliginiň islendiginde Minkowskiý deňsizligi adalatlydyr.

Islendik hakyky Ewklid giňişliginiň islendik iki ý we y elementleriniň arasyndaky burç diýilip kosinusy.

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|*\|y\|} = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}$$

formula bilen kesgitlenýän 0-dan Π-e çenli üýtgeýän φ burça aýdylýar.Koşi-Bunýakowskiý deňsizliginden soňky deňligiň sag

tarapynyň 1-den uly däldigini görýaris.
Ewklid giňişliginiň iki ý we y elementiniň skalýar köpletmek hasyly nula deň bolsa,olara ortagonal diýilýär.Bu ýagdaýda olaryň arasyndaky φ burçyň kosinusy nula deňdir.Wektor algebrasyna salgylanmak bilen ý we y ortogonal wektorlaryň üstünde gurulan üçburçlygyň gipotenuzasy diýip ý+y jemi atlandyrmak bilen islendik Ewklid giňişliginde Pifagoryň teoremasynyň adalatlydygyna ynanarys.Hakykyatdan hem ý we y ortogonal bolanlarynda (ý,y)=0 deňligi nozara almak bilen
$||ý+y||^2=(ý+y,ý+y)=(ý,ý)+2(ý,y)+(y,)=(ý,ý)+(y,y)=$
$=||ý||^2+||y||^2$
Soňky häsiýet n sany jübüt-jübitden ortogonal elementleriň jemi üçin hem dogrudyr.
$z=ý_1+ý_2+\ldots+ý_n$- iki bir ortogonal elementleriň jemi diýsek
$||z||^2=(ý_1+ý_2+\ldots ý_n,ý_1+ý_2+\ldots ý_n,)=(ý_1,ý_1)+(ý_2,ý_2)+\ldots+(ý_n,ý_n)=$
$=||ý_1||^2+||ý_2||^2+\ldots+||ý_n||^2$.

34. Ortogonallaşdyrma

Ýewklid giňişliginiň $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlary üçin $(\vec{a},\vec{b})=0$ bolsa, olara ortogonal diýilip aýdylýar.

Kesgitlemä görä $\vec{0}$ wektoryň islendik $\vec{b}$ wektor bilen ortogonaldygy aýandyr:

$$(\vec{0},\vec{b})=(0*\vec{a},\vec{b})=0*(\vec{a},\vec{b})=0\,.$$

Wektorlar ulgamynyň islendik iki b wektorylary ortogonal bolsalar,bu ulgamyň özünehem ortogonal diýilip aýdylýar.

Teorema 1. Nol däl wektorlaryň islendik ortogonal ulgamy çyzykly baglanşyksyzdyr.

Bu tassyklamanyň subudyny almak üçin

her bir $1\le i\le k$ nomerde $\vec{a}_i\ne 0$ $((\vec{a}_i,\vec{a}_i))>0$ we islendik

$1\le i\ne j\le k$ nomerlerde $(\vec{a}_i,\vec{a}_j)=0$ bolan $\vec{a}_1,a_2,\ldots\vec{a}_k$

wektorlar ulgamy käbir $\vec{\alpha_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_k}$ hemişelik sanlar bilen

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_k \vec{a_k} = 0 \qquad (1)$$

deňligi kanagatlandyrýar diýip hasap etsek

$$(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{a_j}, \vec{a_i}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\vec{a_j}, \vec{a_i}) = \alpha_i (\vec{a_i}, \vec{a_i}) = 0$$

deňligiň $\alpha_i = 0$ bolanda mümkindigini alarys. Onda (1) deňlik diňe ähli $\alpha_i = 0$ bolanda mümkindir. Bu bolsa aýdylan tassyklamanyň özüdir. Bu tassyklamanyň käbir manyda üstüni ýetirýän indiki ortogonallaşdyrma hem adalatlydyr.

Teorema 2 Islendik k sany çyzykly baglanşyksyz wektorlaryň ulgamyndan k sany nol däl wektorlardan durýan ortogonal ulgamy almak mümkindir.

Subudy Hakykatdan hem $\vec{\alpha_1}, \vec{a_2}, ...\vec{a_k}$ çyzykly baglanşyksyz wektorlar ulgamy bolsa täze alynýan ulgamyň birinji $\vec{b_1}$ wektory onuň ilkinji $\vec{a_1}$ wektory bilen gabat gelýar, ýagny $\vec{b_1} = \vec{a_1}$, diýip hasap edýäris.Soňra täze ulgamyň ikinji $\vec{b_2}$ wektoryny $\vec{b_2} = \alpha_1^{(1)} \vec{b_1} + \vec{a_2}$ deňlik bilen kesgitläp $\vec{b_2} \neq 0$ hasaba alyp, $\alpha_1^{(1)}$ koeffisiýenti $(\vec{b_1}, \vec{b_2}) = 0$ şerden kesgitläris:

$$\alpha_1^{(1)} (\vec{b_1}, \vec{b_1}) + (\vec{b_1}, \vec{a_1}) = 0$$

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{(\vec{b_1}, \vec{a_2})}{(\vec{b_1}, \vec{b_1})}$$

Şu usulda dowam etmek bilen eýýäm nol däl wektorlaryň

$$(\vec{b_1}, \vec{b_2} \; ..., \vec{b_l})$$

ortogonal ulgamy alynan,şunlukda her bir $\vec{b_i}$ wektor $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \; ...\vec{a_i}$, wektorlaryň käbir çyzykly kombinasiýasy ýaly kesgitlenen diýip hasap edip, $\vec{b}_{l+1}$ wektory

$$\vec{b}_{l+1}=\alpha_1^{(1)}\vec{b}_1+\alpha_2^{(2)}\vec{b}_2+...+\alpha_l^{(l)}\vec{b}_l+\vec{a}_{l+1}$$

görnüşde kesgitläris. (bu ýagdaýda $\vec{b}_{l+\_1}$ wektor $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ ...\vec{a}_{l+1},$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy bolmak bilen noldan tapawutlydyr.) Islendik $1\le i\le l$ nomer üçin

$$(\vec{b}_{l+1},\vec{b}_i)=\sum_{j=1}^{l}\alpha_j^{(l)}(\vec{b}_j,\vec{b}_i)+(\vec{b}_i,\vec{a}_{l+1})=\alpha_1^l(\vec{b}_i,\vec{b}_i)+(\vec{b}_i,\vec{a}_{l+1})=0$$

Bolýanlygyndan $\alpha_i^l=-\dfrac{(\vec{b}_i,\vec{a}_{l+1})}{(\vec{b}_i,\vec{b}_i)}$ bahalary kesgitläris.Şeýle dowam etdirme bilen aýdylan ortogonal ulgama eýe bolarys.

35. Kompleks Ýewklid giňişlikleri

Hakyky çyzykly giňişligiň kesgitlemesinde ulanylan λ , μ ,... sanlar hakyky sanlar köplüginden alnypdy. Egerde bu talapden ýüz öwürsek,ýagny λ , μ ,... sanlar islendik kompleks sanlar bolmaklary mümkin diýsek,onda biz kompleks çyzykly giňişligi düşünjesine eýe bolarys. Hakyky çyzykly giňişlik üçin öwrenilen häsiýetleriň ählisi diýen ýaly kompleks çyzykly giňşliginde hem dowam etdirilme höküminde öwrenilýändir.

Indi kompleks Ýewklid giňişligini kesgitläliň:
Kompleks çyzykly giňişliginde

I. her bir iki $\vec{x}$ *we* $\vec{y}$ elementlere olaryň skalýart köpeltmek hasyly diýilip atlandyrylýan hem-de $(\vec{x},\ \vec{y})$ görnüşinde belgilenýär käbir kompleks sany degişli edýän düzgün kesgitlenen;
II aýdylan bu düzgün indiki dört sany talaplara tabyn bolsa :

1) $(\vec{x},\ \vec{y})=(\vec{y},\ \vec{x})$;

2) $(\vec{x}_1+\vec{x}_2,\ \vec{y})=(\vec{x}_1,\vec{y})+(\vec{x}_2,\vec{y})$;

3) islendik α -kompleks san üçin $(\alpha\vec{x},\ \vec{y})=\alpha(\vec{x},\ \vec{y})$;

4) $(\vec{x},\ \vec{x})$- $\vec{x}$ wektoryň skalýar kwadraty diňe $\vec{x}=\vec{0}$ bolanda nola deň bolan otrisatel däl hakyky sandyr.

talaplar ýerine ýetýän bolsa, onda ol kompleks Ýewklid (ýa-da unitar) giňişligi diýilýär.

Kesgitlemeden $(\vec{x},\ \alpha\vec{y})=\alpha(\vec{x},\ \vec{y})$, bu ýerde $\alpha-$ α kompleks sanyň çatyrymlysy $(\vec{y},\vec{x}_1+\vec{x}_2)=(\vec{y},\ \vec{x}_1)+(\vec{y},\ \vec{x}_2)$ gatnaşyklary almak aňsatdyr.

Hakyky Ýewklid giňişliginde adalatly häsiýetleriň köpüsini, kesgitlemedäki tapawutlanmalary nazara alanyňda, kompleks Ýewklid giňişliginde hem tassyklamak mümkindir.Mysal üçin, islendik kompleks Ýewklid giňişliginde Koşi- Bunýakowskiý deňsizligi indiki ýalydyr:

$$\left|(\vec{x},\ \vec{y})^2\right|\le\ (\vec{x},\ \vec{x})\ *\ (\vec{y},\ \vec{y})$$

36. Ortonormirlenen bazis.

Ewklid giňişliginde ortonormirlenen diýilip atlandyrylýan has oňaýly bazisler bardyr.(Çyzykly giňişlikde ähli basiz;er deňdüýçlidirler)

Kesgitleme.Eger- de n-ölçegli Ewklid giňişliginiň $l_1,l_2,...,l_n$ elementleri üçin

$$(l_i,l_k)=\begin{cases}1, i=k bolanda,\\ 0, i\neq k bolanda\end{cases}(1)$$

deňlikler dogry bolsalar,onda bu elementler ortonormirlenen bozisi emele getirýärler diýilip aýdylýar.

Kesgitlemäniň korrektligini görkezmek üçin (1) şerti kanagatlandyrýan $l_1,l_2,...,l_n$ elementleriň baglanşyksyzdygyny görkezmek ýeterlikdir. Eger-de $\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+...+\alpha_n l_n = 0$ (2) doýsak,islendik 1<=k<=n nomer üçin bu deňligi l_k elemente skalýar köpletdip taparys:$\alpha_k=0$ onda (2) diňe $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ bolanlarynda mümkindir.

Teorema. Islendik n –ölçegli ewklid giňişliginiň ortonoormirlenen bazise bardyr.

Subutyny getirmän berilen n sany baglanşyksyz $f_1,f_2\dots,f_n$ sany elementleriň ulgamysyndan normalary bize deň özara (ikibir) ortogonal $l_1,l_2,...,l_n$ elementleriň ulgamysyny almaklygyň algoritmini görkezeliň: Bu algoritim adatça $f_1,f_2\dots,f_n$ -çyzykly baglanşyksyz elementleri ortogonallaşdyrmak prosessi diýilip atlandyrylýar.

Bellik.Her bir n-ölçegli Ewklid giňişliginde dürli ortonormirlenen bazisler bardyr.Hakykatdan hem çyzykly baglanşyksyz $f_1,f_2\dots,f_n$ elementlerden ortogolaşdyrmak prosessi bilen ortonormirlenen bazis gyrylanda dürli f_k elementlerden başlamak bilen dürli ortonormirlenen bazisleri almak mümkindir.

$$(ý,y)=ý_1y_1+ý_2y_2+\dots +ý_ny_n$$

Görnüşi ýaly islendik iki elementleriň ortonormirlenen bazisde skalýar köpeltmek hasyly bu eleemntleriň degişli koordinatalarynyň köpletmek hasyllarynyň jemine deňdir.

Indi n-ölçegli Ewklid giňişliginiň ortonormirlenen bolmagy hökman bolmadyk erkin bazisi $f_1,f_2\dots,f_n$ berilipdir.

Eger-de $f_1,f_2\dots,f_n$ n-ölçegli Ewklid giňişliginiň käbir ortonormirlenen bazisi bolsa we $f_1,f_2\dots,f_n$ diýsek,islendik 1<=k<=n nomer üçin

$$(x,l_k\_)=(\sum_{i=1}^{n}x_il_i,l_k)=\sum_{i=1}^{n}x_i(l_i,l_k)=x_k$$

Bu diýildigi ortonormirlenen bozise görä islendik elementiň koordinatalary bu elementiň degişli bazis elementlere skalýar köpletmek hasyllaryna dňdiginio aňladýandyr.

Kesgitleme.E giňişliginiň G bölekgiňişligiň her bir ý elementine ortogonal y elementleriniň ählisiniň F köplügine G-niň ortogonal doldurgyjy diýilip aýdylýar.

F köplügiň özüniň hem bölek giňişligi emele getirýändigini görmek kyn däldir.

Indiki tassyklamany belläliň.

Teorema. Her bir n-ölçegli Ewklid E giňişligi özüniň islendik G bölek giňişliginiň hem-de onuň ortogonal F doldurgyjynyň göni jemidir.

37. Ewklid giňişlikleriniň izomorflygy

Kesgitleme. Eger-de E we Ež Ewklid giňişlikleriniň elementleriniň arasynda öz-ara bir belgili degişlilik bar bolup oňa görä E-niň ý,y elementlerine Ež de degişlilikde ýž,yž elementler degişli bolanlarynda ý+y elemente ýž+yž element,islendik λ –hakyky san bilen λý elemente λýž element degişli bolup (ý,y)=(ýž,yž) deňlik ýerine ýetýän bolsa bu giňişliklere izomorf diýilýär.
Diýmek Ewklid E we Ež giňişlikleriniň izomorf bolmaklary üçin olar çyzykly giňişlikleriň izomorflyk talaplaryny kanagatlandyrmak bilen birlikde bu izomorflyk skalýar köpeltmäniň ululygyny hem saklamagy gerek eken.
Teorema.Ähli n ölçegli Ewklid giňişliklri öz-ara izomorfdyrlar.
Subuty. Hakykatdan hem n-ölçegli E we Ež Ewklid giňişliklerinde degişlilikde $l_1,l_2,...,l_n$ (l) hem-de $l_1,l_2,...,l_n$ (lž) bazisleri alyp E-niň her bir $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i$ elementine Ež-de $a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i$ elementi degişli etsek, bu egişligiň çyzykly giňişlikleriň izomorflyk şertini kanagatlandyrýandygyny,şeyly hem

$$b=\sum_{i=1}^{n}b_i l_i,\quad b`=\sum_{i=1}^{n}b_i l`_i \text{ bolanlarynda } (a,b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=(a`,b`)$$

deňlikleriň kanagatlanýandyklaryny alarys.
Teorema subut edildi.
Kesgitleme. Kompleks çyzukly R giňişligi indiki talaplary.
Bu düzgün aşakdaky dört aksıomalara tabyn bolsun.

1) (ý,y)=(y,ý)
2) (ý+ý,y)=(ý,y)+(ý,y)
3) (λý,y)==λ(ý,y)
4) (ý,ý)-käbir otrisatel bolmadyk hakyky san bolup diňe ý=0 bolanda nula deňdir. Kanagatlandyrýan bolsa,oňa kompleks Ewklid giňişligi diýilip aýdylýar.

Kesgitlemeden (ý,λy)=λ(ý,y) we $(ý,y_1+y_2)+(ý,y_2)$ gatnaşyklar aňsat alynýar.

38.Toparyň kesgitlemesi

Goý, G tükenikli ýa-da tükeniksiz elementli käbir köplük bolsun.Bu köplügiň elementleri bolup sanlar, matrissalar,özgertmeler we ş.m hyzmat edip bilerler.

Goý, G köplügiň elementleri üçin käbir $*$ amal kesgitlenen bolsun.

