H.A.Orazberdiýew

Statistiki radiofizika

Aşgabat - 2010

H.A.Orazberdiýew

Statistiki radiofizika

Ýokary okuw mekdepleriniň radiofizika we elektronika hünäriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlendi

Aşgabat -2010

H.Orazberdiýew

Statistiki radiofizika. Ýokary okuw mekdepleriniň radiofizika we elektronika hünäriniň talyplary üçin okuw gollanmasy. 2010.

Hojamuhammet Orazberdiýew

Statistiki radiofizika

Ýokary okuw mekdepleriniň radiofizika we elektronika hünäriniň talyplary üçin.

A.Gurbanmuhammedowyň redaksiýasy bilen

EDEBIÝAT

1. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary,’’ Aşgabat, 2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow.Gysgaça terjimehal. Aşgabat, 2007.
3. ,,Halkyň ynam bildireni’’.Aşgabat,2007.
4. Gurbanguly Berdimuhammedow, ,,Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr’’. Aşgabat,2007.
5. ,,Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy.’’ Aşgabat,2007.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow, ,,Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy,’’ Aşgabat, 2007.
7. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. Aşgabat, 2007.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurdy täzeden galdyrmak baradaky syýasaty.Aşgabat,2007.
9. ,,Parahatçylyk, döredijilik, progress syýasatynyň dabaralanmagy. Aşgabat, 2007.
10. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumymilli, Galkynyş Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlislerinde sözlän sözi.
11. ,,Täze Galkynyş eýýamy. Wakalaryň senenamasy-2007 ýyl.’’Aşgabat, 2008.
12. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom.Aşgabat, 2008.
13. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom.Aşgabat, 2009.
14. Akbibi Ỳusubowa Beýik Galkynyşyň waspy, Aşgabat, 2008.
15. Макаров П.В. “Статистические параметры радиофизики и оптик”. М: Просвещение, 1995 г.
16. Алиханов и др. „Процессы статистической радиофизики“. М: 1991.

MAZMUNY

Giriş

Statistika radiofizika dersi soňky ýyllarda Ýokary okuw mekdepleriniň radiofizika hünäriniň talyplary üçin esasy kurslaryň birine öwrüldi.

Statistiki radiofizika dersinde radiogurluşlardaky şyggyldylar, fluktuasiýalar bilen baglanşykly hadysalar öwrenilýär, informasiýany kabul etmegiň we ibermegiň statiki problemalary “seljerilýär”. Statistiki radiofizika ylmy yrgyldyly we tolkun proseslerindäki statistiki hadysalara-de seredýär.

Köp real halatlarda yrgyldyly we tolkun proseslerinde bu prosesleri statistiki ýazmak gerekdir. Sebäbi radiofizikada regulýar yrgyldylar we tolkunlar bilen birlikde tötänleýin yrgyldylar we tolkunlar duş gelýärler.

Statistikanyň radiofizikada zerurlygy, köp radio signallaryň çeşmesi şyggyldy generatorlarydyr.

Hususy şyggyldylaryň barlygy Kabul edijileriň predel duýgurlygyny, ölçegiň takyklygyny şertlendirýär, takyk monohromatik yrgyldylary generirläp bolmaýandygyny görkezýär.

Tötän funksiýalar nazaryýeti statistik radiofizikanyň matematiki esasydyr.

Bir ýa-da birnäçe bagly däl üýtgeýän ululyklaryň skalýar ýa-da wektor funksiýasyna tötän funksiýa diýilýär. Bu işde matematiki tötän funksiýa düşünjesi bilen bir hatarda tötän hadysa we tötän meýdan düşünjesi ulanylýar.

Statistik radiofizika yrgyldyly we tolkun proseslerinde stahostik hadysalary öwrenýär. Stahostik differensial deňlemeleriň çözüwi – bu tötän hadysa ýa-da meýdan üçin orta we korrelýasion funksiýalary tapmakdyr. Eger deňlemäniň çözüwi belli bolsa görkezilen ululyklary otnositel kesgitlemek ýönekeýdir. Stahostik usulyň özüne mahsus bolan aýratynlygy bardyr, ýagny ol usulyň kömegi bilen asyl deňlemäniň çözüwi belli bolmasa hem ortalamany hasaplap bolýar.

ýoly bilen analiz edilşiniň ugurlaryna we tomson generatorynyň işleýiş prosesiniň matematiki deňlemerde özgerdilişi.

3.Takyk däl çözüwlerde stohatik metodynyň ulanylşyny başga hem köp ýerlerde ulanyp boljakdygyna göz ýetirdim.

(a,b- x funksiýa üçin döredilen), onda

$$x^{(k)} = \langle b(x)\rangle \hat{\xi}, \qquad \hat{\xi} \equiv \int_{t_0<t}^{t} \xi(\theta)d\theta$$

we

$$\langle x\xi\rangle = \langle x^{(k)}\xi\rangle = \langle b(x)\rangle D$$

Bu gatnaşyklary x prosesy käbir $f(x)$ funkiýa bilen umulaşdyraly:

$$f^{(k)} = \langle f'(x)b(x)\rangle \hat{\xi} \qquad (f' \equiv \partial f/\partial x), \quad (1.7.21a)$$

$$\langle f(x)\xi\rangle = \langle f'(x)b(x)\rangle D \qquad (1.17.21b)$$

Bu getirlen aňlatmalar Fokker-Plankyň deňlemeriniň kömegi bilen subut edilen (indiki bölüme seret), δ -korrelýasiýaly modelli hasaplama metody kä wagt fokker-plankyň ýakynlaşmasy hem diýilýär.

Tötänleýin funksiýalar usuly radiofizikada matematik ölçegde alnanda tötän başlangyjy bolan çyzykly we çyzykly däl deňlemeler bilen iş çalyşýar. Şeýlelik bilen hem tötän hadysalary beýan edýän matematiki meseleler 3 klasa bölünýär:

1. Tötän başlangyç şertli (ýa-da çäkli) meseleler.
2. Parmetrleri tötän üýtgeýän meseleler.
3. Tötän daşary güýçli meseleler.

Umuman aýdylanda tötän hadysalary beýan edilende ulanylýan esasy “ýarag” (usul) ähtimallyga mahsusdyr. Bu babatda bolsa nazary tötänleýin funksiýalar usulyny ulanmak makuldyr. Ol usuly radiofizikada peýdalanmagyň ähmiýeti uludyr. Gitdigiçe çylşyrymlaşýan radioelektronika we radiofizika şeýle ylmy diregleri hem tap edýär.

1.bu mowzugumyzda tötän prosesynyň zyňylşyny ara alyp seretdik, şeýle hem olaryň sanyny energiýasy hasapladyk.

2. Ýönekeý önümlerde stohastik diferensýal deňlemeleriň häsiýetnamasyna, şeýle hem tötän yrgyldylaryň orta nokat çözüw

1. Tötänleýin hadysalar.

Determinirlenen we statik real hadysalaryň beýan edilişi:

Islendik fiziki prosesi derňemek bilen biz ony matematiki beýan etmäge çalyşýarys. Matematik beýan ediliş determinirlenen ýa-da statiki bolup bilýär. Determinirlenen beýan etmede meseläniň çözüwi takyk matematiki funskiýa görnüşinde gözlenýär.

Ýagny $x = f(t)$. (1.1)

Determinirlenen beýan etmäniň esasynda prosesiň gaýtalanmagynda şol bir x-iň wagta baglylygy alynjakdygynyň çaklamasy ýatýar (1).

Meselem, eger hadysanyň determenirlenen beýannamasyny beýan edip bolmasa, onda ol braun hereketi bolar. X okyň ugry boýunça bölejigiň traýektoriýasyny ölçäp, biz käbir $x_{(1)}(t)$ egrini alarys. Eger bölejigi başlangyç ýagdaýa getirsek, onda $x_{(2)}(t)$ traýektoriýa düýpden üýtgeşik bolar. Traýektoriýalaryň tapawutlanmasy molekulalaryň uly sanynyň haotiki ýylylyk hereketi bilen bagly we onuň öňünden aýdyp bolmaýan häsiýeti göze görünýändir.

Munda we başga şuňa meňzeş ýagdaýlarda, ýagny x hadysa tötänleýin bolanda determinirlenen beýan etmäniň deregini statiki beýan etme ulanylýar.

Kesgitli interwalda x-iň baha kabul etme ähtimallygy $\omega(x,t)$ üsti bilen şeýle ýazylar

$$P(x_1 \le x \le x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \omega(x,t)dx.$$

Ähtimallygyň ýaýrama funksiýasy x-iň hakyky tötän funksiýasy üçin girizilýär

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,t)dx = 1.$$

Radiofizikada we optikada $z(t) = x(t) + iy(t)$ görnüşdäki tötänleýin proseslere seredilýär. Onuň ähtimal düzümi $\omega(x,y,t)$ komponentiň hakyky dargamasy bilen kesgitlenýär.

Tötän prosessiň amala aşyrmasy: statik ansambl.

Deň şertlerde deň wagtda köp N sany bölejikleri braun hereket edýär diýip çaklalyň. Netijede biz $x_{(m)}(t)$ (n=1,2,…,N) dürli egrileri alarys. Mümkin bolan prosesleriň jemine statik ansambl diýilýär. Ähtimallygy başgaça şeýle ýazyp bolar:

$$P_1 = P(x_1 \le x \le x_1 + \Delta x, t) \approx \frac{N_1}{N}.$$

Ýeterlik kiçi Δx gatnaşyk ähtimallygyň dykyz ýaýramasyna geçmäge mümkinçilik berýär.

$$\omega(x,t) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{1}{\Delta x} \frac{N_1(t)}{N(t)}.$$

$\omega(x,t)$ funksiýany tejribeleriň üsti bilen we (4), (5) formulalary ulanmak bilen kesgitläp bolar.

Köp halatlarda munuň ýaly usula mätäçlik ýok sebäbi $\omega(x,t)$ funksiýany teoretik ýol bilen tötän hadysalaryň modeline esaslanyp tapyp bolar.

$\omega(x,t)$ funksiýany başgaça ähtimallygyň birölçegli ýaýramasy diýip hem atlandyrýarlar.

Bu ýerden, (14) ortalanan we soňky gatnaşygy ulanyp, $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_N}$ ortalyklar üçin diferensiýal deňlemeli sistemalary tapmak kyn däl.

Bu deňlemeriň proseduralary örän örän aňsat. (14) ortalanandan alarys

$$\dot{\overline{x}} = \sum_n a_{mn} \overline{x}_n + \sum_n \langle \xi_{mn} x_n \rangle + a_{mo} \quad (1.7.18)$$

Bu ýerden görnişi ýaly

$$\langle \xi_{mn} x_n \rangle = \langle \xi_{mn} \overline{x}_n \rangle$$

Ýöne welin, $\langle \xi_{mn} \overline{x}_n \rangle$ tapmak üçin hemme $\overline{x}_n$ fluktuasiya dälde diňe ξ_{mn} bilen korrelirleneniň komponentyny. $x_n^{(k)}$ yzygider komponenty belläli alarys:

$$\langle \xi_{mn} \tilde{x}_n \rangle = \langle \xi_{mn} x_n^{(k)} \rangle \quad (1.7.19)$$

(16),(17) görnüşi ýaly, $x_n^{(k)}$ deňlemeden alarys, (14) sag tarapyny goýup ,şeýle hem koffisiýentlary ξ_{mn} otra bahasy bilen çalşyryp alarys:

$$\frac{d}{dt} x_n^{(k)} = \sum_k \xi_{nk}(t) \tilde{x}_k + \xi_{no}(t)$$

Bu ýerden

$$\frac{d}{dt} x_n^{(k)} = \sum_k \tilde{x}_k \int_{t_0<t}^{t} \xi_{nk}(\theta) d\theta + \int_{t_0<t}^{t} \xi_{no}(\theta) d\theta \quad (1.7.20)$$

δ -korrelýasiýaly ξ_{nk} funksiýa $\overline{x}_k$ integeral aşagyna salynan.(20)-ini (19)-da goýup alarys

$$\langle \xi_{mn} x_n \rangle = \sum_k \overline{x}_k D_{mnnk} + D_{mnno} \quad (1.7.21)$$

(21) alynyp (18) goýulmagy orta $\overline{x}_m$ üçin şol bir deňleme berýär.

(20) we (21) gatnaşygyndan çyzykly däl stohastik deňlemeleri subut edip bolar. Mysal üçin, eger

$$\dot{x} = a(x) + b(x)\xi(t), \qquad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau)$$

(2) göz öňüne tutup, $\langle \chi^2 \rangle = 2D\theta$ şeýledigini görmek kyn däl, χ prosesy gaussyňky bolup, gaussyň ξ gohuna çyzykly bagly. Yzygiderlikde

$$\langle e^{-x} \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle \chi^2 \rangle} = e^{D\theta}$$

Bu ortalanan bahany (13b) goýup we integrirläp,(13a) bilen gabat gelýän aňlatma alarys.

Iň soňunda belläli, ýagny δ -korrelirly fluktuasiýa parametny takmynlap $\bar{x}$ üçin ýapyk deňlemäni aldyk ((12)deňleme). Ýokarda δ -korrelirlenen proses fizikda hakyky däldigi görkezilýärdi.şeýle bolsa hem bu modeli ulanyp boljak, eger fluktuasiýa sprktynyň galyňlgy sistemadaky geçiriji çyzygyň häsiýetnamasyndan ýeterlik derejede uly bolsa; has giňişleýin §3 bölüm 6 (şeýle hem (31),(32) formulalaryň soňunda)

(8) we (9) gatnaşygy dogry, haçanda hemme sistemalar üçin birinji derejeli islendik sanly tötän δ -korrelirlenen koefisiýently bolsa

$$\dot{x}_m = \sum_{n=1}^{N} [a_{mn}(t) + \xi_{mn}(t)] x_n + a_{m0}(t) + \xi_{mn}(t), \qquad (m = 1, 2, ..., N) \text{ (1.7.14)}$$

Tötän $x_1, x_2, ..., x_N$ funksiýany hasaplaýan. Eger edil $\xi_{mn}(t)$ tötän, δ -korrelirlenen bagly bolsa we umuman aýdylanda wagta görä stasiýonar däl gaus funksiýasy

$$\langle \xi_{mn} \rangle = 0, \langle \xi_{mn}(t) \xi_{pq}(t') \rangle = 2D_{mnpq}(t)\delta(t - t') \text{ (1.7.15)}$$

Ýagny,meňzeşlikde (8) we (9)

$$\left\langle \xi_{mn}(t) \int_0^t x_p(\theta) d\theta \right\rangle = 0 \text{ (1.7.16)}$$

$$\left\langle \xi_{mn}(t) \int_0^t \xi_{pq}(t) x_q(\theta) d\theta \right\rangle = D_{mnpq}(t) \bar{x}_q(t) \text{ (1.7.17)}$$

Statistik ortalama.

Ähtimallygyň ýaýramasyny ulanyp dürli statistik ortalamalary hasaplap bolar, ýagny amala aşmanyň ansambli boýunça ortalama.

Meselem, x(t) tötän hadysanyň orta bahasy

$$\langle x \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{m=1}^{N} x_{(m)}(t)}{N} \qquad (1.1.6)$$

bu şeýlede ýazylýar:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega(x, t) dx \qquad (1.1.7)$$

$x_{(m)}(t)$ wakalary $x_a \le x \le x_a + \Delta x$ interwal boýunça (6)-da grupirläp, alarys

$$\langle x \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_n x_n N_n}{N},$$

bu ýerde N_n - wakanyň n-nji interwaldaky sany. Δx -e köpeldip, bölüp we (5) hasaba alsak, şeýle zat alynar

$$\langle z \rangle \approx \lim_{N \to \infty} \sum_n x_n \omega(x_n, t) \Delta x,$$

$\langle x \rangle$ üçin $\Delta x \to 0$ predelde hem (7)-ni alarys.

Statistik ortalama burçly ýaýlardan başgada depesinde çyzyjyk bilen aňladylýar

$\langle x \rangle = \bar{x}$.

Ortalama $\bar{x}$ regulär manysy bar. Ýagny onuň öňünden belli bolan häsiýeti bar. Bu bolsa $\bar{x}(t)$ regulär düzüjileriň we fluktuasion komponent görnüşinde ýazmak üçin örän amatlydyr. (ýa-da ýöne $\tilde{x}(t)$ fluktuasiýa görnüşli.)

$$x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t). \qquad (1.1.8)$$

(8)-e laýyklykda, tötän hadysalaryň wakalaşmalary diňe fluktuasiýasy bilen tapawutlanýarlar, mundan başgada hemme wakalaşmalar üçin regulýar düzüjiler birmeňzeşdir.

$$x_{(m)}(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}_{(m)}(t). \qquad (1.1.9)$$

Bu ýazgyny ýene takyklaşdyryp şeýle ýazyp bolar:

$$x_{(m)}(t) = \xi_{0(m)} + \xi_{(m)}(t). \qquad (1.1.10)$$

Bu ýerde $\xi_{0(m)}$ – wakalaşmadan wakalaşma aralygynda tötän ýagdaýda üýtgeýän we ortalama nula deň bolan hemişelik parametr.

(9) we (10) laýyklykda (8)-i şeýle ýazyp bolar:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi_0 + \xi(t). \qquad (1.1.11)$$

Tötän prosesiň haýsy hem bolsa bir F(x) funksiýany ortab bahasyny (7)-ä meňzeşlikde

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,t) F(x) dx. \qquad (1.1.12)$$

Tötän hadysanyň statik ortalamasy umumy görnüşde t wagta baglydyr. (12) ulanyp, dürli orta momentler üçin şeýle ýazyp bolar.

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \omega(x) dx \quad (n = 1, 2, 3, ...), \qquad (1.1.13)$$

merkezi momentler üçin

$$\mu_n = \langle (x - \bar{x})^n \rangle = \langle \bar{x}^n \rangle, \qquad (1.1.14)$$

$$\left\langle \xi(t) \int_0^t \xi(\theta) x(\theta) d\theta \right\rangle = D\bar{x}(t) \; (1.7.9)$$

(1) Ortalanan deňlemä gaýdyp geleli:

$$\dot{\bar{x}} + h\bar{x} + \overline{\xi x} = \varphi(t)$$

$\overline{\xi x}$-i $\bar{x}$ üsti bilen görkezmeli, sebäbi ýapyk deňlemede diňe $\bar{x}$ alar ýaly. Beýle oýuny $\overline{\xi x}$ aňlatma üçin (8) we (9) gatnaşygy ulanyp tapyp bolar. Hakykatdanam (1) aňlatma ekwiwalent integral deňleme

$$x(t) = \int_0^t [-hx(\theta) - \xi(\theta)x(\theta) + \varphi(\theta)] d\theta$$

ýagny

$$\overline{\xi x} = -h \left\langle \xi(t) \int_0^t x(\theta) d\theta \right\rangle - \left\langle \xi(t) \int_0^t \xi(\theta) x(\theta) d\theta \right\rangle$$

ýada (8) we (9) hasaba alyp

$$\overline{\xi x} = -D\bar{x} \; (1.7.11)$$

(11) we (12) ýeine goýup, $\bar{x}$ üçin deňleme alarys:

$$\dot{\bar{x}} + (h - D)\bar{x} = \varphi(t) \; (1.7.12)$$

Mundan gelýär,

$$\bar{x}(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta - \chi} - \varphi(t - \theta) d\theta = \frac{\varphi}{h - D}, \qquad (\varphi = const) \; (1.7.13a)$$

Bu jogaby göni barlap bolar, belli bolan ortalanan deňlemäniň çözüwi bilen:

$$\bar{x}(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta - \chi} - \varphi(t - \theta) d\theta, \chi = \int_{t-\theta}^{t} \xi(t') dt'$$

$\varphi = const$ hasaplap, taparys

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} e^{-h\theta} \langle e^{-x} \rangle d\theta, \; (1.7.13b)$$

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}_1(\theta)d\theta \right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{t+\varepsilon} d\theta\int_0^{\infty} d\theta_1 e^{-h\theta_1}\left\langle \xi(t)\xi(\theta-\theta_1)\right\rangle x_0(\theta-\theta_1) =$$

$$= -2D\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{t+\varepsilon} d\theta\int_0^{\infty} d\theta_1 e^{-h\theta_1} x_0(\theta-\theta_1)\delta(t-\theta+\theta_1)$$

(1.7.6)

(6) da $\theta_1 \geq 0$,bu diýmek δ -funksiýa nola diňe $t \leq \theta \leq t+\varepsilon$ interwalda bolup biler. (6)-ny birinji θ_1 görä, soňra θ görä integrirläp alarys

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}_1(\theta)d\theta \right\rangle = -\lim 2Dx_0(t)\int_0^{t+\varepsilon} d\theta e^{-h(\theta-t)} =$$

$$= -\lim 2Dx_0(t)\frac{e^{-h\varepsilon}-1}{h} = 0$$

Soňra (4) ulanyp $\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}_2(\theta)d\theta \right\rangle = 0$ we umumy $\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}_n(\theta)d\theta \right\rangle = 0$ hallaryny subut edip bolýar . Bu hem

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}(\theta)d\theta \right\rangle = 0 \quad (1.7.7)$$

ýagny $\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{x}_1(\theta)d\theta \right\rangle \equiv 0$ we $x = \bar{x} + \tilde{x}$,onda (7) şeýle ýazyp bolar

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t x(\theta)d\theta \right\rangle = 0 \quad (1.7.8)$$

Hakyky analog subudynda, onda

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \xi(\theta)\tilde{x}_1(\theta)d\theta \right\rangle = 0$$

ýagny

bunuň häsiýetnama funksiýany bolsa

$$\theta(u) = \left\langle e^{iux}\right\rangle \qquad (1.1.15)$$

soňkyny furýe-görnüşde integrirläp bolar

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\omega(x)dx, \qquad (1.1.16)$$

degişlilikde, häsiýetlendiriji funksiýany bilip, ähtimallygyň ýaýramasyny Furýeniň tersine üýtgemesini ýerine ýetirip tapyp bolar.