Kesgitleme. Eger G köplükde kesgitlenen $*$ amal:

1.G köplügiň a we b elementleri üçin

$$A * b \in G$$

2.G köplügiň islendik a.b we c elementleri üçin, assosiatiwlik kanuny dogrudyr,ýagny

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

3.G köplükde käbir e element bar bolup, bu köplügiň islendik a elementi üçin

$$a * e = e * a$$

ýerine ýetýändir:

4. G köplügiň her bir a elementi üçin,bu köplükde $\tilde{a}$ element tapylan

$$a * \tilde{a} = \tilde{a} * a = e$$

ýerine ýetýändir:

şertleri kanagatlandyrýan bolsa,onda G köplüge $*$ amala görä topar emele getirýär diýilýär.

Eger G toparyň islendik a we b elementleri üçin

$a * b = b * a$

kommutatiwlik ýerine ýetýän bolsa,onda bu topara kommutatiw ýa-da abel topary diýilýär.

Eger toparyň elementleriniň sany tükenikli bolsa,onda oňa tükenikli topar: elementleri tükeniksiz bolan ýagdaýda bolsa, tükeniksiz topar diýilýär.

Tükenikli toparyň elementleriniň sanyna onuň tertibi diýilýär. Geljekde biz G toparyň tertibini $|G|$ simbol bilen belgilejekdiris.

Eger toparda goşmak amaly kesgitlenen bolsa,onda oňa additiw topar, köpeltmek amaly kesgitlenende bolsa,multiplikatiw topar diýilýär.

Geljekde biz e elementi additiw topar üçin nul element,beýleki toparlar üçin bolsa birlik element diýip atlandyrjakdyrys.Bu toparlar üçin $\tilde{a}$ elementi degişlilikde a elementiň garşylykly we ters elementi diýip atlandyrjakdyrys.

Indi toparlaryň,aşakdaky mysallaryna seredeliň.

Mysal 1.Bitin sanlaryň köplüginiň goşmak amalyna görä topar emele getirýändigini görkezmeli.

Çözülişi.

Goşmak amaly berlen köplügiň elementleri üçin 1-4 şertleri kanagatlandyrýandygyny görkezeliň

Iň.Islendik iki bitin sanyň jemi ýene-de bitin sandyr.

2ň.Goşmak amaly assosiatiwdir.

3ň.Islendik bitin K san üçin

$$K+0=0+K=K$$

4ň.Islendik bitin K san üçin $(-K)$ ýene-de bitin san bolup

$$K+(-K)=-K+K=0$$

ýerine ýetýändir.

Şeýlelikde,biz bitin sanlaryň tükeniksiz additiw abel toparyny alarys.

Mysal 2.Bitin sanlaryň köpeltmek amalyna görä topar emele getirmeýändigini görkezmeli.

Çözülişi.

Bu ýerde 4-nji şert ýerine ýetmeýär.Sebäbi K bitin sanyň ters K^{-1} elementi bitin san däldir $(birden\ başga\ sanlar\ \text{üçin})$.

Mysal 3.

G=$\{1,-1\}$ köplügiň multiplikatiw abel topar bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.

Iň. $1\cdot(-1)=-1;\ -1\cdot(-1)=1; 1\cdot 1=1$

2ň. bu amalyň assosiatiwligi duşnüklidir:

3ň. $-1\cdot 1=1\cdot(-1)=-1$. Bu ýerde e=1:

4ň. $-1\cdot(-1)=1$

Bu toparyň tertibi 2-ä deňdir,ýagny $|G| = 2$.

Mysal 4. 2-nji tertipli kwadrat matrisalaryň

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

köplüginiň 6-nji tertipli multiplikatiw topary emele getirýändigini görkezmeli.

Çözülişi.

I ň.Bu matrisalaryň islendik ikisiniň köpeldilmegi ýene-de şol matrisalaryň haýsy hem bolsa birine deňdir.

$E \cdot A_i = A_i\ (i = 0,1,2,3,4,5),\ A_1 \cdot A_2 = A_5, A_1 \cdot A_3 = A_4,\ A_1 \cdot A_1 = E,$

$A_1 \cdot A_4 = A_3,\ A_1 \cdot A_5 = A_2, A_2 \cdot A_3 = A_5, A_2 \cdot A_4 = A_1, A_2 \cdot A_2 = E$

$A_3 \cdot A_4 = A_2, A_3 \cdot A_5 = A_1, A_4 \cdot A_5 = E, A_3 \cdot A_3 = E, A_4 \cdot A_4 = A_5; A_5 \cdot A_5 = A_4$

2ň $(A_i \cdot A_j) \cdot A_k = A_i \cdot (A_j \cdot A_k), (i, j, k = 0,1,2,3,4,5)$

3ň. $E \cdot A_i = A_i \cdot E = A_i,\ (i = 1,2,3,4,5)$

4ň. $E \cdot E = E, A_1 \cdot A_1 = E, A_2 \cdot A_2 = E, A_3 \cdot A_3 = E, A_4 \cdot A_5 = A_5 \cdot A_4 = E$

Bu ýerden görnuşi ýaly

$$E^{-1} = E, A_2^{-1} = A_2,\ A_3^{-1} = A_3, A_4^{-1} = A_5, A_5^{-1} = A_4$$

bolýandyr.Bu topar abel topary däldir.

Gönükmeler.

Aşakdaky köplükleriň berlen amallara görä topar emele getirýändiklerini ýa-da getirmeýändiklerini kesgitlemeli.

I.Aýyrmak amalyna görä, bitin sanlaryň köplügi.

2.Köpeltmek amalyna görä,palažitel sanlaryň köplügi.

3. Köpeltmek amalyna görä,moduly bire deň bolan kompleks sanlaryň köplügi.

4. $a * b = a^b$

görnüşde kesgitlenen amala görä,palažitel sanlaryň köplügi.

5.Köpeltmek amalyna görä,n-nji tertipli aýratyn däl kwadrat matrisalaryň köplügi,

6. Köpeltmek amalyna görä,biriň $\sqrt[n]{1}$ köküniň bahalarynyň köplügi.

39.Simmetrik we alamaty çalyşýan toparlar

Goý bize n elementden ybarat bolan ýerleşdirme berlen bolsun.Eger biz bu ýerleşdirmede iki elementiň ýerini çalşyrsak,onda başga bir ýerleşdirmäni alarys. Şonuň üçin ýerleşdirmelere çalşyrmalar hem diýilýär.

n elementden düzülen hemme çalşyrmalaryň sany n! deňdir.Bu çalşyrmadan beýleki çalşyrma geçlende,haýsy elementleriň ýerlerini çalşyrylýandygyny bellemek üçin ornuna goýma termini ulanylýar.Sebäbi bu ýerde her bir elementiň ornuna başga käbir element goýulýar (element öz ornunda üýtgedilmän hem galdyrylýar).

Goý bize I,2,3,4 sanlardan düzülen 2I43 we 432I çalşyrmalar berlen bolsun.Bu çalşyrmalaryň birinjisinden ikinjisine geçlende 2-iň ornuna 4, I-iň ornuna 3,4-ornuna 2,3-ornuna bolsa I goýulýar.

Seredilen ornunagoýmany

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

görnüşde ýazalyň.Ornunagoýmada sanlaryň ýerleşişleri möhüm bolman, haýsy sanyň haýsy san bilen çalşyrylýandygy möhümdir.Şonuň üçin ýokardaky ornunagoýmany

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

görnüşde ýazmak bolar.

Goý bize iki sany

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

we

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ornunagoýmalar berlen bolsun.Bu ornunagoýmalaryňyzygider ýerine ýetirilmesi bize C ornunagoýmany berer. C ornunagoýmany tapalyň: A-da $1 \to 3, B - de\, 3 \to 3$ diýmek C-de $1 \to 3$: A-da

$2 \to 1$.B-de $1 \to 4$,diýmek C-de $2 \to 4$: A-da $3 \to 2$.B-de $2 \to 1$,diýmek C-de $3 \to 1$:A-da $4 \to 4$.B-de $4 \to 2$,diýmek C-de $4 \to 2$.

Şeýlelikde, C=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ornunagoýmany alarys.C ornunagoýma A ornunagoýmanyň B ornunagoýma köpeldilmesi diýilýär we C=A$\cdot B$ belgilenilýär.

Ornunagoýmalary köpeltmek kommutatiwlik kanunyna tabyn däldir, ýagny $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Käbir hususy ýagdaýlarda kommutatiwlik kanunynyň dogry bolmagy hem mümkindir.

Indi ornunagoýmalary köpelmekde assosiatiwlik kanunyny dogrylygyny görkezeliň.

Ornunagoýmany gysgaça $\binom{r}{s}$ simbol bilen belgiläliň.Bu ýerde r berlen sanlary I-nji setirdäki ýerleşmesi,S-bolsa olaryň 2-nji setirdäki ýerleşmesidir.B ornunagoýmany biz $\binom{S}{t}$ görnüşde ýazalyň.Sebäbi B-niň sütünleriniň ýerini çalşyryp, ony $\binom{S}{t}$ görnüşde getirmek mümkindir. C ornunagoýmany bolsa $\binom{t}{u}$ Gňrnüşde ýazalyň. Onda.

$$A \cdot B = \binom{r}{s}\binom{S}{t} = \binom{r}{t}$$

we

$$BC = \binom{S}{t}\binom{t}{u} = \binom{S}{u}$$

alarys. Bu ýerden,

$$(AB)C = \binom{r}{t} \cdot \binom{t}{u} = \binom{r}{u}$$

we

$$A(BC) = \binom{r}{s} \cdot \binom{s}{u} = \binom{r}{u}$$

alarys.Şeýlelikde.

$$(AB) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

ýagny ornunagoýmalar üçin assosiatiwlik kanunyny alarys.

Indi I -nji we 2-nji setirleri gabat gelýän

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Ornunagoýma seredeliň.Bu ornunagoýma birlik ňýa-da toždestwolaýynň ornunagoýma diýilýär.Ol ornunagoýmalary köpeltmekde I –iň roluny ýerine ýetirýär.Bu ýerde berlen I,2,3,...., sanlardan düzülen islendik A ornunagoýma üçin

$$A\cdot E = E\cdot A = A$$

deňligiň dogrydygyna göz ýetirmek kyn däldir.

Eger biz berlen A ornunagoýmanyň I–nji we 2-nji setirleriniň ornuny çalşyrsak,onda täze ornunagoýmany alarys.Oňa A-nyň ters ornunagoýmasy diýilýär we A^{-1} görnüşde belgilenilýär.Bu ýerde

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$$

bolýanlygyna göz ýetirmek kyn däldir.

Ýokardaky aýdylanlardan I,2,3,...,sanlardan düzülen ornunagoýmalaryň köplüginiň multiplikatiw topar emele getirýändigi gelip çykýar.Onuň tertibi bolsa n! deňdir.Bu topara n-nji derejeli simmetrik topar diýilýär we S_n bilen belgilenilýär.

Eger ornunagoýmanyň setirlerindäki tertipsizlikleriniň ňinwersialaryňň jemi jübüt bolsa, onda oňa jübüt ornunagoýma,täk bolan ýagdaýynda bolsa täk ornunagoýma diýilýär.S_n toparda $\frac{n!}{2}$ sany jübüt ornunagoýma bardyr.Olaryň köplügi topar emele getirýändir.Ol topara alamaty çalyşýan topar diýilýär we A_3 bilen belgilenilýär.

Eger biz täk ornunagoýmany täk ornunagoýma köpeltsek ýa-da jübüt ornunagoýmany jübüt ornunagoýma köpeltsek, onda jübüt ornunagoýma alarys.

Täk we jübüt ýa-da jübüt we täk ornunagoýmalaryň köpeldilmesi bolsa bize täk ornunagoýma berer.

Indi bolsa,alamaty çalyşýan toparyň mysalyna seredeliň.

Mysal. 3-nji derejeli jübüt ornunagoýmalaryň köplüginiň tertibi $\frac{3!}{2}$ deň bolan alamaty çalyşýan multiplikatiw topary emele getirýändigini görkezmeli.

Çözülüşi.

3-nji derejeli ornunagoýmalaryň hemmesi

$$S_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

S_3 topary emele getirýändir, ýagny

$S_3 = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$.

Bu topardaky S_0, S_3, S_4 ornunagoýmalar jübütdirler. Olartň topar bolmaklygyň I-4 şertlerini kanagatlandyrýandyklaryny görkezeliň.

I. $S_0 \cdot S_i = S_i \cdot S_0 = S_0 \quad (i = 0,3,4),$

$$S_3 \cdot S_4 = S_4 \cdot S_3 = S_0$$

2. Ýokarda görkezilşi ýaly:

$(S_i \cdot S_j)S_k = S_i \cdot (S_j \cdot S_k), (i, j, k = 0,3,4),$

3. $S_i \cdot S_0 = S_0 \cdot S_i = S_i \quad (i = 0,3,4),$

4. $S_0 \cdot S_0 = S_0, \quad S_3 \cdot S_4 = S_4 \cdot S_3 = S_0$,

$$S_3^{-1} = S_4, S_4^{-1} = S_3$$

Diýmek, $A_3 = \{S_0, S_3, S_4\}$ we $|A_3| = 3$.

Gönükmeler.

I. Ornunagoýmalarda assosiatiwlik kanunyny barlamaly:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Ornunagoýmalarda assosiatiwlik kanuny barlamaly:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Ornunagoýmanyň ters ornunagoýmasyny tapmaly:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

40. Bölektoparlar

Kesgitleme I. Eger G toparyň A bölekköplügi bu toparda kesgitlenen amala görä topar emele getirýän bolsa, onda A bölekköplüge G toparyň bölektopary diýilýär.

Teorema. Eger A we B G toparyň bölektoparlary bolsa,onda A$\cap$B, ýagny A we B bölektoparlaryň ikisine-de degişli bolan elementleriniň köplügi hem G-nyň bölektoparlarydyr.

Subudy. Teoremany subut etmek üçin A$\cap$B kesişmäniň elementleriniň G toparda kesgitlenen amala görä birinji paragrafdaky I-4 şertleri kanagatlandyrýandygyny barlamak ýeterlikmidir.

I.Goý x we y A$\cap$B kesişmä degişli bolan erkin elementler bolsun,onda $x, y \in$ A we $x, y \in$ B A-nyň we B-nyň G toparyň bölektoparlary bolmaklaryndan $x * y \in$ A we $x * y \in$ B alarys.Bu ýerden bolsa $x * y \in$A$\cap$B gelip çykýar.

2. A$\cap$B kesişmäniň elementleri G topardan alnan elementlerdir.G toparyň elementleri üçin bolsa assosiatiwlik kanuny dogrudyr.

3. A we B bölektoparlarda birlik element bardyr, ýagny e $\in$ A we e $\in$ B. Bu ýerden e $\in$ A$\cap$B gelip çykýar.

4.Goý x A $\cap$B kesişmäniň erkin elementi bolsun,onda $x \in$ A we $x \in$ B.

Bölektoparlaryň kesgitlemesine görä A we B bölektoparlarda

$$x * \hat{\tilde{x}} = \hat{\tilde{x}} * x = e$$

şerti kanagatlandyrýan $\hat{\tilde{x}}$ element bardyr.Bu ýerden, $\hat{\tilde{x}} \in$A$\cap$B gelip çykýar.

Subut eden teoremamyzdan aşakdaky netijäniň gelip çykýandygyny görkezmek kyn däldir.

Netije. G toparyň bölektoparlarynyň islendik sanysynyň kesişmesi ýene-de G toparyň bölektoparydyr.

G toparyň diňe e elementden ybarat bolan bölekköplüginiň hem bölektopar bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir.Oňa G-niň birlik bölektopary diýilýär.G toparyň özüne hem G-niň bölektoparlarynyň biri hökmünde garamak bolar.

Kesgitleme 2. G toparyň birlik we özüne deň bolmadyk, ýagny $A \neq e$ we $A \neq G$ bölektoparlaryna onuň hususy bölektopary diýilýär

Indi G-toparyň käbir S bölekköplügine seredeliň.Bu bölekköplügi özünde saklaýan G toparyň hemme bölektoparynyň maşgalasyny $\{H_i / i\epsilon\mathrm{I}\}$ bilen belgiläliň. Onda ýokardaky netijä görä bu bölektoparlarynyň kesişmesi

$$< S >= \bigcap_{\{i\epsilon\mathrm{I}: S\leq H_i\}} H_i$$

bölektopar bolýandyr.Bu bölektoparyň S bölekköplügi özünde saklaýan bölektoparlaryň iň kiçisi boljakdagy düşnüklidir. $< S >$ bölektopara S köplügiň G-toparda döreden bölektopary,S-e bolsa $< S >$ bölektoparyň emelegerijileriniň köplügi diýilýär.

Mysallara seredeliň.

Mysal I.Jübüt sanlaryň köplüginiň bitin sanlaryň additiw toparynyň bölektoparydygyny görkezmeli.

Çözülişi.Jübüt sanlaryň köplügi bitin sanlaryň bölek köplügi bolmak bilen goşmak amalyna görä topar emele getirýändir.Şonuň üçin bu köplük bitin sanlaryň additiw toparynyň bölektoparydyr.

Mysal 2.A_n –alamaty çalşýan toparynyň S_n-simmetrik toparyň bölektoparydygyny görkezmeli.

Çözülişi. A_n-jübüt ornunagoýmalaryň köplügi S_n-toparyň bölekköplügidir.

Onuň topar emele getirýändigine bolsa,biz ikinji paragrafda seredipdik.

Mysal 3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ we $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ornunagoýmalardan ybarat köplügiň S_3-simmetrik toparyň bölektoparydygyny görkezmeli.

Çözülüşi.Bu ýerde bize birinji paragrafdaky I we 4 şertleri barlamak ýeterlikdir.

$$S\cdot S=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

I-nji şertden S-iň ters ornunagoýmasynyň ýene-de S bolýandygy gelip çykýar.

Gönükmeler.

1.Berlen K sana kratny bolan sanlaryň köplüginiň bitin sanlaryň additiw toparynyň bölektoparydygyny görkezmeli.

2. S_3-simmetrik toparyň hemme bölektoparlaryny tapmaly.

3.$\{1;-1;i;-i\}$-multiplikatiw toparynyň hususy bölektoparyny tapmaly.

4.n-nji derejeli täk ornunagoýmalaryň köplügi S_n-simmetrik toparyň bölektopary bolup bilermi ?

41.Siklik toparlar.Elementiň tertibi.

I.Goý bize erkin G toparyň käbir a elementi berlen bolsun,onda geçen paragrafdan bilşimiz ýaly $< a >$ bölektopar a elementi özünde saklaýan G toparyň bölektoparlarynyň iň kiçisi bolar.Bu $< a >$ böelktopara G toparyň siklik toparyň bölektopary,a elemente bolsa onuň emele getirijisi diýilýär.

Her bir $< a >$ siklik topary,onuň multiplikatiw topary ýa-da additiw topardygyny baglylykda degişlilikde $\{a^n/n\epsilon\mathbb{Z}\}$ ýada $\{na/n\epsilon\mathbb{Z}\}$ görnüşde ýazmak bolarň $\mathbb{Z}$ bitin sanlaryň köplügi ň.

Bu ýerden görnüşi ýaly siklik topar abeltopary bolýandyr.

Mysallara seredeliň.

Mysal I.Jübüt sanlaryň additiw toparynyň siklik topar bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.Berlen topary $\{\dots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\dots\}$ görnüşde ýazalyň. Bu ýerden,onuň emele getirijisi 2 ýa-da -2 bolan siklik topar bolýandygy görünýär.

Mysal 2.Biriň n-nji derejeli kökünin bahalarynyň emele getiren toparynyň siklik topar bolýandygyny görkezmeli.

Çözülişi.Kompleks sanlar temasyndan bize belli bolşy ýaly $\sqrt[n]{1}$ bahalarynyň köplügini $\{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}\}$ görnüşde ýazmak bolar,bu ýerde

$$\mathcal{E}_k = Cos\frac{2\pi k}{n} + isin\frac{2\pi k}{n}, k = 0,1,\dots,n-1.$$

Muawryň formulasynda peýdalanyp,bu bahany

$$\mathcal{E}_k = \left(Cos\frac{2\pi k}{n} + isin\frac{2\pi k}{n}\right)^k = \mathcal{E}_1^k,\ K = 0,1,\dots,n-1,$$

görnüşde ýazalyň.Şeýlelikde, berlen topary $\{\mathcal{E}_1^0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_1^{n-1}\}$ görnüşde ýazmak mümkindir.

Bu topar bolsa,emele getirijisi $\mathcal{E}_1 = Cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}$ belli siklik topardyr.

Mysal 3. Alamaty çalyşýan A_3 toparyň siklik topardygyny görkezmeli.

Çözülişi. A_3 topar

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Ornuna goýmalardan düzülendir,berlen A_3 toparyň emele getirijisi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ ornunagoýama bolan siklik topardygyny,ýagny

$$A_3 = <\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}>$$

gelip çykýar.

Bellik. A_3 topary emele getirjisi $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ ornunagoýma bolan siklik topar görnüşde hem ýazmak bolar.

II.Goý ýene-de G erkein topar bolup, a onuň käbir elementi bolsun.

Kesgitlemek üçin,G topary multiplikatiw topar diýip hasap edip,aşakdaky iki mümkinçilige garalyň: I) a elemenetiň hemme derejeleri dürli ýagny m$\neq n$ üçin $a^m \neq a^n$ bolsun.Bu ýagdaýda a elementiň tükeniksiz tertibi bar diýilýär.2)Goý m$\neq n$ üçin $a^m = a^n$ bolsun.Bu ýerden, $a^{m-n} = e \quad (m > n)$ ýazyp bileris.Bu deňlik bize a elementiň bire deň bolan palažitel derejeleriniň bolup biljekdigini görkezýär.

Şeýle derejelriň iň kiçisine a elementiň tertibi diýilýär.

Indi aşakdaky teoremany subud edeliň.

Teorema.Islendik $a \epsilon G$ elementiň tertibi,onuň döreden siklik toparynyň tertibine deňdir.Eger käbir K san üçin $a^K = e$ bolsa,onda ol san a elementiň tertibine bölünýändir.

Subudy.Goý a elementiň tertibi ş bolsun.Bu ýerden,elementiň tertibiniň kesgitlemesine görä

e,a, $a^2, \ldots, a^{q-1}$

dürli elementleri alarys.Bu elementleriň tertibi ş bolan $< a >$ siklik topary düzýändigine göz ýetirmek kyn däl.Diýmek,

$$|< a >| = q.$$

Indi käbir K-san üçin $a^K = e$ diýeliň.Bu ýerde galyndyly bölmegiň algaritiminden peýdalanyp,ol K sany

$$K = S \cdot q + r, \quad 0 \leq r < q$$

görnüşde ýazyp bileris.Bu ýerden,

$$a^K = a^{Sq+r} = (a^r)^S \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$$

alarys. $a^K = e$, *onda* $a^r = e$ *alarys.Bu ýerden r=0 gelip çykýar.Şeýlelikde,K=Sş.*

Indi toparyň elementiniň tertibiniň tapylşynyň mysallaryna garalyň.

Mysal 4. S_4 -simmetrik toparyň

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

elementiniň tertibini tapmaly.

Çözülişi.Bu ornunagoýmanyň dördünji derejesi birlik ornunagoýma deňdir,ýagny

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

bu bolsa berlen ornunagoýmanyň tertibiniň 4-e deňligini görkezýär.

Mysal 5. 2-nji tertipli aýratyn däl kwadrat matrisalaryň multiplikatiw toparynyň

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

elementiniň tertibini kesgitlemeli.

Çözülişi.Berlen matrisanyň kwadraty birlik matrisa deňdir,ýagny $A^2=E$.Bu deňlik A matrisanyň tertbiniň ikä deňdigini görkezýär.

Gönükmeler.

I.Aşakdaky toparlaryň elementleriniň tertibini tapyň:

$a)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}\epsilon S_5\ ;\quad b)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\epsilon S_6$

2. A_4 toparda tertibi ikä deň bolan näçe element bar ?

3.Islendik topardaky $\chi*\gamma=\gamma*\chi$ elementleriň tertipleriniň deňdiklerini subud ediň.

4. 8-nj tertipli

$<a>=\{e,a,a^2,a^3,a^4,a^5,a^6,a^7\}$

siklik topardaky tertibi alta deň bolanda hemme elementleri tapyň.

42.Toparlaryň izomorflylygy

Goý, G we G' toparlarda degişlilikde $*$ we 0 amallar kesgitlenen bolsun.G toparyň G' topara öwrülmesini f bilen belgiläliň,ýagny f:G→ G' .

Kesgitleme.Eger f:G→ G' öwürmede:

I.G toparyň islendik awe b elementleri üçin

$$f(a*b)=f(a)of(b)$$

bolsa, we

2. f biýektiw, ýagny özara birbelgili öwürme bolsa,onda G we G' toparlara özara izomorf diýilýär.

Indi bu toparlaryň f izomorfiziminiň ýönekeýje häsiýetlerine garap geçeliň.

1°. f izomorfizimde G toparyň birlik e elementi G' toparyň e' birlik elementine geçýändir. Hakykatdan-da, I -nji şertden peýdalanyp

$$f(a) = f(e * a) = f(e) o f(a)$$

we

$$f(a) = f(a * e) = f(a) o f(e)$$

deňlikleri ýazyp bileris. Bu deňliklerden $f(e)$ elementiň G' toparyň birlik elementidigi gelip çykýar, ýagny $f(e) = e'$.

2°. Eger $f(a) = a'$ bolsa, onda $f(a^{-1}) = \left(a'\right)^{-1}$ bolar.

Hakykatdan-da. I-nj şertden we 1° häsiýetden peýdalanyp

$$e' = f(e) = f(a * a^{-1}) = f(a) o f(a^{-1}) = a' \circ f(a^{-1})$$

we

$$e' = f(e) = f(a^{-1} * a) = f(a^{-1}) o f(a) = f(a^{-1}) \circ a'$$

deňlikleri ýazyp bileris. Bu deňliklerden bolsa $f(a^{-1}) = \left(a'\right)^{-1}$ bolýandygy görünýär.

Teorema 1. Şol bir tertipdäki hemme siklik toparlar özara izomorfdyrlar.

Subudy. Bu teoremany subut etmek üçin n-nji tertipli siklik toparlaryň $\sqrt[n]{1}$-iň bahalarynyň multiplikatiw sikliktoparyna izomorfdyklaryny görkezmek ýeterlikdir.

Teorema 2. Tükeniksiz tertipli hemme siklik toparlar özara izomorfdyrlar.

Subudy.Teoremany subut etmek üçin tükeniksiz tertipli hemme siklik toparlaryň bitin sanlaryň additiw toparyna izomorfdyklaryny görkezmek ýeterlikdir.

Mysal I. Polažitel hakyky sanlaryň multiplikatiw toparynyň hemme hakyky sanlaryň additiw toparyna izomorfdygyny görkezmeli.

Çözülişi.Birinji toparyň her bir a polažitel elmentine ikinji toparyň ln a elementiň degiňli edýän öwürmäni f bilen belgiläliň,ýagny f=ln.

Bu öwürmäniň biýektiwligi düşnüklidir.Logarifmiň

$$ln(ab) = lna + lnb$$

häsiýetden bolsa,f öwürmäniň I-nji şerti kanagatlandyrýandygy gelip çykýar.

Mysal 2. I.- I,i,-i sanlardan ybarat bolan multiplikatiw toparynyň

$$A_o = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisalardan ybarat multiplikatiw topara izomorfdygyny görkezmeli.

Çözülişi.Birinji toparyň elementlerini degişlilikde ikinji toparyň elementlerine geçirýän öwürmäniň izomorf öwürmedigini görkezeliň.

Berlen toparlaryň tertipleriniň deňleginden garalýan öwürmäniň biýektiwligi gelip çykýar.

Ikinji toparyň abel toparydygyny nazarda tutup, aňakdaky deňliklerden:

$$f(a_o \cdot a_i) = f(a_i) = A_i = A_o \cdot A_i = f(a_o) \cdot f(a_i),$$

$$(i = 0,1,2,3;\ a_o = 1, a_1 = -1, a_2 = i, a_3 = -i),$$

$$f(a_1 \cdot a_2) = f(a_3) = A_3 = A_1 \cdot A_2 = f(a_1) \cdot f(a_2),$$

$$f(a_1 \cdot a_3) = f(a_2) = A_2 = A_1 \cdot A_3 = f(a_1) \cdot f(a_3),$$

$$f(a_2 \cdot a_3) = f(a_0) = A_0 = A_2 \cdot A_3 = f(a_2) \cdot f(a_3).$$

izomorflylygyň kesgitlemesiniň birinji şertiniň ýerine ýetýändigini görýäris. Onda,kesgitlemä görä,berlen toparlaryň izomorfdyklary gelip çykýar.

Gönükmeler.

I.Bitin sanlaryň additiw toparynyň jübüt sanlaryň additiw toparyna izomorfdygyny görkezmeli.

2.Položitel rasional sanlaryň multiplikatiw topary hemme hakyky sanlaryň additiw toparyna izomorfdygyny görkezmeli.

3.n-nji tertipli islendik tükenikli toparyň S_n-simmetrik topara izomorfdygyny görkezmeli.

4.Özüniň hususy bölektoparyna izomorf bolan toparlary tapyň.

Rasional funksiýalaryň topary.

Aşakdaky alty funksiýanyň

$$\varphi_0 = x, \varphi_1 = \frac{1}{x}, \varphi_2 = 1 - x, \varphi_3 = \frac{x}{x-1}, \varphi_4 = \frac{x-1}{x}, \varphi_5 = \frac{1}{1-x}$$

köplügine seredeliň.Bu köplügi G=$\{1), 2), 3), 4), 5), 6)\}$ bilen belgiläliň.Bu köplügiň iki elementiniň arasyndaky amaly birinji funksiýadaky x -iň ornuna ikinji funksiýany goýmak bilen kesgitläliň.Meselem.

$$\varphi_4 \cdot \varphi_3 = \frac{\varphi_3}{\varphi_3} = \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-(x-1)}{x} = \frac{1}{x} = \varphi_1$$

Bu funksiýalaryň ýokardaky usul bilen kesgitlenen amala görä topar emele getirýändigini görkezeliň.

I. $\varphi_i \cdot \varphi_j = \varphi_k, (i, j, k = 0,1,2,3,4,5)$ bolýanýandygyna göz ýetirmek kyn däldir.

2.Bu funksiýalar üçin assosiatiwlik kanuny dogrudyr.Bu kanunyň dogrulygyny $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5$ funksiýalarda görkezeliň.

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_3) \cdot \varphi_5 = \frac{1}{\varphi_3} \cdot \varphi_5 = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \cdot \varphi_5 = \frac{x-1}{x} \cdot \varphi_5 = \frac{\varphi_5 - 1}{\varphi_5} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-(1-x)}{1} = x = \varphi_o$$

$$\varphi_1 \cdot (\varphi_3 \cdot \varphi_5) = \varphi_1 \cdot \frac{\varphi_5}{\varphi_5 - 1} = \varphi_1 \cdot \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - 1} = \varphi_1 \cdot \frac{1}{1-(1-x)} = \varphi_1 \cdot \frac{1}{x} = \varphi_1 \cdot \varphi_1 = \frac{1}{x} \cdot \varphi_1 =$$

$$= \frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \varphi_o.$$

3. φ_o funksiýa bu toparda birlik elementdir.