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)e^{-iux}du. \qquad (1.1.17)$$

$\omega(x)$ ähtimallygyň ýaýramasyndan tapawutlylykda, häsiýetlendiriji funksiýa umuman aýdylanda komplekslidir. Ol moduly boýunça hem çäklenendir.

$$\left|\theta(u)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\left|\ell^{iux}\right|dx = \int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)dx = 1.$$

(12)- niñ erkin F(x) funksiýasynyñ orta bahasyny $\theta(u)$ we fure-görnüş üsti bilen hem añladyp bolar:

$$\left\langle F(x)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)\varphi(u)du, \qquad (1.1.18)$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-iux}dx. \qquad (1.1.19)$$

Statistic añlatmalaryñ (12) operatorynyñ kesgitlenşinden görnüşi ýaly, bu operator-çyzykly, erkin $\hat{L}$ çyzykly operator bilen kommutirlenýär we x-e bagly däl.

$$\left\langle \hat{L}F \right\rangle = \hat{L}\left\langle F \right\rangle.$$

Hususan-da, integralyñ orta bahasy orta bahadan alnan integrala deñdir. Önümiñ ortalamasy bolsa ortalamanyñ önümine deñdir.

Moment boýunça tertibe goýma.

$\theta(u)$ häsiýetlendiriji funksiýa, $\omega(x)$ ähtimallygyñ ýaýramasy we (12) umumy görnüşdäki yzygiderlik görnüşinde ýazylyp biler, olaryñ koeffisiýentleri bolsa (13) momentler boýunça kesgitlenýär.

(15)_de eksponentany x boýunça yzygiderlige dagadyp alarys:

$$\theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n \quad (1.1.20)$$

Bu ýerde momentleri , häsiýetlendiriji funksiýany differensirlemek bilen alynýandygy görünýär.

$$m_n = \frac{1}{i^n}\left(\frac{d}{du}\right)^n \theta(u)\Big|_{u=0} \quad (1.1.21)$$

(20)_ni (17) añlatmada ýerine goýup, ähtimallygyñ ýaýrama funksiýasy üçin alarys:

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}(iu)^n du.$$

ýöne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}(iu)^n du = (-1)^n\left(\frac{d}{du}\right)^n \delta(x), \quad (1.1.22)$$

häsiýetnamasyny ortalanan ýoly bilen tapyp bolar. Onda biz (1) ulanyp, diňe ortalanan deňlemer üçin metodlary görkezeli.

ξ ansambla görä (1) ortalap, alarys

$$\dot{\bar{x}} + h\bar{x} + \overline{\xi x} = \varphi(t) \; (1.7.2a)$$

Eger $\overline{\xi x}$ ortalanany $\bar{x}$ bilen gözip bolan bolsady, onda biz $\bar{x}$ üçin ýapyk diferensiýal deňleme alardyk. Gözegçilik edýän wakamyzda muny etmek kyn däldigini görkezeli. (1)integrirläp wozmuşeniýa metody bilen, çözüwini hatar görnüşinde alarys

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + ...,$$

Bularyň her biri ξ ösüş derejesine proparsiýanal:

$$x_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta}\varphi(t-\theta)d\theta,$$

$$x_1(t) = -\int_0^{\infty} e^{-h\theta_1}\xi(t-\theta_1)x_0(t-\theta_1)d\theta_1, \; (1.7.3)$$

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} e^{-h\theta_2}\xi(t-\theta_2)x_1(t-\theta_2)d\theta_2 = \int_0^{\infty}\int e^{-h(\theta_1+\theta_2)}\xi(t-\theta_2)\xi(t-\theta_2-\theta_1)x_0(t-\theta_2-\theta_1)d\theta_1 d\theta_2,$$
(1.7.4)

we ş.m.

Belläp geçeli,täk derejelililer hakyky fluktuasirlenen, dördinji derejeli çleny tötän hökmünde alynýar, şeýle hem yzygider komponentlar:

$$x_{2n+1} = \tilde{x}_{2n+1}, \qquad x_{2n} = \bar{x}_{2n} + \tilde{x}_{2n+1} \qquad (n = 0,1,2,...)$$

aýratynlykda,

$$\tilde{x}_1(t) = x_1(t), \quad \tilde{x}_2(t) = \int_0^{\infty}\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-h(\theta_1+\theta_2)}\left[\overline{\xi(t-\theta_2)\xi(t-\theta_2-\theta_1)} - \xi(t-\theta_2)\xi(t-\theta_2-\theta_1)\right]x_0(t-\theta_2-\theta_1).$$
(1.7.5)

(2) korrelýasiýa funksiýany ulanyp, alarys

hasaplamalarda hakyky fluktuasiýa meýdany $G(\omega)$ ak goh bilen çalşyryp bolýar, ýagny

$$\overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau) = 2\pi G\delta(\tau)\ (1.6.33)$$

$G(\omega_0)$ deň bolan hemişelik G saýlap. (33) (29) hakyky görnüşini alar

$$\overline{\varphi^2} = 2\pi Gt, \qquad e^{-\frac{1}{2}\langle\varphi^2\rangle} = e^{-\pi Gt}$$

(31) bilen baglanşykly.

7. Stohastik diferensiýal deňlemeler. Takyk däl çözüwlerde stohatik metodynyň ulanylşy.

Tötän δ -korrelirlenen koefisiýently çyzykly ortalanan deňlemeler. Köp mysallarda, esasanam çyzykly däl ýada üýtgeýän parametrly sistema bagly bolan diferensiýal deňlemereiň takyk çözüwi tötän proses bilen hassplanylýar, kä wagt belli däl hem bolýar.

Tötän proses teoriýasynda bir topar metodlar düzilen, bular esasan hem statistiki häsiýetnamasyny tapmak üçin ulanylýar. Bu metoda kä halatlarda stohastik diýilýär, ýagny gözegçilik edýän prossesiniň başynda tötänlilik(stohastik) ulanylýandygyny belläp geçmeli.

Stohastik medody ulanyp, x üçin diferensiýal deňlemäniň analitik çözüwinden ugur alyp

$\overline{x^n}$ pursat üçin statistik häsiýetnamasyny, $\omega(x,t)$ paýlanşygyň ähtimallygyny we ş.m deňlemelerini tapyp bolar.

Gözegçilik edýän tötän prossesimiz δ -korrelirlenen koefisiýently diferensiýal deňlemelerden orta deňlemelere geçişine seredeli.

Bu metody düşünmek üçin ,birinji derejeli ýönekeý deňleme alaly

$$\dot{x} + \left[h + \xi(t)\right]x = \varphi(t), (1.7.1)$$

$$\overline{\xi} = 0, \qquad \overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau), (1.7.2)$$

gaus wakasynada tötän δ -korrelirlenen koefisiýent $\xi(t)$. (1) deňleme analitik çözüwilidir, şonuň üçin x -iň statistiki

(22) deñlemäniñ δ -funksiýa deñlemesini bölekleýin integrirlemek bilen taparys.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}du\,.$$

Şeýlelik bilen, $\omega(x)$-i moment boýunça yzygiderlik görnüşde goýup alarys,

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}m_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n\delta(x). \quad (1.1.23)$$

(23)_i (12)_ä goýup we

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x')\left(\frac{d}{dx'}\right)^n\delta(x'-x)dx' = (-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x)\Big|_{x=0} \quad . \quad (1.1.24)$$

Hasaba alyp, taparys

$$\langle F(x)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_n}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x)\Big|_{x=0}. \quad (1.1.25)$$

Soñky gatnaşyk Teýlor yzygiderliginiñ F(x) funksiýa üçin ortalamasyny añladýar. $F(x) = e^{iux}$ bolanda (25) deñleme (20) görnüşe geçýär.

Çebyşewiñ deñsizligi. Ikinji tertipli $m_2 = \overline{x^2}$ moment tötän hadysanyñ orta intensiwligini kesgitleýär. Statistik bahalandyrmada aýratyn roly bolsa ikinji tertipli merkezi moment oýnaýar, ýa-da dispersiýa ((14)_e seret),

$$\sigma^2 = \mu_2 = \overline{x}^2 - (\overline{x})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 \omega(x) dx. \quad (1.1.26)$$

Bu parametr fluktuasiýanyñ orta intensiwligini häsiýetlendirýär. Dispersiýanyñ kwadrat köki bolan σ -a , tötän ululygyñ orta kwadratik gyşarmasy diýip düşünilýär.

Fluktuasiýa $\widetilde{x}$ -iñ $n\sigma$ -dan (n-käbir položitel san) uly bolandaky ähtimallygy bilen σ ululygy baglanyşdyrýan deñsizligi almak kyn däl. (26)_da integralasty otrisatel däl, onda şeýle ýazyp bolar:

$$\delta^2 = \left(\int_{-\infty}^{\overline{x}-n\sigma} + \int_{\overline{x}-n\sigma}^{\overline{x}+n\sigma} + \int_{\overline{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \overline{x})^2 \omega(x) dx \geq \left(\int_{-\infty}^{\overline{x}-n\sigma} + \int_{\overline{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \overline{x})^2 \omega(x) dx$$

bu ýerde $(x - \overline{x})^2 \geq n^2 \sigma^2$, onda

$$\sigma^2 \geq n^2 \sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\overline{x}-n\sigma} + \int_{\overline{x}+n\sigma}^{\infty} \right) \omega(x) dx \quad (1.1.27)$$

Ýöne (2)_ä baglylykda

$$\left(\int_{-\infty}^{\overline{x}-n\sigma} + \int_{\overline{x}+n\sigma}^{\infty} \right) \omega(x) dx = P(|x - \overline{x}| \geq n\sigma) \quad (1.1.28)$$

(28)_i (27)_ä goýup, gözleýän deñsizligimizi taparys:

$$P(|x - \overline{x}| \geq n\sigma) = P(|\widetilde{x}| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2}$$

(1.1.29)

ýada

Bu ýerde $\xi(t)$ çyzykly $\varphi(t)$ prosesy bilen baglanşyklydyr, bu hem gaussyňkydyr.

$\langle \varphi^2 \rangle$ ululygy $B(\tau)$ korelýasiýa funksiýaly $\xi(t)$ fluktuwasiýa .= amplituda meýdanynyň üsti bilen aňladylýar;

$$\overline{\varphi^2} = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 B(t_1 - t_2) = 2\int_0^t (t - \tau) B(\tau) d\tau. \quad (1.6.29)$$

Mysal eger surat1.17a tutuş spektr lorensiň formulasyna eýe bolsa:

$$G(\omega) = \frac{\sigma^2 D/\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + D^2}$$

onda $B(\tau) = \sigma^2 e^{-D\tau}$ we

$$\overline{\varphi^2} = \frac{2\sigma^2}{D^2}(Dt - 1 + e^{Dt}) \quad (1.6.30)$$

Bu ýagdaýda $\exp\left[-\frac{1}{2}\langle \varphi^2 \rangle \right]$ faktor (28) görä wagta görä ýuwaş öldürýär:

$$e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi^2 \rangle} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad (Dt \gg 1)$$

Soňra bolsa basym:

$$e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi^2 \rangle} = e^{-\frac{\sigma^2}{D}t} = e^{-\pi G(\omega_0)t} \quad (Dt \gg 1) \quad (1.6.31)$$

(28) formula ahyry $\overline{n}(t)$ üçin şu görnüşi alar

$$\overline{n}(t) = n_0 e^{-\pi G(\omega_0)t} \cos \Omega_H t \quad (Dt \gg 1) \quad (1.6.32)$$

Statistiki hasaplama bize görkezdi, ýagny gohly meýdanynyň kompenenty käbir ýitgilere ekbibalentdyr we bu hem $\overline{n}$ togtamasyna getirýär. (28) we (30)-dan D spektryň galyňlygy $\xi(t)$ fluktuasiýa meýdanynda $t \gg D^{-1}$ togtama täsir etmegi bes edýär,hakyky manyly bahasy geçiş ýygylygynyň $G(\omega_0)$ spektral dykyzlygynda eýe bolar. Elbete bu ýerde biz t wagt ters ýarymgalyňlykly fluktuasiýa $\Delta\omega$ spektryny görä uly.

$$t \gg 2/\Delta\omega$$

$$n(t) = n_0 \cos \Omega_{_H} t,\; p(t) = -\frac{1}{2} n_0 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \sin \Omega_{_H} t \quad (1.6.26)$$

n üýtgemesi periodik häsiýetli $\Omega_H = \sqrt{a^2 / T_1 T_2}$ ýygylykly(ýerleşişigiň nutasiýa häsiýeti hasaplanylýar, seret1.1.6, b)

Umumy ýagdaýda üýtgeýän amplituda meýdany, (25) aňlatma täze üýtgeýän $\theta(t) = \int_o^t a(t)dt$ ululygy girizip alarys, alarys

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{2}{T_1} p,\; \frac{dp}{d\theta} = -\frac{1}{2T_2} n$$

Bu ýerden

$$n(t) = n_0 \cos \sqrt{\frac{\theta(t)}{T_1 T_2}} \quad (1.6.27)$$

Bizi esasy gyzyklandyrýan ýeri, haçanda modilirlenene meýdan regulýar däl, fluktirlenene häsiýete eýedir. Onda tötän $n(t)$ we $\theta(t)$ funsiýa bolýar. Çaklalyň , a(t)-gausyň tötän prosesy şu şekili alar:

$$a(t) = a_0 + \xi(t),\quad \overline{a} = a_{0,}\quad \overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau) = \sigma^2 R(\tau),$$

ýagny şöhlelendirmäniň spektry diskret çyzyklardan we 1.17,a suratda görkezlen ýaly üznüksiz $G(\omega)$ spektrdan emele gelendir.

Belläp

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\xi(t)dt}{\sqrt{T_1 T_2}},\quad \Omega_H = \frac{|a_0|}{\sqrt{T_1 T_2}},$$

(27) alarys

$$\overline{n} = \frac{n_0}{2l} e^{i\Omega_H t} \left\langle e^{i\varphi} \right\rangle + k.c. = n_0 e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} \cos \Omega_H t, \quad (1.6.28)$$

Şuny hasaba aldyk

$$\left\langle e^{i\varphi} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$P\left(|x - \overline{x}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (1.1.30)$$

Eger merkezi momentiñ has ýokary tertibi belli bolsa ortalamadan gyşarmanyñ ähtimallygynyñ has takyk bahasyny tapyp bolar. Ýokardakylara meñzeşlikde :

$$P\left(|x - \overline{x}| \geq n\sqrt[2m]{\mu_{2m}}\right) \leq \frac{1}{n^{2m}}. \quad (1.1.31)$$

m=1 üçin (31), (30) bilen gabat gelýär.

Kumulýantlar. Logarifmiñ dargamasyny ulanyp:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n};$$

we $1 + x = \theta(u)$ bolýandygyny çaklap alarys.

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\theta - 1)^n}{n}.$$

(20)_den

$$\theta - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n$$

goýup we eksponentanyň görkezijisinde birmeňzeş tertipli çlenleri U boýunça ýygnap, häsiýetlendiriji funksiýa üçin şeýle deňligi alarys :

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n. \quad (1.1.32)$$

Ýa-da

$$\ln\theta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iu)^n}{n!}k_n \quad (1.1.33)$$

k_n koeffisiýente kumulýant diýilýär. Momentleriň we kumulýantlaryň arasynda özara baglanşyk bar. Meselem, $k_1=m_1$,
$k_2=m_2=\sigma^2$, $k_3=\mu_3$, $k_4=\mu_4-3\mu_2^{\,2}$,
$k_5=\mu_5-10\mu_2\mu_3$, $k_6=\mu_6-15\mu_2\mu_4-10\mu_3^{\,2}-30\mu_2^{\,3}$
(1.1.34)

Eger ölçegsiz normirlenen kumulýantlary girizsek

$$\chi_n=\frac{k_n}{\sigma^n}, \qquad (1.1.35)$$

Onda (33) şeýle görnüşi alar :

$$\ln\theta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iu\sigma)^n\chi_n}{n!}$$

Momentleriň ahyrky sanynyň kömegi bilen laýyk bolan ähtimallygyň ýaýramasynyň approksimasiýasyny alyp bolmaýar : (23) baglylykda $\omega(x)$ funksiýa kesgitlenýär. Şol bir wagtyň özünde-de ol σ funksiýanyň we onuň önümleriniň jemi ýalydyr. Tersine, kumulýantlaryň tükenikli sany $\omega(x)$-i hiç bir aýratynlyksyz kesgitlenýär. Meselem, m_1 we m_2 momentler belli bolup galanlary nula deň bolsa (23)-i ulanyp biz ähtimallygyň paýlanşygy üçin alarys :

$$\omega(x)=\delta(x)-m_1\delta'(x)+\frac{1}{2}m_2\delta''(x)$$

bölüm. ara alyp maslahatlaşýar. Bu ýerde biz ýagtylyk meýdanyndaky iki derejeli sistemasynyň hususy meselesine serederis:- iki derejeli li sistemadaky $\tau_{imp} \ll T_1T_2$ dowamlylykly gysga ýaň impulsynyň täsiri. Bu meseläniň gyzyklandyrýan yeri tötän üýtgeýän parametdyr, takyk çözümin mümkinçilik berýär.

Kompleks amplitudanyň üsti bilen ýagtylyk meýdany we poliýarisaiýasy ýazylýar we ýuwaş üýgeýän N kompenenty hasaba alyp.

$$E(t)=-iA(t)e^{i\omega_0 t}+k.c., P(t)=p_1(t)e^{i\omega_0 t}+k.c.$$
$$N(t)=n(t)+..., N_0=n_0=const, \qquad (1.6.22)$$

alarys, (22) we (21) ýerine goýup, şu ýakynlaşmalary (“gysgaldylan”) alarys:

$$T_1\dot{n}+n-n_0=\frac{2T_1}{\bar{h}}(p_1A^*+k.c.), T_2\dot{p}_1+p_1=-\frac{T_2|\mu_{12}|^2}{3\bar{h}}nA. \quad (1.6.23)$$

Ölçegsiz a polya geçip we p poliýarizasiýa:

$$A(t)=\alpha a(t), p_1(t)=\beta p(t), \alpha=\frac{\bar{h}}{2|\mu_{12}|}\sqrt{\frac{3}{T_1T_2}}, \beta=\frac{|\mu_{12}|}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

Bu ýerden alarys.

$$T_1\dot{n}+n-n_0=p_1{}^*a(t)+k.c., T_2\dot{p}+p=-\frac{1}{2}na(t). \quad (1.6.24)$$

a(t) ýönekeý funksiýa hasaplap (ampituda görä modilirlenene meýdan) we $\tau_{imp} \ll T_1T_2$ şerti hasaba alyp ýagtylygyň impulsynyň dowamlylygy, ýagny (24) aňlatmany şeýle ýazyp bolar

$$\dot{n}=\frac{2a(t)}{T_1}p, \dot{p}=-\frac{a(t)}{T_2}n, (0<t<\tau_{imp}). \quad (1.6.25)$$

Ýerleşigiň tapawudyny öz deňagramlylyk n_0 ýakmazdan öň we polýarizasiýa ýok ýagdaýynda, ýagny onda (25) aňlatma hökman şu başlangyç şertler bilen çözmeli:

$$n=n_0, p=0, (t=0)$$

Eger monohromatik şöhlelendirmäni ýaksak (surat 1.16,a), onda $a=a_0=const$ we (25) çözüwinden alarys başlangyç şertli, mejbury ossilýator yrgyldysy, käbir güýjiň astynda, “etalon”prosesyna degişlilikler, statistiki radiofizikasynda öwredilýär.çyzykly klasiki osilýator (yrgldyly kontur) we çyzykly däl klasiki osilýator (Tomsonyň generatory) meselelerine köp ýüzleneris we bu sistemalaryň her tüýsli häsiýetiniň aspektyny maslahatlaşarys.