Hakykatdan-da,

$$\varphi_o \cdot \varphi_i = x \cdot \varphi_i = \varphi_i,$$

$$\varphi_i \cdot \varphi_o = \varphi_i \,, (i = 0,1,2,3,4,5).$$

4.Her bir $\varphi_{i\,,}\ (i = 0,1,2,3,4,5)$ funksiýa üçin

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ funksiýalaryň arasynda

$$\varphi_i \cdot \varphi_j = \varphi_j \cdot \varphi_i = \varphi_o$$

deňligi kanagatlandyrýan φ_j funksiýany tapmak bolar, Meselem.

$$\varphi_4 \cdot \varphi_5 = \frac{\varphi_5 - 1}{\varphi_5} = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-(1-x)}{1} = x = \varphi_o$$

$$\varphi_5 \cdot \varphi_4 = \frac{1}{1-\varphi_4} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-(x-1)} = \frac{x}{1} = x = \varphi_o$$

Bu ýerde,φ_5 funksiýanyň φ_4-iň ters funksiýasy bolýandygyny görünýär.

Funksiýalaryň bu toparynyň tertibi alta deňdir.

Funksiýalaryň bu topary abel topary däldir.

Hakykatdan-da,

$$\varphi_1 \cdot \varphi_3 = \frac{1}{x}\ \ \varphi_3 = \frac{1}{\varphi_3} = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} = \varphi_4$$

$$\varphi_3 \cdot \varphi_1 = \frac{x}{x-1}\ \ \varphi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 - 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{1-x} = \varphi_5$$

Bu ýerden, $\varphi_1 \cdot \varphi_3 \neq \varphi_3 \cdot \varphi_1$ gelip çykýar.

$A = \{\ \varphi_o,\ \varphi_4,\ \varphi_5\}$ seredilen toparyň bölektoparydyr.

A bölektopar emele getirijisi φ_4 bolan siklik topardyr.

Hakykatdan-da

$$\varphi_4^2 = \varphi_4 \cdot \varphi_4 = \frac{x-1}{x} \cdot \varphi_4 = \frac{\varphi_4 - 1}{\varphi_4} = \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \varphi_5\,,$$

$$\varphi_4^3 = \varphi_4{}^2 \cdot \varphi_4 = \varphi_5 \cdot \varphi_4 = \frac{1}{1-x}\varphi_4 = \frac{1}{1-\varphi_4} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x = \varphi_0 ,$$

$$\varphi_4 = \varphi_4,\ \varphi_4{}^2 = \varphi_5,\ \varphi_4{}^3 = \varphi_o,$$

Diýmek, A=<φ_4 >

G=$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ topar 2-nji tertipli

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

kwadrat matrisalaryň multiplikatiw toparyna izomorfdyr.

Hakykatdan-da, eger biz

$$f(\varphi_i) = A_i,\ (i = 0,1,2,3,4,5)$$

diýsek, onda

$$f(\varphi_i \cdot \varphi_j) = f(\varphi_i) \cdot f(\varphi_j),\ (i = 0,1,2,3,4,5)$$

Deňligiň ýerine ýetjekdigini barlamak kyn däldir.Bu şertiň φ_3 we φ_4 funksiýalar üçin barlanyşyny görkezeliň:

$$\varphi_3 \cdot \varphi_4 = \frac{x}{x-1}\varphi_4 = \frac{\varphi_4}{\varphi_4 - 1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = \frac{x-1}{-1} = 1 - x = \varphi_2 .$$

Bu ýerde

$$f(\varphi_3 \cdot \varphi_4) = f(\varphi_2) = A_2$$

alarys.

$$f(\varphi_3) \cdot f(\varphi_4) = A_3 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2$$

Soňky iki deňlikden $f(\varphi_3 \cdot \varphi_4) = f(\varphi_3) \cdot f(\varphi_4)$ gelip çykýar.

Gönükmeler.

1. Deňtaraply üçburçlugyň aýlanmalaryndan taparyň hemme bölek toparyny tapyň we olaryň haýsylarynyň siklik topar bolýandygyny görkeziň.
2. Rasional funksiýalaryň ýokardaky seredilen toparynyň hemme bölek toparyny tapyň we olaryň haýsylarynyň siklik topar bolýandygyny görkeziň.

3. Berlen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ funksiýalaryň hemme jübütleri üçin $f(\varphi_i \cdot \varphi_j) = f(\varphi_i) \cdot f(\varphi_j)$, (i,j=0,1,2,3,4,5) şertiň ýerne ýetändigini görkeziň.

43. BÖLEKTOPAR BOÝUNÇA ÇATYK KLASLAR. LAGRANŽ TEOREMASY.

Geljekde biz temalaryň beýan edilşiniň ýönekeýligi üçin,köplenç ýagdaýda topar amalyna derek köpeltmegi ulanjakdyrys.

Goý bize G toparyň käbir erkin A bölek topary berlen bolsun. Eger G toparyň haýsy hem bolsa islendik bir x elementini alyp, ony A bölek toparyň hemme elementlerine çepinden köpeltsek, onda biz xA köplügi alarys. Bu köplüge G toparyň A bölek topary boýunça x elementiň döreden çep çatyk klasy diýilýär. Sag çatyk klas Ax hem edil şunuň ýaly usul bilen kesgitlenilýär. Sag çatyk klaslaryň çep çatyk klaslar ýaly kesgitleneni üçin geljekde biz diňe çep çatyk klaslar barada gürrüň etjekdiris.

Indi çep çatyk klaslaýň käbir häsýetlerine garalyň:

1. Eger $x \in A$ bolsa, onda $xA = A$
2. Eger $x^{-1}y \in A$ bolsa, onda xA we yA çatyk klaslar gabat gelmeýär.
3. Eger çatyk kalaslaryň umumy elementi bar bolsa, onda olar gabat gelýändir.
4. xA çatyk klas x elementi özünde saklaýandyr.

Subudy:

1. Eger toparyň hemme elementlerini onuň haýsy hem bolsa bir elementine köpeltsek, onda ýenede şol toparyň elementi alynar.
2. Bu ýerde $x \cdot x^{-1} = e$ bolýanlygyny we $x^{-1}y \in A$ şerti nazara tutup, 1 häsýetden peýdalanyp

$$yA = eyA = (x \cdot x^{-1})yA = x(x^{-1}y)A = xA$$

alarys. Bu bols 2 häsýeti subut edýär.

Goý bize xA we yA çatyk klaslar berlip, olaryň umumy a elementi bar diýeliň. Onda A bölek toparda g we h elementler tapylyp, umumy elementi xg we xh görnüşlerde ýazmak bolar, yagny

$a = xg$, $(xg \in xA)$ $a = yh$, $(yh \in yA)$

Bu ýerden $xg = yh$ deňligi alarys. Soňky deňligiň iki bölegini hem çepden x^{-1} sagdan bolsa h^{-1} köpeltsek

$gh^{-1} = x^{-1}y$ deňligi alarys. g we h elementleriň A bölektopara degişli bolandyklary sebäpli $gh^{-1} \in A$, bu ýerden $x^{-1}y \in A$ alarys. Subut edilen 2 häsýetden bolsa $xA = yA$ gelip çykýar.

4.Islendik bölektoparyň birlik e elementi özünde saklaýandygy bize bellidir. Egerde biz A bölek topary x elemente köpeltsek, onda ol e element hem x köpeldiler. Bu ýerden bolsa $x \in xA$ gelip çykýar.

3 häsýetden şeýle netije gem gelip çykýar:
Iki çep çatyk klas ya gabat gelýär, yada olaryň umumy elementleri ýokdur.

Şeýlelikde, G toparyň her bir elementini diňe belli bir çep çatyk klaslar boýunça paýlanylýandyr. Bu çep çatyk klaslaryň birleşmesiniň G topary berjekdigi düşnüklidir, yagny

$$G = \bigcup_i g_i A$$

bu yerde $g_i \in G$

<u>Kesgitleme</u>. Birleşmesi G topary berýän kesişmeýän çep çatyk (ýada sag çatyk) klaslaryň sanyna A bölektoparyň G topardaky indeksi diýilýär.

Lagranž teoremasy: Tükenikli topryň tertibi özüniň islendik bölektoparynyň tertibine bölünýändir.

Subudy: Goý bize tertibi ne deň bolan G topar we tertibi m-e deň bolan onuň käbir A bölektopary berlen bolsun.Onda berlen G topary A bölektopar boýunça kesişmeýän çatyk klaslaryň jemine deň dagatmak bolar.Ol çatyk klaslary $A_1, A_2, \dots, A_k$ görnüşde nomerläliň. Onda

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

alarys.Her bir $A_i \ (\overline{1,k})$ çatyk klasyň tertibi A bölektoparyň tertibi bilen gabat gejýändir, ýagny $|A_i| = |A|, (1,2,\dots,k)$.

Şonuň üçin

$$|G| = k \cdot |A_i| = k \cdot |A|$$

ýazyp bileris. $|G| = n$ we $|A| = m$ şertleri nazarda tutup, soňky deňligi $n = k \cdot m$
görnüşde ýazmak bolar.Ýagny, G toparyň n tertibi A bölektoparyň m tertibine bölünýär.

Teorema subut edildi.

Netije. I.Toparyň tertibi onuň islendik elementiniň tertibine bölünýändir.

Subudy.Hakykatdan-da, islendik $g \in G$ elementiň tertibi onuň döreden $< g >$ siklik toparyň tertibi bilen gabat gelýär.Bu siklik topar bolsa G-niň bölektoparydyr.

Netije.2.Tertibi ýönekeý p san bolan topar siklik topardyr.

Subudy.Şerte görä $|G| = p$.Eger biz G toparyň haýsy hem bolsa erkin $\neq e$ elementiň $< g >$ siklik toparyny H bilen belgilesek,onda Lagranž teoremasyna görä

$$p = |H| \cdot 1$$

bolar.Bu ýerden $G =< g >$ gelip çykýar.

G toparyň tertibiniň islendik bölüjisi üçin G toparda tertibi şol bölüjä deň bolan bölektopary gözlemek umumy ýagdaýda dogry däldir.Meselem,tertibi I2 bolan alamaty çalyşýan 4-nji derejeli toparda tertibi 6 bolan bölektopar ýokdyr.

Ýöne siklik toparlar üçin aşakdaky teorema adalatlydyr.

Teorema.Siklik toparyň tertibiniň islendik bölüjisi üçin tertibi şu bölüjä deň bolan bu toparyň siklik bölek topary bardyr.

Subudy.Goý,berlen siklik toparyň tertibi ş bolsun.Onuň haýsy hem bolsa bir erkin bölüjisini d bilen belgiläliň we ş=dm diýeliň.Eger a element berlen toparyň emele getirijisi bolsa,onda

$$a^q = a^{dm} = (a^m)^d = e$$

bolar.Bu ýerden d sanyň $< a^m >$ siklik toparyň tertibidigi gelip çykýar.Bu siklik topar bolsa berlen toparyň bölektoparydyr.

Teorema subut edildi.

Mysallara garalyň.

Mysal I. Goý bize

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisalardan berlen bolsun.

G toparyň A bölektoparyň boýunça çep çatyk klaslaryny tapmaly we A-nyň G-däki indeksini kesgitlemeli.

Çözülişi.G toparyň A bölektopar boýunça çep çatyk klaslaryny düzeliň:

$$EA = \{E \cdot E, E \cdot A_2\} = \{E, A_2\} = E,$$
$$A_1 \cdot A = \{A_1 \cdot E, A_1 \cdot A_2\} = \{A_1, A_3\} = A^*,$$
$$A_2 \cdot A = \{A_2 \cdot E, A_2 \cdot A_2\} = \{A_2, E\} = A,$$
$$A_3 \cdot A = \{A_3 \cdot E, A_3 \cdot A_2\} = \{A_3, A_1\} = A^*.$$

Bu ýerden,

$$A \cup A^* = G$$

bolýandygy görünýär.A bölektoparyň G topardaky indeksi üçe deňdir.

Mysal 2.Goý G bitin sanlaryň topary we A bolsa üçe kratny bolan bitin sanlaryň topary bolsun.A bölektoparyň G topardaky indeksini kesgitläliň.

Çözülişi.Şerte görä,

$$G = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

we

$$A = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

G toparyň A bölektopar boýunça kesişmeýän çatyk klaslaryny düzeliň:

0+A=A,

$$1 + A = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\},$$
$$2 + A = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}.$$

Beýleki çatyk klaslar şu çatyk klaslaryň haýsy hem bolsa biri bilen gabat gelýändirler. Eger biz bu üç çatyk klasy birleşdirsek,onda G topary alarys, ýagny

$$G = A \cup (1 + A) \cup (2 + A)$$

Diýmek, A bölektoparyň G topardaky indeksi üçe deňdir.

Mysal 3.Tertibi I2 bolan $< a >$ siklik topary hemme bölektoparlaryny tapmaly.

Çözülişi.Berlen toparyň tertibiniň bölüjileri I,2,3,4,6,I2 sanlar bolarlar.Tertipleri degişlilikde bu sanlara deň bolan

$$< a^{12} >, < a^6 >, < a^4 >, < a^3 >, < a^2 >, < a >$$

siklik toparlar berlen bolsun toparyň hemme bölektoparlarydyr.Bu toparlary aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$< a^{12} > = \{e\},$$
$$< a^6 > = \{e, a^6\},$$
$$< a^4 > = \{e, a^4, a^8\},$$
$$< a^3 > = \{e, a^3, a^6, a^9\},$$
$$< a^2 > = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\},$$
$$< a > = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{11}\}.$$

Bu ýerden toparyň 2 sany hususy däl bölektoparynyň,ýagny $< a^{12} >$, $< a >$ we 4 sany hususy bölektoparynyň, ýagny $< a^6 >, < a^4 >, < a^3 >, < a^2 >$ bardyklary görünýär.

Gönükmeler.

I.Simmetrik S_3 toparyň alamatyçalyşýan A_3 bölektopar boýunça çep we sag çatyk klaslaryny tapmaly.

2.Elementleri

$$\varphi_0 = x\,,\ \varphi_1 = \frac{1}{x}\,,\ \varphi_5 = 1 - x,\ \varphi_3 = \frac{x}{x-1}\,,\ \varphi_4 = \frac{x-1}{x}\,,\varphi_5 = \frac{1}{1-x}$$

funksiýalardan ybarat bolan G toparyň $A = \{\varphi_0, \varphi_1\}$ bölektopar boýunça çep çatyk klaslaryny tapmaly we A-nyň G-däki indeksini kesgitlemeli.

3.Tertipleri:

aňI8 : bň70 : çň125 : dňp^n ňp-ýönekeý sanň: bolan siklik toparlaryň hemme bölektoparlaryny tapmaly.

§8.Normal bölektoparlar.

Kesgitlemesi I.Goý G toparyň A käbir bölektopary bolsun.Eger G toparyň islendik ý elementi üçin

$$xA = Ax \qquad \text{ňIň}$$

ýerine ýetse,onda A bölektopara G toparyň normal bölektopary ňinwariant bölektopary ýa-da normal bölüjisiň diýilýär.

Bu kegitlemeden,ýagny ňIň deňlikden G toparyň islendik x elementi we $a \in A$ üçin

$$\left.\begin{aligned} xa \le a'x \\ ax = xa'' \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

deňlikleri kanagatlandyrýan a' we a'' elementleri A-dan tapmak mümkindigini gelip çykýar.

2. G siklik toparyň islendik G/A faktoar-topary siklik topardyr.

Subudy: Eger G siklik topar bolsa,onda ony özüniň birlik elementinden tapawutly käbir g elementiň döreden topary ýaly ýazyp bileris, ýagny $G = \langle g \rangle$. Indi G/A faktoryň $g\,A$ çatyk klasyň döreden siklik topary bolýandygyny görkezeliň. Goý xA G/A faktor-toparyň erkin çatyk klasy bolsun. Bu $x \in G$ elementi g emele getirijiniä kşbir derejesi görnüşinde ýazmak bolar, ýagny

$x = g^k$

Bu ýerden,

$xA = g^k A = g^k A^k = (gA)^K$

gelip çykýar.