Kwant elektrodinamikasynda klassiki ossilýatoryň analogy hökmünde iki derejeli sistema seredeli. Iki derejeli sistemasynyň häsiýeti, E elektromagnit meýdanynyň täsirinde ýatan, bu sistema N ýerleşişiligiň tapawudy iki diferensiýal deňlemeler bilen görkezilýär (seret[12],sah 58):

$$\dot{P}+\frac{2}{T_2}\dot{P}+\omega_0{}^2P=+\frac{2\omega_0}{\bar{h}}\frac{|\mu_{12}|^2}{3}NE \quad (16.20)$$

$$\dot{N}+\frac{N-N_0}{T_1}=-\frac{2}{\bar{h}\omega_0}\dot{P}E \quad (16.21)$$

Bu ýerde ω_0 -iki derejeler arasyndaky geçiş ýygylygy, μ_{12} - geçişiň matriçnyý elementy, T_1, T_2 -gönüligine we keseligine relaksiýa wagty, N_0 -ýerleşişiliginiň tapawudynyň deňagramlylyk bahasy ($N = N_0$ haçanda E=0).

Ýagtylygynyň meýdanyndaky iki derejeli sistemanyň jogaby meňzeşlikde diň pes meýdandaky çyzykly ossilýator jogabyna deň, haçanda ýerleşişigiň tapawudyny hasaba alardan az ($N \approx N_0$); bu ýagdaýda (20) deňlemä seredilmegi çäklendirilip bolýar, bu hem çyzykly yrgyldyly kontura meňzeşdir.

Ýagtylyk meýdanyň iki derejeli sistemasynyň jogabynda (20),(21) deňlemelerde ýagtylyk meýdanynda çyzykly meýdanynda çyzykly däl bolar, bu hem dürli effektlara getirilýär,şeýle hem doýma effekty ýaly,gormonik generasiýasy, ýagtylyk meýdanynyň täsirinde rezonans ýagtylygyň süýşmesi (Ştarkyň optik effekty). Esasanam modilirlenen meýdanyň iki derejeli sistemasynyň häsiýetleri gyzyklydyr, bu ýerde optiki nutasiýon, samoindusirowanyý praznaçnost, ýagtylyk ýaň we ş.m ýaly hadysalar ýüze çykýar.

Hakykatdanam, tötän meýdanyň iki derejeli sistemasynyň häsiýeti barada soraglar ýüze çykýar, bularyň aýratynlyklar §5

Eger diňe iki sany $k_1 = m_1,\ k_2 = \sigma_2{}^2$ ilkinji kumulýantlar nuldan tapawutly diýip çaklasak, onda (32)-ä laýyklykda häsiýetlendiriji funksiýa şeýle bolar :

$$\theta(u) = \exp\left(ium_1 - \frac{1}{2}u^2\sigma^2\right) \quad (1.1.36)$$

(36)-ny (17)-de goýup alarys :

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.1.37)$$

(37) paýlanşyk $x = m_1$ nokat maksimumy bolan jaň görnüşli egrini ýada salýar. Bu paýlanşyga Gaussyň paýlanşygy ýa-da normal diýilýär. (36) waka bilen $\theta(u)$-ny getirmegiň hemme mümkinçiligi tükedilýär. Tükenikli sany kumulýantlaryň sany bilen : subut edilen Marsinkewiçiň [9] teoremasyna baglylykda

$$\theta(u) = \exp\sum_{i=1}^{N}\frac{(iu)^n}{n!}k_n, \quad (1.1.38)$$

Funksiýany Furýe boýunça üýtgedip biz diňe $N = 1,2$ ýa-da $N = \infty$ bolanda $\omega(x) \geq 0$ otrisatel däl paýlanşyk alarys ([6], sah.90 seret). Uly kumulýantlar $\chi_n(n = 3,4,...)$ paýlanşygyň erkin funksiýasyny (37) simmetrik Gauss egrisinden gyşarmanyň mukdar bahasyny berýär. $\chi_3 = \frac{k_3}{\sigma_3} = \frac{\mu_3}{\sigma_3}$ ululyga asimmetriýa koeffisiýenti diýilýär we $\chi_4 = \frac{k_4}{\sigma_4} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2{}^2}{\sigma_4} = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3$

ululyga ekssess koeffisiýenti diýilýär. $\chi_4 > 0$ bolanda $\omega(x)$ paýlanşyk $x = \bar{x}$ - ň töwereginde örän ýiti we inçedir, $\chi_4 < 0$ bolanda bolsa tersine Gaussyň paýlanşygyndan has tekizdir ([6], sah.41 seret).

χ_3 we χ_4 ululyklar doly garaşsyz däl, sebäbi $\chi_4 - \chi_3^2 + 2 \geq 0$ deňsizlik ýerine ýetmeli, hususan-da $\chi_4 \geq -2$ üçin. Bulara meňzeş gatnaşyklar başga kumulýantlar üçin hem alnyp bilner.

2. Köpölçegli statistik häsiýetler.

Ähtimallyklaryň köpölçegli paýlanşygy binäçe tötän x, y, z ululyklary beýan etmek üçin

$$\omega(x),\ \omega(y),\ \omega(z),\ \ldots \quad (1.2.1)$$

Iki ölçegliler üçin

$$\omega(x, y),\ \omega(x, z),\ \omega(y, z),\ \ldots \quad (1.2.2)$$

Üç ölçegliler üçin

$$\omega(x, y, z),\ \ldots \quad (1.2.3)$$

funksiýalary bilmeli.

Köpölçegli paýlanşyklar normirleme şertlerini kanagatlandyrýarlar (1.1.2-ä meňzeşlikde), meselem:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y)dxdy = 1,\ \iiint_{-\infty} \omega(x, y, z)dxdydz = 1. \quad (1.2.4)$$

Bulardan başgada tipleriň gabat gelme şerti ýerine ýetmeli.

Bu çözüwi mydama çyzykly kombinasiýanyň çyzykly bagsyzyk funsiýasy $y_n(t)$ (n=1,2…) hokmünde görüp bolar, erkin hereket edýän yrgyldyla seredeli:

$$y(t) = \sum_n C_n y_n(t), C_n = const, \hat{L}(t) y_n(t) = 0 \quad (1.6.14)$$

$H(t,t')$ fiziki manysy şeýle, ýagny t wagtdaky φ güýçiniň täsirinde emele gelen δ impulsy t' wagtda sisitema täsir edýär. Hakykatdanam, (12) goýup alarys

$$\varphi(t) = \delta(t - t',) \quad (1.6.15)$$

alarys

$$x(t) = H(t,t'). \quad (1.6.16)$$

Eger φ (12)-de tötän funksiýa bolsa, onda Dyuameliň inegral çözuwine görä x prosesiniň häsiýetiniň orta baglylygyny almak kyn däl we φ güýjiniň analitik ortalygynyň häsiýeti:

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t,\theta)\langle \varphi(\theta) \rangle d\theta, \quad (1.6.17)$$

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 H(t_1,\theta_1)H(t_2,\theta_2)\langle \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2) \rangle, \quad (1.6.18)$$

$$\langle x(t_1)x(t_2)x(t_3) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 H(t_1,\theta_1)H(t_2,\theta_2)H(t_3,\theta_3)\langle \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)\varphi(\theta_3) \rangle, \quad (1.6.19)$$

we ş.m.

φ tötän gaus prossesynda x hem gaus bolar, x we φ arabaglylgyny Dyumeliň integraly bilen hasaplanýar, çyzykly(seret §2). Islendik köp ugurly x paýlanşygyň ähtimallygy üçin x orta bahasy bilen we korrelýasiýa funksiýasy $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ bilen aňladyp bolar (seret 1.2.44), ýagny (17) we (18) deňlemeleri iň doly statistiki görkezýän $x(t)$ prosesi prinsipinde hasaplanylýar.

Çyzykly we çyzykly däl tötän üýtgeýänli sistema; gohuň täsirindäki iki derejeli kwant sistema. Esasy radiofizika sistema ossilýatordyr; şonuň üçin ossilýatoryň erkin yrgyldysy käbir

I_0 tötän ululygyň $\omega_0(I_0)$ paýlanma ähtimallygy barlygyny kabyul edeli I insensiwligiň bahasy hem tötän ululykdyr. (1.2.11) formulany ulanyp başlangyç ýagdaýdaky paýlanma ähtimallygyny tapyp bolar.

$$\omega(I,\tau)=\omega_0\left(\frac{I}{a-bI}\right)\frac{a}{(a-bI)^2},0\le I\le I_{max}=\frac{a}{b}=\frac{I_\infty}{1-e^{-\tau}}.(1.6.9)$$

Sur. 1.15 stasiýonar däl bir syhly (9)-yň awtoyrgyldynyň intensiwliginiň paýlanşygy grafikada görkezilen, olar

$\omega_0(I_0)=\exp[-I_0/\overline{I_0}]/\overline{I_0}^*$ üçin gurulan.

(9)-yň $\omega(I,\tau)$ paýlanyşygyny ulanyp satisiýonar däl disperiýanyň $\sigma(\tau)$ häsiýetini tapyp bolar, şeýle hem wagt sepgidiniň paýlanyşygyny $\omega_1(\tau)$ intensiwligi bilen tapylýar.(seret §§3,5 bölüm 7)

Tötän güýjiň täsirinde çyzykly sistema; Griniň funksiýasy; Dyuameliň integraly; f güýjiniň astynda ýatan , çyzykly sistema prosesy,şu aňlatma görnüşinde.

$$\hat{L}(t)x=\hat{M}(t)f \quad (1.6.10)$$

Bu ýerde $\hat{L}(t)$ we $\hat{M}(t)$ käbir çyzykly operatorlar (diferensiýal,integral,aýyrlyşan ýada birigen tipde). Aňlatma girizeli

$$\varphi(t)=\hat{M}(t)f \quad (1.6.11)$$

(10) aňlatmanyň çözüwi,başlangyç nollyk şertine gabat gelip,ony hem Dyuameliň integraly görnüşinde ýazyp bolar:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(t,\theta)\varphi(\theta)d\theta=\int_{-\infty}^{\infty}H(t,t-\theta)\varphi(t-\theta)d\theta \quad (1.6.12)$$

Bu ýerde $H(t,\theta)$ funksiýa, Griniň funsiýasy diýip atlandyrylaýar, ol $\hat{L}$ operatora bagly we φ bagly däl.

Eger başlangyç şertleri noldan tapawutly bolsa, onda f güýji sistema täsir edip başlan mahaly sistema durgun ýagdaýda däldi, onda (12) aňlatma degişlilikde çözüwine y bir syhly aňlatmany goömaly

$$\hat{L}(t)y=0.\quad (1.6.13)$$

$$\iint_{-\infty}\omega(x,y,z)dydz=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x,y)dy=\omega(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x,z)dx=\omega(z) \qquad (1.2.5)$$

Köpölçegli paýlanşygy bir ýa-da birnäçe tötän üýtgeýänler boýunça integrirläp, biz galan tötän üýtgeýänler üçin paýlanşygy tapmaly.

Eger x,y,z tötän hadysa bolsa:

$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ onda t wagt umuman aýdanyňda (1)-(3)-e parametr bolup girer.

Eger tötän üýtgeýänleriň bahalary wagtyň dürli pursatlaryna degişli bolsa, onda:

$$x=x(t_1),\ y=y(t_2),\ \ldots, \qquad (1.2.6)$$

Köpölçegli paýlanşyklara meselem aşakdaky momentleriň baglylygy girip biler:

$$\omega(x,y)=\omega(x,y;t_1,t_2) \qquad (1.2.7)$$

Köplenç bizi şol bir hadysanyň dürli wagt pursatlarynyň arasyndaky baglanşyk gyzyklandyrýar.

$$x=x(t_1)=x_1,\ y=x(t_2)=x_2,\ z=x(t_3)=x_3.$$

Bularyň statistik baglanşygy

$$\omega(x_1,x_2;t_1,t_2),\ \omega(x_1,x_2,x_3;t_1,t_2,t_3), \quad (1.2.8)$$

Görnüşdäki köpölçegli paýlanşyk bilen ýazylýar. Ondan başgada

$$\lim_{t_1\to t_2}\omega(x_1,x_2;t_1,t_2)=\omega(x_1,t_1)\delta(x_2-x_1)$$

Çaklalyň, x we y ululyklaryň arasynda funksional baglanşyk bolsun:

$$y = F(x),\ x = \varphi(y),$$

we $\omega_1(x)$ ähtimallyklaryň paýlanşygy belli; $\omega_2(y)$ paýlanşygy taparys. Eger

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \omega_1(x)dx \quad (x_2 > x_1) \qquad (1.2.9)$$

integralda täze $y = F(x)$ üýtgeýän integrirlemä geçsek, onda biz

$$P = \int_{y_1}^{y_2} \omega_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| dy \qquad (y_2 > y_1)$$

(1.2.10)

alarys. Bu ýerden

$$\omega_2(y) = \omega_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| . \ (1.2.11)$$

gelip çykýar. Bu formula x-iň y-e baglylygy şübhesiz bolanda ýerine ýetýär.

Eger $\varphi(y)$ köpölçegli bolsa we birnäçe $\varphi_n(y)$ şahalary saklaýan bolsa, onda:

$$\omega_2(y) = \sum_n \omega_1(x = \varphi_n(y)) \left| \frac{d\varphi_n(y)}{dy} \right| .$$

(1.2.12)

Haçanda $y = F(x)$ egri x oka parallel bolan:

$y = y_k,\ a_k \le x \le b_k$ (k=1,2,...) bölekleri saklasa ol üýtgeşik wakadyr.

deňlemeler üçin çalt ulalýar. Çyzyklydällilik bilrn birlikde we sistemanyň parametrleriniň tötänden üýtgeýänligini hasaba almak çylşyrymlaşýar.

Şonuň üçin has gyzykly çözümi üçin yrgyldylar teoriýasy we tolkun teoriýasysynda iň soňky ädimi ortalyk hasaplama metody(paýlanmagyň ähtimallygy) ualnylýar, haçanda takyk çözüwi ýok ýagdaýynda.

Şu mowzukdaky berilen hemmesi birinji derejeli deňlemeleri çözmekde has köp ulanylýan metodyr. Indiki mowzuklarda bolsa bu metodlary has kynyrak meselelerde ulanarys.

Biz has aňsat meselerden başlaly, ýagny statistiki informasiýa gerek bolan hemme ululyklar takyk ortalyk çözüwi bilen tapyp bolar.

Tötän başlangyç şertli geçiş prosesi.

Çyzykly däl ossulýatorda yrgyldy amplitudanyň ösmegi (tomsanyň generatory, birmodaly lazer) çyzykly däl kubik aňlatma bilen görkezilen.

$$A - \alpha A + \beta A^3 = 0. (1.6.4)$$

Munuň çözüwi şu görnüşde

$$A(t) = \frac{A_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^{\ 2}}{A_\infty^{\ 2}}(e^{2\alpha t} - 1)}}, (1.6.5)$$

Bu ýerde A_0-amlitudanyň başlangyç bahasy, we A_∞-durgunlaşan bahasy,degişlilikde $t \to \infty$ baha. A_∞ ululygy tapmak üçin (4)-e $\dot{A} = 0$ kabul edip alarys.

$$\mathrm{I}_\infty = A_\infty^{\ 2} = \alpha/\beta,\ A_\infty = \pm\sqrt{\alpha/\beta}. (1.6.6)$$

Intensiwliklere geşip ,(5)-den alarys

$$\mathrm{I}(t) = \frac{\mathrm{I}_0 e^\tau}{1 + \frac{\mathrm{I}_0}{\mathrm{I}_\infty}(e^\tau - 1)}, (\mathrm{I} = A^2, \mathrm{I}_0 = A_0^{\ 2}, \tau = 2\alpha t), (1.6.7)$$

ýada

$$\mathrm{I}(t) = \frac{a\mathrm{I}_0}{1 + b\mathrm{I}_0}, a = e^\tau, b = \frac{1}{\mathrm{I}_\infty}(e^\tau - 1). (1.6.8)$$

(2) deňlemeden görnüşinden görnüşi ýaly, ýagny tötän başlangyç x_0 bahasy ýada daşarky güýç $f(t)$ –den x çyzykly baglydyr, onda ortalaşdyrylan x kän kynçylyk döretmeýär. Mysal üçin,

$$\overline{x_0}(t) = \overline{x}_0 e^{-b(t)} + \int_0^t e^{-b(t)+b(\theta)} \langle f(\theta) \rangle d\theta,$$

Ýagny $\overline{x}$ tapmak üçin $\overline{x}_0$ we $\langle f \rangle$ tapmak ýeterlik. Munuň ýaly satitik informasiýa doly ýeterlik däl, eger a(t) deňlemäniň hemişeligi tötän diýsek. Bu ýagdaýda $\overline{x}$ hasaplamak üçin orta bahany hasaplap bilmeli

$$\langle \exp[b(t)-b(\theta)] \rangle = \left\langle \exp \int_0^t a'(\theta) d'\theta \right\rangle.$$

Muny hem şu şertlerde etmek kyn däl, tötän ululyk a(t)-ny ($b(t)-b(\theta)$ proses) gausyňky hňkmünde seredilse,onda ol (1.1.16) we (1.1.36) laýyklykda

$$\langle \exp y \rangle = \exp[\overline{y} + \frac{1}{2}(\overline{y^2} - \overline{y}^2)].$$

Analitik görnüşde çözüwi käbir çyzykly däl deňlemeler üçin hem ýazyp bolar. Onda, eger

$$\dot{x} + a(t)x = f(t)x^n . (1.6.3)$$

Onda $x = z^{1/(1-n)}$ goýlanda (3) deňlemäni şu görnüşe getirer

$$\frac{1}{1-n}\dot{z} + a(t)z = f(t)$$

(1) görä. Görnüşi ýaly takyk ortalyk çözümi (2)-däkä görä has kyn.

Şeýlelik bilen ,tötän funksiýa diferensial deňlemäni kabul edýän bolsa we takyk çözüwi bar bolsa onda statistiki häsiýrtnamasy statistiki statistiki ortalama takyk çözüwi bilen tapyp bolar, eger daşky täsiriň başlangyç şertlerini hasaba alynsa.

Has ýönekeý başlangyç şertleriniň statistikasyny hasaba almakdyr. Eger diferensial deňleme çyzykly bolan ýagdaýynda, daşky güýçleriň ansambly boýunça ortalaşmagyny amala aşyrmak prinsipiýal taýdan kynçylyk döretmeýär, emma kynçylyk çyzykly däl

Bu ýerde y-iň y_k bahany almagynyň ähtimallygy çäkli we x-iň (a_k, b_k) interwalda bolma ähtimallygyna deňdir.

$$P(y = y_k) = \int_{a_k}^{b_k} \omega_1(x) dx.$$

Ähtimallygyň dykyzlygy δ -funksiýanyň üsti bilen aňladylýar; Umumy bolan (12) aňlatma

$$\sum_k \delta(y - y_k) \int_{a_k}^{b_k} \omega_1(x) dx. \quad (1.2.13)$$

jemi goşmak makuldyr. Alnan gatnaşyklary iki we ondan köp tötän üýtgeýänlere umumylaşdyryp bolar.

$$y_1 = F_1(x_1, x_2),\ y_2 = F_2(x_1, x_2)$$
$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2),\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2).$$

(11)-iň ýerine şuny alarys:

$$\omega_2(y_1, y_2) = \omega_1(x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|, \quad (1.2.14)$$

bu ýerde $\partial(\varphi_1, \varphi_2) / \partial(\varphi_1, \varphi_2)$- köne tötän üýtgeýänlerden täzä öwrülme ýakobiany.

Köpölçegli momentler, kumulýantlar, häsiýetlendiriji funksiýalar.

Birnäçe

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad (1.2.15)$$

tötän ululyklara seredeliň. Olar durşuna köpölçegli ähtimallyklaryň ýaýramasy bilen aňladylýar.

$$\omega(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1.2.16)$$

Edil birölçegli ýagdaýda bolşy ýaly jemiň häsiýetlendiriji funksiýasyny:

$$\theta(u_1,\ldots,u_n) = \left\langle e^{i(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int e^{i(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)}\omega(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \qquad (1.2.17)$$

görnüşde ýazyp bolar.