3. G/A faktor-toparyň tertibi G toparyň tertibiniň bölüjisidir.

Subudy: G/A faktor-topar G toparyň A normal bölektopar boýunça kesişmeýän çatyk klaslaryndan ybaratdyr. Bu klaslaryň sany bolsa, A bölektoparyň G topardaky indeksine, ýagny $|G/A|$ deňdir.Bu ýerden,

$$|G| = |G/A| \cdot |A|$$

gelip çykýar.

Mysallara garalyň.

Mysal 1. S_3/A_3 faktor-topary tapmaly.

Çözülişi. Geçen paragrafymyzyň 1-nji mysalyndan biziň bilşimiz ýaly A_3 normal bölektopardyr we S_3 toparyň A_3 normal bölektopar boýunça diňe iki sany dürli çatyk klasy bardyr, ýagny

$$A_3 = \{S_0, S_2, S_4\}, \quad A_3{}^* = \{S_1, S_3, S_5\}.$$

Bu iki A_3 we $A_3{}^*$ çatyk klaslaryň topar emele getirýändigini görkezmek kyn däldir. Şeýlelikde,

$$G/A = \{A_3, \quad A_3{}^*\}.$$

Bu ýerde A_3 çatyk klas G/A faktor-toparyň birlik elementiedir.

Mysal 2. Bitin sanlaryň additiw toparynyň üçe kratny bolan sanlaryň additiw topary boýunça faktor-topary emele getirýändigini görkezmeli.

Çözülişi: berlen toparlary

$$G = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$$A = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

görnüşlerde ýazalyň.Biz çatyk klaslary öwrenemizde G toparyň A normal bölek topar boýunça dürli 3 çatyk klasynyň

$$A, 1 + A, 2 + A$$

bardygyny belläpdik. Beýleki çatyk klaslar bu çatyk klaslaryň haýsy hem bolsa biri bilen gabat gelýändir. Meselem, eger k bitin (otrisatel ýa-da položitel) san bolsa, onda

$3k+A, (3k+1)+A = 1+(3k+A) = 1+A,$
$(3k+2)+A = 2+(3k+A) = 2+A$
bolýandyr.
Bu çatyk klaslaryň $G/A = \{A, 1+A, 2+A\}$ köplüginiň topar emele getirýändigini görkeziliň.
1. Bu köplügiň islendik iki elementiniň jemi ýene-de şol köplügiň elementini berýändir. Hakykytdan-da,

$$A+A=A, 1+A+A=1+A, 2+A+A=2+A, 1+A+1+A=2+A$$

$$1+A+2+A=3+A=A, 2+A+2+A=4+A=1+3+A$$
$$=1+A.$$

2. Bu elementleriň jeminiň assosiýatiwligi düşnüklidir.
3. A element G/A köplügiň birlik elementidir. Hakykytdan-da,
$A+A, 1+A+A=1+A, 2+A+A=2+A.$
4.Bu köplükde her bir elementiň ters (garşylykly) elementi bardyr, ýagny $1+A$
element üçin $2+A, 2+A$ element üçin bolsa $1+A$ ters element bolup hyzmat edýär. Hakykatdan-da,
$1+A+2+A=3+A=A.$

Gönükmeler.

1.Jübüt sanlaryň toparynyň alta kratny bolan topar boýunça emele getirýän faktor-toparyny tapmaly.
1. Aşakdaky ýagdaýlarda G/A faktor-topary tapmaly:
a) G-kompleks sanlaryň additiw topary, A-hakyky sanlaryň bölektopary.
b) G-noldan tapawutly kompleks sanlaryň multiplikatiw topary, A-hakyky položitel sanlaryň bölektopary.
c) G-noldan tapawutly kompleks sanlaryň

d) multiplikatiw topary, A-moduly 1-e deň bolan kompleks sanlaryň bölektopary.

2. Rasional funksiýalaryň $G = \{\varphi_{0,}\varphi_{1,}\varphi_{2,}\varphi_{3,}\varphi_{4,}\varphi_{5,}\}$ multiplikatiw toparyň $A = \{\varphi_{0,}\varphi_{4,}\varphi_{5,}\}$ normal bölektopar boýunça emele getirýän faktor-toparyny tapmaly.

3. Eger

$$G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

we $A = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\right\}$

bolsa, onda G/A faktor-topar tapmaly.

44. Gomomorfizler.

Normal bölektopar we faktor-topar düşünjeleri izomorfizmiň umumylaşdyrylan düşünjesi bolan gomomorfizm bilen ýakyndan baglanyşyklydyr.

Kesgitleme. Goý G we G' degişlilikde $*$ we $^\circ$ amallar kesgitlenen käbir toparlar bolsun. Eger G toparyň G' topara $f: G \to G'$ öwürmesi, islendik $a, b \in G$ elementler üçin

$$f(a * b) = f(a)^\circ f(b) \qquad (I)$$

şerti kanagatlandyrýan bolsa, onda ol öwürme gomorfizm diýilýär.

f gomorfizm G toparyň hemme elementlerini G' toparyň elementleriniň käbir bölekköplügine öwürýändir.

Eger f gomorfizm biektiw bolsa, onda bize öňünden belli bolan izomorfizm alynar.

Izomorfizmiň bellenilip geçlen ýönekeýje 1° we 2° häsiýetleri gomorfizm üçin hem ýerine ýetýändir.

Teorema 1. Eger f G toparyň G' topara gomomorf öwürmesi bolsa, onda $f(G)$ köplük G' toparyň bölektoparydyr.

Subudy. Teoremany subut etmek üçin topar bolmaklygyň 1-4 şertleriniň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.

1. Goý a' we b' $f(G)$ köplügiň elementleri bolsa, onda

$$f(a) = a', \qquad f(b) = b'$$

deňlikleri kanagatlandyrýan a we b elementleri G topardan tapmak mümkindir. (I) deňlikden peýdalanyp

$$f(a * b) = \mathrm{f(a)\ o\ f(b)} = \mathrm{a'o\ b'}$$

Alarys. Bu ýerden $a'ob' \in f(G)$ gelip çykýar.

2. $f(G)$ köplügiň G' toparyň bölekköplügi bolany üçin onuň elementleri assosioatiwdirler.

3. G toparyň islendik a elementi üçin

$$f(a) = f(a * e) = f(a)\, o\, f(e) = a' o\, e'$$

we $f(a) = f(e * a) = f(e)\, o\, f(a) = e' o\, a'$

deňlikleri ýazyp bileris. Bu ýerden, e' elementiň $f(G)$-niň birlik elementdigi gelip çykýar.

4. G toparyň erkin a we e birlik elementleri üçin

$$f(e) = f(a * a^{-1}) = f(a)\, o\, f(a^{-1}) = a' o\, f(a^{-1})$$

$$f(e) = f(a^{-1} * a) = f(a^{-1}) o f(a) = f(a^{-1})\, o\, a'$$

deňlikleri ýazyp bileris. Bu ýerden $f(a^{-1})$ elementiň a' elementiň ters elementidigi görünýär, ýagny $f(a^{-1}) = (a')^{-1}$ teorema subut edildi.

Gomomorfizmiň ýadrosy.

Kesgitleme. $f: G \to G'$ gomomorf öwürmede G' toparyň e' birlik elementine geçýän G toparyň elementleriniň köplügine f gomomorfizmiň ýadrosy diýilýär we Ker bilen belgilenýär.(Ker belgi iňlis Kernel-sözünden alnandyr). Ýagny

$Ker\ f = \{a \in G | f(a) = e'\}$

Teorema 2. Islendik gomomorfizmiň ýadrosy normal bölektopardyr.

Subudy. Goý bize $f: G \to G'$ gomomorfizm berlen bolsun. Ilki bilen $Ker\ f$-iň G toparyň normal bölektopardygyny görkezeliň. Onuň üçin topar bolmaklygyň 1,3 we 4 şertleriniň ýerine ýetýändigini görkezmek ýeterlikdir.

1. Goý $\forall a, b \in Ker\ f$ (ýagny $f(a) - e'$, $f(b) = e''$) islendik elementler bolsun, onda gomomorfizmiň kesgitlemesine görä

$$f(a * b) = \mathrm{f(a)\ o\ f(b) = e'o\ e'' = e''}$$

Alarys. Bu ýerden $a * b \in Ker\ f$ gelip çykýar.

3. Izomorfizmiň $f(e) = e'$ häsiýetiniň gomomorfizm üçin hem dogrulygyndan $e \in Ker\ f$ gelip çykýar.

4. $a \in Ker\ f$ islendik element bolsun,onda

$$e' = f(e) = f(a * a^{-1}) = f(a) o\, f(a^{-1}) = e' o\, f(a^{-1}) = f(a^{-1})$$

alarys. Bu ýerden $a^{-1} \in Ker\ f$ gelip çykýar.

Indi bolsa $Ker\ f$-iň özüniň islendik elementi bilen çatyrymlanan hemme elementleri özünde saklaýandygyny görkezeliň.

Goý $x * a * x^{-1}$ islendik $a \in Ker\ f$ element bilen çatyrymlanan element bolsun, onda

$$f(xa * x^{-1}) = f(x)\ o\ f(a) o\ f(x^{-1}) = f(x) o\ e' o\ f(x^{-1}) = e'$$

alarys. Bu ýerden $x * a * x^{-1} \in Ker\ f$ gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

Gomomorfizmler hakynda teorema.

Goý A bölektopar G toparyň normal bölektopary bolsun. Eger biz G toparyň her bir x elementine şol elementiň ýatan $x * A$ çatyk klasyny degişli etsek, onda G toparyň G/A faktor-topara öwürmesini alarys.

Iki çatyk klasyň köpeltmesiniň ýene-de çatyk klas bolýandygyndan φ öwürmesiniň gomomorfizmdigi gelip çykýar. Hakykatdan-da G-toparyň islendik x we y elementleri üçin
$$f(x*y)=(x*y)*A=(x*y)*A*A=x*A*y*A=f(x)\,o\,f(y)$$
ýerine ýetýändir.

Alnan gomomorfizme G toparyň G/A faktor-topara bolan tebigy gomomorfizmy diýilýär. Bu gomomorfizmiň ýadrosy bolup A normal bölektoparyň hyzmat etjekdigi düşnüklidir.

Bu ýerden, G toparyň diňe normal bölektoparynyň bu toparyň gomomorfizmleriniň ýadrolary bolup hyzmat etjekdikleri gelip çykýar.

Bu netije normal bölektoparyň ýene-de bir kesgitlemesi hökmünde seretmek bolar.

Teorema 3. Goý G toparyň G' topara f gomomorfizmi berlip, A bu gomomorfizm ýadrosy bolsun. Onda G' topar G/A faktor-topara izomrfdyr, özi hem ol bu toparlaryň birinjisiniň ikinjisine şeýle bir φ izomorf öwürmesi bolup, f we φ öwürmeleriň yzygider ýerine ýetirilmeginiň netijesi G toparyň G/A faktor-topara tebigy gomomorfizmi bilen gabat gelýär.

Subudy: Goý G' toparyň käbir erkin elementi x' bolsun, ý bolsa $f(x)=x'$ deňligi kanagatlandyrýan G toparyň elementi bolsun. f gomomorfizmiň A ýadrosynyň islendik a elementi üçin $f(a)=e'$ bolýandygyna görä
$$f(x*a)=f(x)\,o\,f(a)=x'o\,e'=x'$$
ýerine ýetýändir. Bu ýerden f gomomorfizmiň $x*A$ çatyk klasyň hemme elementlerini x' elemente öwürýändigi gelip çykýar.

Beýleki tarapdan, eger ž element $f(\text{ž})=x'$ deňligi kanagatlandyrýan G toparyň islendik bir elementi bolsa, onda

$f(x^{-1} * \check{z}) = f(x^{-1})\, o\, f(\check{z}) = [f(x)]^{-1}\, o\, x^{-1} = (x')^{-1}\, o\, x' = e'$

ýagny $x^{-1} * \check{z} = a$ diýsek, onda $\check{z} = x * a$, ýagny $\check{z}$ element $x * A$ çatyk klasda saklanýandyr.

Şeýlelilikde, f gomomorfizmde G' toparyň berlen x' elementine öwrülýän elementleri bir ýere toplasak, onda biz çatyk klasy alarys.

G' toparyň her bir x' elementine, f gomomorfizmde obrazy x' bolýan G toparyň hemme elementleriniň toplumy bolan G-toparyň A normal bölektopar boýunça çatyk klasyny degişli edýän degişlilik G toparyň G/A faktor-topara özara birbelgili öwürmesi bolar.

Bu φ öwürme izomorfizmdir. Sebäbi

$\varphi(x') = x * A$, $\quad \varphi(y') = y * A$

(bu ýerde $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ we $f(x * y) = f(x)\, o\, f(y)$) deňliklerden

$\varphi(x' o\, y') = x * y * A = x * y * A * A = x * A * y * A = \varphi(x') * f(y')$

gelip çykýar.

Şeýlelikde, G toparyň $f(x) = x'$ deňligi kanagatlandyrýan islendik x elementi üçin $\varphi[f(x)] = \varphi(x') = x * A$ deňlik ýerine ýetýär. Bu bolsa f gomomorfizmiň we φ izomorfizmiň yzygider ýerine ýetirilmesiniň G toparyň islendik elementini G/A fakr-toparyň $x * A$ çatyk klasyna öwürýändigini görkezýär.

Teorema subut edildi.

Mysal 1. Goý G bitin sanlaryň additiw topary, G' bolsa e birlik we b elementlerden ybarat bolan topar bolsun. G toparyň jübüt we täk elementlerini G' toparyň degişli e' we b' elementlerine geçirýän f öwürmäniň gomomorfizmdigini görkezmeli.

Çözülişi. Goý k we m G toparyň erkin elementleri bolsun. Eger olaryň ikisem jübüt san bolsa, onda $k + m$ hem jübütdir we

$f(k+m) - e' o\, e' = f(k)\, o\, f(m)$ alarys.

Eger ol sanlaryň biri jübüt (meselem k), beýlekisi täk bolsa, onda $k+m$ täk sandyr we $f(k+m) = b = e' o\, b = f(k) o\, f(m)$

alarys. Eger k we m sanlaryň ikisem täk bolsa, onda $k+m$ jübütdir we $f(k+m) = e' = b\, o\, b = f(k)\, o\, f(m)$

alarys. Bu ýerden, gomomorfizmiň kesgitlemesine görä f öwürmäniň gomomorfizmdigi gelip çykýar. Jübüt sanlaryň bölektopary bolsa, f gomomorfizmiň ýadrosy bolup hyzmat edýär.

Mysal 2. Tertibi 4-e deň bolan siklik $G = \{e, a, a^2, a^3\}$ toparyň, tertibi 6-a deň bolan siklik $G' = \{e', b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$ topara bolan gomomorfizmleriniň hemmesini tapmaly.

Cözülişi. Toparlaryň berlişinden görnüşi ýaly a we b elementler degişlilikde G we G' toparlaryň emele getirijileridir. Gomomorfizmiň kesgitlemesinden we onuň $f(e) = e'$ häsiýetinden peýdalanyp, $a^4 = e$ bolýandygyny nazarda tutup

$$e' = f(e) = f(a^4) = f(a)f(a)f(a)f(a) = [f(a)]^4$$

deňligi alarys. Indi G' toparyň

$$[f(a)]^4 = e'$$

Deňligi kanagatlandyrýan elementlerini tapalyň. G' toparda şeýle elementleriň diňe ikisi, ýagny e' we b^3 bardyr. Bu elemenleriň başga islendik elementiň 4-nji derejesi birlik elemente deň bolup bilmez.

Şeýlelikde, biz iki gomomorfizmi, ýagny $f_1(a) = e'$ we $f_2(a) = b^3$ alarys. Olaryň birinjisinde G toparyň hemme elementleri G' toparyň e' elementine gecer, ýagny $f_1 : e, a, a^2, a^3 \to e'$. Bu ýerde f_1 gomomorfizmiň ýadrosy G toparyň özi bilen gabat gelýär, ýagny $Ker f_1 = G.$

Indi f_2 gomomorfizme seredeliň.