Ähtimallyklaryň paýlanşygy θ ters köpölçegli Fure özgertmesi bilen baglanşyklydyr:

$$\omega(u_1,\ldots,u_n) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int \theta(u_1,\ldots,u_n)e^{-i(u_1x_1+\ldots+u_nx_n)}du_1\ldots du_n \qquad (1.2.18)$$

(17)-den köpölçegli momentler boýunça häsiýetlendiriji funksiýanyň dargamasy gelýär.

$$m(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \langle x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\rangle, \quad (1.2.19)$$

we hususanda

$$\theta(u_1,\ldots,u_n) = 1 + \frac{i}{1!}\sum_{p=1}^{n} u_p\langle x_p\rangle + \frac{i^2}{2!}\sum_{p}\sum_{q=1}^{n} u_p u_q\langle x_p x_q\rangle +$$

$$+\frac{i^3}{3!}\sum_{p,}\sum_{q,}\sum_{r=1} u_p u_q u_r\langle x_p x_q x_r\rangle + \ldots = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\langle S^p\rangle \quad (1.2.20)$$

Bu ýerde $S = u_1x_1 + \ldots + u_nx_n$;

(32) aňlatma indiki görnüşde köpölçegli ýagdaý bilen baglanşýar:

ymtylýar(ris1.13). (43) görä Ω-nyň maksimal bahasyny tapmak kyn däl

$$\alpha = \frac{\sqrt{1-z^2+z^4} - 1 + z^2}{z^2}, z = \frac{\Omega_{Ix}}{\Omega_{IC}}.$$

Zyňylmanyň tştan prosesy we olaryň ulnyşy [3,10] monografda yzygiderlikde berilen.

6. Ýönekeý önümlerde stohastik diferensýal deňlemeler. Tötän yrgyldylaryň orta nokat çözüw ýoly bilen analiz edilşi.

Statistik rasiofizika meseleleriniň matematik analizi we bularyň tejribeleriň görkezmeginde çyzykly ýada çyzykly däl diferensiýal deňlemeleriň käbir başlangyç şertlerinede (ýada gyra şertlerinde), käbir parameterli, koefisiýently, käbir daşarky güýçli bolup, ýagny stohastik diferensýal deňlemer diýilyär.

Bu indiki paragrafdaky meselelerde çyzykly we çyzykly däl ýönekeý önümini stohastik deňlemelerde görkezeli. Aşakda görjek bolan gyzykly çözüwlerde spesifiki, ýagny stohastik çözüw metody gerek. Belli bolşy ýaly bu metod has berkdir, nejely çözüw metodyndaky regulýar deňlemelerde, stohastik deňlemeler görkezlende orta bahasyny tapmak, diňe takyk çözüwi belli däl ýagdaýda bolýar.

Munuň kynçygy bilen tanyşmak üçin, ýagny difersiýal deňlemelerdäki görkezlen tötän funksiýanyň analizindäki ykyp biljek kynçylyklar, ýagny ýönekeý birinji derejeli çyzykly wagtynaseretsek, onda x üçin deňleme şu görnüşdedir

$$\dot{x} + a(t)x = f(t). \; (1.6.1)$$

Bu ýerde $f(t)$-daşarky güýç, $a(t)$-wagta görä üýtgeýän parametr. Bu deňleme üçin takyk çözüw belli: eger $x(t=0) = x_0$, onda

$$x(t) = x_0e^{-b(t)} + \int_0^t e^{-b(t)+b(\theta)}f(\theta)d\theta, b(t) = \int_0^t a(\theta)d\theta. \; (1.6.2)$$

$$\overline{N}=T\int_0^\infty \omega(\rho)v(\rho)d\rho\int_{-\infty}^{\infty}\int d\dot{A}d\dot{\rho}\left|\dot{A}-\dot{\rho}\right|\omega_1(\dot{A})v(\dot{\rho}) \quad (1.5.40)$$

(39) laýyklykda

$$\int_0^\infty \omega(\rho)v(\rho)d\rho=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2+\sigma_{21}^2)^{3/2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int d\dot{A}d\dot{\rho}\left|\dot{A}-\dot{\rho}\right|\omega_1(\dot{A})v(\dot{\rho})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{(\sigma_{12}^2+\sigma_{22}^2)}$$

Bu ýerde,T wagtda egip geçýän iki gaus prosesiniň ortaça kesişmesi

$$\overline{N}=T\frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2+\sigma_{21}^2)^{3/2}}\sqrt{(\sigma_{12}^2+\sigma_{22}^2)} \quad (1.5.41)$$

sapar. Eger korrelasiýanyly proses funksiýasy şu görnüşe eýe hökmünde kabul edilse.

$$\overline{xx_\tau}=\overline{x}^2 a(\tau)\cos\omega_0\tau, \overline{CC_\tau}=\overline{C}^2 b(\tau)\cos\omega_0\tau,$$

(bu bolsa, ω_0 görä simmetrik spektral ýygylygy),onda(39)

$$\sigma_{11}^2=\overline{x^2},\sigma_{12}^2=\overline{x^2}\Omega_{Ix}^2,\sigma_{12}^2=\overline{C^2},\sigma_{22}^2=\overline{x^2}\Omega_{IC}^2$$

Bu ýerde

$$\Omega_{Ix}^2=-\ddot{a}(0),\Omega_{IC}^2=-\ddot{b}(0).$$

Inçe çyzykly prosesdaky ω_1 ululygy spektyň orta ýygylygy we Ω_1 ýygylyk bilen hasaplanýar. Mysal üçin, göniburçly spektr (34)-den

$$a(\tau)=\frac{\sin(h\tau)}{h\tau},$$

$$\omega_I=\omega_0+h^2/3,\Omega_I=h^2/3.(1.5.42)$$

(41) görä kesip geçmäniň orta ýygylygy şeýledir.

Bu ýerden,(38)-däki ýaly , $\alpha=\overline{C^2}/\overline{x^2}$ -intensiwliginiň gatnaşygy.(38)-den tapawutlylykda, kesip geçmäniň egilmesiniň ýygylygy (43) $a\to 0$ we $a\to\infty$ ýagdaýlarda nola

$$\theta(u_1,...,u_n)=\exp\left\{\frac{i}{1!}\sum_{p=1}^n u_pK_p+\frac{i^2}{2!}\sum_{p,}\sum_{q=1}^n u_pu_qK_{pq}+...\right\}$$

. (1.2.21)

Bu ýerde k_p - köpölçegli kumulýantlar.

$$K_p=\overline{x_p},\ K_{12}=B_{12},K_{123}=B_{123},$$

$$K_{1234}=B_{1234}-B_{12}B_{34}-B_{13}B_{24}-B_{14}B_{23},(1.2.22)$$

we

$$B_{p...s}=\langle(x_p-\overline{x_p})...(x_s-\overline{x_s})\rangle \quad (1.2.23)$$

-köpölçegli merkezi momentler.

$p=q=...=s$ bolanda $B_{p...s}$ we $K_{p...s}$ funksiýalar öň girizilen tötän x_p ululygyň merkezi momenti we kumulýantlary bilen gabat gelýär:

$$B_{p...p}=\mu_n=\left\langle\left(x_p-\overline{x_p}\right)^n\right\rangle,\ K_{p...p}=k_n$$ ((1.1.14) we (1.1.34)-e seret).

Ähtimallyklaryň şertli paýlanşygy; Statistik garaşsyzlyk.

Iki sany x we y tötän ululyklara seredeliň. Eger $a\le x\le a+\Delta x$ bolsa A waka barada, $b\le y\le b+\Delta y$ bolsa B waka barada gürrüň ederis. Goy, N gezekde A waka N_A gezek ýüze çykan bolsun, B waka bolsa N_B gezek. Onda $N,N_A,N_B,N_{AB}\to\infty$ bolsa şeýle ýazyp bolar:

$$P(A) = \frac{N_A}{N},\ P(B) = \frac{N_B}{N},\ P(A,B) = \frac{N_{AB}}{N},$$

$\frac{N_{AB}}{N}$ gatnaşyga hem ähtimallyk hökmünde garap bolar.

Hususan-da A waka üçin $\frac{N_{AB}}{N_A} = P\left(\frac{B}{A}\right)$ şert bilen B-niň ýerine ýetme şerti hökmünde garap bolar.

Şerte meňzeşlikde ähtimallygy A üçin hem : $\frac{N_{AB}}{N_B} = P\left(\frac{B}{A}\right)$ görnuüşde ýazyp bolar.

$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A}\frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B}\frac{N_B}{N}$, bolany üçin şertli we ýönekeý ähtimallyklaryň arasynda indiki deňlik ýer alýar:

$$P(A,B) = P(A\,|B)P(B) = P(B|A)P(A). \tag{1.2.23a}$$

Eger ähtimallygyň paýlanşygynyň dykyzlygyna geçsek, onda

$$\omega(x,y) = \omega(x|y)\omega(y) = \omega(y|x)\omega(x). \tag{1.2.24}$$

Şeýlelik bilen, iki sany tötän ululyklaryň baglanşykly paýlanşygyny tapyp bolar, eger bu ululyklaryň biri üçin birölçegli ähtimallygy we degişli şertli paýlanşyk belli bolsa.

$$\overline{N} = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{\overline{x^2}\omega_{1x}^{\ 2} + \overline{C^2}\omega_{1C}^{\ 2}}{\overline{x^2} + \overline{C^2}}},$$

Ýagny kesişmäniň sanynyň ýygylygy ω_{1C} we ω_{1x} hemde, intensiwliginiň tötän prosesi hasaplanýar, şeýle hem kesişmäniň orta ýygylygy.

$$\overline{\Omega} = \frac{2\sigma_1}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\omega_{1x}^{\ 2} + \alpha\omega_{1C}^{\ 2}}{1+\alpha}} \tag{1.5.38}$$

$2\omega_{1x}$ we $2\omega_{1C}$ çäklerde üýtgeýär. Bu hem intensiwliginiň gatnaşygyna deňdir $\alpha = \overline{C^2}\big/\overline{x^2}$.

2. $A(t)$ we $\rho(t)$ iki näbelli egip geçýän normal kwazigormonik proses.(Bu ýerde §4 mowzukda tötän proses modelini ulanarys)..

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_1 t + \varphi(t)), C(t) = \rho(t)\cos(\omega_2 t + \psi(t))$$

Bu ýagdaýda

$$\omega(\rho,\dot\rho,A,\dot A) = v(\rho)v_1(\dot\rho)\omega(A)\omega_1(\dot A)$$

Egip geçýän paýlanmasynyň ähtimallygy we önümi üçin şu görnüşde eýedir.

$$\begin{gathered}
\omega(A) = \frac{A}{\sigma_{11}^{\ 2}}\exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_{11}^{\ 2}}\right], \omega_1(\dot A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{12}}\exp\left[-\frac{\dot A^{2}}{2\sigma_{12}^{\ 2}}\right] \\
(\sigma_{11}^{\ 2} = \overline{x^2}, \sigma_{12}^{\ 2} = \left\langle \dot A^{2} \right\rangle), \\
v(A) = \frac{\rho}{\sigma_{21}^{\ 2}}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_{21}^{\ 2}}\right], v_1(\dot\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{22}}\exp\left[-\frac{\dot\rho^{2}}{2\sigma_{22}^{\ 2}}\right] \\
(\sigma_{21}^{\ 2} = C^2, \sigma_{22}^{\ 2} = \left\langle \dot\rho^{2} \right\rangle),
\end{gathered} \tag{1.5.39}$$

Kesişmäniň (8) aňlatmanyň orta bahasy üçin

$(C=\overline{x})$ araçägiň orta bahasyna deň bolsa,onda çäk ýagdaýyndaky inçe spektr $(\omega_0 \ll h)$ dyr.

$$\overline{\Omega}_N \approx \overline{\Omega}_{ext} = 2\Omega_0$$

Ters predel ýagdaýynda, haçanda orta spektr ýygylygy nola deň bolanda $(\omega_0 = 0)$

$$\overline{\Omega}_N = {2h}/{\sqrt{3}}, \overline{\Omega}_{ext} = 2h\sqrt{{3}/{5}} \approx 1,5\overline{\Omega}_N$$

Ýagny ekstreminal nokadynyň emele gelme ýygylygy kesişme ýygylygyndan bir ýarym esse köpdir $(C=\overline{x})$.

<u>Käbir egriniň kesişmesi</u> :Iki meseläni bahalandyralyň, $x(t)$ we $C(t)$ egrileriň T wagtyň dowamynda N-sapar kesişmesiniň sany.

1.Goý x we C-gausuň orta noldaky tötän stasiýonar funksiýadyr,özara korrelirlenen. Olaryň tapawudy hem y= x-C gausuň funsýasydyr. Iki ugurly paýlanmanyň ähtimallygy y we $\dot{y}$ görnüşdedir.

$$\omega(y,\dot{y}) = \omega(y)\omega_1(\dot{y}) \quad (1.5.35)$$

Bu ýerde ω we $\dot{\omega}$ hem (27) we (28) aňlatmalardan tapylýar.

$$\sigma^2 = \overline{y}^2 = \overline{x}^2 + C^2 - 2xC \quad (1.5.36)$$

Görnüşi ýaly, x we C kesişme sany egriniň orta noldaky kesişmesine deň,ýagny (29) görä.

$$\overline{\Omega} = {2\sigma_1}/{\sigma}, \overline{N} = {T\sigma_1}/{\pi\sigma} \quad (1.5.37)$$

Eger x we C statistiki bagly däl, ýagny (27),(28) aňlatmalardan

$$\sigma^2 = \overline{x}^2 + \overline{C}^2, \sigma_1^2 = \omega_{1x}^2 x^2 + \omega_{1C}^2 C^2$$

Bu ýerde ω_{1x} we ω_{1C} -spektryň orta ýygylygy (30) formula bilen hasaplanan,

(37)-ä laýyklykda.

Bu ýerden, $\omega(x,y)$ şertli paýlanşykda y ululyk $\omega(x|y)$ üçin parametriň we normirowkanyň rolyny oýnaýar we şeýle görnüşde ýazylýar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x|y)dx = 1.$$

y -iň şol ýa-da beýleki bahasyny belläp, biz x üçin ähtimallygyň dürli paýlanşyklaryny alarys.

$$\omega(x|y_1) \neq \omega(x|y_2) \neq \omega(x).$$

Eger tötän ululyklaryň biriniň bahasy başga biriniň ähtimallygynyň paýlanşygyna täsir etmeýän bolsa, onda olara statistik garaşsyz ululyklar diýilýär.

Bu ýagdaýda

$$\omega(x|y) = \omega(x), \ \omega(y|x) = \omega(y). \quad (1.2.25)$$

(25)-i (24)-e goýup alary, alarys.

$$\omega(x,y) = \omega(x)\omega(y). \quad (1.2.26)$$

Umuman, eger n sany garaşsyz tötän ululyklar bar bolsa

$$x_1,\ldots,x_n, \quad (1.2.27)$$

Onda köpölçegli paýlanşyk birölçeglileriň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$\omega(x_1,\ldots,x_n) = \omega(x_1)\ldots\omega(x_n). \quad (1.2.28)$$

(28)-i (17)-ä goýup , (27) garaşsyz tötän ululyklaryň köpölçegli häsiýetlendiriji funksiýasy , birölçegli häsiýetlendiriji funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$\theta(u_1,\ldots,u_n)=\theta(u_1)\ldots\theta(u_n). \quad (1.2.29)$$

Garaşsyz tötän ululyklaryň jemininiň paýlanşygy, merkezi predel teoremasy.

Alnan netijeleri jemiň statistik häsiýetleriň analizi üçin ulanalyň

$$y=x_1+x_2+\ldots+x_n \quad (1.2.30)$$

Bu ýerde $\omega_\alpha(x_\alpha)$ paýlanşyk we $\theta_\alpha(u_\alpha)$ häsiýetlendiriji funksiýa $(\alpha=1,2,\ldots,n)$. Iň soňkyny kumulýantlaryň üsti bilen şeýle ýazyp bolar:

$$\theta_\alpha(u_\alpha)=\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(iu_\alpha)^m}{m!}k_{\alpha,m} \quad (1.2.31)$$

(17)-de $u_1=u_2=\ldots=u_n=u$ diýip çaklap y üçin häsiýetlendiriji funksiýany taparys (şeýle hem (29) we (31)-i hasaba alyp):

$$\theta(u)=\langle\exp\{iu(x_1+\ldots+x_n)\}\rangle=\exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(iu)^m}{m!}k_m, \quad (1.2.32)$$

bu ýerde

$$k_m=\sum_{\alpha=1}^{n}k_{\alpha,m}. \quad (1.2.33)$$

(33) formula additiw kumulýantlaryň häsiýetlerini görkezýär; jemiň kumulýanty kumulýantlaryň jemine deňdir. Garaşsyz tötän ululyklaryň jemininiň momenti additiw häsiýetli däldirler (ululyklary boýunça kumulýantlar bilen deň bolan birinji we merkezi we 3-nji

$$\overline{\Omega_C}=2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\exp\left[-\frac{(C-x)^2}{2\sigma^2}\right],\quad \Omega_{ext}=2\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (1.5.29)$$

Käbir funksiýanyň dispersiýasynyň fluktuasiýasy we x önümini spektryň intensiwligi G(ω) ýa-da korelýasiýanyň funksiýasy B($\overline{C}$) bilen x prosesyny aňladyp bolar

$$\sigma^2=\sqrt{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)d\omega=B(0)$$

$$\sigma_1^2=\overline{\dot{x}}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2G(\omega)d\omega=-(\frac{d}{dx})^2R(\tau)\Big|_{\tau=0}=\omega_1^2\sigma^2 \quad (1.5.30)$$

$$\sigma_2^2=\overline{\ddot{x}}^2=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4G(\omega)d\omega=-(\frac{d}{dx})^4R(\tau)\Big|_{\tau=0}=\omega_1^4\sigma^2 \quad (1.5.31)$$

Koşi –Bunyakowyň deňsizligini ulanyp, şeýledigini görkezmek kyn däl.

$$\sigma_1^2=\sigma\sigma_2,\omega_{□}=\omega_1 \quad (1.5.32)$$

(29) we (30) aňlatmalardan, ekstremumlaryň ortaça sany islendik orta kesişmeleriň sanyndan az däl.

$$\overline{\Omega}_{ext}\geq\overline{\Omega}_C,\overline{N}_{ext}\geq\overline{N}_C \quad (1.5.33)$$

Eger spektryň intensiwligi göniburçly bolsa,

(1.5.34)

Onda

$$\sigma^2=4Gh,\sigma_1=(\omega_0^2+h^2/3),\sigma_2=\sigma^2(\omega_0^4+2\omega_0^2h^2+h^4/5)$$

(29) görä,

$$\overline{\Omega}_C=2\sqrt{\omega_0^2+h^2/3}\exp\left[-\frac{(C-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right],\overline{\Omega}_C=2\sqrt{\frac{\omega_0^4+2\omega_0^2h^2+h^4/5}{\omega_0^2+h^2/3}}$$

$\omega(x,\dot{x},C,\dot{C})$ dört ugurly paýlanma bilen görkezilen. Bu formula belli şertlerde aňsatlaşýar. Mysal üçin, eger x proses stasiýonar bolsun, onda $\overline{x^2}$ we $\overline{\dot{x}^2}$ gatnaşyga görä hemişelikdir (konstantadyr).

$$(x\dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = 0, (\dot{x}\ddot{x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle \dot{x}^2\right\rangle = 0$$

Bu ýerde, şol bir wagtyn içinde x , $\dot{x}$ we şol bir sanda $\dot{x}$ we $\ddot{x}$ arasynda korelýasiýaý ýokdyr. Eger x-gaus prosesy bolsa,onda korelýasiýanyň ýoklygy hem statistiki bagly däldigine görkezýär. Onda

$$\omega(x,\dot{x}) = \omega(x)\omega_1(\dot{x}), \omega(\dot{x},\ddot{x}) = \omega_1(\dot{x})\omega_2(\ddot{x}) \quad (1.5.24)$$

(21) we(22)den

$$\overline{\Omega}_C = 2\pi\omega(C)\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1(\dot{x})|\dot{x}|d\dot{x} = 2\pi\omega(C)\overline{|\dot{x}|}$$

(1.5.25)

$$\overline{\Omega_{ext}} = 2\pi\omega(o)\overline{|\ddot{x}|} \quad (1.5.26)$$

Gaus prosesi üçin

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.5.27)$$

$$\omega_1(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

$$\omega_2(\ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_2^2}\right]$$

(25) we(26) deňlemelere goýup alarys

tertipli momentleri hasaba almazdan, (1.1.34)-e seret). Dogrudan hem , meselem ξ_1 we ξ_2 garaşsyz ululyklar üçin

$$\overline{(\xi_1+\xi_2)^4} = \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4} + 6\overline{\xi_1^2\xi_2^2} \neq \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4}.$$

Kumulýantlary dispersiýa nomerläliň ((1.1.35)-e seret):

$$k_{\alpha,m} = \sigma_\alpha^m \chi_{\alpha,m}. \quad (1.2.34)$$

(31)-i şeýle ýazyp bolar:

$$\theta_\alpha(u) = \exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(iu\sigma_\alpha)^m}{m!}\chi_{\alpha,m}. \quad (1.2.35)$$

Jemiň kumulýantlary üçin hem şeýle koeffisiýentleri girizip bolar:

$$k_m = \sigma^m\chi_m,\ \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_\alpha^2 \quad (1.2.36)$$

Netijede (22) häsiýetlendiriji funksiýa şeýle görnüşi alar:

$$\theta(u) = \exp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(iu\sigma)^m}{m!}\chi_m. \quad (1.2.37)$$

(33), (34) we (36)-dan gelip cykýar:

$$\chi_m = \frac{\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_\alpha^m\chi_{\alpha,m}}{\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_\alpha^2\right)^{\frac{m}{2}}}. \quad (1.2.38)$$

n ulaldygyça (38)-iň sanawjysy artýar $\sim n$, maýdalawjysy $\sim n^{\frac{m}{2}}$.

$$\chi_m \sim \frac{1}{n^{\frac{m}{2}} - 1} \quad (n >> 1).$$

Şeýlelik bilen (30) jemde goşulyjylaryň artmagy bilen uly tertipli ($m \geq 3$) kumulýantlaryň göräli roly peselýär. $n \to \infty$ predel ýagdaýda diňe birinji we ikinji teertipli kumulýantlar galýar we (28) şeýle görnüşi alýar:

$$\theta(u) = \langle \exp(iu(x_1 + ... + x_n)) \rangle = \exp(iuk_1 - \frac{1}{2}u^2 k_2) = \exp(iu\overline{y} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2),$$

(1.2.39)

((33)-e seret) bolany üçin

$$k_1 = \sum_\alpha \overline{x_\alpha} = \overline{y},$$

$$k_2 = \sum_\alpha \sigma_\alpha^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \sigma^2.$$

(39) häsiýetlendiriji funksiýa gausyň ähtimallygynyň paýlanşygy bilen gabat gelýär ((1.1.37)-ä seret).