$f_2(a) = b^3, f_2(a^2) = (b^3)^2 = e'$, $\quad f_2(a^3) = (b^3)^3 = e' \cdot b^3 = b^3$,
$f_2(a^4) = f_2(e) = e'$
deňliklerden a we a^3 elementiň b^3 elemente, a^2 we e elementleriň bolsa e' elemente gecýändigi görünýär. Şeýlelikde, $f_2: e, a^2 \to e'$; $a, a^2 \to b^3$ gomomorfizmi alarys. Bu ýerde f_2 gomomorfizmiň ýadrosy e we a^2 elementlerden ybaratdyr, ýagny $Ker f_2 = \{e, a^2\}$.

Mysal 3. S_3 simmetrik toparyň S_3/A_3 faktor-topara bolan tebigy gomomorfizmini tapmaly.

Cözülişi. Bize A_3 alamaty calyşýan toparyň S_3 toparyň normal bölek topardygy öňden bellidir. S_3 toparyň A_3 topar boýunca dürli iki catyk A_3 we A_3^* klasy bardyr.

A_3 catyk klas jübüt orna goýmalardan, A_3^* bolsa täk orna goýmalardan ybaratdyr. S_3 toparyň $S_0, S_2, S_4 -$ jübüt orna goýmalaryny A_3 çatyk klasa, $S_1, S_3, S_5 -$ täk orna goýmalary bolsa A_3^* çatyk klasa geciryän ψ öwürme S_3 toparyň S_3/A_3 topara bolan tebigy gomomorfizmidir, ýagny
ψ: $S_0, S_2, S_4 \to A_3$; $S_1, S_3, S_5 \to A_3^*$.

Gönükmeler.

1.Bütin sanlaryň toparynyň - 1 we 1 sanlardan düzülen multiplikatiw topara bolan gomomorfizmlerini tapmaly.

2.Siklik $G = \langle a^n \rangle$ toparyň siklik $G' = \langle a^m \rangle$ topara bolan gomomorfizmleriniň hemmesini tapmaly we olaryň ýadrolaryny görkezmeli:

a/ $\quad n = 4, \quad m = 4$
b/ $\quad n = 4, \quad m = 12$
c/ $\quad n = 12, \quad m = 4$
d/ $\quad n = 12, \quad m = 15$

3.Rasional funksiýalaryň $G=\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5\}$ multiplikatiw toparynyň S_3 topara bolan gomomorfizmleriniň hemmesini tapmaly we olaryň ýadrolaryny görkezmeli.

4.Rasional sanlaryň additiw toparyny bütin sanlaryň additiw toparyna gomomorf öwrüp bolmaýandygyny subut etmeli.

45. Çatyrymly elementleriň klaslary. Toparyň merkezi.

Catyrymly elementleriň aşakdaky elementlerine seredeliň:

1.Her bir element özi bilen catyrymlydyr, ýagny $a=eae^{-1}$.

2.Eger a element b element bilen catyrymly bolsa, onda b hem a bilen catyrymlydyr.

Hakykatdan-da, goý $a=xbx^{-1}$ bolsun. Bu ýerden,

$$x^{-1}ax=x^{-1}xbx^{-1}x=b$$

alarys.

3.Eger a element b element bilen catyrymly b bolsa c element bilen catyrymly bolsa, onda a element c bilen catyrymlydyr.

Hakykatdan-da, goý $a=xbx^{-1}$ we $b=yby^{-1}$ bolsun., onda

$$a=xycx^{-1}y^{-1}=xyc(xy)^{-1}$$

ýagny a we c elementleriň catyrymlylygyny alarys.

Berlen element bilen catyrymly elementleriň köplügi catyrymly elementleriň klasyny düzýär. Şoňa görä her bir topary jübüt-jübütden kesişmeýän klaslara dagytmak bolar.

Kesgitleme 1. G toparyň hemme elementleri bilen kommutatiw bolan bu toparyň elementleriniň köplügine, ýagny

$Z(G)=\{z\in G{:}\, za=az,$ hemme $a\in G\}$

G toparyň merkezi diýilýär.

Teorema 1. $Z(G)$ köplük G toparyň normal bölek toparydyr.

Subudy. Ilki bilen $Z(G)$ kölügiň G toparyň bölek toparydygyny görkezeliň. Onuň ücin toparyň 1,2, we 4 şertlerini barlalyň.

1.Goý $x, y \in Z(G)$ islendik elementler bolsun. Onda merkeziň kesgitlemesine görä, islendik $a \in G$ ücin $xa = ax$ we $ya = ay$ gogrudyr. Bu ýerden,

$xya = xay = axy$

ýagny, $xy \in Z(G)$ alarys.

3. $ea = ae$ bolany ücin $e \in Z(G)$ alarys.

4. Goý $x \in Z(G)$ erkin element bolsun, onda merkeziň kesgitlemesine görä $xa = ax$ deňligi alarys. Bu deňligiň iki bölegiň hem cepden we sagdan x^{-1} elemente köpeldip $ax^{-1} = x^{-1}a$ deňligi alarys. Bu ýerden, $x^{-1} \in Z(G)$ gelip cykýar.

Diýmek, $Z(G)$ köplük G toparyň bölek toparydyr.

Indi onuň G toparyň normal bölek toparydygyny görkezeliň. Goý $z \in Z(G)$ islendik element bolsun, onda G toparyň her bir a elementi ücin $za = az$ deňligi alarys. Bu ýerden, $a^{-1}za = z$ alarys, ýagny $Z(G)$ bölek toparyň her bir elementi özi bilen catyrymlydyr. Bu bolsa $Z(G)$ merkeziň G toparyň bölek topardygyny görkezýär. Teoreme subut edildi.

Kesgitleme 2. Berlen $z \in G$ element bilen kommutatiw bolan G hemme elementleriň köplügine, ýagny

$C(z) = \{a \in G : za = az\}$

z elementiň merkezleşdirijisi diýilýär.

Teorema 2. $C(z)$ köplük G toparyň bölek toparydyr.

Subudy. Teoremany subut etmek ücin toparyň 1,3 we 4 şertleriniň ýerine ýetýändigini barlamak ýeterlikdir.

1.Eger $a, b \in C(z)$ islendik elementler ücin kesgitlemä görä

$za = az$ we $zb = bz$ deňlikleri alarys. Bu ýerden bolsa,

$zab = azb = abz$ ýagny $ab \in C(z)$ alarys.

3. $ez = ze$ deňlikden, e elementiň $C(z)$ köplüge degişlidigi görünýär.

4. Goý $a \in C(z)$ erkin element bolsun, onda $az = za$ deňlik dogrudyr. Bu deňligiň iki bölegini hem cepden we sagdan a^{-1} elemente köpeldip

$$za^{-1} = a^{-1}z$$

deňligi, ýagny $a^{-1} \in C(z)$ alarys.

Şeýlelikde, $C(z)$ köplük G toparyň bölek toparydyr.

Dürli elementler arkaly a element bilen catyrymlanan elementleriň gabat gelmekleri hem mümkindir. Berlen a element bilen catyrymlanan elementleriň sanyny bilmek ücin aşakdaky teoremany peýdalanmak bolar.

Teorema 3. Berlen a element bilen catyrykly elementler G toparyň $C(a)$ normal bölektopary boýunca cep catyk klaslary bilen özara birbelgilidegişlilikde bolýarlar, ýagny şol catyrykly elementleriň sany $C(a)$ bölektoparyň G topardaky indeksine deňdir.

Subudy. Goý bize a element bilen catyrymly iki sany xax^{-1} we yay^{-1} element berlen bolsun. Bu elementlere $xC(a)$ we $yC(a)$ catyk klaslary degişli edeliň we $xax^{-1} = yay^{-1}$ bolanda $xC(a) = yC(a)$ bolýandygyny görkezeliň. $xax^{-1} = yay^{-1}$

Deňligiň iki bölegini hem cepden y^{-1} elemente, sagdan bolsa y elemente köpeldip $y^{-1}xax^{-1} = a$ deňligi alarys.Bu deňligi $y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a$ görnüşde ýazsak, onda $y^{-1}x \in C(a)$ bolýandygyny göreris.

Catyk klaslaryň 1° häsiýetine görä $y^{-1}xC(a) = C(a)$

deňligi alarys. Bu deňligiň iki bölegini hem cepden y elemente köpeldip $xC(a) = yC(a)$ deňligi alarys. Bu bolsa ol catyk klaslaryň gabat gelýändigini görkezýär.

Şeýlelikde, a elemente catyrymlanan elementler bilen $C(a)$ merkezleşdiriji boýunca alnan catyk klaslaryň arasynda özara birbelgili degişliligi gurup bileris.

Mysallara garalyň.

Mysal 1. S_3 simmetrik toparyň

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elementiniň merkezleşdirijisini tapmaly.

Cözülişi. Biz $C(S_4)$ merkezleşdirijisini tapmak ücin

$$S_4 \cdot S_i = S_i \cdot S_4$$

deňligi kanagatlandyrýan S_i ornunagoýmalary tapmalydyrys. Bu ornunagoýmany $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ bilen belgiläp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

deňligi kanagatlandyrýan x, y, z näbellileriň hemme bahalaryny tapalyň. Bu deňligi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

görnüşde ýazalyň we onuň iki bölegini hem cepden $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ornunagoýma köpeldeliň. Onda

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

deňligi alarys. Bu ýerden, 1) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3;$ 2) $x = 2,\ y = 3,\ z = 1;$ 3) $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$ bahalary taparys.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ z & x & y \end{pmatrix}$ ornunagoýmada x, y, z näbellileriň tapylan bahalaryny ornuna goýup

$$C(S_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ornunagoýmanyň merkezleşdirijisini alarys.

Mysal 2. A_3 alamaty calyşýan toparyň merkezini tapmaly.

Cözülişi. Bu toparyň S_0 toždestwolaýyn ornunagoýmasynyň A_3 toparyň hemme elmentleri bilen kommutatiw boljakdygy düşnüklidir. Şonuň ücin $S_0 \in Z(A_3)$.

$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ornunagoýma garalyň. Onuň ücin

$S_0 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_0; \quad S_2 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_2; \quad S_2 \cdot S_4 = S_4 \cdot S_2 = S_0$

Deňlikleriň dogrudygyny göz ýetirmek kyn däldir.

Bu ýerden, $S_2 \in Z(A_3)$ alarys.

Indi bolsa, S_4 elementiň merkeze degişliligini görkezeliň. Aşakdaky deňliklerden

$S_4 \cdot S_0 = S_0 \cdot S_4; \quad S_4 \cdot S_2 = S_2 \cdot S_4 = S_0; \quad S_4 \cdot S_4 = S_4 \cdot S_4$

$S_4 \in Z(A_3)$ gelip cykýar.

Şeýlelikde, A_3 toparyň

$$Z(A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

merkezini alarys.Bu ýerden A_3 toparyň öziniň merkezi bilen gabat gelýändigi görünýär.

Mysal 3. S_3 simmetrik toparyň

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

elementi bilen catyrymly elementleriň klasyny tapmaly.

Çözülişi. Birinji mysaldan bilşimiz ýaly bu elementiň merkezleşdirijisi A_3 topardyr. Berlen S_3 toparyň $C(S_4)$ merkezleşdiriji boýunca dürli iki catyk klasy bardyr, täk we jübüt ornunagoýmalaryň catyk klaslary. Haýsy hem bolsa bir jübüt we bir täk, meselem, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ we $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, ornunagoýmalary alyp, bu ornunagoýmalar arkaly S_4 ornunagoýma catyrymlanan elementleri tapalyň:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Bu ýerden, $\left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right\}$ klasyny alarys.

Gönükmeler.

1. Ikinji tertipli kwadrat matrisalaryň multiplikatiw toparynyň

a) $A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$

elementiniň merkezleşdirijisini tapmaly.

2. S_3 simmetrik toparyň merkezini tapmaly.

3. S_4 simmetrik toparyň

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$

elementi bilen catyrymly elementleriň klasyny tapmaly.

46. Silow teoremasy.

Lemma. Eger G abel toparyň tertibi p ýönekeý sana bölünýän bolsa, onda bu toparda p tertipli element bardyr.

Subudy. Eger $|G| = p$ bolsa, onda G siklik topar bolup, onuň birlik elementinden beýleki hemme elementleriniň tertibi p deň bolar.

Eger $|G|$ düzme san bolsa, onda onuň hususy bölek toparlary bolar. Goý A berlen G abel toparynyň hususy bölek toparlary bolsun, onda $|G| = |A||G/A|$ deňligi ýazyp bileris. Bu ýerde aşakdaky iki ýagdaýa seredeliň:

1) $|A|$ san p bölünýär;

2) $|G/A|$ san p bölünýär.

Eger A bölek toparyň tertibi p bölünýän bolsa, onda ýokardaky ýaly pikirýöretme bilen A bölek toparda ýa tertibi p deň bolanelement taparys, ýa-da häzirki seredýän iki ýagdaýmyza gaýdyp geleris.

Eger $|G/A| = p$ bolsa, onda G/A siklik topar bolup, onuň islendik xA elementi üçin $(xA)^p = A$ deňlik ýerine ýeter, ýagny onuň A-dan tapawutly islendik elementiniň tertibi p deň bolar. Indi G toparyň G/A faktor-topar bolan ψ tebigy gomomorfizmine seredeliň. Bu gomomorfizmde G toparyň elementiniň tertibi onuň obrazynyň tertibine bölünýändir. Hakykatdan-da, n tertipli g element üçin $A = \psi(e) = \psi(g^n) = [\psi(g)]^n$ ýazyp bileris.

Goý k $[\psi(g)]^k = A$ deňligi kangatlandyrýan iň kici položitel san diýeliň. Onda n san k sana bölünmelidir. Cünki tersine bolan ýagdaýynda, ýagny

n=KS+r, (r>K)

bolanda,

A=äψ(g)ö$^{KS+r}$=ä ψ(g)ö^{KS}äψ(g)ö^{r}

deňliklerden görnüşi ýaly, garşylyga duçar bolarys.

Diýmek,G toparyň ý elementiniň tertibi GňA faktor-toparyň ýA elementiniň tertibine bölünmelidir. Biziň seredýän ýagdaýymyzda ýA elementiň tertibi p deňdir, onda ý elementiň tertibi käbir pm sana deň bolar, ýagny

e=ý^{pm}=(ý^{m})^{p}

Bu ýerden, G toparda tertibi p-e deň bolan $ý^m$ elementiň bardygy gelip çykýar.

Eger GňA faktor-toparyň tertibi p-e bölünýän bolsa, onda ýokardaky ýaly pikirýöretme bilen GňA faktor-toparda tertibi p-e deň bolan element taparys ýa-da öňki sereden iki ýagdaýymyza gaýdyp geleris. Bu ýagdaýlardaky G toparyň hususy bölektoparynyň we onuň ol bölektopar boýunça faktor-toparynyň tertipleri G toparyň tertibinden kiçi bolarlar.

Şeýlelikde, biz ýokardaky ýaly pikirýöretme prosessimizi dowam etdirip, G toparyň tükenikli bolany üçin ahyrda bu toparda tertibi p

deň bolan element taparys.

Lemma subut edildi.

<u>Silow teoremasy.</u> Eger tükenikli toparyň tertibi p^k bölünýän bolsa, bu toparyň p^k tertipli bölektopary bardyr.

<u>Subudy.</u> Goý Z(G) G toparyň merkezi bolsun. Bu merkeziň tertibiniň p ýönekeý sana bölünýän we bölünmeýän ýagdaýlaryna garalyň.

Eger |Z(G)| p sana bölünýän bolsa, onda Z(G) merkeziň abel topar bolany üçin lemma görä bu merkezde p tertipli element bolmalydyr. bu elementiň döreden siklik toparyny A bilen belgilesek, onda |G|=|A|·|GňA| ýazyp bileris, bu ýerde |GňA| p sana bölünýändir. Biz ýokardaky ýaly pikirýöretmek prosessini dowam etdirip, A toparda tertibi p^{k-1} bolan bölektopar taparys. Eger biz G→GňA tertibi gomomorfizmde obrazlary şol bölektopary berýän hemme elementleriň köplügi B bilen belgilesek, onda ol p^{k-1} tertipli bölektoparymyz BňA faktor-topar bilen gabat geler. Bu ýerde |B|=|A|·|BňA| deňlikden $|B|=p^k$ alarys. Şeýlelikde, G toparda p^k tertipli B bölektopar taparys.