Şeýlelik bilen biz , köp sanly statistik garaşsyz goşulyjylaryň jemi (her biriniň erkin ähtimal paýlanşygy bar) normal ýa-da Gausyň kanuny (1.1.37) boýunça paýlanan diýen netijä gelýäris. Bu düşündirmä merkezi predel teoremasy diýilýär (MPT). MPT-nyň fizika üçin fundamental ähmiýeti bardyr. MPT-nyň esasynda köp real tötän hadysalar Gaussyň paýlanşygydygy görkezilýär.

Köpölçegli adaty paýlanşyk.

(30) jemi iki bölege böleliň:

$$y = y_1 + y_2\,; \; y_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha x_\alpha, \; y_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha x_\alpha,$$

$$(a_\alpha + b_\alpha = 1).$$

Şeýlelik bilen x ergodiçen kabul edip, buululyk zyňylmanyň kuwwatdy kabul edip bolar.(Ýagny birlik wagda zyňlan energiýa)

$$P = \frac{\theta}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T (x-C)^2 1(x-C)dt \quad (1.5.17)$$

C-ny kesip geçmäniň orta ýygylygy.

$$\Omega_C = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{T}\int_0^T \delta(x-C)(\dot{x})dt \quad (1.5.18)$$

Ekstriminal nokadynyň döremeginiň orta ýygylygy

$$\Omega_{ext} = \frac{2\pi n_{ext}}{T} = \frac{2\pi}{T}\int_0^T \delta(\dot{x})\left|\ddot{x}\right| dt \quad (1.5.19)$$

T näçe ulaldamyzda hem ol özüniň orta bahasynda az süýşýär,ony hasaplamak hem gyzyklanma döredýär.

Statistik orta hasaplama hem şu görnüşe eýe bolar.

$$\overline{P} = \int_C^\infty (x-C)^2 \omega(x)dx \quad (1.5.20)$$

$$\overline{\Omega} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x = C, \dot{x})\left|\dot{x}\right| d\dot{x} \quad (1.5.21)$$

$$\overline{\Omega} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x = C, \ddot{x})\left|\ddot{x}\right| d\ddot{x} \quad (1.5.22)$$

Bu ortalamalarda, $\omega(x)$ bir ugryly paýlanmasy, $\omega(x, \dot{x})$ we

$\omega(\dot{x}, \ddot{x})$ iki ugurly paýlanşygynyň şekillidir.

Stasiýonar we stasistik käbir kesişmäniň orta ýygylygy x(t) we C(t)funksiýalara bagly,(8) deňläp.

$$\overline{\Omega} = \frac{2\pi\overline{N}}{T} = \frac{2\pi}{T}\left\langle \int_0^T \delta(x-C)\left|\dot{x} - \dot{C}\right| dt \right\rangle = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\iint \omega(x = C, \dot{x}, C, \dot{C})\left|\dot{x} - \dot{C}\right| d\dot{x}\, d\dot{C}$$

(1.5.23)

$$\langle 1(x-C)\rangle = \int_0^T 1(x-C)\omega(x,t)dx = \int_C^\infty \omega(x,t)dx = P(x>C,t) \quad (1.5.12)$$

Bu ýerde P(x>C,t), C -nyň üstündäki t wagtdaky x kesişmesi (12) we (11) ýerine goýup alarys.

$$\overline{\theta} = \int_o^T P(x>C,t)dt \quad (1.5.13)$$

Stasiýonar prossesda x-iň P-däki ähtimallygy wagta bagly däldir we (13)-i şeýle ýazmak mümkin.

$$\overline{\theta} = TP(x \geq C)$$

Ýa-da

$$\frac{\overline{\theta}}{T} = P(x \geq C) \quad (1.5.14)$$

Ýokarda görkezilşi ýaly,stasionar prossesda otnositel kesişme wagt üçin (x> C) käbir ýagdaýda orta ähtimallygyna deňdir.

θ-nyň $\overline{\theta}$ süýşmesini ikinji dereje bilen bahalandyryp bolar.

$$\overline{\theta}^2 = \int_0^T\int dt_1 dt_2 \langle 1(x_1-C)1(x_2-C)\rangle \quad (1.5.15)$$

$\overline{\theta^2} - \overline{\theta}^2$ dispersiýasy tapyp,(15) ortaça hasaplamak üçin $\omega(x_1, x_2, t_1, t_2)$ ähtimallygy iki ugurda dargaýşy gerek bolar. Bu ýerde, $\omega(t_1 t_2)$ takyklaşdyrman hem, şeýledigini görkezmek kyn däl, θ/T tötänleýin dispersiýa ululygynyň ulalmagy T nola ymtylýar,bu hem θ/T ýeterlik uly bahalarynda T öz orta ululygyna az tapawutlanýandyr.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\theta}{T} = \frac{\overline{\theta}}{T} = P(x>C) \quad (1.5.16)$$

Hakykatdanak

$$\frac{\theta}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T 1(x-C)dt$$

Bu ýerde θ/T tötän ululygy 1(x-C)wagta görä orta bahasyna eýedir, bu bolsa ergodiçen. Eger ergodiçen x (1.4.6) görä θ/T ululyga ösmegi T-nyň özüniň orta bahasyna asimptotik ýakynlaşýar.

y_1 we y_2 tötän ululyklar umuman aýdylanda statisitik garaşlydyrlar. Olaryň her biri bagly däl we tötän garaşsyz ululyklaryň jemi $n \to \infty$ predelde $y = y_1 + y_2$ ýaly adatydyr. Bu ýerden diňe iki sany normal tötän ululyklaryň jemi

$$S = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m \quad (1.2.40)$$

bolýandygy görünýär. Bu ýerde c_i -tötän däl koeffisiýent we normaldyr.

(39)-a laýyklykda

$$\langle e^{iS}\rangle = \exp\left\{i\overline{S} - \frac{\left(\overline{S^2} - \overline{S}^2\right)}{2}\right\}. \quad (1.2.41)$$

(40)-da $c_i = u_i$ diýip çaklap we (41)-i ulanyp, $y_1,\ldots,y_m$ normal tötän ululyklaryň jeminiň köpölçegli häsiýetlendiriji funksiýasyny şeýle ýazyp bolar:

$$\theta(u_1,\ldots,u_m) = \langle \exp\{i(u_1 y_1 + \ldots + u_m y_m)\}\rangle = \exp\left\{i\sum_{p=1}^m u_p \overline{y_p} - \frac{1}{2}\sum_{p,}\sum_{q=1}^m u_p u_q B_{pq} - \right\},$$

(1.2.42)

bu ýerde

$$B_{pq} = \langle (y_p - \overline{y}_p)(y_q - \overline{y}_q)\rangle \quad (1.2.43)$$

-ikiölçegli merkezi moment ýa-da y_p we y_q tötän ululyklaryň Gausslarynyň fluktuasiýasynyň korelýasiýa funksiýasy.

(18)-e (42)-ni goýup we integrirläp , alarys:

$$\omega(y_1,\ldots,y_m)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}D^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{p,}\sum_{q=1}^{m}A_{pq}\left(y_p-\overline{y}_p\right)\left(y_q-\overline{y}_q\right)\right],$$

(1.2.44)

bu ýerde D- korrelýasion matrisanyň determinaty.

B_{pq} , A_{pq} - matrisanyň elementleri. Hususan-da $m=1$ bolanda (44) aňlatma (1.1.37) görnüşi alýar.

(42) we (21) deňliklerden Gaussyň tötän ululyklary üçin ikinji tertipden uly köpölçegli kumulýantlarnula deňdirler (edil birölçeglä meňzeşlikde). (22)-ä baglylykda bu ýerden köpölçegli merkezi momentler üçin ýönekeý düzgün gelip çykýar: (44) gauss paýlanşygynda ähli täk tertipli momentler nula deň , jübüt tertipli momentler bolsa ikinji tertiplimomentleriň mümkin bolan kombinasiýasynyň jemine deňdir. Meselem :

$$B_{1234}=B_{12}B_{34}+B_{13}B_{24}+B_{14}B_{23}, \qquad (1.2.46)$$

$$\begin{aligned}B_{123456}&=B_{12}\left(B_{34}B_{56}+B_{35}B_{46}+B_{36}B_{54}\right)+B_{13}\left(B_{24}B_{56}+B_{25}B_{46}+B_{26}B_{54}\right)+\\&+B_{14}\left(B_{32}B_{56}+B_{35}B_{26}+B_{36}B_{52}\right)+B_{15}\left(B_{34}B_{26}+B_{32}B_{46}+B_{36}B_{52}\right)+\\&+B_{16}\left(B_{34}B_{52}+B_{32}B_{54}+B_{35}B_{42}\right)\end{aligned}$$

(1.2.46)

$2n$ tertipli merkezi momentde goşulyjylaryň sany $(2n-1)!=1*3*5\ldots*(2n-1)$ ululyga deň.

Stasionar we stasionar däl tötän hadysalar.

Köpölçegli paýlanşyklardan peýdalanyp, $x(t)$ tötän hadysanyň harçlanýan usulyny kesgitläp bolar. Tötän hadysa berlen , eger islendik n san üçin erkin saýlanan wagtyň momenti üçin n-ölçegli paýlanşyk funksiýasy belli bolsa, onda:

$$\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n). \qquad (1.2.47)$$

položitel otrisatel önümleri bilen doly kesişmäniň sany tapyp bolar. C(t)araçäk bilen umumylaşdyrylan.

$$N=\int_0^T\delta(x-C)\left|\dot{x}-\dot{C}\right|dt \quad (1.5.8)$$

(8)formula, erkin x(t) we C(t) iki funksiýasynyň T wagtdaky kesişmesi arkaly kesgitlenýär.

<u>Maksimum we minimum</u>: x(t) funksiýasynyň minimumy $\dot{x}$=0 we $\ddot{x}$>0 wagtyna gabat gelmeli. Bu ýerde zyňylma sany $\dot{x}$ önümi minimumlaň sany bilen gabat gelýär.(5) deňlemedäki x-i $\dot{x}$-a çalsyryp we C=0 kabul edip alarys.

$$n_{min}=\int_0^T\delta(\dot{x})\ddot{x}1(\ddot{x})dt \quad (1.5.9)$$

[0,T] interwalyndaky x funksiýanyň minimumynyň jemini tapaly. Edil şoňa meňzeşlikde maksimum üçin şu görnüşde ýazyp bileris.

$$n_{ext}=n_{\min}+n_{\max}=\int_0^T\delta(\dot{x})[\ddot{x}1(\ddot{x})-\ddot{x}1(-\ddot{x})]dt=\int_0^T\delta(\dot{x})\left|\ddot{x}\right|$$

Doly ekstreminal nokatlary.

$$n_{ext}=n_{\min}+n_{\max}=\int_0^T\delta(\dot{x})[\ddot{x}1(\ddot{x})-\ddot{x}1(-\ddot{x})]dt=\int_0^T\delta(\dot{x})\left|\ddot{x}\right| \quad (1.5.10)$$

Bu ýerde (7) hem ulandyk.

Alynan deňleme deňderejeli tötänleýin we tötänleýin däl funksiýalar üçidir. Eger x(t)-tötänleýin prosses bolsa onda häaiýetnamasyna hem tötänululykdyr.Bu getirme formulalardan görnüşi ýaly haýsy statistik maglumatlary ulanyp haýsam bolsa bir orta statistikasyna häsiýetlendirýän zyňylmany tapyp bolar.

Zyňylmanyň orta dowamlylygynyň jemine seredeliň,(4)-njini ulanyp.

$$\overline{\theta}=\left\langle\int_0^T 1(x-C)dt\right\rangle=\int_0^T\left\langle 1(x-C)\right\rangle dt \quad (1.5.11)$$

<1(x-C)> tapmak üçin,w(x,t) deň paýlanşyny bilmek ýeterlikdir.bu ýerde alarys

Käbir (O,T) wagt birligindäki zyňylma häsiýetnamasyny alaly.

<u>Zyňylmanyň dowamlylygy</u>: i-nji zyňylmanyň dowamlyylgy hökmünde $\Delta\theta_i = t_{i+1} - t_i$ kabul edilýär, bu hem C derejesini x(t) egriniň yzygider kesmeginiň polojitel we otirsatel önümi.(O,T) interwak zyňylmanyň dowamlylygy $\theta = \sum_i \Delta\theta$ deňdir. x(t) daky x>C dowamlylygy bilen gabat gelýär. Şol bir sandada θ dowamlylygy 1(x-C) impulsyna eýedir (рис 1.11B). Onda ýöne olaryň meýdanyna deň, bu ýerden hem bu impulslar otrisatel däl we birlik amplituda eýedir. Şeýlelik bilen zyňylmanyň dowamlylygy şu görnüşde ýazyp bolar.

$$\theta = \int_0^T 1(x - C)dt \quad (1.5.4)$$

<u>Zyňylmanyň sany:</u> 1(x-C) wagta görä differensirlenmegi δ-impulslaryň hatarydyr, x>0 položitel we x<0 otrisateldyr (рис 1.11 2). $1(\dot{x})$ faktory göz öňünde tutup kesip goýýan otrisatel δ-impulsy ulanyp $\dot{1}(x-c)1(\dot{x})$ alarys, bu hem položitel δ-impulsyň dowamlylygyny görkezýär, munuň sany hem zyňylma sany bilen gabat gelýär (surat 1.11 d). Doly zyňylmany T wagt sany şu görnüşdedir.

$$n = \int_0^T \dot{1}(x - C)1(\dot{x})dt = \int_0^T \delta(x - C)\dot{x}1(\dot{x})dt \quad (1.5.5)$$

<u>Zyňylmanyň energiýasy:</u> Zyňylma gözegçilik edilende energiýany hasaba alýan kalorimetri ulanyp bolar. Q zyňylmasyny energiýa integral görnüşinde hasaplanýar.

$$Q = \int_0^T [x_+(t)]^2 dt = \int_0^T (x - C)^2 1^2(x - C)\, dt \quad (1.5.6)$$

araçägiň kesişme sany:

$$\left|\dot{1}(x - C)\right| = |\delta(x - C)\dot{x}| = \delta(x - C)|\dot{x}|$$

položitel δ-impulsynyň wagtlaýyn yzygider funksyýasydyr. Bularyň her bir C derejesiniň kesişmesi bilen gabat gelýär.(ris 1.11e) ýagny integral

$$N = \int_0^T \delta(x - C)|\dot{x}|dt \quad (1.5.7)$$

Görkezilen funksiýanyň kömegi bilen hadysanyň hakykatlaşmasynyň

$$dP = \omega(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)dx_1...dx_n .$$
(1.2.48)

traýektoriýa golaýdygynyň ähtimallygyny kesgitläp bolar.

(48) formula (1.1.1)-iň “statistik meňzeşlik”-i hökmünde garap bolar. Tötän hadysa (tötän funksiýanyň) üçin fluktuasiýanyň pytramasy ulanylýar, ýöne $\omega(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n)$

bilip (surat 1.2)- niň amala aşma ähtimallygyny hasaplap bolar.

(5)-i umumylaşdyryp, şeýle ýazyp bolar:

$$\omega(x_1, x_2,..., x_m; t_1, t_2,..., t_m) = \int \omega(x_1, x_2,..., x_n; t_1, t_2,..., t_n)dx_{m+1}...dx_n$$
$$(m < n) \quad (1.2.49)$$

-paýlanyşygyň kiçi funksiýalary paýlanyşygyň uly funksiýalaryndan kesgitlenip bilner.Şeýlelik bilen, paýlanyşygyň uly funksiýalary özünde hadysa baradaky ähli informasyýany saklaýar. Olar käbir paýlanyşygyň has kiçi yzygiderligine gaplanan bolýar. Köp praktiki ähmiýetli meseleler üçin goşmaça gohlaryň (informasiýanyň) bahasy n ulalmagy bilen çalt kiçelýär; şonuň üçin biz aşakda $n \geq 5$ bolany üçin olary hasaba almarys. Käbir ýagdaýlarda bolsa hatda birölçegli we ikiölçegli funksiýanyň paýlanyşygyna seretmek bilen çäkleneris. Aýratyn bir ähmiýete statistikasy $t_i - t_j$ wagtlaryň tapawudy bilen kesgitlenýän wagtyň t_0 başlangyjyna bagly däl bolan stasionar tötän hadysalar eýedir. Käbir fiziki ululygyň fluktuasiýalary stasionar tötän hadysadyr.

Bellik: Fluktuasiýalary alynýan fiziki ululyk emele gelýän ulgamynda deňagramlyk ýagdaýynda duran bolmalydyr.

Indi bolsa stasionar hadysanyň matematiki kesgitlenişini formulirläliň. Stasionar tötän hadysa – bu wagt okunda şol bir ululyga $t_1,...,t_n$ nokatlary birwagtda gyşardylanda paýlanyşygy üýtgemeýän n-ölçegli erkin funksiýadyr. Başgaça aýdylanda paýlanyşyk funksiýasy wagta baglylykda üýtgemeýär.

$$\omega(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)=\omega(x_1,...,x_n t_1+t,...,t_n+t) \qquad (1.2.50)$$

(50) bilen baglylykda stasionar hadysa üçin ähtimallygyň birölçegli paýlanyşygy wagta bagly däldir.

$$\omega(x,t)=\omega(x) \qquad (1.2.51)$$

Ikiölçegli üçin bolsa- diňe $\tau=t_1-t_2$ interwala baglydyr:

$$\omega[x(t),x(t+\tau);t,t+\tau]=\omega[x,x_\tau,\tau], \qquad (1.2.51\text{ a})$$

Bu ýerde $x_\tau=x(t+\tau)$. (51) we (51.a) deňlikler ýerine ýetýän proseslere köplenç giň manyda stasionar diýilýär.

Statistik radiofizikada we optikada stasionar hadysalaryň aýratyn bir ähmiýeti bardyr. Bular bilen birlikde, (50) ýerine ýetmeýän stasionar däl hadysalar hadysalar hem uly rol oýnaýandygyny belläliň: Meselem, fluktuasiýa barka akyp geçýän ähli geçiş hadysalar düýbünden stasionar däl tötän hadysalardyr. Radiofiziki meselem: gohuň fonunda signaly kesgitlemek; statistik ýalňyşlyklar. Bu bapda biz käbir paýlanyşygyň birölçegli we köpölçegli kanunlaryň praktiki peýdalanylyşy bilen çäkleneris. Indiki ýönekeý mesele gohlaryň fonunda käbir ähmiýetli düşünjeleri formulirlemäge mümkinçilik berýär.

Eger signal\goh gatnaşyk uly bolmasa, onda gözegçi käbir $x(t)$ tötän hadysanyň bolup geçmesini elde edip biler, ol ýa a) goh, ýa-da b) $S(t)$ signal bilen gohuň garyndysy. Signalyň barlygynyň ýa-da ýoklugynyň orta çykarylmasy, bu ýagdaýda aýandyr, statistik

$$B(\tau)=\int\int_{-\infty}^{\infty} xx_\tau\omega(x,x_\tau,\tau)dxdx_\tau \qquad (1.4.25)$$

seredilýän halatda ýazyp bileris

$$B(\tau)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}x(t)x(t+\tau)dt \qquad (1.4.26)$$

we bu şuny aňladýar: $B(\tau)$ -nyň eksperimental kesgitlemegi üçin saklanma liniýa, köpeldiji we integrator gereklidir.

Ýokarda sanalan usullar stasionar tötän prosessleri ölçäp we derňäp, analog usullar diýlip atlandyrylýarlar. Bu usullar örän giň ulanyşa eýe boldylar. Şonuň bilen birlikde EHM-laryň giň mümkinçilikleri bilen tötän prosessleriň realizasiýalarynyň sanly işlenmegi has gowy görünýär.

5. Tötänleýin prosesiň zyňylşy.

x(t) tötänleýin prosesyna seredeliň, ýagny du prosses käbir C deňlemäni alyp bolar (ris1.11a). Matematika zyňylma şu deňlemeler bilen hasaplanýar.

$$x_+(t)=(x-C)\,1(x-C) \qquad (1.5.1)$$

bu ýerde 1()-funksiýa birligini görkezýän ululykdyr.

$$1(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad (1.5.2)$$

şeýledigini belläliň

$$\frac{d}{dx}1(x)=\delta(x),\frac{d}{dt}1(x)=\delta(x)\dot{x}, \qquad (1.5.3)$$

$x\rightarrow x_+$ göni däl detektor tipli özgertmedir, häsiýetnamasy (ris1.12a) görkezlendir. x→1(x-C) göni däl özgertme ideal çägi emele gelýär (ris 1.12b). 1(x-C) prossesiň wagta görä funksiýasy käbir göniburçly birlik amplitudaly impulsy emele getirýär (рис 1.11B). x derejeden sinhrony C geçilende (рис 1.11б) gönidäl implusly formasy şol bir dowamlylyga eýedir.

(23) ulanyp, elektron-şöhle trubkanyň ekranyndaky deň ýagtylykly egrileriň formalaryny tapmak aňsatdyr. Olar şu deňleme bilen suratlandyrýarlar

$$x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2 = const. \qquad (1.4.24)$$

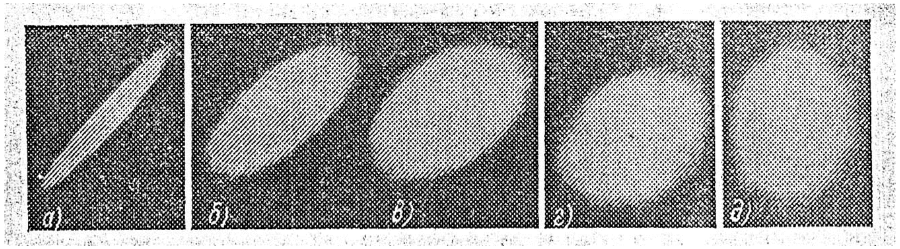
$\tau \le \tau_{k,}$ $R(\tau) \approx 1$ bolanda bizde göniniň deňlemesi bolýar:

$$(x - x_\tau)^2 = const.$$

Tersine, $\tau \ge \tau_{k,}$ $R(\tau) = 0$ bolanda, (24) tegelegiň deňlemesine gelýär:

$$x^2 + x_\tau^2 = const.$$

τ -yň ortalyk bahalary üçin (24) ellipsiň deňlemesi bolýar. Bu halatlaryň hemmesi 1.10-njy suratda ossilogrammalaryň kömegi bilen gowy görkezilýär; gauss prosessi üçin görkezilýän shema ulanylyp biliner; şeýlelikde, korelläsiýa wagtyň çalt bahalandyrmasy üçindir.



1.10-njy surat. 1.9 suratdaky shema bilen ölçenen stasionar gauss prosessiň ikiölçegli paýlanyş kanunynyň şekili.

Dürli suratlar dürli τ -lara degişlidir. Saklanma wagy (a)-dan (∂) çenli ulalýar; (∂) üçin $\tau \ge \tau_{k,}$

Wagt ortalama operasiýany ulanyp, x(t) stasionar prosessiň $B(\tau)$ korelläsion funksiýasyny hem kesgitläp bolar. Statistiki ortalamanyň ýerine

meseläni (ölçegleriň esasynda gözegçi (a) ýa-da (b) gipotezalardan birini saýlap almaly) anyklaşdyrylýar, asyl mesele bolsa ýalňyşlyklar bilen baglanyşykly bolar. Kesgitlenişiň iň bir ýönekeý meseleleriniň birine garap geçeliň,(a) wakanyň ähtimallygyny q bilen belläliň, q sany aprior ýaly interpritirläp bolar, ýagny öňden belli bolan signalyň ýoklugy ýaly.

Degişlilikde signalyň bar bolmak aprior ähtimallygy, ýa-da (b) wakanyň ähtimallygy $p = 1 - q$ deňdir. Kesgitlenişiň meselesi şeýle goýulýar: x hadysanyň ölçegi edilmeli, hem-de $x(t_1) = x_1$ alynmaly. Bu netijäniň gipotezalaryň (a) ýa-da (b) –si bilen gabat gelýändigini anyklamaly.

Ähtimallygyň paýlanyşygy x, gauss gohunda şeýle görnüşde bolýar:

a) diňe goh

$$\omega_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (1.2.52)$$

b) signal+goh

$$\omega_{s+g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x - S_1)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (S_1 = S(t))$$

Signalyň barlygy ýa-da ýoklugy baradaky netijäni (t_1 wagt pursatynda) (52)-de haýsy deňligiň $x_1$üçin uly ähtimallyk berýändigi bilen anyklap bolar, ýagny $\omega_{goh}(x_1) > \omega_{goh+signal}(x_1)$ bolanda signal ýok, tersine $\omega_{goh}(x_1) < \omega_{goh+signal}(x_1)$ bolanda signal bar. Şeýlelikde kesgitleniş usuly x_1 bilen käbir x_c kesgitleniş çäginiň deňeşdirilmegine syrykdyrylýar. (x_c aşaky deňlikden alynýar.)

$$x_g(x_c) = \omega_{s+g}(x_c) \qquad (1.2.53)$$

(52)-ni (53)-e goýup, alarys

$$x_c = S_1/2 \quad (1.2.54)$$

(54) çäk bar, ýöne ol ρ ýa-da q bagly däl we bu bolsa signal baradaky ähli oprior informasiýa ulanylan däldigi sebäpli onuň gowy däl usul bilen alnandygyny aňladýar.

Indi bolsa has az ýalňyşlygyň ähtimallygyna getirýän çägiň has optimal saýlanyşyna garalyň (ideal gözegçiniň kriteriýasy). Beýle ýalňyşlyklar iki bolup biler.Birinjisi $x_1 > x_c$ we biz signal bardygy barada netije çykarýarys, aslynda bolsa signal ýok (ýalňyş anyklaýyş). Şeýle ýalňyşyň şertli ähtimallygy şeýle bolar:

$$P_1(x_1 > x_c \mid S = 0) = \int_{x_c}^{\infty} \omega_{goh}(x)dx$$

we (23a) baglylykda bitin ähtimallyk şeýledir:

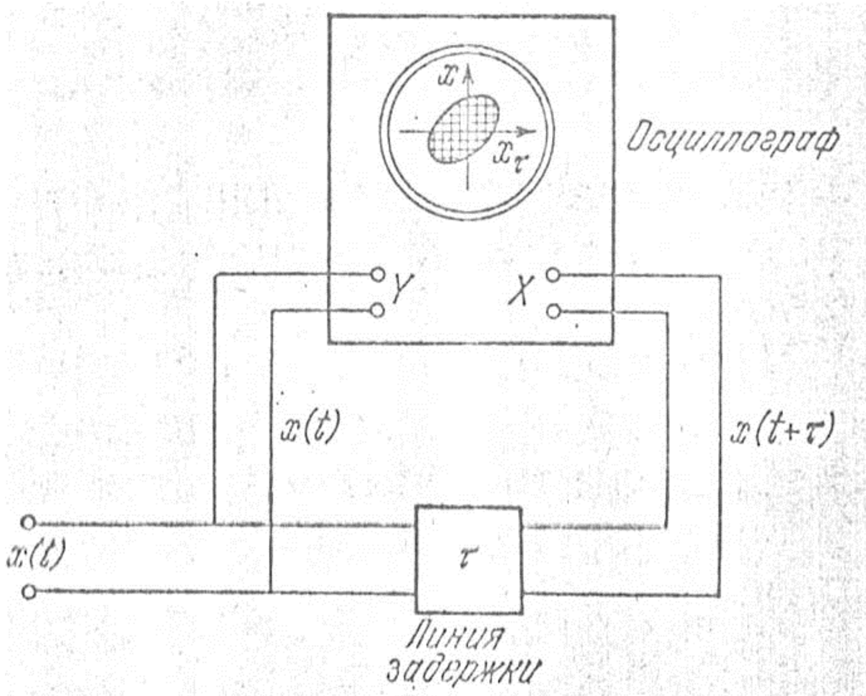
$$P_1 = q\int_{x_c}^{\infty} \omega_g(x)dx \quad (1.2.55)$$

Beýleki bir ýalňyşlyk, eger signal bar bolup hem $x_1 < x_c$ bolsa ýüze çykýar (signal geçirmek). (55)-e meňzeşlikde taparys, ol ýalňyşlygyň ähtimallygy:

$$P_2 = P\int_{-\infty}^{x_c} \omega_{s+g}(x)dx,$$

Ýalňyşlygyň jemleýji ähtimallygy bolsa:

$$P = P_1 + P_2 = q\int_{x_c}^{\infty} \omega_g(x)dx + p\int_{-\infty}^{x_c} \omega_{s+g}(x)dx \quad (1.2.56)$$



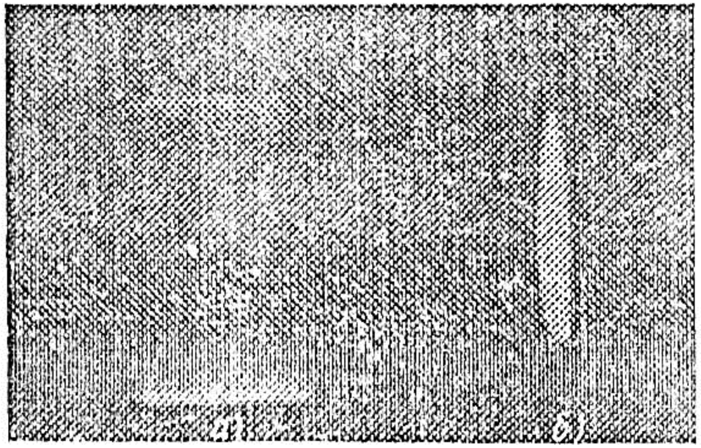
1.9-njy surat. Elektron ossilografyň kömegi bilen stasionar tötän $\omega(x, x_\tau, \tau)$ prosessleriň ikiölçegli paýlanyşlaryny ölçemeginiň shemasy.

1.10 suratda görkezilen usul bilen stasionar gaussyň tötän prosessi üçin usuly bilen alynan suratlar görkezilen. Gorizontal we wertikal plastinalara düşýän näpräženiýalaryň arasyndaky τ saklanma wagtyň üýtgemeginde, görýänimiz ýaly, $\omega(x, x_\tau, \tau)$ ikiölçegli paýlanyşlaryň toplamasy kesgitlenip biliner. (1.2.43), (1.2.44) görä

$$\omega(x, x_\tau, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1 - R^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2}{2\sigma^2\left|1 - R^2(\tau)\right|}\right\},$$

(1.4.23)

nirede $R(\tau)$ - korelläsiýa koeffisienti ((1.3.2) seret).



1.8-nji surat. Elektron ossilografyň [8] ekranynda alynan birölçegli tötän ýazmalaryň (razwörtkalaryň) suratlary:

a) $x(t)=\cos\varphi t$ ($\omega(\varphi)=1/2\pi$) prosess;

b) gaussyň tötän prosessi.

1.8a surat şeýle tötän prosesse degişli: $x(t)=\cos\varphi t$, nirede $\varphi(t)$ –tötän faza. Eger-de $\omega(\varphi)=1/2\pi$, (1.2.10), (1.2.11) formulalara görä

$$\omega(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1,\\ 0, & 1<x<-1,\end{cases} \qquad (1.4.21)$$

-suratda ýagtylygyň paýlanşy (21) degişlidir. 1.8b suratda gaussyň prosessi üçin tötän razwörtka getirilen.

Elektron ossilografyň kömegi bilen stasionar prosessleriň ikiölçegli paýlanyşlaryny eksperimental kesgitlemek üçin ikiölçegli tötän razwörtkany almak gerek; ossilografyň ekranynda deň ýagtylykly egriler degişlidirler, şert boýunça

$\omega(x,x_\tau,\tau)=const$ (1.4.22) surat 1.9.

bolar. $\partial P/\partial x_c$ önümi nola deňläp (56)-nyň ýalňyşlygynyn ähtimallygy iň kiçi bolýanyny anyklarys, eger x_c,

$$q\omega_g(x_c)=p\omega_{s+g}(x_c) \qquad (1.2.57)$$

deňlik bilen kesgitlener, bu bolsa $p=q=1/2$ hususy ýagdaýda (53) bilen gabat geler.

$$x_c=\frac{S_1}{2}\left(1-\frac{2\sigma^2}{S_1^{\,2}}\ln\frac{p}{q}\right) \qquad (1.2.58)$$

(58)-e baglylykda $x_1>x_c$ signaly kesgitlemek:

$$x_1S_1>\frac{S_1^{\,2}}{2}-\sigma^2\ln\frac{p}{q} \qquad (1.2.59)$$

görnüşde ýazyp bolar.

Elbetde, ýekeje ölçegiň netijesinde signalyň barlygy ýa-da ýoklugy barada netijä gelmek dogry däl. Takyklygy ölçegleriň köplügi bilen artdyryp bolar (ölçegler t_i wagt şkalasynyň birnäçe nokatlarynda geçirmeli). Bu ýagdaý üçin köpölçegli paýlanyşykdan peýdalanylsa ýeterlikdir.

$\omega(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)$.

Aňsatlyk üçin garaşsyz ölçeglere ýüz uralyň, köpölçegli paýlanşygy (18)-iň esasynda birölçeglileriň önümleri bilen çalşyryp bolar. Tötän $x_i=x(t_i)$ ululyklar statistik garaşsyz hasaplap (bu şertiň fiziki manysy gaýtadan geçirilýän ölçegleriň arasyndaky wagt korelläsiýa wagtyndan örän uludyr, §3-e seret),(57) we (59)-yň ýerine, degişlilikde

$$q\prod_i \omega_{Ш}(x_{П}) = p\prod_i \omega_{C+Ш}(x_{П}),$$

$$\sum_i x_i S_i > \frac{1}{2}\sum S_i^2 - \sigma^2 \ln\frac{p}{q} = U_0. \qquad (1.2.60)$$

Bunuň shema görnüşinde amala aşyrylyşy ölçegleriň sanynyň artmagy bilen U_0-yň çägi käbir hemişelik sana ymtylýar, ýagny signalyň $\frac{1}{2}\sum S_i^2$ orta intensiwligine. (orta intensiwlik $\sigma^2 \ln\frac{p}{q}$ ululyk kemeldilen).

Seredilen mesele signaly kesgitlemegiň statistik düzgüniniň iň bir ýönekeý meselemidir. Häzirki wagtda signallary kesgitlemegiň statistik teoriýasy gowy kämilleşendir. Bu barada has köp maglumat üçin – seret, meselem [2,4,5]; hem-de §5 Bap 3.

3. Tötän prosessleriň korelläsion we spektral häsiýetnamalary.

Korelläsion funksiýa we korelläsiýa koeffisienti.

y_p we y_q tötän elementleriň arasyndaky statistiki aragatnaşygy korelläsion matrisa häsiýetlendirýär (1.2.43):

$$B_{pq} = \overline{y_p y_q} - \bar{y}_p \bar{y}_q \qquad (1.3.1)$$

B_{pq} bahalary normal tötän ululyklar üçin ähtimallyklaryň köpölçegli paýlanşyny doly kesgitleýärler (1.2.44). B_{pq}-ny normirläp, korelläsiýa koeffisientleriň matrisasyny alarys

$$R_{pq} = \frac{B_{pq}}{\sigma_p \sigma_q} = \frac{\overline{y_p y_q} - \bar{y}_p \bar{y}_q}{\sqrt{(\overline{y^2}_p - \bar{y}_p^2)(\overline{y^2}_q - \bar{y}_q^2)}}, \qquad (1.3.2)$$

$\eta(x)$ seredilýän x tötän ululygyň käbir funksiýasy bolup durýar, onda η hem stasionar tötän prosessdir. $\eta(t)$ -yň ergodiçnosti esasynda

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)\omega(x)dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \eta[x(t)]dt = \tilde{\eta}. \qquad (1.4.19)$$

Ýörite görnüşli $\eta(t)$ stasionar prosessa seredeliň:

$$\eta(t) = F[x(t)] = \begin{cases} 1, x_1 < x < x_2 \\ 0, [x_1, x_2] \end{cases}$$ (2-nji hal üçin çäkden çykýar).

Munuň ýaly prosess üçin (1.17 surata seret)

$$\bar{\eta} = P(x_1 < x < x_2), \quad \tilde{\eta} = T_{x_1,x_2} / T_1. \qquad (1.4.20)$$

Şeýlelik bilen, (18) gatnaşyk subut edilendir.

$P = T_{x_1,x_2} / T_1$ deňligiň ýerine ýetirilmeginiň takyklygyny bahalandyrmak üçin (12)-(17) gatnaşyklary ulanyp bolar. Elektriki gohlar üçin bolmagyň otnositel wagtlaryny ölçemekligi elektron ossilografyň kömegi bilen amala aşyrmak kyn däldir. Zerur bolan T ortalama wagty ýa trubkanyň lüminoforynyň inersiallygy (bu halatda ähtimallygyň paýlanşy barada gowy düşünjäni) hasabynda, ýa-da ekranyň trubkasyndan surat alynanda ekspozisiýany saýlamagynda alynyp biliner.

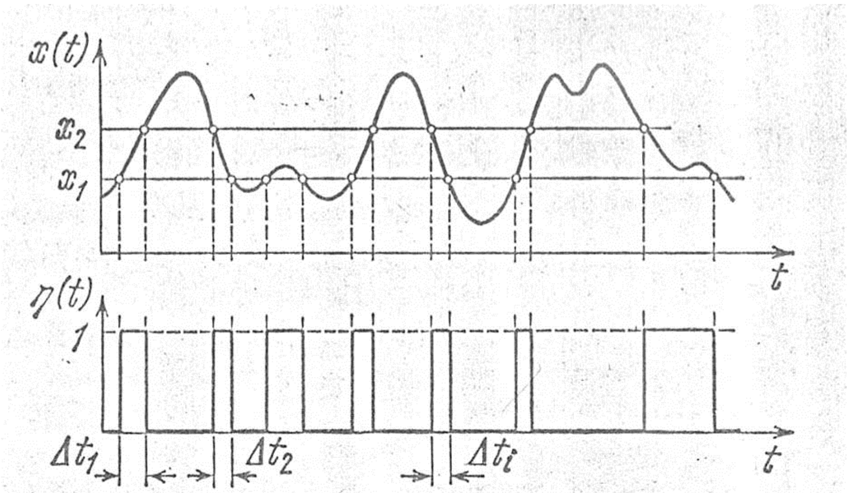
1.8 suratda elektron-şöhle trubkanyň ekranyndan alynan birölçegli tötän ýazmalar (razwörtkalar) getirilen; olar öwrenilýän prosessiň signalynyň ossilografyň wertikal plastinalaryna berlende alyndy.

prosessiň berlen halda bolmagynyň otnositel wagty bilen kesgitlenýär. Ähtimallygyň bu kesgitlenişi adaty bolup görünýär; stasionar prosess üçin ol ýokarda subut edilen ergodiki teoremanyň kömegi bilen berk esaslanýar.