Indi Z(G) merkeziň tertibiniň p sana bölünmeýän ýagdaýyna garalyň. Bu ýagdaýda G topary çatyrymlanan elementleriň klaslarynyň jemine dargadalyň:

$$G=Z(G)\cup K(a_1)\cup\ldots\cup K(a_n)$$

Bu ýerde $K(a_i)$ klas a_i element bilen çatyrymlanan elementleriň köplügidir, Z(G) merkez bolsa ýekeelementli klaslary emele getirýän elementleriň köplügi bilen gabat gelýändir. Bu dargatmadan

$$|G|=|Z(G)|+|K(a_1)|+\ldots+|K(a_n)|$$

deňligi alarys.

|G| bu ýerde p sana bölünip, |Z(G)| bolsa oňa bölünýän däldir. Şonuň üçin soňky deňlikden görnüşi ýaly tertibi p sana bölünmeýän käbir $K(a_i)$ klas bolmalydyr. Bu klasyň tertibi bolsa, $C(a_i)$ merkezleşdirijiniň G topardaky indeksine deňdir, ýagny $|G|=|C(a_i)|\cdot|K(a_i)|$. Bu deňlik $|C(a_i)|$-niň p^k bölünmeýändigini görkezýär. $K(a_i)$ klasyň tertibiniň birden uludygyna görä $|C(a_i)|<|G|$ bolar.

Ýokardaky ýaly pikirýöretmäni $C(a_i)$ topara hem ulanalyň.

Şeýlelikde, şunuň ýaly pikirýöretme prosessimizi dowam etdirip, ahyrda G toparda p^k tertipli bölektopar taparys. Teorema subut edildi.

<u>Netije ňKoşiniň teoremasyň.</u> Eger tükenikli toparyň tertibi ýönekeý sana bölünýän bolsa, onda ol toparda p tertipli element bardyr.

47. TOPARLARYŇ GÖNI KÖPELTMESI.

<u>DAŞKY GÖNI KÖPELTME.</u> Goý bize iki sans G_1 we G_2 topar berlen bolsun. Bu toparlardaky kesgitlenen amallary degişlilikde ∘ we □ bilen belgil äliň.

Berlen toparlar boýunça täze topar guralyň. Onuň üçin bize täze toparyň elementleriniň we onda kesgitlenen amaly görkezmek zerurdyr.

Elementleri $(ý_i,y_i)$ $(ý_i \in G_i, y_i \in G_2)$ görnüşdäki hemme jübütelrden ybarat köplüge seredeliň. Bu köplükde * amaly

$$(ý_k,y_s) * (ý_m,y_n)=(ý_k \circ ý_m, y_s \square y_n)$$

görnüşde kesgitläliň. Täze düzülen köplügiň * amala görä topar emele getirýändigini barlamak kyn däl. Biziň guran bu toparymyza G_1 we G_2 toparlaryň daşky göni köpeltmesi diýilýär we $G_1 ý G_2$ görnüşde belgilenýär.

Ýazgynyň ýönekeýligi üçin geljekde biz ∘, □, * amallary nokat bilen aňlatjakdyrys. Abel toparlarynyň additiw ýazgylaryna seredenimizde bolsa, olaryň göni jemi $G_1 \oplus G_2$ hakynda gürrüň etjekdiris.

$G_1 ý G_2$ göni köpeltme degişlilikde G_1 we G_2 toparlara izomorf bolan $G_1ýe'$ we $eýG_2$ ňbu ýerde $e \in G_2$ birlik elementlerdirň bölektoparlary özünde saklaýandyr. Bize φ((ý,y))=(y,ý) görnüşde berlen φ:G_1ýG_2→G_2ýG_1 öwürme G_1ýG_2 we G_2ýG_1 toparlaryň izomorflylygyny berýär. Eger bize üç G_1,G_2,G_3 topar berlen bolsa, onda olaryň (G_1ýG_2)ýG_3 we G_1ý(G_2ýG_3) göni köpeltmeleri barada gürrüň edip bileris. Bu ýerde ψ((ý,y),z)=(ý,(y,z)) öwürmäniň kömegi bilen (G_1ýG_2)ýG_3 we G_1ý(G_2ýG_3) göni köpeltmeleriň arasynda izomorflylyk gurup bileis. Göni köpeltmegiň kommutatiwlik we assosiatiwlik häsiýetleri tükenikli sany G1,G2,...,Gn toparlaryň göni köpeltmesi hakynda gürrüň etmäge we ony

G_1ýG_2ý...ýG_n= $\prod_{i=1}^{n} Gi$

görnüşde ýazmaga mümkinçilik berýär.

TOPARY GÖNI KÖPELTMÄ DAGATMAK.

Teorema. Goý A_1 we A_2, $A_1 \cap A_2=e$ şerti kanagatlandyrýan G toparyň normal bölektoparlary bolsun. Onda A_1 bölektoparyň elementleri A_2 bölektoparyň elementleri bilen kommutatiwdirler.

Subudy.Goý ý we y degişlilikde A_1 we A_2 normal bölektoparlaryň erkin elementleri diýeliň we z=ýyý$^{-1}$y^{-1} elemente garalyň. Bu elementiň z=ý(yý$^{-1}$y^{-1}) ýazgysyndan z$\in A_1$ alarys. Sebäbi şert boýunça ý,ý$^{-1}\in A_1$ we A_1 normal bölektopar özüniň elementleri bilen çatyrymlanan G toparyň hemme elementlerini özünde saklaýar, ýagny yý$^{-1}$y$^{-1}\in A_1$. Bu ýerden bolsa ý we yý$^{-1}$y^{-1} elementleriň köpeltmek hasylynyň A_1 bölektopara degişlidigi gelip çykýar. Şunuň ýaly pikirýöretme bilen z=(ýyý$^{-1}$)y^{-1} ýazgydan z$\in A_2$ alarys. Teoremanyň şertine görä A_1 we A_2 bölektoparlaryň diňe birlik e elemente deň bolan umumy elementi bardyr. Şonuň üçin ý·y·ý$^{-1}$=e. Bu ýerden, ýy=yý gelip çykýar.

Teorema 2, Goý A_1 we A_2 käbir G toparyň normal bölektoparlary bolsun. Eger $A_1 \cap A_2$ we $A_1 \cdot A_2$=G bolsa, onda G topar A_1ýA_2 göni köpeltmä izomorfdyr.

Subudy. Daşky A_1ýA_2 göni köpeltmä garalyň we her bir (ý$_1$,y$_1$) $\in A_1$ýA_2 jübüte G toparyň ý$_1$·ý$_2$ elementini degişli edeliň. Şeýle degişlilik bize gomomorf berer.

Hakykatdan-da, (ý$_1$,y$_1$)·(ý$_2$,y$_2$)=ý$_1$ý$_2$,y$_1$y$_2$) elemente G toparyň ý$_1$·ý$_2$·y$_1$·y$_2$ elementi degişli bolar. Birinji teorema görä ý$_2$y$_1$=y$_1$ý$_2$. Bu ýerden $ý_1ý_2y_1y_2=ý_1y_1ý_2y_2=(ý_1,y_1)(ý_2,y_2)$, ýagny jübütleriň köpeltmesine deňdigi gelip çykýar.

Indi bu gomomorf öwrülmäniň izomorf öwrülmwdigini, ýagny G topar bilen $A_1ýA_2$ göni köpeltmäniň arasyndaky degişliligiň birbelgilidigini görkezeliň. Goý $ý_1,ý_2 \in A_1$ we $y_1,y_2 \in A_2$ elementler üçin $ý_1y_1=ý_2y_2$ diýeliň. Bu ýerden $y_1\cdot y_2^{-1}=ý_1^{-1}\cdot ý_2$ alarys. Bu deňligiň çep bölegi A_1 bölektopara, sag bölegi bolsa A_2 bölektopara degişlidir. Bu ýerden, teoremanyň $A_1\cap A_2=e$ şertinde görä, $y_1=y_2$ we $ý_1=ý_2$ gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

Ikinji teoremanyň şertini kanagatlandyrýan G topara onuň A_1 we A_2 bölektoparlarynyň içki göni köpeltmesi diýilýär. G topar göni köpeldijiler görnüşinde özünde A_1 we A_2 bölektoparlary saklaýandyr.

Bu bolsa ony daşky göni köpeltmeden tapawutlandyrýar.

Gönükmeler.

1. S_3-toparyň özüniň hususy bölektoparlarynyň göni köpeltmesine dagamaýandygyny görkezmeli.
2. Tükenikli toparlaryň göni köpeltmesiniň tertibini kesgitläň.
3. Noldan tapawutly hakyky sanlaryň multplikatiw toparynyň 1 we -1 sanlardan ybarat bolan multplikatiw toparyň we položitel hakyky sanlaryň multplikatiw toparynyň göni kompleksi bolýandygyny görkezmeli.

48. ABEL TOPARLARYŇ GÖNI JEMI.

Abel toparlary üçin amaly additiw ýazgysy amatly we giňden ulanylýan ýazgydyr. Şonuň üçin biz abel toparlarynyň göni jemini öwrenenimizde bu ýazgydan peýdalanjakdyrys.

<u>Teorema 1.</u> Tükenikli tertipli $A_1,A_2,...A_k$ abel toparlarynyň A jemi tükenikli abel topardyr we onuň tertibi göni goşulyjylaryň tertipleriniň köpeltmek hasylyna deňdyr, ýagny

$$|A|=|A_1|\cdot|A_1|\cdot\ldots\cdot|A_k|$$

<u>Subudy.</u> Göni A jemiň elementini

$$(a_1,a_2,...a_k) \text{ ň1ň}$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $a_1 \in A_1$, $a2 \in A2$,..., $a_k \in A_k$,. ň1ň sistemada a_1 element $|A_1|$ bahany, a_2 element $|A_2|$ bahany alyp bilýändiklerine görä, ň1ň sistemanyň dürli bahalarynyň sany $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_k|$ deňdir. Teorema subut edildi.

Teorema2. Eger <a> siklik toparyň n tertibini iki sany s we t özara ýönekeý natural sanlaryň köpeltmek hasylyna, ýagny

$$n=s\cdot t,\ (s\cdot t)=1$$

görnüşde ýazmak mümkin bolsa, oňa <a> topar tertipleri degişlilikde s we t bolan iki siklik toparyň göni jemine dagaýandyr.

Subudy. Eger b=ta diýsek, onda

$$s\cdot b=(s\cdot t)\cdot a=n\cdot a=0$$

alarys. $0<k<s$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan k san üçin

$$k\cdot b=k\cdot t\cdot a\neq 0$$

bolýandyr. Bu ýerden <b> bölek toparyň tertibiniň s-e deňdigi gelip çykýar. Edil şu usul bilen c=sa elementiň döreden <c> siklik bölektoparyň tertibiniň t deňdigini görkezmek bolýar.

Indi <b> we <c> toparlaryň diňe nula deň bolan umumy elementi saklaýandyklaryny görkezeliň. Eger bu toparlaryň nuldan tapawutly umumy elementi bar bolsa, onda $k\cdot b=b\cdot c$ deňlik ýerine ýeter ýaly k we l sanlar ($0<k<s$, $0<l<t$) tapylar. Bu ýerden

$$k\cdot t\cdot a=l\cdot s\cdot a$$

deňligi alarys. Onda $k\cdot t$ we $l\cdot s$ sanlaryň n-den kiçi bolýandyklaryna görä $k\cdot t=l\cdot s$ bolar. Bu bolas s we t sanlaryň özara ýönekeýlik şertine ters gelýär. Şeýlelikde, $\langle b\rangle\cap\langle c\rangle=0$ alarys.

Indi bolsa, <a> toparyň islendik elementini <b> we <c> bölektoparyň elementleriniň jemi görnüşinde aňladyp bolýandygyny görkezeliň.

Hakykatdan-da, s we t sanlaryň özara ýönekeýlik şertinden

$$s\cdot u+t\cdot u=1$$

deňligi kanagatlandyrýan u we ϑ bitin sanlary tapmak mümkindigi gelip çykýar. Bu ýerden

$$a=\vartheta(ta)+u(sa)=\vartheta b+us$$

bolar. Şeýlelikde,

$$\langle a\rangle=\langle b\rangle\overline{\oplus}\langle c\rangle$$

göni jemi alarys, Teorema subut edildi.

Mysal 1. $\sqrt[6]{1}$-iň bahalarynyň emele getirýän siklik toparyny abel toparlarynyň göni köpeltmesine dagytmaly.

Çözülişi. Berlen topar emele getirijisi $\varepsilon_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ bolan 6-njy tertipli siklik topardyr. Onuň tertibini özara ýönekeý 2 we 3 sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak mümkindir. Şonuň üçin $<\varepsilon_1>$ topar emele getirijileri $\varepsilon_1^2=\cos\frac{2\pi}{3}+$ i $\sin\frac{2\pi}{3}$ we $\varepsilon_1^3=\cos\pi+i\ \sin\pi$ bolan siklik toparlaryň göni köpeltmesine dagaýar, ýagny

$$<\varepsilon_1>=<\varepsilon_1^2>ý<\varepsilon_1^3>.$$

Hakykatdan-da,

$<\varepsilon_1^2>=\{\varepsilon_1^2,\ \varepsilon_1^4,\ \varepsilon_1^6,=1\}=\{\cos\frac{2\pi}{3}+i\ \sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3},$ 1}

we $<\varepsilon_1^3>=\{\varepsilon_1^3,\varepsilon_1^6=1\}=\{\cos\pi+i\sin\pi,\ 1\}$

toparlaryň bire deň bolan umumy elementi bardyr, bardyr, ýagny $<\varepsilon_1^2>\cap<\varepsilon_1^3>=1$. Olaryň köpeltmesi bolsa berlen $<\varepsilon_1>$ topary berýändir, ýagny

$<\varepsilon_1^2>\cdot<\varepsilon_1^3>=\{\varepsilon_1^5,\varepsilon_1^7=\varepsilon_1,\ \varepsilon_1^3,\ \varepsilon_1^2,\ \varepsilon_1^4,1\}=<\varepsilon_1,>$

<u>Kesgitleme 1.</u> Tertibini ýönekeý p sanyň käbir derejesi görnüşinde aňladyp bolýan topara p-sana degişli primar siklik topar diýilýär.

Subut eden 2-nji teoremamyzdan aşakdaky netije gelip çykýar.

<u>Netije.</u> tertibe düzme san bolan her bir tükenikli siklik topar dürli ýönekeý sanlara degişli bolan primar siklik toparlaryň göni jemine dagaýandyr.

<u>Subudy.</u> Goý bize tertibi n-e deň bolan G siklik topar berlen bolsun. Bu san üçin käbir $p_1^{k1},p_2^{k2},...,p_s^{ks}$ bolan siklik toparlaryň göni jemine dagytmasyny alarys, bu bolsa netijäniň tassyklanmasyny subut edýär.

<u>Mysal 2.</u> Tertibi 84-e deň bolan <a> siklik topary primar siklik toparlaryň göni jemine dagytmaly.

<u>Çözülişi.</u> Berlen <a> siklik toparyň tertibini

$$84=2^2\cdot3\cdot7$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerden, ýokardaky netijämize görä <a> siklik toparyň tertipleri 4,3 we 7 bolan üç sany primar siklik toparlaryň göni jemine dagaýandygy gelip çykýar. Ol primar siklik toparlar

<12a>={0, 12a, 24a, 36a, 48a, 60a, 72a},

<21a>={0, 21a, 42a, 63a},

<28a>={0, 28a, 56a}

görnüşde bolarlar. Şeýlelikde,

$$<a>=<12a>\overline{\oplus}<21a>\overline{\oplus}<28a>$$

göni jemi ýazyp bileris.