Goý stasionar tötän prosess üçin bizi $P(x_1 < x < x_2)$ hadysanyň ähtimallygy gyzyklandyrsyn, we bu hadysada x(t) realizasiýa $[x_1, x_2]$ interwalda bolup geçýän bolsun. Onda görkezilen ähtimallygy realizasiýanyň görkezilen interwalda bolmagynyň otnositel wagty boýunça kesgitläp bolar, ony aşakdaky gatnaşyk görkezer

$$P(x_1 < x < x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{T_{x_1, x_2}}{T}, \qquad (1.4.18)$$

nirede $T_{x_1, x_2} = \sum \Delta t_i$ we Δt_i - bolmagyň wagtlary (sur. 1.7). (18) gatnaşyk gönümel (11)-den gelip çykýar. Dogrudanam, eger-de



1.7-nji surat. x(t) stasionar tötän prosessiň realizasiýasy we onuň esasynda gurulan $\eta(t)$ impuls prosessiň realizasiýasy.

$\eta(t)$ egriniň aşagyndaky meýdan x prosessiň $x_1 < x < x_2$ interwalda bolmagynyň wagtynda deňdir.

bu y_p we y_q arasyndaky statistiki baglanşygyň ölçegi bolup bilýär.

(2)-den gelişi ýaly, korelläsiýa koeffisienti absolüt ululygy boýunça çäklidir:

$$-1 \le R_{pq} \le +1, \qquad (1.3.3)$$

bu ýerde R_{pq} - statistiki garaşsyz bolan y_p we y_q üçindir. (3)-e görä B_{pq} hem položitel, hem otrisatel bahalara eýe bolup bilýär:

$$-\sigma_{y_p}\sigma_{y_q} \le B_{pq} \le \sigma_{y_p}\sigma_{y_q} \qquad (1.3.4)$$

Eger-de y_p we y_q - şol bir prosessiň wagtyň dürli pursatlaryndaky bahalary bolsa, onda

$$y_p = x(t), \qquad y_q = x(t+\tau) = x_\tau,$$

we onda B_{pq} korelläsion matrisanyň elementleri aşakdaky korelläsion funksiýanyň hususy bahalarydyr

$$B(t,\tau) = \overline{xx_\tau} - \overline{x}\overline{x_\tau} \qquad (1.3.5)$$

has takygy

$$B_{pq} = B(t = t_p, \tau = t_p - t_q).$$

Şuňa meňzeşlikde, R_{pq} matrisanyň elementleri korelläsiýa koeffisienti üsti bilen aňladylýar

$$R(t,\tau) = B(t,\tau)/\sigma\sigma_\tau \quad . \quad (1.3.6)$$

Eger $x(t)$ prosess stasionar bolsa, onda (5) we (6)-da diňe τ bolan baglylyk galýar:

$$B(\tau) = \overline{xx_\tau} - \overline{x}^2 = \sigma^2 R(\tau) \qquad R(\tau) = (\overline{xx_\tau} - \overline{x}^2)/\sigma^2,$$
(1.3.7)

bu ýerde $B(\tau)$ we $R(\tau)$ - τ -yň jübüt funksiýalarydyrlar:

$$B(-\tau) = B(\tau), \quad R(-\tau) = R(\tau),$$

sebäbi (1) görä $B_{pq} = B_{qp}$.

Korelläsiýa funksiýasynyň maksimal bahasy $\tau = 0$ degişlidir:
$B(\tau)_{\max} = B(0) = \sigma^2$.

τ -nyň ulalmasy bilen x we x_τ arasyndaky statistiki baglanşyk has pese düşýär, $\overline{xx_\tau} \to \overline{x}\overline{x_\tau} = \overline{x}^2$ we şunlukda $B(\infty) = 0$, $R(\infty) = 0$.

$B(\tau)$ funksiýasynyň τ -yň ulalmagy bilen kiçelmesi monoton bolup ýa-da ossillirlenýän häsiýete eýe bolup bilýär (bu tötän prosessiň ýygylyklar spektriniň görnüşine baglydyr, 1.4 seret). Şuňa meňzeşlikde hem korelläsiýa koeffisienti üýtgeýär.

Korelläsiýa funskiýasynyň ýeterlik bildirýän (birnäçe esse) peselmesiniň bolup geçýän wagtynyň häsiýetli interwalyna τ_g korelläsiýanyň wagty diýilýär.

Tötän funksiýanyň wagtyň dürli pursatlaryndaky bahalarynyň arasyndaky statistiki baglanşygy hem korelläsion funksiýa häsiýetlendirýär

$\psi(t,\tau) = \overline{xx_\tau} = B(t,\tau) + \overline{x}\overline{x_\tau}$. (1.3.8)

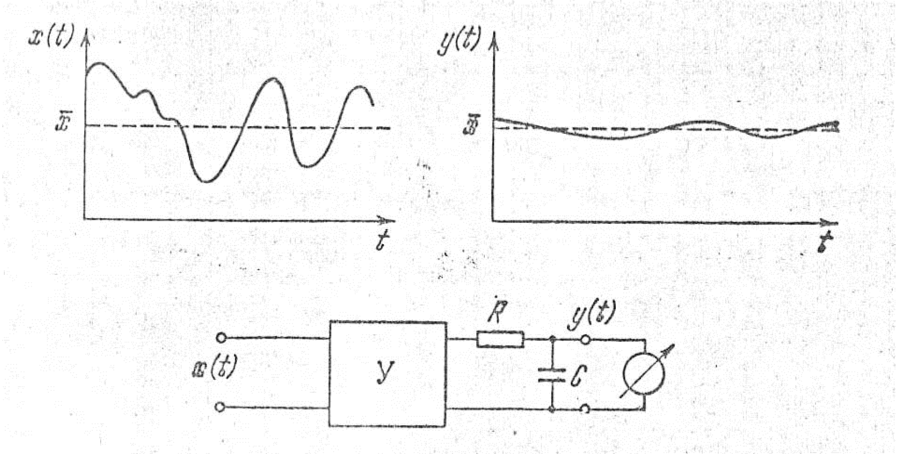
Emma, mundan soňra biz köplenç $B(t,\tau)$ korelläsion funksiýany ulanarys. Tötän prosessiň jübütleýin $B(t,\tau)$ we $\psi(t,\tau)$ körelläsion funksiýalaryndan başga-da, üçleýin $< x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2) >$ seredilmäge alnyp biliner, dörtleýin we ş.m. korelläsion funksiýalar; olar tötän prosess hakda has takyk maglumaty berýärler.

Radiofizikada we aýratyn-da optikada ýokary derejeli korelläsion funksiýalar uly ähmiýete eýedirler, we olar seredilýän tötän prosessiň $< x^n(t)x^n(t+\tau) >$ dürli derejeleri üçin ýazylýarlar we hususy halda intensiwligiň korelläsion funksiýasy $< II_\tau > = < x^2 x_\tau^2 >$. (1.3.9)

Ortalaryň ölçemekligi. 1.6 suratda x(t) stasionar elektriki gohuň orta bahasyny hasaplaýan ýönekeý shema görkezilen. x(t)-ny üýtgewsiz (gyşarmasyz) görkezýän У güýçlendirijiden soňra RC-filtr ($T_0 = RC$) bolup iň ýönekeý integrator we napräženiýany ölçeýän pribor ýerleşýärler. Priboryň görkezmeleri

$$y(t) = \frac{k}{T_0}\int_0^\infty e^{-\theta/T_0} x(t-\theta)d\theta.$$

(15) we (16) ýerine ýetirilmeginde $y \approx k\overline{x}$. Şeýlelik bilen, ortalaryň ölçemegi ýönekeý woltmetr bilen amala aşyrylýar



1.6-njy surat. Wagt ortalama operasiýany ulanýan stasionar elektriki gohuň orta bahasyny ölçemegiň shemasy.

hemişelik togyň. Şuňa meňzeş shema hem $\overline{x}^2$ we ş.m. ölçemekde ulanylyp biliner: bu halda güýçlendiriji we integratoryň arasynda degişli detektor goýulýar; eger-de detektor inersion däl bolsa, onda ölçegleriň takyklygynyň bahalaryny (12)-(16) formulalardan geçirip bolýar.

Ähtimallyklary ölçemeklik. Stasionar prosessleriň birölçegli we köpölçegli paýlanyşlary bir realizasiýadan hem kesgitlenilip bilinerler, wagt ortalama bilen. Bu halda käbir halyň ähtimallygy

(14)-den ε -nyň kiçi bolmagynyň zerur şerti bolup T ortalama wagtyň fluktuasiýalaryň spektriniň giňligine köpeltmeginiň ýeterlik uly ululygy bolup durýar:

$Th \geq 1.$ (1.4.15)

Eger-de (15) şert ýerine ýetse, onda (14)-den gelip çykýan T-nyň bahalandyrmasy şeýle bolar:

$T \geq \frac{2\pi G}{\varepsilon^2 \overline{x}^2}.$ (1.4.16)

(1.3.32) gauss spektri halatda (13)-den tapýarys

$$\varepsilon^2 \geq \frac{2\sigma^2}{\Delta^2 \overline{x}^2 T^2}\left[\frac{\Delta}{\sqrt{2}} T \sqrt{\pi}\, \Phi\left(\frac{T\Delta}{\sqrt{2}}\right) - 1 + e^{-T^2\Delta^2/2}\right],$$

(1.4.17)

nirede

$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ $(\Phi(\infty) = 1)$

-ähtimallygyň integraly, $\sigma^2 = G\Delta\sqrt{2\pi}$. (15) manydaş bolan $\Delta T \geq 1$ şertiň ýerine ýetmeginde

(17) deňsizlik (16) bilen gabat gelýän görnüşi alýar.

Stasionar tötän prosessleriň statistiki häsiýetnamalaryny ölçemeginiň usullary barada.

Stasionar tötän prosessiň ýekeje realizasiýasyndan onuň statistiki häsiýetnamasyny alyp bilmek mümkinçiligi eksperimental radiofizika we optika üçin uly gyzyklanma bolup durýar. Aşakda biz bu häsiýetde esaslanýan momentleriň, korreläsion funksiýalaryň we paýlanma kanunlarynyň ölçemekliginiň usullaryny seredip geçeris. Sanalan meselelerde wagt ortalama operasiýanyň ulanylmagy göze görünýän artykmaçlyklary berýär.

Eger-de tötän prosess normal bolsa, onda ýokary derejeli korreläsion funksiýalary $B(\tau)$ üsti bilen aňladyp bolýar.

(1.2.45) ulanyp, şuňa göz ýetirmek kyn däldir

$< II_\tau >= \sigma^2\sigma_\tau^2 + 2B^2(t,\tau) + \overline{x}^2\overline{x}_\tau^2 + x_\tau^2\sigma^2 + x^2\sigma_\tau^2 + 4\overline{x}\overline{x}_\tau^2 B(t,\tau)$.

(1.3.10)

Gaussyň nollyk ortaly x stasionar prosessi üçin bu aňlatma aňsatlaşýar:

$< II_\tau >= \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4 + [1 + 2R^2(\tau)]$. (1.3.11)

Tötän prosessiň spektral aňladylyşy; spektral amplitudalar we spektral dykyzlyk; spektral dykyzlyk bilen korreläsion funksiýanyň arasyndaky baglanşyk.

Statistiki radiofizika we optika üçin tötän prosessleriň spektral aňladylyşy uly ähmiýete eýedir. Bu ýerde regulär signallaryň we meýdanlaryň (we olaryň çyzykly sistemalardan geçişi) teoriýasynda döredilen spektral aňladylyşlaryň umumylaşdyrmasy barada gürrüň edilýär.

Stasionar tötän prosessiň fluktuasion düzüjisini

$\xi = x(t) - \overline{x}$ (1.3.12)

Furýeniň integraly görnüşinde ýazalyň:

$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega e^{i\omega t} d\omega .$ (1.3.13)

ξ_ω spektral amplitudalar tötän prosessiň dürli realizasiýalarynda ω -e dürli bagly bolarlar, diýmek ξ_ω - ω -nyň tötän funksiýalarydyr. (13) görä wagtyň maddalaýyn funksiýalary üçin $\xi(t)$ spektral amplitudalar kompleksdirler, özem

$\xi_{-\omega} = \xi_\omega^*$.

Ýygylyklar boýunça ortaça intensiwligiň paýlanşyny görkezýän (spektral dykyzlyk barada aýdylýar), tötän $G(\omega)$ prosessiň spektral dykyzlygy diýen düşünjäni girizeliň:

$$<\xi^2> = -\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)d\omega . \qquad (1.3.14)$$

Öz-özünden (14) formula $G(\omega)$ funksiýanyň görnüşini kesgitlänok, ony tapmak üçin goşmaça maglumatlar gerekdir (aşakda 18 seret).

Stasionar tötän prosessleriň ajaýyp häsiýeti bolup, $G(\omega)$ spektral dykyzlygyň prosessiň başga fundamental statistiki häsiýetnamasynyň – onuň korelläsion funksiýasynyň furýe-transformantasy bolmagy bolup durýar (Wineriň-Hinçiniň teoremasy). Muňa ynanmak üçin (13) ulanyp, $B(\tau)$ korelläsion funksiýa üçin aňlatmany ýazalyň.

$$B(\tau) = <\xi\xi_\tau> = \int\int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' <\xi_\omega \xi_{\omega'}> e^{i\omega t + i\omega'(t+\tau)} . \qquad (1.3.15)$$

(15)-de t-den stasionar prosess üçin baglanşyk ýok bolmaly; bu diňe ξ_ω spektral amplitudalaryň δ -korellirlenen bolan şertde bolup bilýär, ýagny

$$<\xi_\omega \xi_{\omega'}> = A(\omega)\delta(\omega+\omega') . \qquad (1.3.16)$$

(16)-ny (15) goýup, $A(\omega) = G(\omega)$ -de ynanmak kyn däl (sebäbi $B(0) = <\xi^2>$), $G(\omega)$ we $B(\tau)$ üçin Furýe özgertmeleriniň jübütini alýarys:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega , \qquad (1.3.17)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau . \qquad (1.3.18)$$

Tötän $\tilde{x} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} x(t)dt$ prosess üçin $\omega_T(\tilde{x})$ paýlanma dürli $T(T_1 < T_2)$ wagt ortalamalarda.

Ähyrky wagt ortalamasy diýip alynan wagt ortalama - tötän ululykdyr we ol $\omega_T(\tilde{x})$ birölçegli paýlanma kanun bilen häsiýetlendirilýär. Emma bu kanunyň görnüşi T ortalamanyň wagtynyň ululygyna bagly bolup durýar. $T \to \infty$ -de $\tilde{x}$ -dan $\bar{x}$ -a göze görünýän üýtgemeleriň ähtimallygy nola ymtylýar we $\omega(\tilde{x}) \to \delta(\tilde{x} - \bar{x})$. $\omega(x)$ -yň görnüşine bagly bolman, ýeterlik uly T-larda $\omega(\tilde{x})$ gauss paýlanmasy bolýandygyny belläliň.

Wagt ortalamada ortalamalaryň kesgitlemeginiň takyklygy; gerek bolan ortalama wagtyň bahalandyrylmagy. Real şertlerde ortalama T wagty gutarnyklydyr we (8), (9) gatnaşyklaryň ýeterlik takyklyk bilen ýerine ýetirilmekligi üçin T interwalyň nähili bolmalydygyny ölçemek gyzyklydyr. Şuny nazara alyp

$$\frac{\sigma_T}{\bar{x}} \le \varepsilon, \qquad (1.4.12)$$

(4) we (7) hem hasaba alyp, tapýarys:

$$\varepsilon^2 \ge \frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 d\omega = \frac{2}{T^2\bar{x}^2}\int_0^T (T-\tau)B(\tau)d\tau .$$

(1.4.13)

Şeýlelikde, $x(t) = \bar{x} + \xi(t)$ prosessiň ortalamasynda (12) amala aşyrylmagy üçin zerur bolan T ortalama wagty $\bar{x}$ -a, $\xi(t)$ fluktuasiýalaryň spektrine (ýa-da korelläsion funksiýasyna), hem-de $\tilde{x}$ -dan $\bar{x}$ -a rugstat edilýän üýtgemäniň ε ululygyna baglydyr. Mysal üçin, eger-de fluktuasiýalaryň spektri lorensiňki bolsa ((1.3.31) seret), onda (13) deňsizlik şu görnüşi alýar

$$\varepsilon^2 \ge \frac{2\sigma^2}{\bar{x}^2}\frac{e^{-Th} - 1 + Th}{T^2h^2}, \qquad \sigma^2 = \pi G h. \qquad (1.4.14)$$

Tötän prosessiň ergodiki, emma stasionar däl bolup bilýändigini belläliň, mysal üçin:

$$x(t) = \bar{x} + a\cos\Omega t, \qquad (1.4.10a)$$

bu ýerde a-tötän hemişelik ($\bar{a} = 0$). Stasionar däldiginde onuň dispersiýany tapamyzda gör ýetirmek aňsatdyr

$$\left\langle (x-\bar{x})^2 \right\rangle = \overline{a^2}\cos^2\Omega t,$$

bu bolsa öz gezeginde wagta bagly bolup durýar. Oňa garamazdan, (10a) prosess üçin (8) gatnaşyk ýerine ýetýär we ortalamyzda biz predelda alarys

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Ergodiçnostyň bu häsiýeti emma (10a) prosessiň funksiýasy üçin ýitip bilýär. Mysal üçin, $y = x^2$ alamyzda

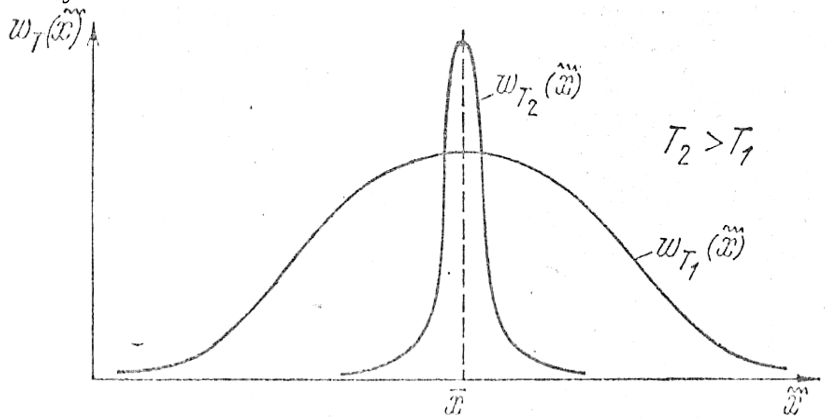
$$y = \bar{x}^2 + 2\bar{x}a\cos\Omega t + a^2\cos^2\Omega t,$$

$$\tilde{y} \to x^2 + a^2/2,\ \bar{y} = \bar{x}^2 + \overline{a^2}\cos\Omega t \neq y.$$

(8) deňlemäniň has takyk ýazylyşy şeýledir

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{x} \underset{P}{-} \bar{x}, \qquad (1.4.11)$$

bu ýerde P simwol ähtimallyk boýunça $\tilde{x}$-dan $\bar{x}$-a gabatlaşmaklyk bardygyny aňladýar. Bu terminiň manysy 1.5 suratda görkezilýär.



1.5-nji surat. Ähtimallyk boýunça gabatlaşmaklyk.

(18) ulanyp we $B(\tau)$ korelläsion funksiýanyň jübütdigini göz öňümizde tutup, $G(\omega)$-nyň hem jübütdigine göz ýetirmek mümkin:

$$G(\omega) = G(-\omega). \qquad (1.3.19)$$

$G(\omega)$ funksiýa ölçenýän eksperimental energetiki $G^+(\omega)$ spektr (polžitel ýygylyklar boýunça alynan spektr) bilen şu deňlik bilen baglanşykly:

$$G^+(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega), \omega \geq 0, \\ 0, \omega < 0. \end{cases} \qquad (1.3.19a)$$

$B(\tau)$ we $G(\omega)$ funksiýalaryň jübütdigi sebäpli (17) we (18) deňlikler şu görnüşde göçürilip biliner

$$B(\tau) = 2\int_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau d\omega = \int_0^\infty G^+(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \qquad (1.3.20)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \qquad (1.3.21)$$

(17) görnüşli formulalary, görnüşi ýaly, $\psi(t)$ doly korelläsion funksiýa üçin ýazyp bolýar. $\psi(t)$-den Furýe-özgertme öz içinde hem fluktuasion komponentanyň spektrini, hem orta bahanyň spektrini saklar; (8) we (18) görä

$$G_\psi(\omega) = G(\omega) + |\bar{x}|^2\delta(\omega).$$

Şeýlelikde, $G_\psi(\omega)$ doly spektrda, $G(\omega)$ fluktuasiýa spektrinden tapawutlylykda, $\omega = 0$ bolanda diskret çyzyk bardyr; şunuň bilen spektral dilde orta baha – prosessiň regulär hemişek düzüjisi aňladylýar.

(17), (18) deňlikler (ýa-da (20), (21)) bu kitabyň ähli indiki bölümlerinde aýratyn wajyp roly oýnarlar. Bu ýerde bolsa biz but gatnaşyklaryň käbir umumy netijeleriniň seljerilmesine we tötän prosesslerde köp duş gelýän konkret mysallara serederis. Eger-de $G(\omega)$ tötän prosessiň spektriniň giňligini $\Delta\omega$ belgilesek, onda Furýeniň özgertmeleriniň umumy häsiýetlerine görä

$\Delta\omega = const / \tau_k$ (1.3.22)

(22-de hemişeligiň ululygy $\Delta\omega$ -nyn we τ_k -nyň konkret kesgitlenşine we spektriň görnüşine baglydyr). Şunuň bilen, τ_k korelläsiýa wagty, tötän prosessiň bahalarynyň arasyndaky statistiki baglanşyk „dargaýan“ wagt interwalyny häsiýetlendirip, tötän funksiýanyň üýtgemesiniň “tizligini” we spektrda prosessiň energiýasynyň paýlanşyny häsiýetlendirýär ((22) görnüşli deňlik prosessiň häsiýetli uzynlygy bilen amplituda spektriň giňligini baglaşdyrýan regulär prosessleriň spektral teoriýasy bilen deňeşdirme). (22)-ni takyklaşdyrmak üçin $\Delta\omega$ we τ_k üçin käbir kesgitlemeleri getireliň.

Köplenç spektriň effektiw goh giňligi diýen düşünjeden peýdalanýarlar:

$$\Delta\omega' = \int_0^\infty G(\omega)d\omega / G_{\max} = \sigma^2 / 2G_{\max}, \quad (1.3.23)$$

bu $\omega > 0$ oblastda ekwiwalent göniburçlyk bilen $G(\omega)$ spektriň approksimasiýasyna degişlidir. Spektriň giňinigiň başga bahalary hem bolup bilerler, mysal üçin :

$$\Delta\omega = \frac{\left(\int_0^\infty G(\omega)d\omega\right)^2}{\int_0^\infty G^2(\omega)d\omega} = \frac{\sigma^4}{4\int_0^\infty G^2(\omega)d\omega}. \qquad (1.3.24)$$

(23) we (24) aňlatmalar $\Delta\omega'$ we $\Delta\omega''$-y korelläsion funksiýa arkaly aňladyp bolýandygy bilen amatlydyrlar. Eger-de tötän prosessiň intensiwliginiň spektri pes ýygylyklaryň oblastynda ýerleşip, $G_{\max} = G(0)$ bolsa, onda korelläsiýa wagty girizip

(7) görä, eger-de nolda spektr gutarnykly bolsa $(0 < G(0) < \infty)$, onda uly T-larda asimptotiki

$$\sigma_T^2 \approx G(0)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 d\omega = \frac{2\pi G(0)}{T} \sim \frac{1}{T}. \qquad (1.4.8)$$

$\omega = 0$ bolanda spektr hem nola öwrülýän halatda kiçelme has çalt bolup geçer. Mysal üçin, (7)-de $G(\omega) = G_0(\omega^2 + h^2)^{-1}$ göz öňümize getiremizde taparys

$$\sigma_T^2 = \frac{2\pi G_0}{hT^2}(1 - e^{-hT}) \sim \frac{1}{T^2}. \qquad (1.4.9)$$

Ortalama üçin in amatsyz halat bolup, kiçi ω -laryň töwereginde fluktuasiýalaryň spektral tekizligi çäksiz ulalanda, diýmek $G(0) \to \infty$. Şuny mysal edip görsek

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 |\omega_0 / \omega|^{\mu}, & |\omega| > \omega_0, \\ 0, & |\omega| < \omega_0, \end{cases} \quad 0 < \mu < 1$$

(flikker-gohuň spektri – [7] seret), alarys

$$\sigma_T^2 \sim \frac{1}{T^{1-\mu}}.$$

Wagt boýunça ortalama düýbünden effektiw däl we σ_T^2 T-den bagly däl, eger-de fluktuasiýalaryň ähli kuwwaty $\omega = 0$ nokatda jemlenen bolsa, ýagny eger-de

$G(\omega) = C\delta(\omega)$. (1.4.10)

(10)-y (7)-ä goýamyzda alarys

$\sigma_T^2 = C = const.$

(10) görnüşli spektr ylaýjak (3) aňlatmada $\langle \xi_0^2 \rangle = C$ dispersiýaly $\xi_0 \neq 0$ komponentanyň barlygyna gabat gelýär.

Ortalama diňe üýtgeýän $\tilde{\xi}(t)$ komponentanyň ululygyna täsir eder; onuň dispersiýasy wagt ortalamasy T-nyň ulalmagy bilen nola ymtylar:

$$\sigma_T^2 = \left\langle (\xi)^2 \right\rangle \to 0. \qquad (1.4.4)$$

$T \to \infty$ predelda alarys

$$\tilde{x} = \bar{x} + \xi_0 \qquad (1.4.5)$$

ýa-da eger $\xi_0 = 0$ bolsa

$$\tilde{x} = \bar{x}. \qquad (1.4.6)$$

(6) ýerine ýetýän prosesslere *ergodiki* prosessler diýilýär. Şeýlelik bilen, ergodiki prosess wagt ortalamada tötän häsiýetini ýitirýär we käbir orta ululyga ymtylýar; bu ululyk onuň orta statistiki bahasyna deňdir. Bu hadysa bolsa statistiki ortalaryň ölçemegini has aňsatlaşdyrýar: uly, massiw, tötän prosessiň realizasyýalarynyň uly sanyndan durýan tejribäniň ýerine onuň ergodiçnosti halatynda ýekeje (ýeterlik uzyn) realizasiýanyň ortalamasy ýeterlik bolup durýar.

Ergodiki prosess halatynda aýry bir realizasiýanyň gymmatlygy gaty ulalýandygyny belläp geçmeli, sebäbi onuň wagt boýunça ortalamasy bilen tötän prosessiň her dürli statistiki häsiýetlerini tapyp bolýar we ansambl (köplük) boýunça ortalama ýüzlenmek gerek däl bolup durýar.

T-nyň ulalmagy bilen (4) dispersiýanyň kiçelmesiniň kanuny $G(\omega)$ spektrdan bagly ýa-da $B(\tau)$ korreläsion funksiýadan $\xi(t)$ fluktuasiýalardan. (2)-de $f(t) = \xi(t)$ öýdüp, kwadrata göterip we statistiki ortalap alarys

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 d\omega = \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-\tau)B(\tau)d\tau.$$

(1.4.7)

$$\tau_k^{'} = 4\int_0^{\infty} R(\tau)d\tau, \qquad (1.3.25)$$

şuny $\Delta\omega^{'}\tau_k^{'} = 2\pi$ alarys. (1.3.26)

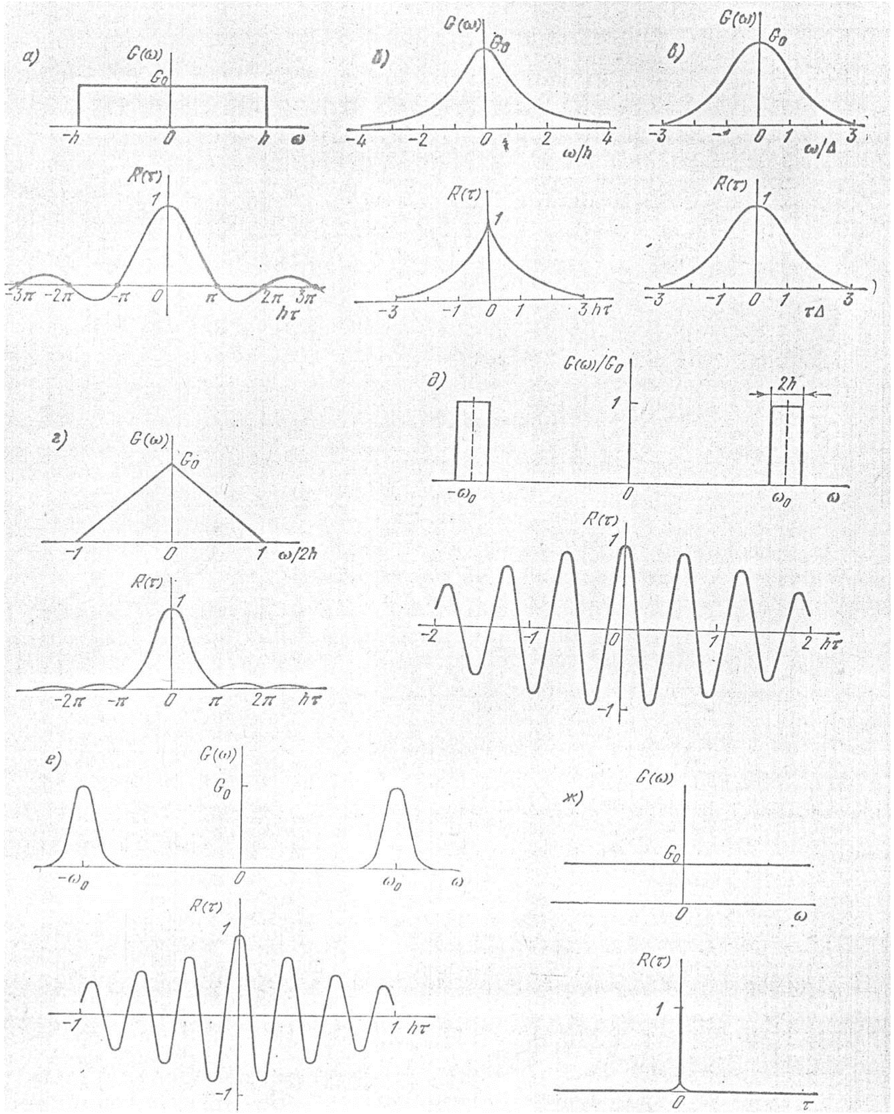
Muňa göz ýetirmek kyn däldir, (17) we (18) ulanmaly. Erkin spektr bolan umumy halatda, korelläsiýa wagty şeýle kesgitläp

$$\tau_k^{''} = 2\int_0^{\infty} R^2(\tau)d\tau, \qquad (1.3.27)$$

şuny hem alarys $\Delta\omega^{''}\tau_k^{''} = 2\pi$. (1.3.28)

Spektrleriň we korelläsion funksiýalaryň mysallary.

Köp duş gelýän spektrleriň approksimasiýalaryna we olara degişli bolan korelläsion funksiýalara seredeliň (sur.1.4),



Sur.1.4. Köp duş gelýän käbir $G(\omega)$ dykyzlyklar we olara degişli $R(\tau)$ korelläsiýa koeffisientleri.

1) Göniburçly pes ýygylykly spektri (sur. 1.4.a):

funksiýanyň hakyky we hyýaly bölekleriniň Furýe özgertmesinden soň netijesidir.

Radiofizikada we optikada köplenç ulanylýan kompleks tötän prosess – bu kwazigarmoniki yrgyldylarynyň ýa-da tolkunlarynyň kompleks amplitudasydyr. Stasionar yrgyldy üçin bu halatda x we y korellirlenmedik, kompleks korelläsion funksiýa $\langle zz_\tau \rangle = 0$ we $\langle zz_\tau^* \rangle$ funksiýa yrgyldynyň özüniň $G^+(\omega)$ spektrinden aňladylýar ((2.3.19)-(2.3.-21) seret).

4. Statistiki ortalama we wagt boýunça ortalama.

Ergodiçnost. Wagtyň käbir $f(t)$ funksiýasynyň T interwal boýunça ortalamasynyň netijesine seredeliň. Eger ortalama çenli

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{i\omega t} d\omega, \qquad (1.4.1)$$

onda ortalanan funksiýany şeýle ýazyp bolar

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} e^{i\omega T/2} e^{i\omega t} d\omega \qquad (1.4.2)$$

(wagt boýunça ortalamany tolkun çyzyk bilen belläris).

(2)-den şu gelip çykýar: ortalamada spektriň ýokary ýygylykly bölegi has basylýar, bu f funksiýanyň otnositel çalt üýtgemeleri bilen baglanşyklydyr. Başgaça aýdanyňda, wagt boýunça ortalama $f(t)$-ny düzleýär.

Indi (1.1.11) görä aşakda ýazylan üç komponentalaryň summasy hökmünde alynan wagt boýunça ortalanýan stasionar tötän $x(t)$ funksiýany göz öňümize getireliň:

$$x(t) = \overline{x} + \xi_0 + \xi(t). \qquad (1.4.3)$$

biz bu amatly matematiki modeli giňden ulanarys ((47) ýatdan çykarman !).

4. $B(\tau)$ üçin ol ýa-da başga approksimasiýany saýlamyzda onuň furýe-şekiliniň ($G(\omega)$ spektriň) otrisatel bahalary almaly däldigini biz ýatdan çykarmaly däldiris. Şonuň üçin $B(\tau)$-ny, mysal üçin, göniburçlyk hökmünde getirip bolmaz

$$B(\tau)=\begin{cases}B_0, & |\tau|<\tau_0,\\ 0, & |\tau|>\tau_0.\end{cases}$$

$\exp\sum_{n=1}^{N}a_n\tau^n$ görnüşli funksiýalar hem, mysal üçin $e^{-a\tau^4}$, $B(\tau)$ approksimasiýalar üçin gabat gelmeýärler, diňe $B(\tau)=e^{-a\tau^2}$ üçin bolýar ((1.1.38) formulanyň derňelmegine seret).

(1.1.3) görnüşli kompleks tötän prosess üçin

$z(t)=x(t)+iy(t)$, (1.3.48)

hakyky prosessden tapawutlylykda, iki jübüt $\langle zz_\tau\rangle$ we $\langle zz_\tau^*\rangle$ korelläsion funksiýalary gurup bolýar.

Radiofizika we optika üçin şu funksiýalar uly ähmiýete eýedirler

$\psi(t,\tau)=\langle zz_t^*\rangle$, $B(t,\tau)=\langle zz_t^*\rangle-\overline{zz_t^*}$, (1.3.49)

we $\tau=0$ bolanda hakyky ortakwadratik bahalara getirýärler.

Kompleks prosessiň korelläsion funksiýasy umumy halatda kompleks bolýar:

$B(t,\tau)=|B(t,\tau)|\exp i\varphi(t,\tau)$. (1.3.50)

Kompleks korelläsion funksiýa üçin Winer-Hinçinyň teoremasy ýaly gatnaşyklar alynyp biliner we olar kompleks spektral tekizligi kesgitleýärler. Bu tekizligiň hakyky we hyýaly bölekleri korelläsion

$$G(\omega)=\begin{cases}G_0, |\omega|\le h,\\ 0, |\omega|>h,\end{cases}\qquad \sigma^2=2G_0h, \qquad (1.3.29)$$

$$R(\tau)=\frac{\sin h\tau}{h\tau}. \qquad (1.3.30)$$

2) Lorensiň spektri (sur. 1.4.b):

$$G(\omega)=\frac{G_0h^2}{h^2+\omega^2},\quad \sigma^2=\pi hG_0,\quad R(\tau)=e^{-h|\tau|}. \qquad (1.3.31)$$

3) Gaussyň spektri (sur. 1.4.w):

$$G(\omega)=G_0e^{-\omega^2/2\Delta^2},\qquad \sigma^2=G_0\Delta\sqrt{2\pi},\qquad R(\tau)=e^{-\tau^2\Delta^2/2}.$$
(1.3.32)

4) Üçburçly spektr (sur. 1.4.g):

$$G(\omega)=\begin{cases}G_0(1-|\omega|/2h), & |\omega|<2h,\\ 0, & |\omega|>2h,\end{cases}\quad \sigma^2=2G_0h, \qquad (1.3.33)$$

$$R(\tau)=\left(\frac{\sin h\tau}{h\tau}\right)^2. \qquad (1.3.34)$$

5) Zolakly goh göniburçly spektrli (sur. 1.4.d):

$$G(\omega)=\begin{cases}G_0, & \omega_0-h\le|\omega|\le\omega_0+h,\\ 0, & \omega_0-h>|\omega|>\omega_0+h,\end{cases}\quad \sigma^2=4G_0h, \qquad (1.3.35)$$

$$R(\tau)=\frac{\sin h\tau}{h\tau}\cos\omega_0\tau. \qquad (1.3.36)$$

6) Zolakly goh gauss spektrli (sur. 1.4.e):

$$G(\omega)=\frac{G_0}{1+\varepsilon}\left[e^{-(\omega-\omega_0)^2/4h^2}+e^{-(\omega+\omega_0)^2/4h^2}\right], \qquad (1.3.37)$$

$$G_0=G(\omega_0),\qquad \varepsilon=e^{-\omega_0^2/h^2},\qquad \sigma^2=\frac{4\sqrt{\pi}hG_0}{1+\varepsilon},$$

$$R(\tau) = e^{-h^2\tau^2} \cos\omega_0\tau. \qquad (1.3.38)$$

7) Garmoniki signal.

(36)-da ýa-da (38)-de h spektriň giňligini nola ymtyldyryp ($h \to 0$), biz şu korelläsiýa koeffisientli tötän signalyň modeline gelýäris

$$R(\tau) = \cos\omega_0\tau. \qquad (1.3.39)$$

Munuň ýaly funksiýa şu spektr degişlidir

$$G(\omega) = G_0\delta(\omega - \omega_0), \qquad (1.3.40)$$

prosessiň özi bolsa garmoniki funksiýa bilen häsiýetlendirilýär

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.3.41)$$

hemişelik (we tötän däl) a amplitudaly we tötän paýlanan fazaly $\varphi : \omega(\varphi) = 1/2\pi$. Bu prosessiň düýbünden gauss prosessi däldigini belläp geçmeli.

8) "Ak" goh (ýylmanak spektr) (sur.1.4.j):

$$G(\omega) = G_o \qquad (-\infty < \omega < \infty), \qquad (1.3.42)$$

$$B(\tau) = 2\pi G_0\delta(\tau), \qquad \sigma^2 = \infty, \qquad R(\tau) = 1 \quad (\tau = 0), \; 0(\tau \neq 0)$$

(1.3.43)

Getirilen mysallar amallarda iň köp duş gelýän tötän prosesslere degişlidirler. Mysallaryň grafiki şekillendirmesi bar bolansoň, olara gysgaça düşündiriş bilen çäkleneliň.

1.Gauss spektri şu häsiýete eýedir (sur. 1.4.w): onuň korelläsion funksiýasynada gaussyň egrisi diýilýär.

2."Zolakly" gohyň korelläsion funksiýasy, onuň spektri käbir ω_0 ýygylygyň golaýynda saklanyp, bu funksiýa ω_0 tötän prosessiň orta ýygylygy bilen ossilirleýär.

"Zolakly" gohyň bu häsiýeti spektriň konkret formasynyň saýlanmagynyň netijesi däldir. Erkin zolakly spektrli ("orta" ω_0 ýygylyga görä simmetrik bolmagy hökman däl) halatda hem şu deňligiň ýerine ýetýändigine göz ýetirmek kyn däldir

$$R(\tau) = r(\tau)\cos\omega_0\tau + s(\tau)\sin\omega_0\tau\,. \qquad (1.3.44)$$

Hakykatdanam, şuny göz öňüne tutup

$G(\omega) = g(\omega - \omega_0)$,

korelläsiýa koeffisienti üçin şuny ýazyp bolar

$$R(\tau) = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^\infty g(\omega - \omega_0)\cos\omega\tau\, d\omega = \frac{2}{\sigma^2}\int_0^\infty g(v)\cos(v + \omega_0)\tau\, dv.$$

(1.3.45)

(45)-den gönümel (44) gelip çykýar, nirede

$$r(\tau) = \frac{2}{\sigma^2}\int_{-\omega_0}^\infty g(v)\cos v\tau\, dv, \qquad (\tau) = \frac{2}{\sigma^2}\int_{-\omega_0}^\infty g(v)\sin v\tau\, dv.$$

(1.3.46)

(46)-dan görnüşi ýaly ((36),(38)-den ýaly), eger-de gohyň spektriniň otnositel zolagy kiçi bolsa ($h/\omega_0 \le 1$ - dar zolakly prosess), onda $r(\tau)$ we $s(\tau)$ funksiýalar (44)-de $\cos\omega_0 t$ we $\sin\omega_0 t$ görä haýaldan üýtgeýärler. Umumy (44) formula (36), (38) bilen $g(v) = g(-v), s(\tau) = 0$ üçin sazlaşýar.

3. $G(\omega_0) = G_0 = const$ bolan prosessi (sur.1.4.j) "ak" goh diýip atlandyrýarlar. Bu adyň logiki tarapdan gapma-garşy bolsa-da ("ak" ýagtylyk, bilşimiz ýaly, ýylmanak spektre eýe däldir), hem şonuň ýaly prosess fiziki amala aşyrylyp bolmaýan bolsa-da, sebäbi onuň üçin

$$\left\langle \xi^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^\infty G(\omega)d\omega \to \infty, \qquad (1.3.47)$$