Kesgitleme 2. Eger topary onuň iki ýa-da birnäçe hususy bölektoparlarynyň göni jemine dagydyp bolmasa, onda ol topara dagamaýan topar diýilýär.

Teorema3. Her bir primar siklik topar dagamaýan topardyr.

Subusy. Goý bize tertibi p^k bolan<a> primar siklik topar berlen bolsun. Bize öňden belli bolşy ýaly, dagaýan toparyň göni goşulyjylary bolan hususy bölektoparlaryň kesişmesi nula deň bolmalydyr. Teoremany subut etmek üçin bu şertiň ýerine ýetmeýändigini görkezeliň. Onuň üçin berlen toparyň islendik hususy bölektoparyň nuldan tapawutly $p^{k-1}a$ elementi saklaýanlygyny görkezmek ýeterlikdir. Berlen <a> toparyň $p^{k-1}a$ elementi saklaýandygyny görkezeliň. Siklik <a> toparyň emele getirijisiniň a bolany üçin ý elementi

$$ý=s\cdot a,\ 0<s<p^k$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu s sany

$$s=p^l\cdot s',0\leq l<k$$

görnüşde ýazalyň. Bu ýerde p we s’ özara ýönekeý sanlardyr. Ol p we s’ sanlar üçin

$p\cdot u+ s'\cdot \vartheta =1$

deňligi kanagatlandyrýan u we ϑ bitin sanlary tapmak mümkindir. Indi $< ý >$ sykyllyk toparyň $\left(P^{k-l-1}\vartheta\right)x$ elementini alalyň we onuň $\rho^{k-1}a$ deňdigini görkezeliň:

$$\left(\rho^{K-l-1}\vartheta\right)x=\left(\rho^{K-l-1}\vartheta\right)\cdot s\cdot a=\rho^{K-l-1}\,\vartheta\cdot\rho^{l}\cdot s'\cdot a=$$

$$\rho^{K-l}\vartheta\cdot s'\cdot a=\rho^{K-l}\left(1-\rho\cdot u\right)a=\rho^{K-1}a-\rho^{K}\cdot u\cdot a=$$

$$\rho^{K-l}\cdot a-(\rho^{K}a)\cdot u=\rho^{K}\cdot a-0\cdot u=\rho^{K}\cdot a$$

Bu ýerden, $\rho^{K-1}\cdot\alpha$ elementiň <ý> sykyllyk bölek toparda saklanýandygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

Mysal 3. $\sqrt{1}$ bahalarynyň emele getirýän multiplikatiw sykyllyk toparynyň dagamaýan topardygyny görkezmeli.

Çözülişi. Bu topar emele getirijisi $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ bolan 8-nji tertipli sykyllyk topardyr. Onuň tertibini $8 = 2^3$ görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden, 3-nji teorema görä berlen topar dagamaýan topardyr.

Mysal 4. Bitin sanlaryň additiw Z toparynyň dagamaýan topardygyny görkezmeli.

Çözülişi. Bu toparyň islendik iki hususy bölek toparynyň nuldan tapawutly umumy elementi bardyr. Hakykatdan-da, erkin $n > 1,\ m, > 1\ (n \neq m)$ sanlary döreden

$$< n > = \{..., -m\cdot n, ..., -2n, -n,\ 0,\ n,\ 2n, ..., mn, ...\}$$

$$< m > = \{..., -n\cdot m, ..., -2m, -m,\ 0,\ m,\ 2m, ..., nm, ...\}$$

hususy bölek toparlarynyň nuldan tapawutly $-nm$ we nm umumy elementleri bardyr. Bu ýerden, Z toparyň dagamaýan topardygy gelip çykýar.

Tükenikli abel toparlary hakynda esasy teorema

Nula deň bolmadyk islendik abel topary primar sykyllyk toparlaryň göni jemine dagaýandyr.

Bu teorema subut etmekligi okyjylara hödürleýäris.

Gönükmeler.

1. Rasional sanlaryň alditiw toparynyň dagamaýan dopardygyny görkezmeli.
2. Tertibi n bolan sykyllyk $<a>$ topary göni jeme dagatmaly:

a. $n=6$

b. $n=12$

ç. $N=15$

d. $n=60$

3. Tertibi 16 deň sykyllyk toparyň dagamaýan topardygyny görkezmeli.
4. Kompleks sanlaryň additiw toparynyň hakyky we hyýaly sanlaryň bölek toparlarynyň göni jemi bolýandygyny görkezmeli.

49. Toparyň kommutanty we onuň häsiýetleri

Goý *ý* we *y* käbir *G* toparyň elementleri bolsun. Bu elementleriň köpeltmek hasylyny aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$xy = xy\,x^{-1}\,y^{-1}\cdot y\cdot x = (xy\,x^{-1}\,y^{-1})yx$$

Bu ýerden $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ aňlatmanyň *ý* we *y* elementleriniň ornuny çalşyrmak üçin zerur bolan aňlatmadygy görünýär. Ol aňlatma *ý* we *y* elementleriň kommutatory diýilýär we ä*ý*, *y*ö görnüşde belgilenýär, ýagny

$$[x, y] = xy\,x^{1}\,y^{1}$$

Eger *ý* we *y* elementler komutatiw bolsalar, onda ä*ý*, *y*ö=e.

Kesgitleme. *G* toparyň elementleriniň hemme kommutatorlarynyň köplügini *M* bilen belgiläliň. Bu köplügiň döreden G' bölek toparyna *G* toparyň kommutanty (ýa-da önüm bölek topary) diýilýär, ýagny

$$G' = <[x, y]/\,x, y\in G>$$

$[x, y]$ kommutatoryň ters kommutatoryny $[x, y]^{-1}$ bilen belgiläliň we onuň kommutator bolýandygyny görkezeliň.
Aşakdaky deňliklerden

$$[x, y]^{-1} = \left(xy\,x^{-1}y^{-1}\right)^{-1} = y\,x\,y^{-1}x^{-1} = [y, x]$$
$$[x, y][y, x] = xy\,x^{-1}y^{-1}\;\,y\,x\,y^{-1}x^{-1} = e$$

$[x, y]^{-1}$-niň *y* we *ý* elementleriň kommutatory bolýandygy görünýär.

Iki kommutatoryň köpeltmek hasylyna ýene-de komutator bolmagy hökman däldir. Ýöne şeýle köpeltmeler toparyň kesgitlemesine görä G' onuň bölek toparda saklanmalydyr.
Mysal 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{we} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisalaryň kommutatoryny tapmaly.
Çözülişi. Ilki bilen berlen matrisalaryň ters matrisalaryny tapalyň:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indi aşakdaky köpeltmäni hasaplalyň:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu ýerden, berlen matrisalaryň kommutatorynyň birlik matrisalygy gelip çykýar, ýagny

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Mysal 2. S_3 simmetrik toparyň kommutantyny tapmaly.

Çözülişi: S_3 toparyň islendik iki elementiniň kommutatory jübüt ornygoýma bolýandyr. Sebäbi iki jübüt ýa-da iki täk ornygoýmalaryň köpeltmek hasyly jübüt ornygoýmadyr.

Kommutatora girýän täk ýa-da jübüt ornunagoýmalaryň sany bolsa jübütdir (nol, iki ýa-da dört). Şeýlelikde, S_3 toparyň kommutatorlarynyň köplügi jübüt ornunagoýmalardan ybaratdyr.

Aşakdaky kommutatorlaryň

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alamaty çalyşýan A_3 topary emele getirýändigine göz ýetirmek kyn däldir. Bu bolsa $S_3' = A_3$ görkezýär.

Mysal 3. alamaty çalyşýan A_3 toparyň kommutantyny tapmaly.

Çözülişi. A_3 toparyň islendik iki elementiniň kommutatorynyň toždestwolaýyn E ornunagoýma deňdir.

Şeýlelikde, $A_3 = E$ bolar.

Geljekde biz A bölek toparyň G toparyň normal bölek topary bolmaklygyny $A \triangleleft G$ ýazgy bilen aňladalyň.

Teorema I. G toparyň G' kommutantyny saklaýan islendik $K \le G$ bölek topar G-niň normal bölektoparydyr.

Subudy: Goý $\forall\, x \in K, \forall\, g \in G$ we $G' \le K$ bolsun.
Onda

$$g x g^{-1} = g x g^{-1} x^{-1} x = [g, x] x$$

bolar. $[g, x] \in G' \le K$ we $x \in K$ bolýandygyna görä $[g, x] x \in K$. Bu ýerden K bölektoparyň özüniň islendik $ý$ elementi bilen birlikde oňa G toparda çatyrymlaýyn hemme elementleri özünde saklanýandygy gelip çykýar. Bu bolsa $K \triangleleft G$ bolýandygyny görkezýär. Teorema subut edildi.
$K = G'$ bolanda, bu teoremadan aşakdaky netije gelip çykýar.

Netije. G' kommutant G toparyň normal bölek toparydyr, ýagny $G' \triangleleft G$.

Teorema 2.

1. G / G' faktor-topar abel toparydyr.

2. Eger $GňK$ abel topary bolsa, onda G' her bir K normal bölektoparda saklanýandyr.

Subudy.

1. Goý a we b G toparyň islendik elementleri bolsun. Teoremany subut etmek üçin $a G'$ we $b G'$ çatyk klaslaryň kommutatiwdiklerini görkezmek ýeterlikdir.
$G' \triangleleft G$ we çatyk klaslaryň I^o-häsiýetinden aşakdaky deňlikleri alarys:

$$[aG', bG'] = aG' \cdot bG' \cdot a^{-1}G' \cdot b^{-1}G' = aba^{-1}b^{-1}G' = [a,b]G' = G'$$

Bu ýerden $aG' \cdot bG' = bG' \cdot aG'$. Bu bolsa, G / G' faktor-toparyň abel topardygyny görkezýär.
2. Indi, goý $GňK$ abel topary we $K \triangleleft G$ bolsun. Onda, G toparyň islendik a we b elementleri üçin

$$[a, b] \cdot K = a b a^{-1} b^{-1} \cdot K = a K b K a^{-1} K b^{-1} K b^{-1} K = [a K, b K] = K$$

dogrydyr. Bu ýerden, çatyk klaslaryň I^o-häsiýetine görä

$[a,b] \in K$ alarys. Bu bolsa G' toparyň her bir elementiniň K normal bölektoparda saklanýandygyny görkezýär. Diýmek, $G' \leq K$. Teorema subut edildi.

50. Çözgütli we ýönekeý toparlar.

Geçen temanyň netijesine görä

$$G' \lhd G \qquad (1)$$

G' toparyň $(G')' = G''$ kommutantyna seredeliň.

Bu kommutant G toparyň ikinji önüm topary, ýa-da ikinji kommutanty diýilýär we (1) esasynda $G'' \lhd G'$ ýazmak bolar. Şu prosesi dowam etdirip, $G^{(K)} = \left(G^{(K-1)}\right)$ K-njy önüm topary kesgitlemek bolar, bu ýerde $G^{(K)} \lhd G^{(K-1)}$.

Şeýlelikde

$$G \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd \ldots \rhd G^{(K-1)} \rhd \ldots \qquad (2)$$

kommutatlaryň hataryna alarys.

Kesgitleme. Eger (2) hatar birlik bölektoparda üzülýän bolsa, ýagny $G^{(m)} = e$ kanagatlandyrýan iň kiçi m indekse G toparyň çözgüt basgançagy diýilýär.

Çözgütli toparlaryň aşakdaky mysallaryna seredeliň.

Mysal 1. Islendik abel topary bir basgançakly çözgütli topardyr.

Çözülişi. Goý G abel topary bolsun, onda onuň hemme kommutatorlary birlik elementde deň bolarlar. Bu ýerden $G^{(1)} = e$ gelip çykýar.

Mysal 2. Hemme sykyllyk toparlar bir basgançakly çözgütli topardyrlar.

Çözülişi. Bu mysal öňki mysallarymyzyň hususy halydyr, sebäbi hemme sykyllyk toparlar abel toparlarydyr.

Mysal 3. m basgançakly çözgütli toparda birlik bölek topara deň bolmadyk normal abel topary bardyr.

Çözülişi. Şerte görä $G^{(m)} = e.$ bu ýerden $G^{(m-1)}$ toparyň abel toparydygy gelip çykýar.

$G^{(m-1)}$ toparyň normal toparydygy bolsa bize öňden bellidir.

Mysal 4. üçünji derejeli simmetrik S_3 toparyň çözgüt basgançagyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Geçen temamyzyň 2-nji mysalyndan S_3 toparyň kommutatynyň alamaty çalyşýan A_3 topar bolýandygy bize bellidir, ýagny $S' = A_3$

A_3 topary emele getirijisi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ornuna goýma bolan sykyllyk topar görnüşinde ýazmak bolar.

$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 \right\} = < \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} >$$

Sykyllyk toparyň çözgüt basgançagy bolsa bire deňdir. Bu ýerden, $A_3' = e$ alarys. Şeýlelikde,

$$S_3' = A_3, \quad S_3'' = A_3' = e$$

Berlen S_3 toparyň çözgüt basgançagy 2-ä deňdir.

Käbir toparlar öz kommutanty bilen gabat gelýärler we çözgütli bolmaýarlar. Mundan başga-da, hususy normal bölek topary bolmadyk toparlar hem bardyr. Şeýle toparlara ýönekeý toparlar diýilýär.

Teorema. Alamaty çalyşýan A_5 topar ýönekeý topardyr.

Bu teoremany subut etmekligi okyjylara hödürleýäris.

Mysal 1. Eger ρ ýönekeý san bolsa, onda aýyrmalaryň klaslarynyň additiw Z_p toparynyň ýönekeýdigini görkezmeli.

Çözülişi. Aýyrmalaryň her bir klasyny

$$\{r\}_\rho = r + \rho Z = \{r + \rho K / K \in Z\}$$

görnüşde ýazmak bolar. (Bu ýerde Z bitin sanlaryň additiw topary). Aşakdaky klaslaryň

$$\{0\}_\rho, \{1\}_\rho, \ldots, \{\rho - 1\}_\rho$$

köplüginiň additiw topary emele getirýändigini barlamak kyn däldir. Hakykatdan-da, bu toparyň *0* elementi bolup $\{0\}_\rho$ klas, $\{m\}_\rho$ elementiniň garşylykly elementi bolup $\{\rho - m\}_\rho$ klas hyzmat edýändir. Şeýle additiw topar Z_ρ bilen belgilenýär. Bu toparyň tertibi ρ ýönekeý sana deňdir, şoňa görä onuň hususy bölektopary ýokdur. Bu ýerden bolsa Z_ρ toparyň ýönekeý topardygy gelip çykýar.

Gönükmeler

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ we $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisalaryň kommutatoryny tapmaly.
2. A_4 toparyň kommutantyny we onuň ol kommutant boýunça faktor-toparynyň tertibini tapmaly.
3. S_4 toparyň çözgütli topardygyny görkezmeli we onuň çözgüt basgançagyny kesgitlemeli.
4. Subut etmeli:

a. çözgütli toparyň islendik bölek topary çözgütlidir.
b. eger A we B toparlar çözgütli bolsalar, onda olaryň kesgitlemesi hem çözgütli topardyr.
ç. çözgütli toparyň islendik faktor-topary hem çözgütlidir.

Edebiýat

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Учебник.–М.: Наука.–1977г. 495с.
2.Курош А.Г. Курс высшей алгебра. Учебник.–II-е изд. стереотип.-М.: Наука.-1975г.
3.Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. Учебник.–М.: Наука.–1984г.
4.Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.-М.:Наука.-1982г.
5.Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры ОНТИ-НКТП-СССР.-1937.
6.Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие.-М.:Наука-1984.-336с.

Mazmuny

Orazmämmet Annaorazow, Baba Kömekow,
Hajymuhammet Geldiýew, Azatgeldi Öwezow

ALGEBRA WE SANLAR NAZARYÝETI

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby