TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

B.N.Gaýybow, D.Nurmämmedow, M.Almazow,
M.Handöwletow, G.O.Meredow

GEODEZIKI MAGLUMATLARY TÄZEDEN IŞLEMEK

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Aşgabat – 2010

B.N.Gaýybow, D.Nurmämmedow, M.Almazow, M.Handöwletow, G.O.Meredow, Geodeziki maglumatlary täzeden işlemek.

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby, Aşgabat – 2010 ý.

Giriş.

Ölçemeler geodeziki işleriň wajyp düzüm bölegidir. Ölçemeler arkaly öwrenilýän dürli obýektler barada mukdar maglumatlar alynýar. Geodeziýa bilen meşgullanýan hünärmenler çyzyklaryň uzunlyklaryny, gorizontal we wertikal burçlary, ýer üstüniň belli bir meýdançasynyň nokatlarynyň arasyndaky tapawudy, howanyň temperaturasyny, erkin gaçmanyň tizlenmesini, wagt interwallaryny we baçga-da birnäçe zatlary öwrenmeli bolýarlar. Ölçemeleriň netijelerinden ýa göni peýdalanmak bolar ýa-da obýektiň düýbünden ölçäp bolmaýan ýa-da ölçemeler örän köp wagtyň we serişdeleriň sarp edilmegine getirýän häsiýetlendirijilerini hasaplamak üçin aralyk ululyklar hökmünde peýdalanmak bolar.

Ölçemeleri ýerine ýetirmegiň usulyýeti ölçemeleriň her bir görnüşi üçin aýratyn işlenip taýýarlanylýar we prosese az zähmet sarp etmeklik bilen zerur bolan takyklygy almaklygy maksat edinýär.

Ölçemeleri gaýtadan işlemek nazaryýeti nukdaý nazaryndan hemme ölçemeleri zerur we artykmaç böleklere bölmeli. Eger näbelli ululyklaryň sany *k*, ölçemeleriň sany *n* bolsa, onda *k* sany ölçemeler zerurdyrlar, *n*-*k* sany ölçemeler bolsa artykmaçdyrlar. Hemme ölçemeler ýalňyşlyklar bilen baglanyşyklydyrlar. Şol sebäpli, ölçemeleri gaýtadan işlemekligiň esasy meselesi ýalňyşlyklary saklaýan ölçemeleriň netijeleriniň we ölçenýän ululyklaryň san bahalaryny özünde saklaýan matematiki modelleriň aralaryndaky garşylyklary aýyrmakdan ybarat bolup durýar. Artykmaç ölçemeleriň bolandyklary üçin bu meseläniň çözüwi birbahaly däldir. Şol sebäpli, ýeke-täk çözüwi almak üçin bu meselä bir ýa-da birnäçe goşmaça şertler goýulýar.

Geodeziki ölçemeler kartalary we meýilnamalary döretmeklikde amala aşyrylýan işleriň esasy bölegi bolmak bilen berk matematiki usullaryň kömegi bilen gaýtadan işlenilýärler.

Geodeziki ölçemeleri matematiki taýdan gaýtadan işlemek nazaryýeti özüniň gözbaşyny ähtimallyklar nazaryýetinden alyp gaýdýar.

Tejribäniň esasy şertleri saklananda netijäniň kesgitsiz bolmagy örän köp hadysalarda ýüze çykýar. Şol bir şertlerde, şol bir abzal bilen, şol bir jisimi ölçemeleriň netijeleri dürlidirler. Her biriniň aýratynlykda tejribäniň netijesine täsiri bolmadyk örän köp sany tötän sebäpleriň täsiri tejribäniň netijesiniň birbahaly kesgitlenmezligine getirýär. Şol sebäpli, ähtimallyklar nazaryýetiniň düşünjelerini we usullaryny bilmek diňe bir matematiklere däl-de, eýsem amalyýet bilen meşgullanýan hünärmenlere-de zerurdyr. Şunlukda, durmuş talaplary bilen ýüze çykýan meseleler çözülende şeýle meseleleriň ähtimallyk modelleriniň dogry saýlanyp alynmagynyň uly ähmiýeti bardyr. Bu model bir tarapdan derňelýän hadysanyň esasy häsiýetlerini şöhlelendirmelidir, beýleki tarapdan bolsa, derňemeklik üçin amatly bolmalydyr.

Ähtimallyklar nazaryýetini we onuň usullaryny bilmän meseläniň modellerini düzmek we saýlamak hem-de oňa baha bermek asla mümkin däldir.

I. Ahtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleri

I.1. Ahtimallyk giňişligi.

I.1.1. Elementar wakalar giňişligi.

Ahtimallyklar nazaryýetiniň esasy düşünjeleriniň biri waka düşünjesidir. Waka kesgitlenmedik düşünjedir. Wakalara matematiki usullary ulanmak maksady bilen elementar wakalar giňişligi diýlip atlandyrylýan erkin $\Omega = \{w\}$ köplüge garaýarlar we bu köplügiň islendik bölek köplügini waka diýip atlandyrýarlar. Ω köplügiň w elementlerine elementar wakalar diýilýär.

Wakalary üç topara bölýärler:

1) Hökmany wakalar.
2) Mümkin däl wakalar.
3) Tötän wakalar.

Islendik wakanyň ýüze çykmagy üçin käbir şertler toplumynyň bolmagy zerurdyr. Käbir şertler toplumynda hökman ýüze çykýan wakalara **hökmany wakalar**, ýüze çykmajakdygy öňden belli bolan wakalara **mümkin däl wakalar**, ýüze çykmaklygy hem, çykmazlygy hem mümkin bolan wakalara **tötän wakalar** diýilýär. Hökmany wakalary Ω ýa-da U bilen, mümkin däl wakalary $Ø$ ýa-da V bilen, tötän wakalary bolsa latyn elipbiýiniň *A, B, C, D,...* baş harplary bilen belgileýärler.

“A wakanyň ýüze çykmagy B wakanyň ýüze çykmagyna getirýär” diýlen tassyklama $A \subseteq B$ görnüşde ýazylýar. Eger $A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ aňlatmalar şol bir wagtda ýerine ýetýän bolsalar, onda A we B wakalara deňgüýçli diýilýär we $A=B$ görnüşde belgilenýär.

Bir wakanyň ýüze çykmagy beýleki wakanyň ýüze çykmaklyk mümkinçiligini ýok edýän bolsa, onda şeýle wakalara **sygyşmaýan wakalar** diýilýär. A wakanyň ýüze çykmaýan wagty we diňe şonda ýüze çykýan waka A wakanyň **garşylykly wakasy** diýilýär we $\overline{A}$ bilen belgilenýär (okalyşy: A däl).

A we B iki wakanyň jemi ýa-da birleşmesi diýlip, bu wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyna aýdylýar we $A+B$ ýa-da $A \cup B$ bilen belgilenýär.

A we B iki wakanyň köpeltmek hasyly ýa-da kesişmesi diýlip, bu wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyna aýdylýar we AB ýa-da $A \cap B$ bilen belgilenýär. A we B wakalaryň tapawudy diýlip, B wakanyň ýüze çykman A wakanyň ýüze çykmagyna aýdylýar we $A \setminus B$ bilen belgilenýär. $A \setminus B$ waka bilen $B \setminus A$ wakanyň jemine A we B wakalaryň simmetrik tapawudy diýilýär we $A \Delta B$ bilen belgilenýär.

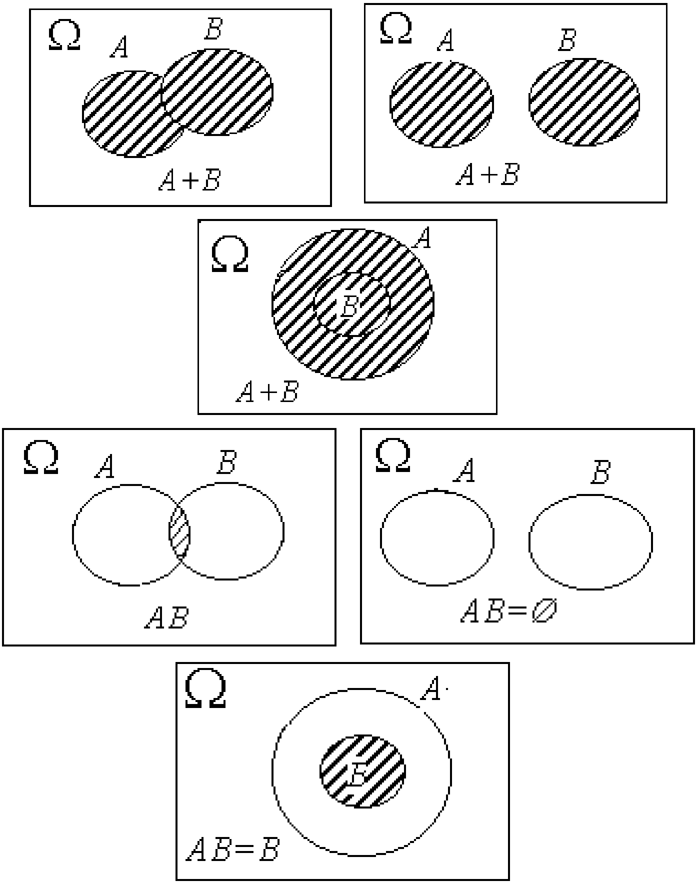
Sygyşmaýan *A* we *B* wakalar üçin $AB = \varnothing$ deňgüýçlilik adalatlydyr. *A* we $\overline{A}$ garşylykly wakalar üçin şol bir wagtda

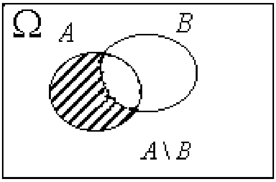
$$A + \overline{A} = \Omega$$

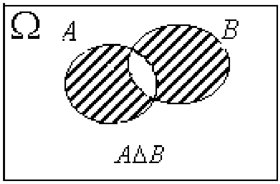
$$A\overline{A} = \varnothing$$

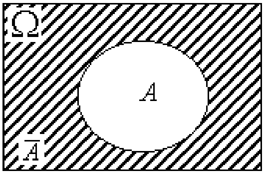
deňgüýçlilikler adalatlydyrlar.

Wakalar üstünde amallary Wýenniň diagrammalarynda görkezeliň.









I.1.2. Wakalaryň algebrasy we sigma algebrasy.

$\Omega = \{w\}$ elementar wakalar giňişliginiň bölek köplükleriniň käbir ulgamyny *F* bilen belgiläliň. Eger F ulgam üçin

1) $\Omega \in F$.
2) $A \in F$ we $B \in F$ wakalar üçin $A + B \in F$, $AB \in F$.
3) $A \in F$ waka üçin $\overline{A} \in F$.

şertler ýerine ýetýän bolsalar, onda *F* ulgama wakalaryň algebrasy diýilýär.

Eger *F* algebra üçin

$A_n \in F$, *n=1,2,...* degişlilikden $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ we $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

degişlilikler gelip çykýan bolsalar, onda *F* ulgama wakalaryň sigma algebrasy diýilýär.

I.1.3. Ähtimallyk.

Eger *P(A)* san funksiýasy

1) Islendik $A \in F$ waka üçin $P(A) \ge 0$. (otrisatel dällik aksiomasy)
2) $P(\Omega) = 1$ (normirlenenlik aksiomasy)
3) Sygyşmaýan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ wakalar üçin

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$ (hasaply additiwlik aksiomasy)

şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda oňa **ähtimallyk** diýilýär.

Ähtimallyk aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
2) Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda $P(B) \le P(A)$.
3) Garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň jemi bire deňdir: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
4) Mümkin däl wakanyň ähtimallygy nula deňdir: $P(\varnothing)=0$.
5) Islendik A waka üçin $0 \le P(A) \le 1$ deňsizlikler adalatlydyrlar.

(Ω, F, P) üçlüge ähtimallyk giňişligi diýilýär.

I.1.4. Ahtimallygyň klassyky kesgitlemesi we otnositel ýygylyk.

Hususy halda, Ω elementar wakalar giňişligi tükenikli bolanda we w elementar wakalar deňähtimallykly bolanlarynda islendik A wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

gatnaşyk bilen hasaplanýar, bu ýerde n- synag geçirilende ýüze çykyp biljek ähli elementar wakalaryň sany, m- A wakanyň ýüze çykmagyna getirýän (ýardam berýän) elementar wakalaryň sany. (1) gatnaşyga ähtimalygyň **klassyky kesgitlemesi** diýilýär.

Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi birnäçe talaplary kanagatlandyrmaly.

1) Ähli ýüze çykyp biljek elementar wakalaryň sany tükenikli bolmaly.
2) Wakalar elementar wakalara böleklenmeli.
3) Elementar wakalar deňähtimallykly bolmaly.

Emma amalyýetde şeýle ýagdaýlar seýrek duş gelýär. Şol sebäpli ähtimallygyň beýleki kesgitlemelerine hem garaýarlar.

Goý, N synag geçirilýän bolsun. Bu synaglaryň $N(A)$ sanysynda A waka ýüze çykýan bolsun.

$$W(A)=\frac{N(A)}{N} \qquad (2)$$

gatnaşyga A wakanyň **otnositel ýygylygy** diýilýär. Bu otnositel ýygylyk hem ähtimallygyň **statistiki** kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär.

Şu ýerde kombinatoriki derňewiň ähtimallyklar nazaryýetinde giňden ulanylýan esasy düşünjelerini getireliň.

Kesgitleme. 1-den n-e çenli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna n-faktorial diýilýär we $n!$ bilen belgilenýär.

Mysal üçin, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

Islendik natural n san üçin

$$n!=(n-1)!\cdot n$$

deňlik adalatlydyr. Mysal üçin,

$$5!=4!\cdot 5=3!\cdot 4\cdot 5=2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5=1!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

deňlikler adalatlydyrlar.

Bellik. $1!=1, \quad 0!=1$ diýlip kabul edilýär.

Goý, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementler berlen bolsun. Bu elementleriň islendik tertipde ýazylan yzygiderligine bu elementlerden düzülen **çalşyrma** diýilýär. Mysal üçin, a_1 we a_2 elementlerden a_1, a_2 we a_2, a_1, $2!=1\cdot 2=2$ sany çalşyrma düzmek bolar. a_1, a_2 we a_3 elementlerden a_1, a_2, a_3; a_1, a_3, a_2; a_2, a_1, a_3; a_2, a_3, a_1; a_3, a_1, a_2; a_3, a_2, a_1, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ sany çalşyrma düzmek bolar. Bu hasaplamany dowam edip, n elementden $n!$ sany çalşyrma düzmek boljakdygyna göz ýetirmek bolar.

Kesgitleme. n elementli köplügiň k elementli erkin bölek köplügine n elementden k elementli **utgaşdyrma** diýilýär.

Şeýle utgaşdyrmalaryň sany

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

ululyga deňdir. Mysal üçin, 10 elementden 2 elementli utgaşdyrmalaryň sany

$$C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!\cdot(10-2)!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 8!}=45$$

bolar.

Kesgitleme. Her bir elementine *1*-den *n*-e çenli käbir san (elementiň nomeri) degişli edilen *n* elementli köplüge **tertipleşdirilen** diýilýär.

Kesgitleme. *n* elementli köplügiň tertipleşdirilen *k* elementli bölek köplügine *n* elementden *k* elementli **ýerleşdirme** diýilýär.

Şeýle ýerleşdirmeleriň sany

$$A_{n}^{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ululyga deňdir.
Mysal üçin, 10 elementden 2 elementli ýerleşdirmeleriň sany

$$A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=90$$

bolar. Yerleşdirmeleriň we utgaşdyrmalaryň sanlarynyň arasynda

$$A_{n}^{k}=k!\cdot C_{n}^{k}$$

görnüşli baglanyşyk bardyr.

Bellik. Utgaşdyrmalarda elementleriň ýerleşiş tertibiniň ähmiýeti ýokdur, ýerleşdirmelerde bolsa, ähmiýeti bardyr.

1-nji mesele. Gutyda her birinde G, A, A, R, Ş, S, Y, Y, Z, L, K harplaryň biri ýazylan 11 tagtajyk bar. Bu tagtajyklar gapdan ýeke-ýekeden tötän çykarylyp, çepden saga yzygider goýulýar. “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagyňyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, *A* waka “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagy bolsun. Tagtajyklaryň hemmesi gapdan ýeke-ýekeden tötän çykarylyp, çepden saga yzygider goýulsa, bolup biljek ähli elementar wakalaryň sany bu 11 harpdan düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sanyna deňdir, ýagny, $n=11!$ “GARAŞSYZLYK” sözünde iki sany *A* harpy we iki sany Y harpy bolandygy sebäpli, *A* wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän ähli elementar wakalarýn sany $m = 2!\cdot 2!$ bolar. Şeýlelikde, “GARAŞSYZLYK” sözüniň ýazylmagynyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{11!}$$

bolar.

2-nji mesele. Tekjede dürli 20 kitap bar. Olaryň onusynyň her biriniň bahasy 60 manat, dördüsiniň her biriniň bahasy 50 manat, altysynyň her biriniň bahasy 40 manat. Tötän alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, A- tötän alnan iki kitabyň bahasynyň 100 manat bolmagy bolsun. 20 kitapdan 2 kitaby

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2} = 190$$

usul boýunça saýlap almak bolar. Ikisiniň bahasy 100 manat bolan 2 kitaby

$$m = C_{10}^{1}\cdot C_{6}^{1} + C_{4}^{2} = \frac{10!}{1!\cdot 9!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 60 + 6 = 66$$

usul boýunça saýlap almak bolar.
Onda

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}$$

3-nji mesele. Eger 200 önümden ybarat toplumda zaýa önümleriň otnositel ýygylygy 0,33 bolsa, bu toplumdaky zaýa önümleriň sanyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, *A*-zaýa önümler bolsun. *N=200, W(A)=0,33* bolandygy sebäpli, zaýa önümleriň sany $N(A) = N\cdot W(A) = 200\cdot 0{,}33 = 66$ bolar.

I.1.5. Şertli ähtimallyk.

Goý, $P(A) > 0$ bolsun.

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (3)$$

gatnaşyga B wakanyň A waka ýüze çykan şertdäki **şertli ähtimallygy** diýilýär. (3) deňlikden taparys

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \qquad (4)$$

Şuňa meňzeşlikde ýazyp bileris

$$P(BA) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (5)$$

$AB=BA$ bolandygy sebäpli, (4) we (5) deňliklerden alarys

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (6)$$

(6) deňlige ähtimallyklary **köpeltmegiň teoremasy** diýilýär.

Goý, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalar berlen bolsun. Onda

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) \qquad (7)$$

deňlik adalatlydyr. Bu deňligi (6) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp subut etmek bolar. (7) deňlige ähtimallyklary **köpeltmegiň umumylaşdyrylan teoremasy** diýilýär.

"A waka B waka bagly däl" diýlen tassyklama

$$P(A/B) = P(A) \qquad (8)$$

görnüşde ýazylýar. A wakanyň B waka bagly däldiginden B wakanyň hem A waka bagly däldigi gelip çykýar. Hakykatdan hem, goý, (8) deňlik adalatly bolsun. (6) deňlikden taparys

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B).$$

Bagly däl A we B wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasy

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (9)$$

görnüşe geler. (9) deňlik iki wakanyň bagly dälliginiň kesgitlemesi hökmünde kabul edilýär. Wakalaryň (9) deňlik bilen kesgitlenýän jübüt-jübütden bagly dällik düşünjesinden başga-da wakalaryň toplumlaýyn bagly dällik düşünjesi hem bardyr.

Kesgitleme. Eger $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalaryň islendigi bilen beýlekileriniň islendik kombinasiýasy bagly däl bolsalar, onda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalara toplumlaýyn bagly däl diýilýär.

Mysal üçin, A_1, A_2, A_3 wakalaryň toplumlaýyn bagly däl bolmaklary üçin A_1 we A_2, A_1 we A_3, A_2 we A_3, A_1 we A_2A_3, A_2 we A_1A_3, A_3 we A_1A_2, wakalaryň bagly däl bolmaklygy gerekdir.

Toplumlaýyn bagly däl $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasynyň umumylaşdyrmasy

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (10)$$

görnüşdedir.

Ahtimallygyň kesgitlemesindäki 3-nji aksiomadan sygyşmaýan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wakalar üçin

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

deňligiň adalatlydygy gelip çykýar. Bu deňlige sygyşmaýan wakalaryň tükenikli jemi üçin **ähtimallyklary goşmagyň teoremasy** diýilýär.

Teorema. Erkin *A* we *B* wakalar üçin

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (11)$$

deňlik adalatlydyr.

Subudy.

A we *B* wakalaryň jemini sygyşmaýan $A\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$ wakalaryň jemi görnüşinde äňlatmak bolar

$$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

Bu ýerden taparys

$$P(A+B) = P(A\overline{B} + AB + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) \qquad (12)$$

$$A = A\overline{B} + AB$$

bolandygy sebäpli ýazyp bileris

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB)$$

Bu ýerden

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) \qquad (13)$$

Edil şuňa meňzeşlike taparys

$$B = \overline{A}B + AB \qquad P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) \qquad (14)$$

(13) we (14) aňlatmalary (12) deňlikde ornuna goýup, (11) deňligiň adalatlydygyna göz ýetirmek bolar.

Teorema subut edildi.

(11) deňlige ähtimallyklary **goşmagyň teoremasy** diýilýär.

1-nji mesele. Kärhananyň öndürýän önümleriniň 98% -i standart önümler. Şünlukda standart önümleriň 85% -i ýokary hilli. Bu kärhanada öndürilen tötän alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, *A*-tötän alnan önümiň standart bolmagy bolsun. B-tötän alnan standart önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{98}{100} \cdot \frac{85}{100} = 0{,}833$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjy üç gezek nyşana atýar. Nyşananyň üç gezek urulmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, *A*-atyjynyň birinji gezekde nyşanany urmagy, *B*-ikinji gezekde nyşanany urmagy, *C*- üçünji gezekde nyşanany urmagy bolsun. *A, B, C*, wakalar bagly däl. Onda bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}512$$

3-nji mesele. Ulgamyň näsaz işleýändigini habar bermek üçin biri-birine bagly bolman işleýän iki duýduryjy goýlan. Ulgamyň näsaz işleýändigini birinji duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygy 0,99-a deň. Ikinji duýduryjy üçin bu ähtimallyk 0,98-e deň. Ulgamyň näsaz işleýändigini diňe bir duýduryjynyň habar bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Wakalary girizeliň.

A_1 -birinji duýduryjynyň habar bermegi.

A_2 -ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

B_1 -diňe birinji duýduryjynyň habar bermegi.

B_2 -diňe ikinji duýduryjynyň habar bermegi.

Sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmagyň teoremasyndan we bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P((B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) = 0{,}99\cdot 0{,}02 + 0{,}01\cdot 0{,}98 = 0{,}0296$$

I.1.6. Doly ähtimallygyň we Baýesiň teoremalary.

Goý, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wakalaryň toplumy berlen bolsun.

Eger $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$ bolsa, onda $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wakalar doly topary emele getirýär diýilýär.

Teorema. Goý, A waka sygyşmaýan wakalaryň doly toparyny emele getirýän sygyşmaýan $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wakalaryň biri we diňe biri bilen bilelikde ýüze çykyp bilýän bolsun. Onda

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P(A/B_k) \qquad (15)$$

formula adalatlydyr.

Subudy.

Ýazyp bileris

$$A=A\Omega=A(B_1+B_2+\ldots+B_n)=AB_1+AB_2+\ldots+AB_n$$

$AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$ wakalar sygyşmaýan wakalardyrlar. Onda ilki sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmagyň teoremasyndan, soňra bagly wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasyndan peýdalanyp taparys

$$P(A)=P(AB_1+AB_2+\ldots+AB_n)=P(AB_1)+P(AB_2)+\ldots+P(AB_n)=$$

$$=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+\ldots+P(B_k)\cdot P(A/B_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P(A/B_k)$$

Teorema subut edildi.

(15) deňlige **doly ähtimallygyň formulasy** diýilýär.

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ wakalary çaklamalar diýip atlandyrýarlar.

Teorema. Doly ähtimallyk baradaky teoremanyň şertlerinde

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \quad i=\overline{1,n} \qquad (16)$$

formula adalatlydyr.

Subudy.

Ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasyndan peýdalanyp, ýazyp bileris

$$P(AB_i)=P(A)\cdot P(B_i/A)=P(B_i)\cdot P(A/B_i)$$

Bu deňlikleriň soňkysyndan taparys

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$

Teorema subut edildi.

(16) deňlige **Baýes formulasy** diýilýär. Baýes formulasyndaky *P(A)* ähtimallyk doly ähtimallygyň

formulasyndan peýdalanyp hasaplanýar. Doly ähtimallygyň formulasy ulanylanda çaklamalarýň synaga çenli, Baýes formulasy boýunça bolsa, çaklamalarýň synagdan soňky ähtimallyklary tapylýar.

1-nji mesele. Toplumda birinji zawodyň 28 önümi, ikinji zawodyň 22 önümi bar. Birinji zawodyň önüminiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,95-e deň, ikinji zawodyň önümi üçin bu ähtimallyk 0,9-a deň. Bu toplumdan tötän alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

Goý, A-toplumdan tötän alnan önümiň ýokary hilli bolmagy bolsun. Çaklamalary girizeliň.

B_1-tötän alnan onümiň birinji zawoda degişli bolmagy;

B_2-tötän alnan onümiň ikinji zawoda degişli bolmagy;

Bu çaklamalaryň ähtimallyklaryny tapalyň

$$P(B_1)=\frac{28}{50}=0{,}56,\qquad P(B_2)=\frac{22}{50}=0{,}44.$$

Meseläniň şerti boýunça

$$P(A/B_1)=0{,}95,\quad P(A/B_2)=0{,}9$$

Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=0{,}56\cdot 0{,}95+0{,}44\cdot 0{,}9=0{,}928.$$

2-nji mesele. Şol bir agramda çykyş edýän ştangaçylaryň ýedisi sport ussady, üçüsi bolsa at gazanan sport ussady. At gazanan sport ussadynyň berlen agramdaky ştangany götermeginiň ähtimallygy 0,8-e deň, sport ussady üçin bolsa, bu ähtimallyk 0,6-a deň. Tötän çagyrylan türgen berlen agramdaky ştangany göterdi. Onuň sport ussady bolmagy has ähtimalmy ýa-da at gazanan sport ussady?

Çözülişi.

Goý, A-tötän çagyrylan türgeniň berlen agramdaky ştangany götermegi bolsun. Çaklamalary girizeliň: B_1-tötän çagyrylan türgeniň sport ussady bolmagy, B_2-tötän çagyrylan türgeniň at gazanan sport ussady bolmagy. Doly ähtimallygyň formulasyndan peýdalanyp taparys

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) = 0{,}7\cdot 0{,}6 + 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}66.$$

Baýes formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallyklary taparys

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}6}{0{,}66} \approx 0{,}64$$

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}8}{0{,}66} \approx 0{,}36$$

Görnüşi ýaly, berlen agramdaky ştangany götereniň sport ussady bolmagy has ähtimaldyr. Bu ýagdaýy sport ussatlarynyň sanynyň at gazanan sport ussatlarynyň sanyndan köpdügi bilen düşündirmek bolar.

I.2. Bagly däl synaglar yzygyderligi.

I.2.1. Bernulli formulasy.

Goý, n synag geçirilen bolsun. Eger bu synaglaryň her birinde A wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy beýleki synaglaryň netijelerine bagly bolmasa, onda şeýle synaglara A waka görä **bagly däl** synaglar diýilýär.

Goý, A waka bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik p $(0 \le p \le 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan bolsun. Onda bu synaglarda A wakanyň ýüze çykmazlygynyň ähtimallygy $q = 1 - p$ bolar. Bagly däl n synagda A wakanyň k $(0 \le k \le n)$ gezek ýüze çykýan ýagdaýlarynyň sany C_n^k bolar. A wakanyň bu ýagdaýlaryň her birinde k gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygy, bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasy boýunça

$$p^k q^{n-k}$$

bolar. Diýmek, bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmagyň teoremasyna görä

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (17)$$

formula boýunça hasaplanar. Bu formula **Bernulli formulasy** diýilýär.

I.2.2. Muawr-Laplasyň lokal we integral predel teoremalary.

Bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy Bernulli formulasy boýunça hasaplananda, synaglaryň sany artdygyça hasaplaýyş nukdaý nazaryndan kynçylyklar döreýär. Bu ýagdaýda $P_n(k)$ ähtimallygy hasaplamak üçin gowy netijeleri berýän formulany tapmaklyk meselesi bilen köp alymlar meşgullanýarlar. $P = P(A) = \frac{1}{2}$ bolan hususy halda, şeýle formulany 1730-njy ýylda iňlis matematigi Abraham de Muawr (26.05.1667-27.11.1754) hödürleýär. Muawryň bu formulasyny 1783-nji ýylda fransuz matematigi Pýer Simon Laplas (23.03.1749-05.03.1827) $0 < p < 1$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan islendik $p = P(A)$ ähtimallyk üçin umumylaşdyrýar. Matematikanýň taryhynda Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasy ady bilen belli bolan tassyklamanyň subudynyň ýeterlik çylşyrymlydygy sebäpli, ol teoremanyň tassylamasyny getirmek bilen çäkleneliň.

Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasy

Bagly däl n synagyň her birinde şol bir hemişelik p $(0 < p < 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy takmynan

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiýanyň

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

nokatdaky bahasyna deňdir, ýagny,

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (18)$$

bu ýerde $q = 1 - p$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiýanyň tabulirlenen bahalary Goşmaça 1-de getirilendir. Bu funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) $\varphi(x)$ jübüt funksiýadyr, ýagny $\varphi(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli -*x* we *x* bahalar üçin $\varphi(-x) = \varphi(x)$ deňlik adalatlydyr.
2) *x* üýtgeýän ululygyň islendik bahasynda $\varphi(x)$ funksiýanyň bahasy položiteldir.
3) $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$

predel gatnaşyk adalatlydyr.

Bagly däl *n* synagda *A* wakanyň k_1-den az bolmadyk gezek, k_2-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k_1;k_2)$ ähtimallygyny hasaplamak üçin Muawr--Laplasyň integral formulasy amatlydyr.

Muawr-Laplasyň integral predel teoremasy.

Bagly däl *n* synagyň her birinde şol bir hemişelik $p(0 < p < 1)$ ähtimallyk bilen ýüze çykýan *A* wakanyň bu synaglarda k_1-den az bolmadyk gezek, k_2-den bolsa, köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k_1;k_2)$ ähtimallygy takmynan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

kesgitli integrala deňdir, ýagny,

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (19)$$

bu ýerde

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$ -Laplas funksiýasy.

$\Phi(x)$ Laplas funksiýasynyň tabulirlenen bahalary Goşmaça 2-de getirilendir.

$\Phi(x)$ täk funksiýadyr, ýagny, bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli $-x$ we x bahalar üçin $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ deňlik adalatlydyr. x üýtgeýän ululygyň $x \geq 5$ deňsizligi kanagatlandyrýan bahalary üçin $\Phi(x)$ funksiýanyň bahasyny 0,5-e deň diýip kabul etmek bolar.

I.2.3. Puassonyň teoremasy.

Bagly däl n synagda A wakanyň k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygy Muawr-Laplasyň lokal formulasy boýunça hasaplananda, $P = P(A)$ ähtimallyk nula ýa-da bire golaý boldugyça gowy ýakynlaşmalary almaklyk kynlaşýar. Şol sebäpli, synaglaryň sany uly bolanda, bu synaglaryň her birinde örän kiçi P ähtimallyk bilen ýüze çykýan A wakanyň bu synaglarda k gezek ýüze çykmagynyň $P_n(k)$ ähtimallygyny hasaplamak üçin asimptotik formulany tapmaklyk meselesi ýüze çykýar.

Elementar wakalaryň tapgyrlarynyň yzygiderligine garalyň:

$$\begin{array}{l} w_{11}, \\ w_{21}, w_{22}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ w_{n1}, w_{n2}, w_{n3}, \ldots, w_{nn} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

Şunlukda, her bir tapgyryň wakalary özara bagly däl we tapgyryň nomerine bagly bolan P_n ähtimallyga eýe. n-nji tapgyrda ýüze çykýan wakalaryň sanyny μ_n bilen belgiläliň.

Puassonyň teoremasy. Eger $n \to \infty$ $P_n \to 0$ bolsa, onda $n \to \infty$

$$P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \to 0 \tag{20}$$

gatnaşyk adalatlydyr, bu ýerde $\lambda_n = nP_n$.

Subudy.

Bernulliniň formulasyndan peýdalanyp ýazyp bileris

$$P(\mu_n = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot P_n^k \cdot q_n^{n-k} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{21}$$

Goý, k fiksirlenen bolsun. Islendik $\varepsilon > 0$ san ucin $A = A(\varepsilon)$ san bar bolup, bu san ýeterlik uly saýlanyp alnanda, $\lambda_n \geq A$ bolan n nomerler üçin

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizlik ýerine ýetýandir. Ilki $\lambda_n \geq A$ bolan n nomerlere garalyň.

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$0 \leq x \leq 1$ densizlikleri kanagatlandyrýan x üýtgeýän ululyk üçin

$$1 - x \leq e^{-x}$$

deňsizlikden peýdalanalyň. Onda $n \geq 2k$ nomerler üçin ýazyp bileris

$$P(\mu_n = k) = \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n(n-k)}{n}} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (22)$$

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \leq \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda_n}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (23)$$

bolany sebäpli, (22) we (23) deňsizlikleri göz öňünde tutup, alarys

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Indi $\lambda_n < A$ bolan n nomerlere garalyň. Bu ýagdaýda

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n - e^{-\lambda_n} \right] = 0$$

we

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^k} = 1$$

bolandygy sebäpli, (21) deňlikden $n \geq n_0(\varepsilon)$ bolanda alarys

$$\left| P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \right| < \varepsilon$$

Diýmek, (20) gatnaşyk adalatlydyr. Teorema subut edildi.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (24)$$

formula **Puasson formulasy diýilýär** (Puasson Simeon Deni, 21.06.1781-25.04.1840 fransuz matematigi).

1-nji mesele. Sehde 5 motor bar. Berlen wagt pursatynda motoryň işleýändigininiň ähtimallygy 0,7-ä deň. Berlen wagtda 3 motoryň işleýändigininiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Meseläniň şertine görä *n=5, k=3, p=0,7, q=1-0,7=0,3*. Bernulli formulasyndan peýdalanyp, gözlenilýän ähtimallygy taparys

$$P_5(3) = C_5^3 0{,}7^3 0{,}3^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot 0{,}343 \cdot 0{,}09 = 0{,}3087 .$$

2-nji mesele. Atyjynyň bir gezek atanda nyşanany urmagynyň ähtimallygy 0,8-e deň. Atyjynyň 100 gezek atanda nyşanany 85 gezek urmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. *n=100, k=85, p=0,8.* Onda *q=1-0,8=0,2.*

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$\varphi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça 1) taparys

$$\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$$

Muawr-Laplasyň lokal predel teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{100}(85) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(1{,}25) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 = 0{,}04565$$

3-nji mesele. Bagly däl 100 synagyň her birinde *A* wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygy 0,75-e deň. Bu 100 synagda *A* wakanyň 70-den az bolmadyk we 80-den köp bolmadyk gezek ýüze çykmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

$n = 100, \quad k_1 = 70, \quad k_2 = 80, \quad p = 0{,}75.$ Onda

$q = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx \frac{-5}{4,33} \approx -1,15.,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx \frac{5}{4,33} \approx 1,15.$$

$\Phi(x)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça 2) taparys

$$\Phi(1,15) = 0,3749$$

$\Phi(x)$ funksiýanyň täkligini göz öňünde tutup we Muawr-Laplasyň integral teoremasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{100}(70;80) \approx \Phi(1,15) - \Phi(-1,15) =$$
$$2\Phi(1,15) = 2 \cdot 0,3749 = 0,7498$$

3-nji mesele. Kärhana bir günde 1000 önüm öndürýär. Önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,002-ä deň. Tötän alnan 3 önümiň pes hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

$n = 1000,\ k = 3,\ \ p = 0,002.$ Onda

$\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2, \quad e^{-2} \approx 0,135$.Puassonyň formulasyndan peýdalanyp, gözlenýän ähtimallygy taparys

$$P_{1000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx \frac{8}{6} \cdot 0,135 = 0,18\,.$$

I.3. Tötän ululyklar we olaryň paýlanyşlary.

I.3.1. Tötän ululyklar.

Kesgitleme. Ω elementar wakalar giňişligini R san okuna öwürýän hakyky $\xi(w)$ san funksiýasyna **tötän ululyk** diýilýär.

Tötän ululyklary latyn elipbiýiniň baş harplary bilen ýa-da grek elipbiýiniň setir harplary bilen belgileýärler. Tötän ululyklaryň kabul edýän bahalaryny bolsa, latyn elipbiýniň setir harplary bilen belgileýärler.

Tötän ululyklary üç topara bölýärler.

1) Diskret tötän ululyklar.
2) Üznüksiz tötän ululyklar.
3) Singulýar tötän ululyklar.

Ahtimallyklar nazarýetinde esasan diskret we üznüksiz tötän ululyklara garalýar. Eger tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň köplügi tükenikli ýa-da hasaply bolsa, onda oňa **diskret tötän ululyk** diýilýär. Eger tötän ululyk käbir aralykdan bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa **üznüksiz tötän ululyk** diýilýär. Nyşana ok atylanda nyşana degýän oklaryň sany, futbol oýny döwründe tora girizilýän pökgileriň sany, ýaragdan okuň düşen ýerine çenli aradaşlyk we şuňa meňzeşler tötän ululyklaryň mysallarydyrlar. Bu tötän ululyklaryň başky ikisi diskret, üçünjisi bolsa üznüksiz tötän ululykdyr.

Diskret tötän ululygyň berilmegi üçin onuň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary bilen bu bahalaryň degişli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklarynyň hem berilmegi zerurdyr. Diskret tötän ululygyň kabul edýän bahalary bilen bu bahalaryň degişli ähtimallyklarynyň sanawyna **diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny** diýilýär. Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanuny tablisa, grafik we formula (analitiki) arkaly berilýär. Tablisa arkaly ol

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

görnüşde berilýär. Bu tablisanyň ikinji setiriniň elementlerine ähtimallyklar hökmünde şeýle talaplary bildirýärler:

1) Islendik $k=\overline{1,n}$ üçin $p_k \geq 0$.

2) $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunyny grafik arkaly bermek üçin, tekizlikde gönübürçly dekart koordinatalar ulgamyny gurýarlar. Abssissalar okunda diskret tötän ululygyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalaryny, ordinatalar okunda bolsa, bu bahalaryň degişli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklaryny belleýärler. Soňra (x_i, p_i) $i=\overline{1,n}$ nokatlary gurýarlar we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirýärler. Emele gelen döwük çyzyk diskret tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň grafiki berlişidir.

I.3.2. Paýlanyş we dykyzlyk funksiýalary.

Belli bolşy ýaly, diskret tötän ululyk kabul edýän bahalary we olaryň degişli ähtimallyklary bilen berilýär. Emma üznüksiz tötän ululyklar üçün şeýle berlişi amala aşyryp bolmaýar. Şol sebäpli, öz tebigaty boýunça köpdürli tötän ululyklaryň ähtimallyklaryny şol bir usul bilen bermeklik üçin ähtimallyklar nazaryýetinde tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy düşünjesini girizýärler.

$$F(x) = P(\xi < x) \qquad (25)$$

funksiýa ξ tötän ululygyň **paýlanyş funksiýasy** diýilýär, bu ýerde x $\left(-\infty < x < \infty\right)$ üýtgeýän hakyky ululyk.

Geometrik nukdaý nazardan ξ tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy, ol tötän ululygyň $(-\infty; x)$ aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygydyr.

Paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) Paýlanyş funksiýasynyň bahalar ýaýlasy [0:1] kesimdir, ýagny,

$$0 \le F(x) \le 1$$

deňsizlikler adalatlydyrlar.

2) Paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny, paýlanyş funksiýasynyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli we $x_1 < x_2$ bolan islendik x_1 we x_2 bahalar üçin

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

deňsizlik adalatlydyr.

3) Paýlanyş funksiýasy çepden üznüksizdir, ýagny,

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

deňlik ýerine ýetýändir.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

predel gatnaşyklar adalatlydyrlar.

Bu häsiýetleri subut edeliň.

1) Paýlanyş funksiýasynyň bu häsiýeti onuň kesgitlemesinden gelip çykýar, sebäbi $F(x)$ paýlanyş funksiýasy $(\xi < x)$ wakanyň ähtimallygydyr. Ahtimallyk bolsa, $[0;1]$ kesimden bahalary kabul edýär.

2) Goý, $x_1 < x_2$ bolsun. $(\xi < x_2)$ wakany sygyşmaýan $(\xi < x_1)$ we $(x_1 \le \xi < x_2)$ wakalaryň jemi görnüşinde aňladalyň

$$(\xi < x_2) = (\xi < x_1) + (x_1 \le \xi < x_2)$$

Sygyşmaýan wakalar ýçin ähtimallyklary goşmagyň teoremasynyndan peýdalanyp alarys

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2)$$

Bu ýerden

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le \xi < x_2) \ge 0 \qquad (26)$$

ýagny,

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

3) Goý, $\{x_n\}$ artýan yzygiderlik x_0 nokada ýygnanýan bolsun. $A_n = \{\xi < x_n\}$, $A = \{\xi < x_0\}$ wakalary girizeliň. $\{A_n\}$-wakalaryň artýan yzygiderligidir we $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ bolar. Ahtimallygyň kesgitlemesindäki hasaply additiwlik aksiomasyndan peýdalanyp,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) \quad \text{ýa-da} \quad \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$$

deňligi ýazmak bolar. *F(x)* paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli

$$\lim_{x \uparrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

deňlik adalatlydyr.

4) Goý, $\{x_n\}$ monoton kemelýän, $\{y_n\}$ bolsa, monoton artýan san yzygiderlikleri bolsun.

$$A_n = \{\xi < x_n\}, \quad B_n = \{\xi < y_n\}$$

wakalary girizeliň. Goý,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing \ \text{ we } \ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

bolsun. Ahtimallygyň kesgitlemesindäki hasaply additiwlik aksiomasyndan peýdalanyp,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 \ \text{ we } \ \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$$

ýa-da

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0 \ \text{ we } \ \lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1$$

deňlikleri ýazmak bolar. Paýlanyş funksiýasynyň monotonlygy sebäpli

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0 \quad \text{we} \quad \lim_{y\to+\infty} F(y) = F(+\infty) = 1$$

deňlikler adalatlydyrlar.

Eger

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \qquad (27)$$

aňlatma adalatly bolsa, onda *F(x)* paýlanyş funksiýasyna absolýut üznüksiz diýilýär. Şeýle paýlanyş fumksiýaly tötän ululyga absolýut üznüksiz ýa-da üznüksiz diýilýär. (27) aňlatmadaky integral aşagyndaky funksiýa tötän ululygyň **dykyzlyk funksiýasy** diýilýär. Dykyzlyk funksiýasy paýlanyş funksiýasynyň birinji önümidir

$$f(x) = F^{/}(x) \qquad (28)$$

Dykyzlyk funksiýasy

1) $f(x) \geq 0.$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

häsiýetlere eýedir.

Dykyzlyk funksiýasynyň 1-nji häsiýeti onuň kemelmeýän funksiýanyň birinji önümidiginden gelip çykýar. Dykyzlyk funksiýasynyň 2-nji häsiýetini (27) aňlatmadan we paýlanyş funksiýasynyň häsiýetinden peýdalanyp almak bolar

$$1 = F(+\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Paýlanyş funksiýasyna başgaça **integral funksiýa** hem diýilýär. Dykyzlyk funksiýasyna **differensial funksiýa** ýa-da **ähtimallygyň paýlanyşynyň dykyzlygy** hem diýilýär.

Üznüksiz tötän ululygyň üzňe bir bahany almagynyň ähtimallygynyň nula deňdigi sebäpli, şeýle ξ tötän ululyk üçin

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a < \xi < b) \qquad (29)$$

deňlikleri ýazmak bolar.

Üznüksiz ξ tötän ululygyň ($a;b$) aralykdan bahalary kabul etmeginiň $P(a<\xi<b)$ ähtimallygy

$$P(a<\xi<b)=\int_a^b f(x)dx \qquad (30)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde $f(x)$ ξ tötän ululygyň differensial funksiýasy. Hakykatdan hem, (26) deňlikde x_1-e derek a, x_2-ä derek b ululyklary goýup we Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp, alarys

$$P(a\le\xi<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

(29) deňlikleri göz öňünde tutup, (30) formulanyň adalatlydygyna göz ýetirmek bolar.

Indi käbir wajyp paýlanyş funksiýalary getireliň.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0<x\le n, \\ 1, & x>n \end{cases}$$

paýlanyş funksiýaly tötän ululyga **binomial (Bernulli)** kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, & x>0,\ 0<\lambda<\infty. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga λ parametrli **Puasson** kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy,\quad -\infty<a<\infty,\quad 0<\sigma<\infty$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga a we σ^2 parametrleri bolan **normal** kanun boýunça paýlanan diýilýär. Hususy halda, $a=0$, $\sigma^2=1$ bolanda, standart normal kanunyň

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

paýlanyş funksiýasyny alarys.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga [*a;b*] kesimde **deňölçegli** kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\nu x}, & x > 0, \nu > 0. \end{cases}$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga ν parametrli **görkezijili** kanun boýunça paýlanan diýilýär.

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+y^2} dy$$

paylanyş funksiýaly tötän ululyga **Koşi** kanuny boýunça paýlanan diýilýär.

Biz şu wagta çenli kabul edýän bahalary bir san bilen kesgitlenýän tötän ululyklara, ýagny, birölçegli tötän ululyklara garadyk. Emma kabul edýän bahalary birden köp sanlar bilen kesgitlenýän tötän ululyklar hem bardyr. Şeýle tötän ululyklara köpölçegli diýilýär. Mysal üçin, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ tötän ululyga *n*-ölçegli tötän ululyk ýa-da *n*-ölçegli wektor diýilýär. Şeýle tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$$

görnüşde kesgitlenýär we *n*-ölçegli paýlanyş funksiýasy ýa-da n tötän ululyklar ulgamynyň paýlanyş funksiýasy diýlip atlandyrylýar. Hususy halda, ikiölçegli tötän ululyga garalyň.

Kesgitleme. Eger bir tötän ululygyň paýlanyş kanuny beýleki tötän ululygyň kabul edýän bahalaryna bagly bolmasa, onda şeýle tötän ululyklara bagly däl diýilýär.

Teorema. ξ we η tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin $(\xi;\eta)$ ulgamyň paýlanyş funksiýasynyň düzüjileriň paýlanyş funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny,

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y) \qquad (31)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterliklidir, bu ýerde $F(x,y)$ $(\xi;\eta)$ ulgamyň paýlanyş funksiýasy, $F_1(x)$ we $F_2(y)$ degişlilikde düzüjileriň paýlanyş funksiýalary.

Subudy.

Zerurlygy. Goý, ξ we η bagly däl tötän ululyklar bolsunlar. Onda $\xi < x$ we $\eta < y$ wakalar hem bagly däldirler. Bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasy boýunça

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)\cdot P(\eta < y)$$

ýa-da

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

bolar.

Ýeterligi. Goý, (31) deňlik ýerine ýetýan bolsun. Onda

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)\cdot P(\eta < y)$$

bolar. Bu bolsa, $\xi < x$ we $\eta < y$ wakalar bagly däl diýildigidir. Onda ξ we η tötän ululyklar hem bagly däldirler.

Teorema subut edildi.

Netije. ξ we η tötän ululyklaryň bagly däl bolmaklygy üçin $(\xi;\eta)$ ulgamyň dykyzlyk funksiýasynyň düzüjileriň dykyzlyk funksiýalarynyň köpeltmek hasylyna deň bolmagy, ýagny

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (32)$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Bellik. (31) we (32) deňlikler zerur we ýeterlik tassyklamalar bolandyklary sebäpli, olary tötän ululyklaryň bagly däldikleriniň kesgitlemeleri hökmünde kabul etmek bolar.

1-nji mesele. Oýnalýan kubik iki gezek oklanýar. Üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sanynyň paýlanyş kanunyny ýazmaly.

Çözülişi.

Goý, *A*- uçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmagy bolsun. Oýnalýan kubik iki gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň ýüze çykmalarynyň sany diskret tötän ululykdyr. Ony ξ bilen belgiläliň. ξ tötän ululyk $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ bahalary kabul edýär. Oýnalýan kubik bir gezek oklananda üçe bölünýän oçkonyň (*A*-wakanyň) ýüze çykmagynyň ähtimallygy klassyky kesgitleme boýunça

$$P = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

bolar. Onda $q = 1 - p = \dfrac{2}{3}$.

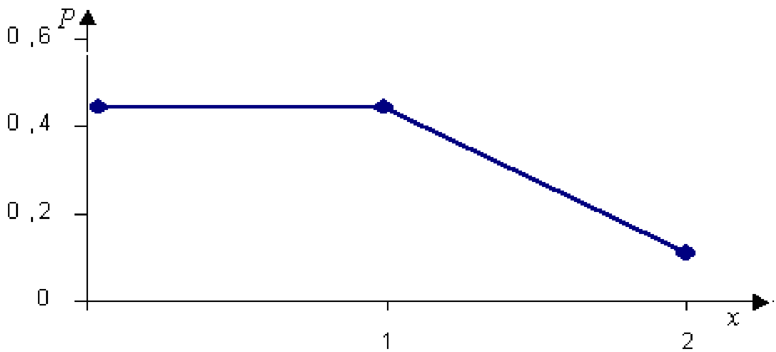
Indi Bernulli formulasyndan peýdalanyp, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ bahalaryň degişli ähtimallyklaryny tapalyň.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P(\xi = x_1 = 0) = P_2(0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \\ P_1 = P(\xi = x_2 = 1) = P_2(1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \\ P_1 = P(\xi = x_3 = 2) = P_2(2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2!}{2!\cdot 0!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \end{array}\right\}$$

Bu deňlikler diskret ξ tötän ululygyň paýlanyş kanunynyň formula arkaly (analitiki) berlişidir. Bu paýlanyş kanuny tablisa görnüşde ýazalyň

ξ	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

ξ tötän ululygyň bu paýlanyş kanunyny grafik görnüşinde hem bermek bolar.



2-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	-2	-1	0	1
p	0,1	0,2	0,5	0,2

paýlanyş kanun bilen berlen bolsun. Bu tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

Çözülişi.

Goý, $x \leq -2$ bolsun. Onda $(\xi < -2)$ mümkin däl wakadyr. Şonuň üçin $P(\xi < -2) = 0$ bolar. Diýmek, $x \leq -2$ üçin

$$F(x) = P(\xi < x) = 0.$$

Goý, $-2 < x \leq -1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) = 0{,}1$$

Goý, $-1 < x \leq 0$ bolsun. Onda, sygyşmaýan wakalar üçin ähtimallyklary goşmagyň teoremasy boýunça

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

Goý, $0 < x \le 1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

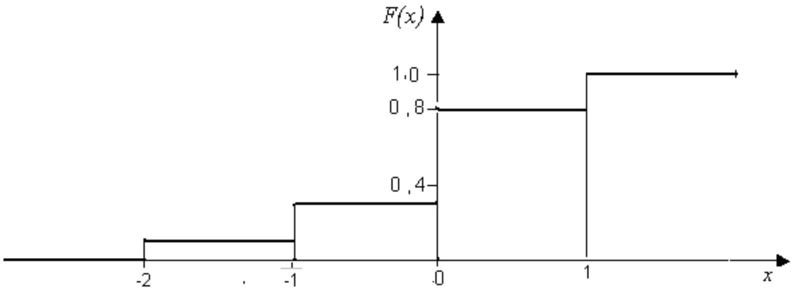
Goý, $x > 1$ bolsun. Onda

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = -2) + P(\xi = -1) + P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

Şeýlelikde

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ 0{,}1, & -2 < x \le -1`, \\ 0{,}3, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}8, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Bu *F(x)* paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň.



Görnüşi ýaly, diskret tötän ululygyň paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr.

3-nji mesele. ξ tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

paýlanyş funksiýasy bilen berlen. Dykyzlyk funksiýasyny we ξ tötän ululygyň (-1;1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi.

f(x) dykyzlyk funksiýasyny

$$f(x)=F^{/}(x)$$

deňlikden peýdalanyp tapalyň.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}, & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

ξ tötän ululygyň (-1;1) aralykdan bahalary kabul etmeginiň ähtimallygyny

$$P(a<\xi<b)=F(b)-F(a)$$

formuladan peýdalanyp tapalyň. (-1;1) aralyk (-2;2) aralyga degişli. Meseläniň şerti boýunça (-2;2) aralykda

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}$$

Onda

$$P(-1<\xi<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2})=$$

$$=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}.$$

4-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{\pi}{6},\\ C\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

dykyzlyk funksiýasy bilen berlen. *C* parametri we ξ tötän ululygyň *F(x)* paýlanyş funksiýasyny tapmaly.

Çözlüşi.

C parametri dykyzlyk funksiýasynyň

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

häsiýetinden peýdalanyp tapalyň.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dx + C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\infty} 0dx = C\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3xdx = \frac{-C}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{C}{3} = 1$$

Bu ýerden *C=3*.

Indi *F(x)* paýlanyş funksiýasyny

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

formuladan peýdalanyp tapalyň.

Goý, $x \le \frac{\pi}{6}$ bolsun. Onda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0.$$

Goý, $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy + \int_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3ydy = -\cos 3y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x} = -\cos 3x.$$

Goý, $x > \frac{\pi}{3}$ bolsun. Onda

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0dy + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3ydy + \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} 0dy = -\cos 3y\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 1.$$

Şeýlelikde

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

I.4. Tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijileri.

I.4.1. Matematiki garaşma.

Belli bolşy ýaly, tötän ululygyň berilmegi üçin onuň paýlanyş funksiýasynyň berilmegi ýeterlikdir. Emma köp meselelerde tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny tapmaklyk kyn bolýar ya-da ony tapmaklyga zerurlyk hem bolmaýar. Mysal üçin, birinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sany ikinji atyjynyň nyşanany urmalarynyň ortaça sanyndan uly bolsa, onda bu birinji atyjynyň ikinji atyja görä mergenlik derejesiniň ýokarydygy barada netije çykarmaklyk üçin ýeterliklidir. Başgaça aýdylanda, tötän ululyklaryň umumy mukdar häsiýetlendirijileri bolan hemişelik ululyklary bilmek ýeterlik bolýar. Bu hemişelik ululyklara tötän ululyklaryň **san häsiýetlendirijileri** diýilýär. Şeýle san häsiýetlendirijileriň biri hem matematiki garaşmadyr.

Kesgitleme. Diskret ξ tötän ululygyň **matematiki garaşmasy** diýlip, ol tötän ululygyň kabul edýän hemme bahalarynyň bu bahalaryň degişli ähtimallyklaryna köpeltmek hasyllarynyň jemine aýdylýar we $M\xi$ bilen belgilenýär.

Hususy halda, eger diskret ξ tötän ululyk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ähtimallyklar bilen kabul edýän bolsa, onda

$$M\xi=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad (33)$$

bolar.

Kesgitleme. Üznüksiz ξ tötän ululygyň **matematiki garaşmasy** diýlip

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \qquad (34)$$

integrala aýdylýar, bu ýerde $f(x)$ ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy.

Matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysyny anyklalyň. Goý, N synag geçirilýän bolsun we bu synaglarda ξ tötän ululyk x_1 bahany N_1 gezek, x_2 bahany N_2 gezek we şuňa meňzeşler, x_k bahany N_k gezek kabul edýän bolsun. ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň orta arifmetiki bahasyny tapalyň.

$$\bar{x}_a = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \ldots N_k x_k}{N} = x_1 \cdot \frac{N_1}{N} + x_2 \cdot \frac{N_2}{N} + \ldots + x_k \cdot \frac{N_k}{N}, \qquad (35)$$

bu ýerde $\frac{N_i}{N}$, $i = \overline{1,k}$, x_i bahanyň W_i otnositel ýygylygy.

Onda (35) deňligi

$$\bar{x}_a = x_1 \cdot W_1 + x_2 \cdot W_2 + \ldots + x_k \cdot W_k \qquad (36)$$

görnüşde ýazmak bolar. Synaglaryň sany ýeterlik uly bolanda wakanyň otnositel ýygylygy şol wakanyň ýüze çykmagynyň ähtimallygyna takmynan deň bolýar. Şol sebäpli (36) deňlikde W_i, $i = \overline{1,k}$, otnositel ýygylyklary degişli p_i ähtimallyklar bilen çalşyryp alarys

$$\bar{x}_a \approx x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k = M\xi.$$

Şeýlelikde,

$$M\xi \approx \bar{x}_a$$

ýagny, tötän ululygyň matematiki garaşmasy ol tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň takmynan orta arifmetiki bahasyna deňdir. Bu matematiki garaşmanyň ähtimallyk manysydyr.

Indi matematiki garaşmanyň häsiýetlerine garalyň.

1) Hemişelik ululygyň matematiki garaşmasy ol ululygyň özüne deňdir, ýagny

$$MC=C,$$

bu ýerde C -hemişelik ululyk. Hakykatdan hem, (33) formuladan peýdalanyp taparys

$$MC=\sum_{k=1}^{n} C\cdot p_k=C\sum_{k=1}^{n} p_k=C\cdot 1=C.$$

2) Hemişelik ululygy matematiki garaşma belgisiniň daşyna çykarmak bolar, ýagny

$$M(C\xi)=C\cdot M\xi$$

Hakykatdan hem,

$$M(C\xi)=\sum_{k=1}^{n} Cx_k\cdot p_k=C\sum_{k=1}^{n} x_k p_k=C\cdot M\xi.$$

3) Iki tötän ululygyň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$M(\xi_1+\xi_2)=M\xi_1+M\xi_2 \qquad (37)$$

Hakykatdan hem, goý, ξ_1 tötän ululyk $x_1, x_2, \dots, x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2, \dots, p_n$ ahtimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa, $y_1, y_2, \dots, y_m$ bahalary degişlilikde $q_1, q_2, \dots, q_m$ ahtimallyklar bilen kabul edýän bolsunlar. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa y_m bahany kabul etmeginiň ähtimallygyny P_{nm} bilen belgiläliň. Onda

$$M(\xi_1+\xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{m} y_j\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right)$$

Doly ähtimallygyň formulasy boýunça

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j$$

Onda

$$M(\xi_1+\xi_2)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\xi_1 + M\xi_2 \, .$$

Netije. Tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň jemine deňdir.

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n$$

Bu deňligiň adalatlydygyna (37) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, göz ýetirmek bolar.

4) Bagly däl iki tötän ululygyň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$M(\xi_1\xi_2)=M\xi_1\cdot M\xi_2 \tag{38}$$

Hakykatdan hem, goý, ξ tötän ululyk $x_1, x_2,\ldots,x_n$ bahalary degişlilikde $p_1, p_2,\ldots,p_n$ ahtimallyklar bilen, ξ_2 tötän ululyk bolsa, $y_1, y_2,\ldots,y_m$ bahalary degişlilikde $q_1, q_2,\ldots,q_m$ ahtimallyklar bilen kabul edýän bolsunlar. ξ_1 tötän ululygyň x_n bahany, ξ_2 tötän ululygyň bolsa, y_m bahany kabul etmeginiň ähhtimallygy bagly däl wakalar üçin ähtimallyklary köpeltmegiň teoremasy boýunça $p_n\cdot q_m$ bolar. Onda

$$M(\xi_1\xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i p_j = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right)=M\xi_1 M\xi_2$$

Netije. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň köpeltmek hasylynyň matematiki garaşmasy ol tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

$$M(\xi_1\xi_2\cdot\ldots\cdot\xi_n)=M\xi_1\cdot M\xi_2\cdot\ldots\cdot M\xi_n$$

Bu deňligiň adalatlydygyna (38) deňlikden we matematiki induksiýa usulyndan peýdalanyp, göz ýetirmek bolar.

Matematiki garaşmanyň diskret tötän ululyklar üçin subut edilen bu häsiýetleri üznüksiz tötän ululyklar üçin hem adalatlydyrlar.

I.4.2. Dispersiýa

Dürli tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bolup biler. Mysal üçin,

ξ	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

η	-10	0	10
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

paýlanyş kanunlar bilen berlen diskret ξ we η tötän ululyklaryň deň matematiki garaşmalary bardyr.

$$M\xi=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$$

$$M\eta=-10\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{1}{3}=0$$

Şeýle ýagdaýda tötän ululyklary biri-birinden tapawutlandyrmak maksady bilen dispersiýa diýlip atlandyrylýan ýene bir san häsiýetlendirijini girizýärler.

Kesgitleme. ξ tötän ululygyň **dispersiýasy** diýlip, ol tötän ululygyň özüniň matematiki garaşmasyndan gyşarmasynyň (tapawudynyň) kwadratynyň matematiki garaşmasyna aýdylýar we $D\xi$ bilen belgilenýär.

$$D\xi=M(\xi-M\xi)^2 \qquad (39)$$

Diskret ξ tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi=\sum_{k=1}^{n}(x_k-M\xi)^2\,p_k \qquad (40)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde $x_k, k=\overline{1,n}$, ξ tötän ululygyň kabul edýän bahalary, $P_k = P(\xi = x_k)$, $k=\overline{1,n}$, bu bahalaryň degişli ähtimallyklary.

Üznüksiz tötän ululyk üçin dispersiýa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \cdot f(x)dx \qquad (41)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde *f(x)* ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy.

Bellik. Tükenikli matematiki garaşmasy bolan islendik ξ tötän ululyk üçin

$$M(\xi - M\xi) = M(\xi + (-1)M\xi) = M\xi + M[(-1)M\xi] =$$
$$= M\xi + (-1)M\xi = M\xi - M\xi = 0$$

bolandygy sebäpli, dispersiýa hökmünde ξ tötän ululygyň $(\xi - M\xi)$ gyşarmasynyň matematiki garaşmasyny almaklygyň manysy ýokdur.

Dispersiýa hökmünde $M|\xi - M\xi|$ ululygy kabul etmek bolardy, emma bu absolýut ululygyň häsiýetleri bilen baglanyşykly ýagdaýlara getirerdi.

Matematiki garaşmanyň häsiýetlerinden peýdalanyp, (39) formulany oňa deňgüýçli we amaly maksatlar üçin amatly bolan görnüşde ýazmak bolar.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

ýagny

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 \qquad (42)$$

(42) formulany diskret ξ tötän ululyk üçin

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k\right)^2, \qquad (43)$$

üznüksiz ξ tötän ululyk üçin bolsa

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \right)^2 , \qquad (44)$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $f(x)$ üznüksiz ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasy.

Dispersiýa tötän ululygyň kabul edýän bahalarynyň ol tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň töweregindäki ýaýrawyny häsiýetlendirýär. Bu onuň ähtimallyk manysydyr.

Indi dispersiýanyň hasiýetlerine garalyň.

1) Hemişelik ululygyň dispersiýasy nula deňdir, ýagny

$$DC = 0,$$

bu ýerde C-hemişelik ululyk. Hakykatdan hem, dispersiýanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys

$$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = M0 = 0$$

2) Hemişelik ululygy dispersiýa belgisiniň daşyna kwadrata göterip çykarmak bolar, ýagny

$$D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$$

Hakykatdan hem,

$$D(C\xi) = M(C\xi - M(C\xi))^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = C^2 \cdot M(\xi - M\xi)^2 = C^2 \cdot D\xi.$$

3) Bagly däl iki tötän ululygyň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir, ýagny

$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2 \qquad (45)$$

Hakykatdan hem, eger ξ_1 we ξ_2 tötän ululyklar bagly däl bolsalar, onda $(\xi_1 - M\xi_1)$ we $(\xi_2 - M\xi_2)$ tötän ululyklar hem bagly däldirler. Onda

$$D(\xi_1 + \xi_2) = M[(\xi_1 + \xi_2) - M(\xi_1 + \xi_2)]^2 =$$

$$= M[(\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2)]^2 =$$

$$= M(\xi_1 - M\xi_1)^2 + 2M(\xi_1 - M\xi_1) \cdot M(\xi_2 - M\xi_2) + M(\xi_2 - M\xi_2)^2 =$$

$$= D\xi_1 + D\xi_2 .$$

Netije 1. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir

$$D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=D\xi_1+D\xi_2+\ldots+D\xi_n$$

Bu deňligi (45) deňlikdeň we matematiki induksiýa usulyndan peydalanyp subut etmek bolar.

Netije 2. Bagly däl iki tötän ululygyň tapawudynyň dispersiýasy ol tötän ululyklaryň dispersiýalarynyň jemine deňdir.

$$D(\xi_1-\xi_2)=D\xi_1+D\xi_2$$

Hakykatdan hem,

$$D(\xi_1-\xi_2)=D(\xi_1+(-1)\xi_2)=D\xi_1+D[(-1)\xi_2]=$$
$$=D\xi_1+(-1)^2\cdot D\xi_2=D\xi_1+D\xi_2$$

Netije 3. Tötän ululyk bilen hemişelik ululygyň jeminiň dispersiýasy tötän ululygyň dispersiýasyna deňdir.

$$D(\xi+C)=D\xi$$

Hakykatdan hem, ξ tötän ululyk bilen C hemişelik ululyga biri-biri bilen bagly däl ululyklar hökmünde garap we $DC=0$ bolýanlygyny göz öňünde tutup alarys

$$D(\xi+C)=D\xi+DC=D\xi\ .$$

I.4.3. Orta kwadratik gyşarma.

Tötän ululygyň dispersiýasynyň kesgitlemesinden görnüşi ýaly, tötän ululygyň ölçegi bilen onuň dispersiýasynyň ölçegi gabat gelmeýär. Mysal üçin, tötän ululyk metrde ölçenýan bolsa, onuň dispersiýasynyň ölçegi metr kwadrat bolardy. Tötän ululyk bilen onuň san häsiýetlendirijisiniň şol bir ölçegleri bolar ýaly etmek maksady bilen orta kwadratik gyşarma diýlip atlandyrylýan ýene-de bir san häsiýetlendirijini girizýärler.

Kesgitleme. Dispersiýadan alnan arifmetiki kwadrat köke **orta kwadratik gyşarma** diýilýär, ýagny

$$\sigma_\xi=\sqrt{D\xi} \qquad (46)$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl tükenikli sany tötän ululyklaryň jeminiň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň orta kwadratik gyşarmalarynyň kwadratlarynyň jeminden alnan kwadrat köke deňdir.

$$\sigma_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \ldots + \sigma_{\xi_n}^2}$$

Subudy.

Goý, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ toplumlaýyn bagly däl tötän ululyklar bolsunlar.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

belgilemäni girizeliň. Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanalyň

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n$$

Bu ýerden

$$\sqrt{D\xi} = \sqrt{D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n}$$

(46) deňligi göz öňünde tutup, alarys

$$\sigma_\xi = \sigma_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n} = \sqrt{\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + \ldots + \sigma_{\xi_n}^2}$$

Teorema subut edildi.

Goý, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ birmeňzeş paýlanan tötän ululyklar bolsunlar. Onda olaryň birmeňzeş san häsiýetlendirijileri bardyr. Bu tötän ululyklaryň

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

orta arifmetiki bahasy bilen baglanyşykly käbir tassyklamalary getireliň.

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\xi}$ orta arifmetiki bahasynyň matematiki garaşmasy bu tötän ululyklarýn matematiki garaşmalaryna deňdir, ýagny

$$M\overline{\xi} = a, \qquad (47)$$

bu ýerde, $a = M\xi_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Subudy.

Matematiki garaşmanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys

$$M\,\overline{\overline{\xi}} = M\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right) = \frac{M\xi_1+M\xi_2+\ldots+M\xi_n}{n} = \frac{n\cdot a}{n} = a$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\overline{\xi}}$ orta arifmetiki bahasynyň dispersiýasy bu tötän ululyklarýn her biriniň dispersiýasyndan *n* esse kiçidir, ýagny

$$D\overline{\xi} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad (48)$$

bu ýerde $\sigma^2 = D\xi_i, \quad i=\overline{1,n}$

Subudy.

Dispersiýanyň häsiýetinden peýdalanyp taparys

$$D\overline{\xi} = D\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}\right) = \frac{D\xi_1+D\xi_2+\cdots D\xi_n}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema. Toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tötän ululyklaryň $\overline{\overline{\xi}}$ orta arifmetiki bahasynyň orta kwadratik gyşarmasy bu tötän ululyklaryň her biriniň orta kwadratik gyşarmasyndan $\sqrt{n}$ esse kiçidir, ýagny

$$\sigma_{\overline{\overline{\xi}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (49)$$

bu ýerde $\sigma = \sqrt{D\xi_i}\,, \quad i=\overline{1,n}\,.$

Subudy.

Orta kwadratik gyşarmanyň kesgitlemesinden peýdalanyp taparys.

$$\sigma_{\overline{\overline{\xi}}} = \sqrt{D\,\overline{\overline{\xi}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Netije. (48) we (49) deňliklerden görnüşi ýaly, toplumlaýyn bagly däl, birmeňzeş paýlanan tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasynyň ýaýrawy bu tötän ululyklaryň her biriniň ýaýrawyndan ýeterlik kiçidir.

I.4.4. Momentler.

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k \qquad (50)$$

ululyga ξ tötän ululygyň ***k*-njy tertipli momenti** diýilýär. Hususy halda, $a=o$ bolanda, bu ýerden alarys

$$\nu_k(0) = \nu_k = M\xi^k \qquad (51)$$

Bu ululyga ξ tötän ululygyň **k-njy tertipli başlangyç momenti** diýilýär. Eger $a = M\xi$ bolsa, onda *k*-njy tertipli moment

$$\nu_k(M\xi) = \mu_k = M(\xi - M\xi)^k \qquad (52)$$

görnüşe geler. Bu ululyga ξ tötän ululygyň ***k*-njy tertipli merkezi momenti** diýilýär.

(51) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli ($k=1$ bolanda) başlangýç moment matematiki garaşmadyr. (52) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli ($k=2$ bolanda) merkezi moment dispersiýadyr.

Merkezi momentler bilen başlangyç momentleriň arasynda ýönekeý baglanyşyklar bar. Bu baglanyşyklary matematiki statistikada giňden ulanylýan başky dört moment üçin ýazalyň.

$$\mu_0 = 1,$$
$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4.$$

(50), (51), (52) aňlatmalarda ýaýlary absolýut ululygyň belgisi bilen çalşyryp, degişli absolýut momentleri alarys.

Indi tötän ululyklaryň san häsiýetlendirijilerini tapmaklyga degişli meselelere garalyň.

1-nji mesele. Diskret ξ tötän ululyk

ξ	1	2	3
p	0,3	0,5	0,2

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

Çözülişi.

(33) formuladan peýdalanyp, matematiki garaşmany tapalyň.

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}2 = 1{,}9.$$

Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k = 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}5 + 9\cdot 0{,}2 = 4{,}1.$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany tapalyň.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 4{,}1 - (1{,}9)^2 = 0{,}49.$$

Orta kwadratik gyşarmany tapalyň.

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

2-nji mesele. Üznüksiz ξ tötän ululyk

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

paýlanyş kanuny bilen berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny, dispersiýasyny we orta kwadratik gyşarmasyny tapmaly.

Çözülişi.

Ilki ξ tötän ululygyň dykyzlyk funksiýasyny tapalyň

$$f(x) = F^{/}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Indi (34) formula boýunça matematiki garaşmany tapalyň.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x \cdot xdx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$M\xi^2$ ululygy tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \cdot xdx = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

Bu ýerden orta kwadratik gyşarmany taparys

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0{,}24$$

3-nji mesele. Binomial kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

Binomial kanun boýunça paýlanan tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	0	1	...	k	...	n
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\cdots$	$P_n(k)$	$\cdots$	$P_n(n)$

görnüsdedir, bu ýerde

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}, \quad p + q = 1.$$

(33) formuladan peýdalanyp taparys

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{(n-1)! \cdot n}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k}$$

n-k=(n-1)-(k-1) we Nýutonyň binomy boýunça

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k} = (p+q)^{n-1} = 1$$

bolýandygyny göz öňünde tutup alarys

$$M\xi = n \cdot p \qquad (53)$$

Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

k^2 ululygy $k^2 = k(k-1) + k$ görnüşde aňladalyň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} [k \cdot (k-1) + k] \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \frac{(n-2)! \cdot (n-1) \cdot n}{(k-2)! \cdot (k-1) \cdot k \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ikinji goşulujy (53) deňlik boýunça $n \cdot p$ ululyga deň. Onda

$$M\xi^2 = n \cdot (n-1)) \cdot p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-k} + np =$$

$$= n \cdot (n-1) p^2 + np.$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = n \cdot (n-1) p^2 + np - (np)^2 =$$

$$- np^2 + np = np(1-p) = npq,$$

ýagny $D\xi = npq.$

4-nji mesele. Puasson kanuny boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

Puasson kanuny boýunça paýlanan ξ tötän ululyk diskret kysyma degişlidir we onuň paýlanyş kanuny

ξ	*0*	*1*	...	*k*	...
P	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\dots$	$P_n(k)$	$\dots$

görnüşdedir, bu ýerde $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$,

$k = 0,1,2,\dots \quad 0 < \lambda < \infty$

(33) formuladan peýdalanyp taparys

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)! \cdot k} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}. = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda ,$$

ýagny

$$M\xi = \lambda . \tag{54}$$

Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + k] \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

Ikinji goşulyjy (54) deňlige görä λ parametre deň. Onda

$$M\xi^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k}{(k-2)!(k-1) \cdot k} \cdot e^{-\lambda} + \lambda =$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

ýagny $D\xi = \lambda$.

5-nji mesele. a we σ^2 parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

Normal kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Görnüşdedir. (34) formuladan peýdalanyp ýazyp bileris

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-a}{\sigma} = y \qquad (55)$$

belgilemäni girizeliň. Bu ýerden taparys

$x = a + \sigma y, \quad dx = \sigma \cdot dy.$ Onda

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma \cdot y) \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \text{ we } \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$$

bolandygy sebäpli

$$M\xi = a \qquad (56)$$

bolar. Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

(55) belgilemäni ulanyp, ýazyp bileris

$$M\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma \cdot y)^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{2a\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy +$$

$$+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy.=a^2+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Ikinji goşulyjydaky integraly bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp hasaplalyň.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}d(\frac{y^2}{2})=$$

$$(y=u,\quad dy=du,\quad e^{-\frac{y^2}{2}}d(\frac{y^2}{2})=d\vartheta,\quad \vartheta=-e^{-\frac{y^2}{2}})$$

$$=-y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}\,.$$

Onda

$$M\xi^2=a^2+\sigma^2$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys.

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=a^2+\sigma^2-a^2=\sigma^2,$$

ýagny

$$D\xi=\sigma^2.$$

6-njy mesele. [*a;b*] kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi.

[*a;b*] kesimde deňölçegli kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

görnüşdedir. (34) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

ýagny,

$$M\xi = \frac{a+b}{2}.$$

Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x^2dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12},$$

ýagny,

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7-nji mesele. Görkezijili kanun boýunça paýlanan ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny we dispersiýasyny tapmaly.

Çözülişi

Görkezijili kanun boýunça paýlanan tötän ululyk üznüksiz kysyma degişlidir we onuň dykyzlyk funksiýasy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \nu \cdot e^{-\nu x}, & x > 0, \quad \nu > 0. \end{cases}$$

görnüşdedir. (34) formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \nu\int_{0}^{\infty} xe^{-\nu \cdot x}dx =$$

$$\left(x = u, \quad dx = du, \quad e^{-\nu \cdot x} dx = d\vartheta, \quad \vartheta = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu \cdot x} \right)$$

$$= \nu \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{\nu} \cdot e^{-\nu \cdot x} \right) \Bigg|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\nu \cdot x} dx = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu \cdot x} \Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\nu},$$

ýagny,

$$M\xi = \frac{1}{\nu}.$$

Indi $M\xi^2$ momenti tapalyň.

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \nu \int_0^\infty x^2 e^{-\nu \cdot x} dx =$$

$$\left(x^2 = u, \quad 2x dx = du, \quad e^{-\nu \cdot x} dx = d\upsilon, \quad \upsilon = -\frac{1}{\nu} e^{-\nu \cdot x} \right)$$

$$= \nu \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\nu} \cdot e^{-\nu \cdot x} \right) \Bigg|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\nu \cdot x} dx = 2x(-\frac{1}{\nu} e^{-\nu \cdot x}) \Bigg|_0^\infty + \frac{2}{\nu} \int_0^\infty e^{-\nu \cdot x} dx = \frac{2}{\nu^2}$$

(42) formuladan peýdalanyp, dispersiýany taparys.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2},$$

ýagny,

$$D\xi = \frac{1}{\nu^2}.$$

II. Matematiki statistikanyň elementleri

II.1. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy

II.1.1. Baş we saýlama toplumlar

Matematiki statistika XVII asyryň başynda döreýär we ähtimallyklar nazaryýeti bilen bilelikde giň gerim bilen ösýär. Statistika adalgasy latyn "status" (ýagdaý) sözünden gelip çykýar.

Matematiki statistika esasan iki meselä garaýar.

1) Gözegçilikler netijesinde statistiki maglumatlary toplamak we olary toparlamagyň usullaryny görkezmek.
2) Ylmy we amaly netijeleri almak üçin toplanan statistiki maglumatlary maksadalaýyk derňemegiň usullaryny işläp düzmek.

Matematiki statistikanyň başlangyç düşünjeleri hökmünde baş we saýlama toplumlar düşünjelerine garaýarlar. Birjynsly obýektleriň (elementleriň) köplügini **baş toplum** diýlip atlandyrýarlar. Bu toplum haýsy hem bolsa bir hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenilýär. Baş toplumyň hemme obýektlerini ýeke-ýekeden öwrenmeklik wagtyň we serişdeleriň köp sarp edilmegi bilen baglanyşyklydyr. Şol sebäpli, baş toplumdan obýektleriň bölek köplügini tötän saýlap alýarlar we gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenýärler. Bu bölek köplüge **saýlama toplum** ýa-da **saýlama** diýilýär.

Toplumyň obýektleriniň sanyna **toplumyň göwrümi** diýilýär.

Saýlama geçirilende dürli saýlap alyş usullaryndan peýdalanýarlar.

1) **Mehaniki saýlap alyş usuly**. Bu usulda baş toplum birnäçe bölek toplumlara mehaniki bölünýär we her bölek toplumdan bir obýekt tötän saýlanyp alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, öndürilen N önümiň 20% -ni saýlap almaly bolsa, onda

önümleriň hemmesiniň köplügini $N/5$ bölege bölýärler we her bölekden bir obýekti tötän alyp öwrenýärler.

2) **Kysmy saýlap alyş usuly.** Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden tötän bir obýekt alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, köwüş fabriginiň öndürýän köwüşlerini ölçegleri we pasyllaýyn görnüşleri boýunça birnäçe kysmy böleklere bölýärler we her bölekden tötän bir köwüş alyp, hil ya-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

3) **Tapgyrlaýyn saýlap alyş usuly.** Bu usulda baş toplum kysmy böleklere bölünýär we her bölekden obýektleriň tapgyry tötän alnyp, gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilýär. Mysal üçin, çörek öndürýän kärhananyň her tamdyrynda bişirilýän çörekleri görnüşleri we ölçegleri boýunça kysmy böleklere bölýärler we her bölekden çörekleriň tapgyryny tötän saýlap alyp, hil ýa-da mukdar nyşana görä öwrenýärler.

Praktikada bu usullary utgaşdyryp ulanýarlar.

Eger baş toplumdan alnan obýekt gyzyklandyrýan nyşana görä öwrenilip, yzyna, baş topluma gaýtarylsa, onda şeýle saýlama **gaýtalanýan** diýilýär. Eger obýekt baş topluma gaýtarylmasa, onda şeýle saýlama **gaýtalynmaýan** diýilýär.

Haýsy saýlap alyş usulynyň ulanylandygyna garamazdan, öwrenilýän nyşan barada dogry netijeleri çykarmaklyga mümkinçilik bermegi üçin, saýlamanyň wekilçilikli (reprezentatiw) bolmagy gerekdir.

II.1.2. Saýlamanyň statistiki paýlanyşy.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu nyşan tötän ululykdyr, sebäbi şol bir göwrümli dürli saýlamalarda ol öňden belli bolmadyk dürli bahalary kabul edýär.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilen bolsun we bu saýlamada x_1 baha n_1 gezek, x_2 baha n_2 gezek, we ş.m. x_k baha n_k gezek duş gelýan bolsun. Nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bahalaryna **wariantalar** diýilýär. Wariantalaryň artýan tertipde ýazylan yzygiderligine **wariasiýa hatary** diýilýar. Wariantalaryň gözegçilik edilýän $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sanlaryna bu wariantalaryň degişli **ýygylyklary** diýilýär. Hemme ýygylyklaryň jemi saýlamanyň göwrümine deňdir, ýagny,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Wariantalar bilen olaryň degişli ýygylyklarynyň sanawyna ýygylygyň **statistiki paýlanyşy** diýilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy tablisa we grafik görnüşde berilýär. Tablisa görnüşde ol

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

ýaly berilýär. Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny grafiki bermek üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny gurýarlar. Abssissalar okunda $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantalary, ordinatalar okunda bolsa $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ýygylyklary belleýärler. Soňra (x_i, n_i), $i = \overline{1, k}$, nokatlary gurýarlar we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirýärler. Emele gelen döwük çyzyk ýygylygyň statistiki paýlanyşynyň grafiki berlişidir. Bu döwük çyzyga ýygylygyň **poligony** diýilýär. “Poligonos” grek sözi bolup, köpburçluk diýlen manyny berýär.

$$W_i = \frac{n_i}{n} \qquad (1)$$

gatnaşyga x_i wariantanyň otnositel ýygylygy diýilýär, bu ýerde n_i ululyk x_i wariantanyň ýygylygy, n-saýlamanyň göwrümi.

Wariantalar bilen degişli otnositel ýygylyklaryň sanawyna **otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşy** diýilýär. Bu paýlanyş hem edil ýygylygyň paýlanyşy ýaly tablisa we grafik görnüşinde berilýär. Ýygylygyň we otnositel ýygylygyň paýlanyşyna saýlamanyň statistiki paýlanyşy diýilýär.

Eger baş toplum üznüksiz nyşana görä öwrenilýän bolsa, onda bu nyşanyň kabul edýän bahalarynyň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir *h* uzynlykly bölek interwallara bölýärler. Her bir bölek interwalyň ýygylygy hökmünde bu bölek interwala düşen wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alýarlar we gistogramma diýlip atlandyrylýan figurany gurýarlar.

Kesgitleme. Ýygylyň (otnositel ýygylygyň) **gistogrammasy** diýlip, esaslary bölek interwallaryň *h* uzynlyklaryna deň bolan, beýiklikleri bolsa,

$\dfrac{n_i}{h}$ $\left(\dfrac{W_i}{h}\right)$, $i=\overline{1,n}$, gatnaşyklara deň bolan gönüburçluklardan ybarat basgançakly figura aýdylýar.

Ýygylyň (otnositel ýygylygyň) gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny gurýarlar. Abssissalar okunda *h* uzynlykly bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa $\dfrac{n_i}{h}$ $\left(\dfrac{W_i}{h}\right)$ ululyklary belleýärler we esaslary *h* ululyga deň, beýiklikleri bolsa $\dfrac{n_i}{h}$ $\left(\dfrac{W_i}{h}\right)$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary gurýarlar.

II.1.3. Empirik paýlanyş funksiýasy.

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n} \qquad (2)$$

funksiýa **empirik (statistiki) paýlanyş** funksiýasy diýilýär, bu ýerde $n_x\left(0\le n_x\le n\right)$ üýtgeýän hakyky $x\left(-\infty<x<\infty\right)$ ululykdan kiçi wariantalaryň sany, n -saýlamanyň göwrümi. Empirik paýlanyş funksiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.

1) Empirik paýlanyş funksiýasynyň bahalar ýaýlasy [0;1] kesimdir, ýagny, $0\le F^*(x)\le 1$ deňsizlikler adalatlydyrlar.
2) Empirik paýlanyş funksiýasy kemelmeýän funksiýadyr, ýagny, bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli we $x_1<x_2$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik x_1 we x_2 bahalar üçin $F^*(x_1)\le F^*(x_2)$ deňsizlik adalatlydyr.
3) Eger x_1 iň kiçi warianta bolsa, onda x üýtgeýän ululygyň $x\le x_1$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x)=0$ bolar. Eger x_k iň uly warianta bolsa, onda x üýtgeýan ululygyň $x>x_k$ deňsizligi kanagatlandyrýan hemme bahalary üçin $F^*(x)=1$ bolar.

1-nji mesele. Baş toplumdan *n=20* göwrümli saýlama geçirilýär:

2, 8, 5, 3, 3, 5, 2, 3, 8, 5, 3, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 5, 2, 3

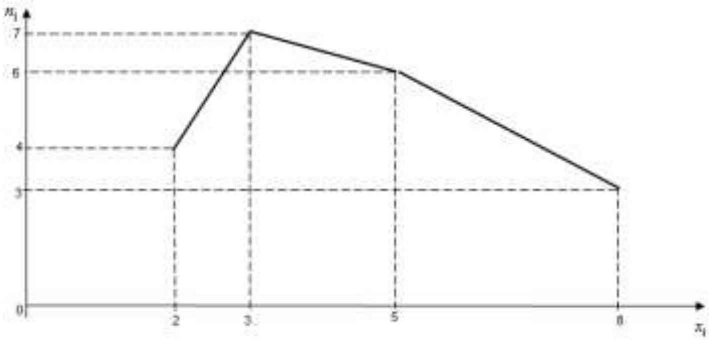
a) Ýygylygyň statistiki paýlanyşyny tablisa görnüşde ýazmaly.
b) Ýygylygyň poligonyny gurmaly.
ç) Otnositel ýygylygyň statistiki paýlanyşyny ýazmaly.
d) Otnositel ýygylygyň poligonyny gurmaly.

Çözülişi.

a) Saýlamadan görnüşi ýaly 2-lik warianta 4-gezek, 3-lik warianta 7-gezek, 5-lik warianta 6-gezek, 8-lik warianta 3-gezek duş gelýär. Onda

x_i	2	3	5	8
n_i	4	7	6	3

b) Tekizlikde gönüburçly dekart koordinatalar ulgamyny guralyň. Abssissalar okunda *2, 3, 5, 8* wariantalary, ordinatalar okunda bolsa *4, 7, 6, 3* ýygylyklary bellӓliň. Soňra $(2;4), (3;7), (5;6), (8;3)$ nokatlary guralyň we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdireliň.



Ýygylygyň poligony

ç) $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 = 6, n_4 = 3$ we $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 20$ bolandygy sebӓpli

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň.

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{4}{20} = 0.2, \quad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{7}{20} = 0.35,$$

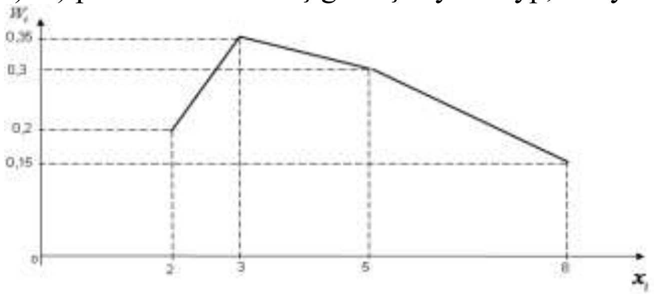
$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{20} = 0.3, \quad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{3}{20} = 0.15$$

Onda

x_i	2	3	5	8
W_i	0.2	0.35	0.3	0.15

Bellik. $\sum_{i=1}^{k} W_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{n}{n} = 1$
deňlikden peýdalanyp, otnositel ýygylyklaryň bahalarynyň dogry tapylandygyna göz ýetirmek bolar.

d) b) punktdaka meňzeş gurluşlary ulanyp, alarys



Otnositel ýygylygyň poligony

2-nji mesele. Ýygylygyň statistiki paýlanyşy berlen

x_i	1	6	7
n_i	5	3	2

Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly.

Çözlüşi.

Bütin san okuny 1, 6, 7 nokatlar bilen kesişmeýän dört bölege böleliň we x üýtgeýän ululygyň her bölekdäki bahalaryna aýry-aýrylykda garalyň.

Goý, $-\infty < x \le 1$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi warianta ýokdur. Şol sebäpli $n_x = 0$ bolar. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{10} = 0.$$

Goý, $1 < x \le 6$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik warianta bar we ol 5 gezek duş gelýär, ýagny, $n_x = 5$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Goý, $6 < x \le 7$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik we 6-lyk wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5 we 3 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 8$. Onda

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Goý, $7 < x < \infty$ bolsun. x üýtgeýän ululygyň bu aralykdaky bahalarynyň islendiginden kiçi 1-lik, 6-lyk we 7-lik wariantalar bar. Bu wariantalar degişlilikde 5, 3 we 2 gezek duş gelýärler. Diýmek, $n_x = 10$. Onda

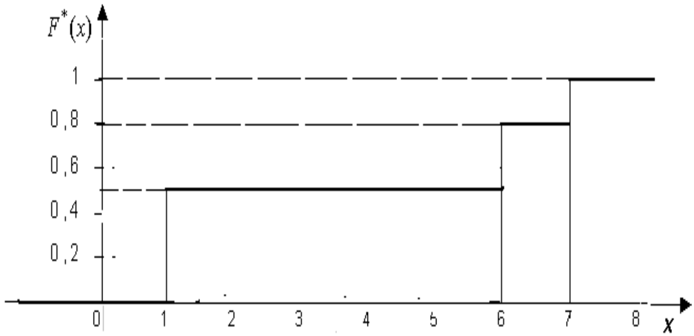
$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{10}{10} = 1.$$

Şeýlelikde

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0.5, & 1 < x \le 6, \\ 0.8, & 6 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

$F^*(x)$ empirik paýlanyş funksiýanyň grafigini guralyň.

.



Çyzgydan görnüşi ýaly, empirik paýlanyş funksiýasy basgançakly funksiýadyr.

3-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen

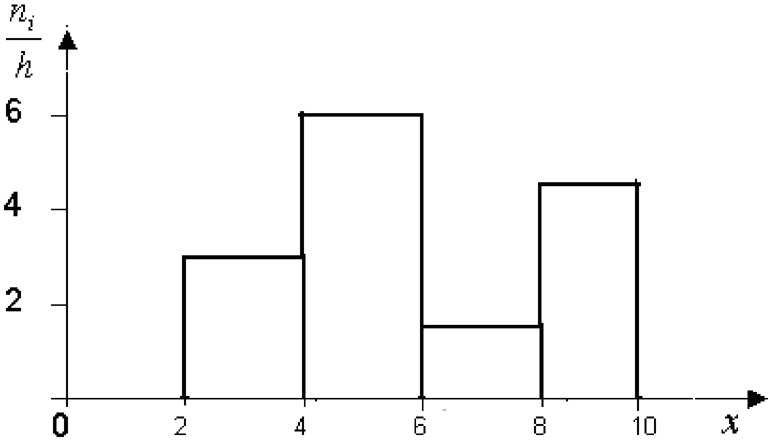
Interwalyň belgisi i	Bölek interwal $x_i - x_{i+1}$	Bölek interwalyň ýygylygy n_i	Ýygylygyň dykyzlygy $\frac{n_i}{h}$
1	2-4	6	3
2	4-6	12	6
3	6-8	3	1,5
4	8-10	9	4,5

a) Ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.
b) Otnositel ýygylygyň gistogrammasyny gurmaly.

Çözülişi.

a) Tablisadan görnüşi ýaly saýlamanyň göwrümi $n = 6 + 12 + 3 + 9 = 30$. Bölek interwallaryň uzynlyklary $h = 2$.

Ýygylygyň gistogrammasyny gurmak üçin tekizlikde gönüburçly koordinatalar ulgamyny guralyň. Abssissalar okunda $2-4, 4-6, 6-8, 8-10$ bölek interwallary, ordinatalar okunda bolsa $3; 6; 1{,}5; 4{,}5$ ululyklary belläliň. Soňra esaslary bölek interwallaryň $h=2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, $3; 6; 1{,}5; 4{,}5$ ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň.



Ýygylygyň gistogrammasy.

b) Ilki $W_i = \frac{n_i}{n}$ formuladan peýdalanyp, otnositel ýygylyklary tapalyň.

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{6}{30} = 0.2, \qquad W_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{12}{30} = 0.4,$$

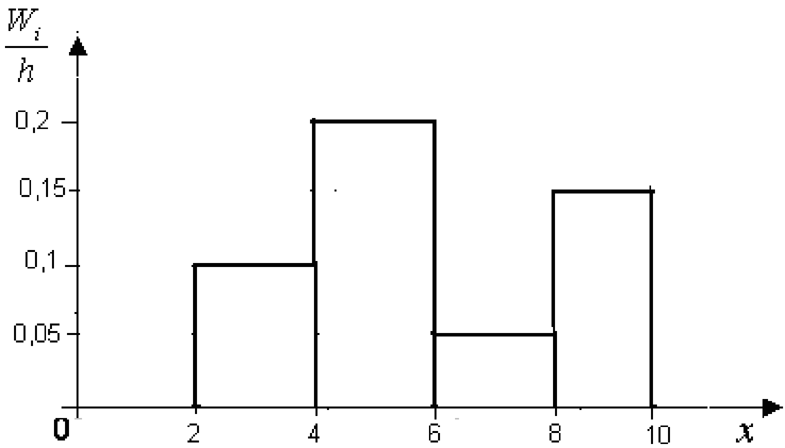
$$W_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{3}{30} = 0.1, \qquad W_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{9}{30} = 0.3$$

Indi otnositel ýygylygyň $\frac{W_i}{h}$ dykyzlygyny tapalyň.

$$\frac{W_1}{h} = \frac{0.2}{2} = 0.1, \qquad \frac{W_2}{h} = \frac{0.4}{2} = 0.2,$$

$$\frac{W_3}{h}=\frac{0.1}{2}=0.05, \qquad \frac{W_4}{h}=\frac{0.3}{2}=0.15.$$

Tekizlikde göniburçly dekart koordinatalar ulgamyny alyp, esaslary bölek interwallaryň $h=2$ uzynlyklaryna deň, beýiklikleri bolsa, 0.1; 0.2; 0.05; 0.15 ululyklara deň bolan gönüburçluklary guralyň.



Otnositel ýygylygyň gistogrammasy.

II.2. Paýlanyşyň parametrleriniň statistiki bahalary.

II.2.1. Statistiki bahalar.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanyň paýlanyş funksiýasyny kesgitleýän parametrleri bahalandyrmak meselesi ýüze çykýar. Adatça derňeýjide öwrenilýän nyşanyň kabul edýän $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bahalary bolýar. Bu bahalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tötän ululyklar hökmünde garaýarlar we bahalandyrylýan θ nazary parametriň statistiki bahasy hökmünde bu tötän ululyklardan käbir $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ funksiýany kabul edýärler. Argumentleri tötän ululyklar bolany sebäpli $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ funksiýa hem tötän ululykdyr.

Islendik göwrümli saýlama geçirilende bahalandyrylýan parametriň diňe ýakynlaşan bahasyny tapmak bolar. Şol sebäpli, gerekli ýakynlaşmany almak maksady bilen statistiki bahalara käbir talaplary bildirýärler.

Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň statistiki bahasy bolsun.

Kesgitleme. Matematiki garaşmasy bahalandyrylýan θ parametre deň bolan, ýagny,

$$M\theta^* = \theta$$

deňligi kanagatlandyrýan θ^* statistiki baha **süýşmedik baha** diýilýär.

Süýşmedik baha artygy ýa-da kemi bilen alnan şol bir ýalňyşlyklaryň gaýtalanyp durmazlygyny üpjün edýän hem bolsa, ol mydama gerekli ýakynlaşmany berýär diýlen netijäni çykarmak nädogrydyr. Hakykatdan hem, goý n göwrümli saýlama k gezek geçirilip, degişlilikde $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$ statistiki bahalar tapylan bolsun. Bu statistiki bahalara θ^* tötän ululygyň kabul edýän bahalary hökmünde garaýarlar. Eger bahalandyrylýan θ parametriň statistiki bahasy hökmünde

$M\theta^*$ ululykdan ýeterlik daşlaşan haýsy hem bolsa bir statistiki baha kabul edilse, onda gerekli ýakynlaşmanyň alynmazlygy mümkin. Şol sebäpli, θ^* tötän ululygyň bahalarynyň $M\theta^*$ matematiki garaşmanyň töweregindäki ýaýrawynyň kiçi bolmagyny talap edýärler. θ^* tötän ululygyň ýaýraw ölçegi hökmünde $M(\theta^* - \theta)^2$ ululygy kabul edýärler. Hususy halda, θ^* süýşmedik baha bolanda, onuň ýaýraw ölçegi dispersiýadyr.

$$M(\theta^* - M\theta^*)^2 = D\theta^*$$

Kesgitleme. $\inf\limits_{\theta^*} M\left(\theta^* - \theta\right)^2$ ululyga eýe bolan θ^* statistiki baha **effektiw** diýilýär.

Kesgitleme. Islendik $\varepsilon > 0$ san üçin

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

deňligi kanagatlandyrýan θ_n^* statistiki baha **esasly** diýilýär.

II.2.2. Wariasiýa hatarynyň häsiýetlendirijileri.

Baş toplumyň öwrenilýän nyşanynyň belli paýlanyşynyň näbelli parametrlerini bahalandyrmakda gözegçilik edilýän wariantalaryň orta bahalarynyň möhüm ähmiýeti bardyr.

Goý, baş toplum käbir mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan alnan n göwrümli saýlamada $x_1, x_2, \dots, x_k$ wariantalar degişlilikde $n_1, n_2, \dots, n_k$ ýygylyklar bilen duş gelýän bolsunlar. Wariantalaryň m-nji derejeleriniň degişli ýygylyklara köpeltmek hasyllarynyň jeminiň saýlamanyň göwrümine bolan gatnaşygyndan alnan m-nji derejeli köke çekilen orta derejeli baha diýilýär we $\bar{x}_d$ bilen belgilenýär.

$$\bar{x}_d = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^m}{n}} \qquad (1)$$

Hususy halda, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wariantalaryň her birine bir gezek gözegçilik edilýän bolsa, onda orta derejeli baha ýönekeý diýilýär we ol

$$\bar{x}_d = \sqrt[m]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^m}{n}} \qquad (2)$$

görnüşde kesgitlenýar.

m-iň dürli bahalarynda orta derejeli bahadan beýleki orta bahalary almak bolar.

Eger m= -1 bolsa, (1) aňlatmadan çekilen

$$\bar{x}_{garm.} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}, \qquad (3)$$

(2) aňlatmadan bolsa, ýönekeý

$$\bar{x}_{garm.} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad (4)$$

orta garmonik bahalary alarys.

Eger m=0 bolsa, onda (1) we (2) aňlatmalarda kesgitsizlik alnar. Bu kesgitsizligi Lopitalyň düzgüninden peýdalanyp açalyň.

$\bar{x}_{geom} = \lim_{m \to 0} \bar{x}_d$ belgilemäni girizip, (1) aňlatmadan alarys

$$\ln \bar{x}_{geom.} = \lim_{m \to 0} \frac{\left(\ln \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^m - \ln n \right)^{/}}{m^{/}} =$$

$$= \lim_{m \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^m \ln x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^m} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \ln x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} =$$

$$= \frac{1}{n} \ln\left(x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}\right) = \ln \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}}$$

Bu ýerden

$$\bar{x}_{geom.} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}} \qquad (5)$$

Bu ululyga çekilen **orta geometrik** baha diýilýär.

Edil şuňa meňzeşlikde, (2) aňlatmadan ýönekeý

$$\bar{x}_{geom.} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad (6)$$

orta geometrik bahany alarys.

Eger m=1 bolsa, onda (1) aňlatmadan çekilen

$$\bar{x}_a = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}, \qquad (7)$$

(2) äňlatmadan bolsa, ýönekeý

$$\bar{x}_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (8)$$

orta arifmetiki bahany alarys.

Eger *m=2* bolsa, onda (1) aňlatmadan çekilen

$$\bar{x}_{kw.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}}, \qquad (9)$$

(2) äňlatmadan bolsa, ýönekeý

$$\bar{x}_{kw.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \qquad (10)$$

orta kwadratik bahany alarys.

Bu orta bahalar üçin

$$\bar{x}_{garm} < \bar{x}_{geom} < \bar{x}_a < \bar{x}_{kw.} \qquad (11)$$

deňsizlikler adalatlydyrlar.

Baş we saýlama orta bahalar hökmünde köplenç orta arifmetiki bahadan peýdalanýarlar we (7) we (8) aňlatmalarda $\bar{x}_a$ belgilemä derek degişlilikde $\bar{x}_b$ we $\bar{x}_s$ belgilemeleri ulanýarlar.

Mukdar nyşanyň bahalarynyň baş we saýlama orta bahalaryň töweregindäki ýaýrawyny häsiýerlendirmek üçin **baş we saýlama** dispersiýa düşünjelerini girizýärler.

Goý, N göwrümli bäs toplumda mukdar nyşan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bahalary degişlilikde $N_1, N_2, \ldots, N_k$ ýygylyklar bilen kabul edýän bolsun. **Baş dispersiýa** diýlip, mukdar nyşanyň bahalarynyň ol nyşanyň $\bar{x}_b$ baş orta bahasyndan gyşarmalarynyň (tapawutlarynyň) kwadratlarynyň orta arifmetiki bahasyna aýdylýar we D_b bilen belgilenýär.

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \bar{x}_b)^2}{N} \qquad (12)$$

Goý, n göwrümli saýlamada $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantlar degişlilikde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ýygylyklar bilen düş gelýän bolsun. **Saýlama dispersiýa** diýlip, mukdar nyşanyň gözegçilik edilýän bahalarynyň (wariantalaryň) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň orta arifmetiki bahasyna aýdylýar we D_s bilen belgilenýär

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} \qquad (13)$$

Baş we saýlama dispersiýalardan alnan kwadrat köke degişlilikde **baş we saýlama orta kwadratik gyşarmalar** diýilýär we σ_b hem-de σ_s bilen belgilenýarler.

$$\sigma_b = \sqrt{D_b}\,, \qquad \sigma_s = \sqrt{D_s}$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n-1} \qquad (14)$$

ululyga **düzedilen dispersiýa** diýilýär.

Dispersiýanyň formulasyny amaly maksatlar üçin amatly bolan

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \qquad (15)$$

görnüşde ýazmak bolar. Hakykatdan hem,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} + (\overline{x})^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\overline{x} \cdot \overline{x} + (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2\,,$$

bu ýerde

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\,, \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}.$$

Teorema. $\overline{x}_s$ saýlama orta baha $\overline{x}_b$ baş orta bahanyň süýşmedik bahasydyr, ýagny

$$M\,\overline{X}_s = \overline{x}_b$$

Subudy

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

aňlatmada $\bar{x}_s$ ululyga $\overline{X}_s$ tötän ululyk, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wariantalara bolsa, biri-biri bilen bagly däl we baş toplumyň öwrenilýän ξ nyşany bilen birmeňzeş paýlanan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Goý,

$$MX_i = a, \quad i = \overline{1,k},$$

bolsun. Onda

$$M\xi = \bar{x}_b = a$$

bolar. $\overline{X}_s$ ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$$M\,\overline{X}_s = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot MX_i}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a = \bar{x}_b$$

Teorema subut edildi.

Teorema. S^2 düzedilen dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşmedik bahasydyr, ýagny

$$MS^2 = D_b$$

Subudy

D_s saýlama dispersiýa D_b baş dispersiýanyň süýşen bahasydyr, ýagny

$$MD_s = \frac{n-1}{n} \cdot D_b.$$

Bu deňligi göz öňünde tutup, alarys

$$MS^2 = M\left(\frac{n}{n-1} \cdot D_s\right) = \frac{n}{n-1} \cdot MD_s = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_b = D_b$$

Kesgitleme. Iň uly ýygylyga eýe bolan warianta **moda** diýilýär we M_o bilen belgilenýär.

Bellik. Eger nyşan üznüksiz bolsa, onda dykyzlyk funsiýasynyň maksimuma eýe bolan nokadyna moda diýilýär.

Kesgitleme. Wariasiýa hataryny wariantalaryň sany boýunça deň iki bölege bölýän warianta **mediana** diýilýär we M_e bilen belgilenýär.

Eger wariantalaryň sany jübüt bolsa, ýagny *m=2k* bolsa, onda

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Eger wariantalaryň sany täk bolsa, ýagny *m=2k+1* bolsa, onda

$$M_e = x_{k+1}.$$

Bellik. Eger nyşan üznüksiz bolsa, onda

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

deňlemäniň çözüwine mediana diýilýär. Bu ýerde F(x) üznüksiz nyşanyň paýlanyş funksiýasy.

Kesgitleme. Iň uly warianta bilen iň kiçi wariantanyň tapawudyna wariasiýanyň **gerimi** diýilýär we *R* bilen belgilenýär

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Kesgitleme. Wariantalaryň saýlama orta bahadan absolýut gyşarmalarynyň orta arifmetiki bahasyna orta **absolýut gýşarma** diýilýär we θ bilen belgilenýär.

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left| x_i - \bar{x}_s \right|}{n}$$

Kesgitleme. Orta kwadratik gyşarmanyň saýlama orta baha göterimde aňladylan gatnaşygyna **wariasiýa koeffisiýenti** diýilýär we *V* bilen belgilenýär,

$$V = \frac{\sigma_s}{\bar{x}_s} \cdot 100\%.$$

II.2.3. Ynam interwallary.

Saýlamanyň kömegi bilen nazary paýlanyşyň näbelli parametriniň bir statistiki bahasyny tapmaklyga **nokatlaýyn** bahalandyrma diýilýär. Uly bolmadyk göwrümli saýlamada nokatlaýyn bahalandyrmanyň gerekli ýakynlaşmany bermezligi mümkin. Şol sebäpli interwallaýyn bahalandyrmalardan peýdalanýarlar.

Goý, θ bahalandyrylýan parametr, θ^* bolsa, onuň saýlama netijesinde tapylan statistiki bahasy bolsun. Islendik $\delta > 0$ san üçin

$$\left|\theta - \theta^*\right| < \delta \qquad (16)$$

deňsizlikde δ ululyk näçe kiçi boldygyça bahanyň takyklygy şonça-da uludyr. Şol sebäpli δ ululyga bahanyň takyklygy diýilýär. Islendik θ^* statistiki baha üçin (16) deňsizlik dogrydyr diýmek elbetde nädogrydyr. Sonuň üçin (16) deňsiligiň haýsy ähtimallyk bilen ýerine ýetýandigine garaýarlar.

$$\gamma = P\left\{\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right\}$$

ähtimallyga bahalandyrmanyň ygtybarlygy diýilýär. (16) deňsizligi özgerdip ýazalyň.

$$\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$$

$$\left(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta\right) \qquad (17)$$

interwala bahalandyrylýan θ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän **ynam interwaly** diýilýär.

Indi belli paýlanyşyň näbelli parametrlerini bahalandyrmak üçin ulanylýan ynam interwallaryny getireliň.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir ξ mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşan $a = M\xi$ we $\sigma = \sqrt{D\xi}$ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan diýeliň. Goý, a parametr näbelli, σ parametr bolsa belli bolsun.

Näbelli a parametriň θ^* statistiki bahasy hökmünde $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany kabul edip, a parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ saýlama geçireliň. Bu wariantalara biri-biri bilen bagly däl, birmeňzeş paýlanan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tötän ululyklar hökmünde garalyň. Bu tötän ululyklaryň orta arifmetiki bahasyny $\bar{\xi}$ bilen belgiläliň.

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}$$

Belli bolşy ýaly

$$M\bar{\xi} = a, \qquad D\bar{\xi} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad \bar{\sigma}_{\bar{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Laplas funksiýasyndan we Nýuton-leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp, ýazyp bileris.

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \delta\right\} = P\left\{a - \delta < \bar{\xi} < a + \delta\right\} = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

$$\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t \qquad (18)$$

belgilemäni girizip,

$$2\Phi(t) = \gamma \qquad (19)$$

deňligi alarys. (18) deňlikden taparys $\delta = \dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$. δ takyklygyň bu bahasyny göz öňünde tutup, ýazyp bileris.

$$\gamma = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \delta\right\} = P\left\{\left|\bar{\xi} - a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\bar{\xi} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

$\bar{\xi}$ tötän ululygy $\bar{x}_s$ ululyk bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanyň näbelli *a* parametrini σ belli bolanda γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_s + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (20)$$

ynam interwalyny alarys.

Bellik. (20) ynam interwalyndaky *t* üýtgeýän ululygy (19) deňlikden we *Φ(x)* Laplas funksiýasynyň tablisasyndan (Goşmaça II) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi *a* we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ mukdar nyşanyň näbelli *a* parametrini σ näbelli bolanda, γ ygtybarlylyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Önuň üçin baş toplumdan *n* göwrümli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ saýlama geçireliň we ýokarda getirilen pikir ýöretmeleri ulanyp

$$T = \frac{\bar{\xi} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$$

tötän ululygy alalyň, bu ýerde *n*-saýlamanyň göwrümi, *S*-düzedilen orta kwadratik gyşarma, $\bar{\xi} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}$ - saýlama orta baha. *T* tötän ululyk k=n-1 erkinlik derejeli we

$$S(t,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi\cdot(n-1)}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

dykyzlyk funksiýaly Stýudent [W. Gosset, (13.06.1876-16.10.1937), iňlis matematigi] kanuny boýunça paýlanandyr, bu ýerde

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty y^{z-1}\cdot e^{-y}dy$$

gamma funksiýa. *T* tötän ululygyň paýlanyş funksiýasyny

$$\gamma=P\left(\left|\frac{\bar{\xi}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,n)dt \qquad (21)$$

görnüşde ýazmak bolar. (21) deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip ýazalyň.

$$\gamma=P\left(\bar{\xi}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\bar{\xi}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{\xi}$ we *S* tötän ululyklary degişlilikde $\bar{x}_s$ saýlama orta baha we *s*- düzedilen orta kwadratik gyşarma bilen çalşyryp, normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanyň näbelli *a* parametrini σ näbelli bolanda, γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(\bar{x}_s-t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_s+t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \qquad (22)$$

ynam interwalyny alarys. t_γ ululygy berlen *n* we γ boýunça tablisadan (Goşmaça III) peýdalanyp tapmak bolar.

Indi *a* we σ parametrleri bolan normal kanun boýunça paýlanan ξ mukdar nyşanyň näbelli σ parametrini γ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapalyň. Onuň üçin baş toplumdan *n* göwrümli $x_1,x_2,\ldots,x_n$ saýlama geçirip, s düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapalyň. Bu düzedilen orta kwadratik gyşarmany näbelli σ parametriň statistiki bahasy hökmünde kabul edip,

$$P\left(\left|\sigma - s\right| < \delta\right) = \gamma$$

deňlige garalyň. Bu deňlikdäki ýaý içindäki deňsizligi özgerdip ýazalyň.

$$s - \delta < \sigma < s + \delta$$

Bu ýerden
$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right)$$

$\frac{\delta}{s} = q$ belgilemäni girizip, $q<1$ bolanda, näbelli σ parametri γ ygtybarlyk bilen örtýän

$$\left(s(1-q);\ s(1+q)\right) \qquad (23)$$

ynam interwalyny alarys. Eger $q \geq 1$ bolsa, onda

$$\left(0;\ s(1+q)\right) \qquad (24)$$

ynam interwalyndan peýdalanylýar. q ululygy berlen n we γ boýunça tablisadan (Goşmaça IV) peýdalanyp tapmak bolar.

1-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen.

x_i	1	3	5	8
n_i	3	2	4	1

a) Orta bahalary;

b) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany;

ç) Düzedilen dispersiýany we düzedilen orta kwadratik gyşarmany tapmaly.

Çözülişi.

a)

$$\bar{x}_{garm} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}} = \frac{10}{3 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{8}} = \frac{1200}{551} \approx 2{,}18.$$

$$\bar{x}_{geom} = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}} = \sqrt[10]{1^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 8} = \sqrt[10]{4500} \approx 2{,}92.$$

$$\bar{x}_a = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8}{10} = \frac{37}{10} = 3{,}7.$$

$$\bar{x}_{kw} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 64}{10}} = \sqrt{18{,}5} \approx 4{,}3.$$

b)

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} = \frac{3 \cdot (1-3{,}7)^2 + 2 \cdot (3-3{,}7)^2 + 4 \cdot (5-3{,}7)^2 + 1 \cdot (8-3{,}7)^2}{10} = \frac{48{,}1}{10} = 4{,}81$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{4{,}81} \approx 2{,}19.$$

ç) $$s^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{10}{9} \cdot 4{,}81 \approx 5{,}34.$$

$$s = \sqrt{5{,}34} \approx 2{,}31.$$

2-nji mesele. Saýlamanyň paýlanyşy berlen.

x_i	2	4	5	6	9
n_i	7	5	4	3	1

a) Modany,
b) Medianany,
ç) Wariasiýanyň gerimini,
d) Baş orta bahanyň süýşmedik bahasyny,
e) Saýlama dispersiýany we orta kwadratik gyşarmany,
ä) Baş dispersiýanyň süýşmedik bahasyny,
f) Orta absolýut gyşarmany,
g) Wariasiýa koeffisiýentini tapmaly.

Çözülişi.

a) Saýlamanyň paýlanyşyndan görnüşi ýaly, iň uly ýygylyga $(n_1 = 7)$ $x_1 = 2$ warianta eýedir.

Diýmek, $M_0 = 2.$

b) Berlen saýlamada wariantalaryň sany täk, ýagny, $2k+1=5$. Bu ýerden $k=2$.

Onda $M_e = x_{k+1} = x_3 = 5.$

ç) Wariantalaryň iň ulusy $x_5 = 9,$ iň kiçisi bolsa, $x_1 = 2.$ Onda

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 2 = 7.$$

d) Belli bolşy ýaly, baş orta bahanyň süýşmedik bahasy $\bar{x}_s$ saýlama orta bahadyr.

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{7\cdot 2 + 5\cdot 4 + 4\cdot 5 + 3\cdot 6 + 1\cdot 9}{20} = \frac{81}{20} = 4{,}05.$$

e) $$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} =$$

$$= \frac{7\cdot(2-4{,}05)^2 + 5\cdot(4-4{,}05)^2 + 4\cdot(5-4{,}05)^2 + 3\cdot(6-4{,}05)^2 + 1\cdot(9-4{,}05)^2 +}{20} = \frac{68{,}95}{20} = 3{,}4475$$

Onda $\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{3{,}4475} \approx 1{,}86.$

ä) Belli bolşy ýaly, baş dispersiýanyň süýşmedik bahasy s^2 düzedilen dispersiýadyr.

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_s = \frac{20}{19}\cdot 3{,}4475 \approx 3{,}63.$$

f) $$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i |x_i - \bar{x}_s|}{n} =$$

$$= \frac{7\cdot|2-4{,}05| + 5\cdot|4-4{,}05| + 4\cdot|5-4{,}05| + 3\cdot|6-4{,}05| + 1\cdot|9-4{,}05|}{20} = \frac{29{,}2}{20} = 1{,}46.$$

g) $$V = \frac{\sigma_s}{\bar{x}_s}\cdot 100\% = \frac{1{,}86}{4{,}05}\cdot 100\% \approx 45{,}93\%$$

3-nji mesele. Goý, baş toplum normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşana görä öwrenilýän bolsun. Eger baş toplumdan *n=100* göwrümli saýlama geçirilip, onuň netijesinde $\bar{x}_s = 6{,}62$ saýlama orta baha we $\sigma_s = 2{,}89$ orta kwadratik gyşarma tapylan bolsa, ξ nyşanyň näbelli $a = M\xi$ matematiki garaşmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

Çözülişi.

(19) deňlige görä

$$2\Phi(t) = 0{,}95$$

bolar. Bu ýerden

$$\Phi(t) = 0{,}475.$$

Laplas funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça III) peýdalanyp, t argumentiň $\Phi(t) = 0{,}475$ baha degişli bahasyny taparys*: t=1,96*. Onda (20) ynam interwalyndan peýdalanyp ýazyp bileris

$$6{,}62 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}89}{\sqrt{100}} < a < 6{,}62 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}89}{\sqrt{100}}$$

ýa-da

$$6{,}05 < a < 7{,}19$$

4-nji mesele. Käbir jisimi bagly däl 36 ölçemeleriň netijesinde ölçegleriň $\bar{x}_s = 21{,}3$ saýlama orta bahasy we *s=0,98* düzedilen orta kwadratik gyşarmasy tapylan bolsun. Ölçenýän jisimiň hakyky *a* ululygyny $\gamma = 0{,}99$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

Çözülişi.

n=36 we $\gamma = 0{,}99$ boýunça tablisadan (Goşmaça III) $t_\gamma = 2{,}7$ bahany taparys. Onda (22) ynam interwalyndan peýdalanyp ýazyp bileris

$$21{,}3 - 2{,}7 \cdot \frac{0{,}98}{\sqrt{36}} < a < 21{,}3 + 2{,}7 \cdot \frac{0{,}98}{\sqrt{36}}$$

ýa-da

$$20{,}86 < a < 21{,}74$$

5-nji mesele. Baş toplumdan *n=10* göwrümli saýlama geçirilip, *s=5* düzedilen orta kwadratik gyşarma tapylan bolsun. Baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanan ξ nyşanynyň näbelli σ orta kwadratik gyşarmasyny $\gamma = 0{,}95$ ygtybarlyk bilen örtýän ynam interwalyny tapmaly.

Çözülişi.

Berlen *n=10* we $\gamma = 0{,}95$ boýunça tablisadan (Goşmaça IV) *q=0,65* ululygy taparys. *q<1* bolandygy sebäpli (23) ynam interwalyndan peýdalanalyň.

$$5 \cdot (1 - 0{,}65) < \sigma < 5 \cdot (1 + 0{,}65)$$

ýa-da

$$1{,}75 < \sigma < 8{,}25.$$

II.3. Empirik paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasynyň bahalandyrylyşy.

II.3.1. Empirik momentler.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir ξ mukdar nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu maksat bilen baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ wariantalar degişlilikde $n_1, n_2, \ldots, n_r$ $\left(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r\right)$ ýygylyklar bilen alnan bolsun. Eger wariasiýa hatarynda islendik iki ýanaşyk wariantanyň tapawudynyň absolýut ululygy şol bir h sana deň bolsa, onda wariantalara **deňdaşlaşan**, h sana bolsa, **ädim** diýilýär. Wariantalar uly sanlar bolan ýagdaýynda, hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

şertli wariantalardan peýdalanýarlar, bu ýerde C-islendik x_i, $i = \overline{1, r}$ warianta (ýalan nul). Ýalan nul hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen warianta alynsa, hasaplamalar has-da ýeňilleşýär.

Saýlamanyň umumy häsiýetlendirijilerini hasaplamak üçin empirik momentlerden peýdalanmak amatlydyr.

$$M_k^{/} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(x_i - C\right)^k}{n} \qquad (1)$$

ululyga k-njy tertipli **adaty empirik moment** diýilýär, bu ýerde x_i, $i = \overline{1, r}$ wariantalar, n_i, $i = \overline{1, r}$ wariantalaryň degişli ýygylyklary, C-ýalan nul, n-saýlamanyň göwrümi. Hususy halda, $C=0$ bolsa, (1) gatnaşykdan k-njy tertipli

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^k}{n} \qquad (2)$$

başlangyç empirik momenti alarys. (2) aňlatmadan görnüşi ýaly, birinji tertipli (k=1) başlangyç empirik moment saýlama orta bahadyr.

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} = \bar{x}_s$$

Hususy halda, $C = \bar{x}_s$ bolsa, (1) gatnaşykdan *k*-njy tertipli

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_s)^k}{n} \qquad (3)$$

merkezi empirik momenti alarys. (3) aňlatmadan görnüşi ýaly, ikinji tertipli *(k=2)* merkezi moment saýlama dispersiýadyr.

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} = D_s$$

Merkezi we adaty momentleriň arasynda aşakdaky baglanyşyklar bardyr.

$$m_2 = M_2^{/} - \left(M_1^{/}\right)^2 = D_s \qquad (4)$$

$$m_3 = M_3^{/} - 3M_1^{/} \cdot M_2^{/} + 2\left(M_1^{/}\right)^3 \qquad (5)$$

$$m_4 = M_4^{/} - 4M_1^{/} \cdot M_3^{/} + 6\left(M_1^{/}\right)^2 \cdot M_2^{/} + 3\left(M_1^{/}\right)^4 \qquad (6)$$

Hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen şertli empirik momentlerden peýdalanýarlar

$$M_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^k}{n} \qquad (7)$$

ululyga k-njy tertipli **şertli empirik moment** diýilýär. Hususy halda, *k=1* bolanda (7) aňlatmadan birinji tertipli şertli empirik momenti alarys.

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i \left(\frac{x_i - C}{h} \right)}{n} = \frac{1}{h} \left(\frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{n} - C \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i}{n} \right) = \frac{1}{h} (\bar{x}_s - C)$$

Bu ýerden

$$\bar{x}_s = M_1^* \cdot h + C \tag{8}$$

(7) aňlatmadan taparys

$$M_k^* = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (x_i - C)^k}{n} = \frac{1}{h^k} \cdot M_k^{/}$$

Bu ýerden

$$M_k^{/} = M_k^* \cdot h^k \tag{9}$$

(9) deňlikden peýdalanyp, (4), (5) we (6) deňlikleri şertli empirik momentler arkaly ýazmak bolar.

$$m_2 = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = D_s$$

(10)

$$m_3 = [M_3^* - 3M_1^* \cdot M_2^* + 2(M_1^*)^3] \cdot h^3$$

(11)

$$m_4 = [M_4^* - 4M_1^* \cdot M_3^* + 6(M_1^*)^2 \cdot M_2^* - 3(M_1^*)^4] \cdot h^4$$

(12)

Praktikada köplenç deňdaşlaşmadyk wariantalar bilen iş salyşmaly bolýar. Bu ýagdaýda, berlen wariantalary deňdaşlaşan wariantalara getirmeklik zerurlygy ýüze çykýar. Onuň üçin berlen wariantalaryň hemmesiniň düşen interwalyny şol bir uzynlykly bölek interwallara bölýärler we bu bölek interwallaryň ortalaryny täze wariantalar hökmünde kabul edýärler. Şeýlelikde, täze deňdaşlaşan wariantalar alynýar. Täze wariantalaryň ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen köne wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alýarlar.

Bellik. Berlen deňdaşlaşmadyk wariantalardan täze deňdaşlaşan wariantalara geçilip, saýlamanyň häsiýetlendirijileri hasaplananda, ýalňyşlygyň uly bolmazlygy üçin her bölek interwala berlen wariantalaryň 8-10 – dan az bolmadyk sanysynyň düşmegini gazanmalydyr.

II.3.2. Empirik we deňleýji (nazary) ýygylyklar.

Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan ξ mukdar nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilende ξ nyşan x_1 bahany n_1, x_2 bahany n_2 ,…, x_k bahany n_k gezek kabul edipdir diýeliň. x_i, $i=\overline{1,k}$, wariantalaryň gözegçilik edilýän n_i, $i=\overline{1,k}$, sanlaryna **empirik ýygylyklar** diýilýär. Eger ξ nyşanyň haýsy hem bolsa bir kesgitli kanun boýunça paýlanandygy barada güman etmeklige esas bar bolsa, onda onuň gözegçilik maglumatlary bilen ylalaşygyny barlamak üçin nazary ýygylyklary hasaplaýarlar.

Nazary hasaplanyp tapylan

$$n_i^{/} = n \cdot P_i$$

ululyklara **deňleýji ýygylyklar** diýilýär, bu ýerde *n*-saýlamanyň göwrümi, P_i -belli paýlanyşly ξ nyşanyň x_i bahany kabul etmeginiň ähtimallygy.

Eger ξ üznüksiz nyşan bolsa, onda onuň kabul edýän hemme bahalarynyň düşen interwalyny kesişmeýän *k* bölek interwallara bölýärler we ξ nyşanyň bu bölek interwallara düşmeginiň P_i, $i=\overline{1,k}$, ähtimallyklaryny tapýarlar. Soňra diskret paýlanyşdaky ýaly

$$n_i^{/} = n \cdot P_i$$

formuladan peýdalanyp, deňleýji ýygylyklary tapýarlar. Hususy halda, eger ξ üznüksiz nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlip güman etmäge esas bar bolsa, onda $n_i^/$ deňleýji ýygylyklary

$$n_i^/ = \frac{n \cdot h}{\sigma_s} \cdot \varphi(u_i)$$

formuladan peýdalanyp tapýarlar, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, h-bölek interwallaryň uzynlyklary, σ_s-saýlama orta kwadratik gyşarma, $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s}$, x_i-i-nji interwalyň ortasy,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Indi saýlamanyň maglumatlaryndan peýdalanyp, normal egriniň gurluşyny görkezeliň.

Goý, baş toplumdan n göwrümli saýlama geçirilip

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

statistiki paýlanyş alnan bolsun. Normal egrini gurmak üçin:

1) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany we σ_s saýlama orta kwadratik gyşarmany tapmaly;

2) $y_i = \dfrac{n \cdot h}{\sigma_s} \varphi(u_i)$

formuladan peýdalanyp, nazary paýlanyşyň y_i ordinatalaryny (deňleýji ýygylyklary) tapmaly, bu ýerde n-saýlamanyň göwrümi, h-ädim (goňşy iki wariantanyň arasyndaky uzaklyk),

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}};$$

3) gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda $(x_i; y_i)$ nokatlary gurmaly we olary egri çyzyk bilen birikdirmeli.

Normal egriniň gurluşyny mysal arkaly görkezeliň.

Mysal. Saýlamanyň paýlanyşy berlen:

x_i	40	45	50	55	60	65	70	75	80
n_i	5	6	10	14	30	16	10	4	5

Normal egrini gurmaly.

1) $\overline{x}_s$ saýlama orta bahany tapalyň

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n} = \frac{5\cdot 40 + 6\cdot 45 + 10\cdot 50 + 14\cdot 55}{100} +$$

$$+\frac{30\cdot 60 + 16\cdot 65 + 10\cdot 70 + 4\cdot 75 + 5\cdot 80}{100} = 59{,}8$$

D_s saýlama dispersiýany tapalyň.

$$D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_s)^2}{n} = \frac{5\cdot(40-59{,}8)^2 + 6\cdot(45-59{,}8)^2 + 10\cdot(50-59{,}8)^2}{100} +$$

$$+\frac{14\cdot(55-59{,}8)^2 + 30\cdot(60-59{,}8)^2 + 16\cdot(65-59{,}8)^2}{100} +$$

$$+\frac{10\cdot(70-59{,}8)^2 + 4\cdot(75-59{,}8)^2 + 5\cdot(80-59{,}8)^2}{100} = 89{,}96$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{89{,}96} \approx 9{,}48$$

2) $u_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s}$ wariantalary tapalyň.

$$u_1 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{40 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{-19{,}8}{9{,}48} = -2{,}09;$$

$$u_2 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{45 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{-14{,}8}{9{,}48} = -1{,}56;$$

$$u_3 = \frac{x_i - \overline{x}_s}{\sigma_s} = \frac{50 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{-9{,}8}{9{,}48} = -1{,}03;$$

$$u_4 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{55 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{-4{,}8}{9{,}48} = -0{,}51;$$

$$u_5 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{60 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{0{,}2}{9{,}48} = 0{,}02;$$

$$u_6 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{65 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{5{,}2}{9{,}48} = 0{,}55;$$

$$u_7 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{70 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{10{,}2}{9{,}48} = 1{,}08;$$

$$u_8 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{75 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{15{,}2}{9{,}48} = 1{,}60;$$

$$u_9 = \frac{x_i - \bar{x}_s}{\sigma_s} = \frac{80 - 59{,}8}{9{,}48} = \frac{20{,}2}{9{,}48} = 2{,}13.$$

$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça I) peýdalanyp taparys.

$$\varphi(u_1) = \varphi(-2{,}09) = \varphi(2{,}09) = 0{,}0449;$$

$$\varphi(u_2) = \varphi(-1{,}56) = \varphi(1{,}56) = 0{,}1182;$$

$$\varphi(u_3) = \varphi(-1{,}03) = \varphi(1{,}03) = 0{,}2347;$$

$$\varphi(u_4) = \varphi(-0{,}51) = \varphi(0{,}51) = 0{,}3503;$$

$$\varphi(u_5) = \varphi(0{,}02) = 0{,}3989;$$

$$\varphi(u_6) = \varphi(0{,}55) = 0{,}3429;$$

$$\varphi(u_7) = \varphi(1{,}08) = 0{,}2227;$$

$$\varphi(u_8) = \varphi(1{,}60) = 0{,}1109;$$

$$\varphi(u_9) = \varphi(2{,}13) = 0{,}0413;$$

$$y_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_s} \varphi(u_i)$$

formuladan peýdalanyp, nazary egriniň y_i ordinatalaryny tapalyň.

$$y_1 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_1) = \frac{100 \cdot 5}{9{,}48} \cdot 0{,}0449 = 52{,}74 \cdot 0{,}0449 \approx 2;$$

$$y_2 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_2) = 52{,}74 \cdot 0{,}1182 \approx 6;$$

$$y_3 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_3) = 52{,}74 \cdot 0{,}2347 \approx 12;$$

$$y_4 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_4) = 52{,}74 \cdot 0{,}3503 \approx 19;$$

$$y_5 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_5) = 52{,}74 \cdot 0{,}3989 \approx 21;$$

$$y_6 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_6) = 52{,}74 \cdot 0{,}3429 \approx 18;$$

$$y_7 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_7) = 52{,}74 \cdot 0{,}2227 \approx 12;$$

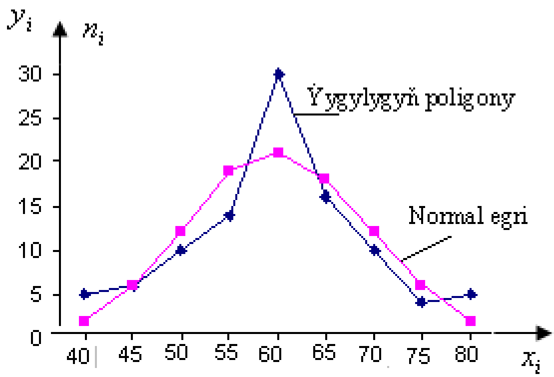
$$y_8 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_8) = 52{,}74 \cdot 0{,}1109 \approx 6;$$

$$y_9 = \frac{n \cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_9) = 52{,}74 \cdot 0{,}0413 \approx 2;$$

Berlen we tapylan maglumatlary tablisada ýazalyň.

x_i	n_i	$x_i-\bar{x}_s$	$u_i=\dfrac{x_i-\bar{x}_s}{\sigma_s}$	$\varphi(u_i)$	$y_i=\dfrac{n\cdot h}{\sigma_s}\varphi(u_i)=$ $==52{,}74\cdot\varphi(u_i)$
40	5	-19,8	-2,09	0,0449	2
45	6	-14,8	-1,56	0,1182	6
50	10	-9,8	-1,03	0,2347	12
55	14	-4,8	-0,51	0,3503	19
60	30	0,2	0,02	0,3989	21
65	16	5,2	0,55	0,3429	18
70	10	10,2	1,08	0,2227	12
75	4	15,2	1,60	0,1109	6
80	5	20,2	2,13	0,0413	2
	n=100				

3) Gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda $(x_i;y_i)$ nokatlary guralyň we olary egri çyzyk bilen birikdireliň.



Bu koordinatalar ulgamynda ýygylygyň poligonyny hem gurup we grafikleri deňeşdirip, nazary egriniň gözegçiligiň netijeleri bilen kanagatlanarly ylalaşýandygyny görmek bolar.

II.3.3. Asimmetriýa we eksses.

Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň normal paýlanyşdan gyşarmasyny (tapawudyny) bahalandyrmakda asimmetriýa we eksses diýlip atlandyrylýan san häsiýetlendirijilerden peýdalanýarlar.

Kesgitleme. Üçünji tertipli empirik ýa-da nazary merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň üçünji derejesine bolan gatnaşygyna asimmetriýa diýilýär we A_s bilen belgilenýär.

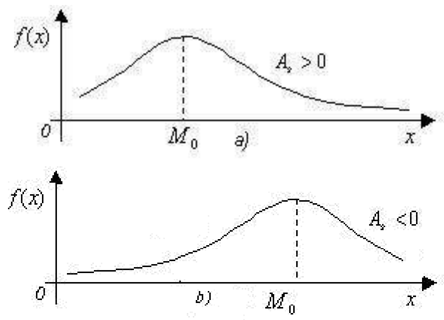
$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} \qquad (13)$$

ýa-da

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad (13')$$

bu ýerde m_3 empirik, μ_3 nazary merkezi üçünji momentler.

Asimmetriýanyň alamatyny empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň moda görä ýerleşişi boýunça kesgitläliň. Eger empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň "uzyn bölegi" modadan sagda bolsa, $A_s > 0$ (1-nji çyzgy, *a*)), eger modadan çepde bolsa, $A_s < 0$ (1-nji çyzgy, *b*))



1-nji çyzgy

Normal paýlanyş üçin $A_s = 0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^3 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys

$$\mu_3 = \frac{\sigma^3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0,$$

sebäbi $y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ funksiýa täk, integrirleme çäkleri bolsa simmetrik. Onda

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

Şol sebäpli, eger asimmetriýa nula golaý bolsa, baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanandygy barada netije çykarmak bolar.

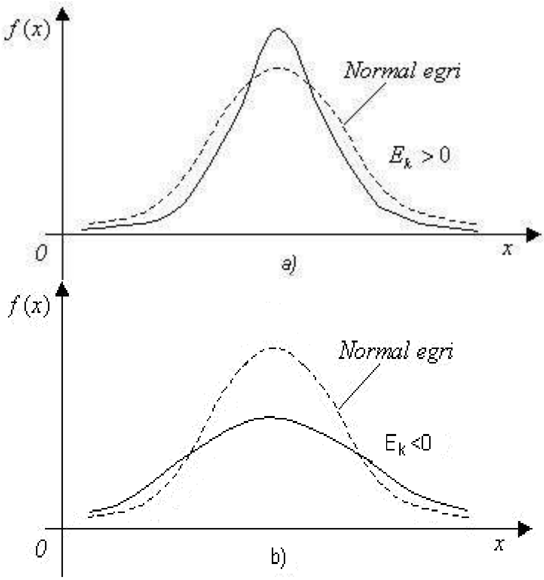
Kesgitleme. Dördünji tertipli empirik ýa-da nazary merkezi momentiň orta kwadratik gyşarmanyň dördünji derejesine bolan gatnaşygy bilen üçüň tapawudyna eksses diýilýär we E_k bilen belgilenýär.

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 \qquad (14)$$

ýa-da

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \qquad (14')$$

Eksses empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal paýlanyşyň dykyzlyk funksiýasynyň grafigine (normal egrä) görä "kertlik" derejesini häsiýetlendirýär. Empirik ýa-da nazary paýlanyşyň egrisiniň normal egrä görä, $E_k > 0$ bolsa, süýri, (2-nji çyzgy, a)), $E_k < 0$ bolsa, tekiz (2-nji çyzgy, a)) depesi bardyr.



2-nji çyzgy

Normal paýlanyş üçin $E_k = 0$. Hakykatdan hem,

$$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^4 \cdot f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^4 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$\frac{x-a}{\sigma} = y$ belgilemäni girizip alarys

$$\mu_4 = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^4 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Bölekler boýunça integrirleme usulyndan peýdalanyp taparys.

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

Ýene-de bölekler boýunça integrirleme usulyny ulanyp alarys.

$$\mu_4 = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{3\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 3\sigma^4$$

Onda

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

Şol sebäpli, eger eksses nula golaý bolsa, baş toplumyň normal paýlanyşa eýedigini aýtmak bolar.

Bellik. Eger

$$|A_s| \le 3\sigma_A \quad \text{we} \quad |E_k| \le 3\sigma_E$$

deňsizlikler adalatly bolsalar, onda empirik paýlanyşyň normal paýlanyşa golaýdygy barada netije çykarmak bolar, bu ýerde

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{n}}, \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}},$$

degişlilikde asimmetriýanyň we ekssesiň standartlary hökmünde kabul edilen ululyklar, n-saýlamanyň göwrümi.

1-nji mesele. Saýlamanýň paýlanyşy berlen.

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	4	5	20	10	6	5

Şertli momentlerden peýdalanyp
a) Saýlama orta bahany.
b) Saýlama dispersiýany,
ç) Asimmetriýany,
d) Ekssesi tapmaly.

Çözülişi.

Hasaplamalary ýeňilleşdirmek üçin, berlen x_i wariantalardan u_i şertli wariantalara geçeliň. C ýalan nul hökmünde wariasiýa hatarynyň ortasyna golaý ýerleşen we iň uly ýygylyga $(n_3 = 20)$ eýe bolan $x_3 = 50$ wariantany kabul edeliň. $h = 5$ bolandygy sebäpli, taparys.

$$u_1 = \frac{x_1 - C}{h} = \frac{40-50}{5} = -2; \quad u_2 = \frac{x_2 - C}{h} = \frac{45-50}{5} = -1;$$

$$u_3 = \frac{x_3 - C}{h} = \frac{50-50}{5} = 0; \quad u_4 = \frac{x_4 - C}{h} = \frac{55-50}{5} = 1;$$

$$u_5 = \frac{x_5 - C}{h} = \frac{60-50}{5} = 2; \quad u_6 = \frac{x_6 - C}{h} = \frac{65-50}{5} = 3.$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň.

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{4\cdot(-2)+5\cdot(-1)+10\cdot 1+6\cdot 2+5\cdot 3}{50} = 0{,}48.$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{4\cdot 4+5\cdot 1+10\cdot 1+6\cdot 4+5\cdot 9}{50} = 2$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{4\cdot(-8)+5\cdot(-1)+10\cdot 1+6\cdot 8+5\cdot 27}{50} = 3{,}12.$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{4\cdot 16+5\cdot 1+10\cdot 1+6\cdot 16+5\cdot 81}{50} = 11{,}6$$

a) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany tapalyň.

$$\bar{x}_s = M_1^* \cdot h + C = 0{,}48\cdot 5 + 50 = 52{,}4.$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň.

$$D_s = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right]\cdot h^2 = \left[2 - (0{,}48)^2\right]\cdot 25 = 44{,}24$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{44,24} \approx 6,65.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň.

$$m_3 = \left[M_3^* - 3 \cdot M_1^* \cdot M_2^* + 2 \cdot \left(M_1^*\right)^3\right] \cdot h^3 =$$
$$= \left[3,12 - 3 \cdot 0,48 \cdot 2 + 2 \cdot (0,48)^3\right] \cdot 125 \approx 57,65$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{57,65}{294,08} \approx 0,196.$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň.

$$m_4 = \left[M_4^* - 4 \cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6 \cdot \left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3 \cdot \left(M_1^*\right)^4\right] \cdot h^4 =$$
$$\left[11,6 - 4 \cdot 0,48 \cdot 3,12 + 6 \cdot (0,48)^2 \cdot 2 - 3 \cdot (0,48)^4\right] \cdot 5^4 \approx 5134,47.$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{5134,47}{(6,65)^4} - 3 \approx -0,37.$$

2-nji mesele. Saýlamanýň paýlanyşy berlen.

x_i	5	8	10	11	13	14	15	16	18	20	22	24	25
n_i	7	3	10	8	7	15	10	5	8	12	6	5	4

Şertli momentlerden peýdalanyp
a) Saýlama orta bahany.
b) Saýlama dispersiýany,
ç) Asimmetriýany,
d) Ekssesi tapmaly.

Çözülişi.

Saýlamadan görnüşi ýaly, wariantalar deňdaşlaşan däldirler. Olary deňdaşlaşan ýagdaýa getireliň. Onuň üçin wariantalaryň hemmesiniň düşen (5;25) interwalyny şol bir h=4 uzynlyklary bolan (5;9), (9;13), (13;17), (17;21), (21;25) bölek interwallara böleliň. Bu bölek interwallaryň ortalaryny y_i wariantalar hökmünde kabul edip, deňdaşlaşan

$$y_1 = 7; \quad y_2 = 11; \quad y_3 = 15; \quad y_4 = 19; \quad y_5 = 23.$$

wariantalary alarys. Täze y_i wariantalaryň n_i ýygylyklary hökmünde degişli bölek interwallara düşen x_i wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini alalyň.

$$n_1 = 7 + 3 = 10; \quad n_2 = 10 + 8 + 7 = 25; \quad n_3 = 15 + 10 + 5 = 30;$$

$$n_4 = 8 + 12 = 20; \quad n_5 = 6 + 5 + 4 = 15.$$

Şeýlelikde, deňdaşlaşan wariantalary bolan

y_i	7	11	15	19	23
n_i	10	25	30	20	15

paýlanyşy alarys. C ýalan nul hökmünde $x_3 = 1`5$ wariantany kabul edip, u_i şertli wariantalary tapalyň.

$$u_1 = \frac{y_1 - C}{h} = \frac{7 - 15}{4} = -2; \quad u_2 = \frac{y_2 - C}{h} = \frac{11 - 15}{4} = -1;$$

$$u_3 = \frac{y_3 - C}{h} = \frac{15 - 15}{4} = 0; \quad u_4 = \frac{4_4 - C}{h} = \frac{19 - 15}{4} = 1;$$

$$u_5 = \frac{y_5 - C}{h} = \frac{23 - 15}{4} = 2.$$

Başky dört şertli momentleri tapalyň.

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n} = \frac{10 \cdot (-2) + 25 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 2}{100} = 0,05.$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2}{n} = \frac{10 \cdot 4 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 4}{100} = 1,45.$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^3}{n} = \frac{10 \cdot (-8) + 25 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 8}{100} = 0,35.$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^4}{n} = \frac{10 \cdot 16 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 16}{100} = 4{,}45.$$

a) $\bar{y}_s$ saýlama orta bahany tapalyň.

$$\bar{y}_s = M_1^* \cdot h + C = 0{,}05 \cdot 4 + 15 = 15{,}2.$$

b) D_s saýlama dispersiýany tapalyň.

$$D_s = \left[M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right] \cdot h = \left[1{,}45 - (0{,}05)^2\right] \cdot 16 = 23{,}16$$

Onda

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{23{,}14} \approx 4{,}8.$$

ç) Ilki üçünji tertipli m_3 empirik merkezi momenti tapalyň.

$$m_3 = \left[M_3^* - 3 \cdot M_1^* \cdot M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right] \cdot h^3 =$$
$$= \left[0{,}35 - 3 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}45 + 2 \cdot (0{,}05)^3\right] \cdot 4^3 \approx 8{,}496.$$

Onda

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma_s^3} = \frac{8{,}496}{(4{,}8)^3} \approx 0{,}08.$$

d) Dördünji tertipli m_4 empirik merkezi momenti tapalyň.

$$m_4 = \left[M_4^* - 4 \cdot M_1^* \cdot M_3^* + 6 \cdot \left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3 \cdot \left(M_1^*\right)^4\right] \cdot h^4 =$$
$$\left[4{,}45 - 4 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}35 + 6 \cdot (0{,}05)^2 \cdot 1{,}45 - 3 \cdot (0{,}05)^4\right] \cdot 4^4 \approx 1126{,}84.$$

Onda

$$E_k = \frac{m_4}{\sigma_s^4} - 3 = \frac{1126{,}84}{(4{,}8)^4} - 3 \approx -0{,}88.$$

II.4. Korrelýasiýa nazaryýetiniň esasy düşünjeleri.

II.4.1. Funksional we statistiki baglylyklar.

Belli bolşy ýaly, tötän ululyklar bagly däl ýa-da bagly bolup bilýärler.

Eger ξ tötän ululygyň kabul edýän her bir bahasyna η tötän ululygyň kabul edýän kesgitli bir bahasy degişli bolsa, onda ξ we η tötän ululyklaryň arasynda funksional baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, tegelegiň S meýdany bilen r radiusynyň arasynda $S = \pi r^2$ görnüsli funksional baglylyk bardyr. Ýöne, tötän ululyklar tötän täsirleriň astynda bolandyklary sebäpli, olaryň arasynda funksional baglylyk seýrek duş gelýär.

Eger bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň paýlanyşynyň üýtgemegine getirýän bolsa, onda olaryň arasynda statistiki baglylyk bar diýilýär. Mysal üçin, şol bir göwrümleri bolan suwly iki howuza şol bir mukdardaky balyk işbilleri goýberilse, bu howuzlardan dürli mukdardaky balyk alnar. Işbilleriň we balyklaryň mukdarlarynyň arasynda baglylygyň bardygy aýdyňdyr. Emma bu funksional baglylyk däl-de statistiki baglylykdyr.

Goý, ξ tötän ululygyň her bir bahasyna η tötän ululygyň birnäçe bahasy degişli bolsun. ξ tötän ululygyň x bahasyna degişli bolan, η tötän ululygyň bahalarynyň $\bar{y}_x$ orta arifmetiki bahasyna şertli orta baha diýilýär. Eger bu şertli orta baha x üýtgeýäne bagly

$$\bar{y}_x = f(x) \qquad (1)$$

funksiýa bolsa, onda η we ξ tötän ululyklaryň arasynda korrelýasiýa baglylygy bar diýilýär. Başgaça aýdylanda, korrelýasiýa baglylygynda bir tötän ululygyň üýtgemegi beýleki tötän ululygyň orta bahasynyň üýtgemegine getirýär. (1) deňlemä η tötän ululygyň ξ tötän ululyga regressiýa deňlemesi, $f(x)$ funksiýa regressiýa funksiýasy, bu funksiýanyň grafigine bolsa, regressiýa çyzygy diýilýär.

ξ tötän ululygyň η tötän ululyga

$$\bar{x}_y = \varphi(y)$$

regressiýasy hem edil şuňa meňzeş kesgitlenýär.

Eger $f(x)$ we $\varphi(y)$ regressiýa funksiýalarynyň ikisi hem çyzykly bolsa, onda korrelýasiýa çyzykly diýilýär.

Tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygynyň güýjüni tötän ululyklaryň bahalaryň şertli orta bahalaryň töweregindäki ýaýraw öçegi bilen kesgitleýärler. Ýaýraw ölçegi uly boldugyça, tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygy gowşaýar.

II.4.2. Regressiýa gönüsiniň deňlemesi.

Goý, baş toplum ξ we η mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy bar diýeliň. η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini tapmaklyk maksady bilen, baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilip, sanlaryň

$$(x_1;y_1),\ (x_2;y_2),\ldots,(x_n;y_n)$$

n jübüti alnan bolsun, bu ýerde x_i, $i=\overline{1,n}$, ξ nyşanyň, y_i, $i=\overline{1,n}$, η nyşanyň kabul edýän bahalary. Goý, bu jübütleriň her birine bir gezek gözegçilik edilýän bolsun. Onda $\bar{y}_x$ şertli orta bahany ulanmaklygyň zerurlygy ýok bolýar. Şol sebäpli

$$\bar{y}_x = \rho x + b$$

deňlemä derek

$$Y = \rho x + b \qquad (2)$$

deňlemä garaýarlar, bu ýerde ρ regressiýanyň saýlama koeffisiýenti. Anyk (2) regressiýa deňlemesini ýazmaklyk üçin

ρ we b ululyklary tapmak ýeterlikdir. Bu ululyklary $Y_i - y_i$, $i = \overline{1, n}$, gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi minimal bolar ýaly saýlap alalyň, bu ýerde Y_i gözegçilik edilýän x_i warianta degişli we (2) deňlemeden tapylan ordinata, y_i bolsa x_i warianta degişli ordinata. Gyşarmalaryň kwadratlarynyň jemi ρ we b ululyklardan

$$G(\rho; b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2$$

funksiýadyr. Bu funksiýanyň minimumyny tapalyň.

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{d\rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{dG}{db} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp, taparys.

$$\rho = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \qquad (4)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \qquad (5)$$

ρ we b ululyklaryň bu bahalaryny (2) deňlemede ornuna goýup, η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň anyk görnüşini taparys.

Goý, indi ξ we η nyşanlaryň $(x; y)$ bahalar jübütleriniň arasynda birden köp gezek gözegçilik edilýänleri hem bar bolsun. Bu ýagdaýda η nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň deňlemesini

$$\bar{y}_x = \rho x + b \qquad (6)$$

görnüşde gözleýärler. (3) deňlemeler ulgamyny özgerdip ýazalyň.

$$\begin{cases} n\overline{x^2} \cdot \rho + n\bar{x}b = \sum n_{xy} \cdot x \cdot y \\ \bar{x} \cdot \rho + b = \bar{y} \end{cases} \qquad (7)$$

bu ýerde n_{xy} ululyk $(x; y)$ jübütiň gözegçilik edilen sany. Bu ulgamyň ikinji deňlemesinden taparys.

$$b = \bar{y} - \bar{x} \cdot \rho$$

b ululygyň bu bahasyny (6) deňlikde ornuna goýup, regressiýa gönüsiniň

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho(x - \bar{x}) \qquad (8)$$

deňlemesini alarys.

(7) ulgamdan ρ ululygy tapalyň

$$\rho = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n\left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right]} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot \sigma_\xi^2}$$

Bu deňligiň iki tarapyny hem $\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$ gatnaşyga köpeldeliň.

$$\rho \cdot \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} \qquad (9)$$

$$r_s = \frac{\sum n_{xy} \cdot x \cdot y - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} \qquad (10)$$

belgilemäni girizip, (9) deňlikden taparys.

$$\rho = r_s \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$$

r_s ululyga **saýlama korrelýasiýa** koeffisiýenti diýilýär. ρ ululygyň tapylan bahasyny (8) deňlemede ornuna goýup, η

nyşanyň ξ nyşana regressiýa gönüsiniň korrelýasiýa koeffisiýentli

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_s \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - \bar{x}) \qquad (11)$$

deňlemesini alarys.

Goý, D_y η nyşanyň kabul edýän *y* bahalarynyň $\bar{y}$ orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy, D_y^* bolsa, degişli $\bar{y}_x$ şertli orta bahanyň töweregindäki dispersiýasy bolsun. Onda

$$D_y^* = D_y \cdot (1 - r_s^2) \qquad (12)$$

deňlik adalatlydyr. Indi korrelýasiýa koeffisiýentiniň häsiýetlerine garalyň.

1. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy birden uly däldir, ýagny

$$|r_s| \le 1$$

Hakykatdan hem, dispersiýanyň otrisatel däldigi sebäpli

$$D_y^* = D_y \cdot (1 - r_s^2) \ge 0$$

bolar. Bu ýerden

$$(1 - r_s^2) \ge 0$$

ýa-da

$$|r_s| \le 1$$

2 Eger korrelýasiýa koeffisiýenti nula deň we regressiýa çyzyklary gönüler bolsalar, onda nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygynda däldirler.

Hakykatdan hem, eger $r_s = 0$ bolsa, (11) deňlemeden

$$\bar{y}_x = \bar{y}$$

deňligi alarys. Görnüşi ýaly, $\bar{y}_x$ şertli orta bahalar *x* argumentiň islendik bahasynda şol bir hemişelik baha eýedirler. Bu bosa, nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň ýokdugyny aňladýar. Bu ýagdaýda regressiýa gönüleri degişli koordinata oklaryna paralleldirler.

3. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygynyň artmagy bilen çyzykly korrelýasiýa baglylygy has güýjeýär we $|r_s| = 1$ bolanda funksional baglylyga geçýär.

Hakykatdan hem, (12) deňlikden görnüşi ýaly, korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy artdygyça D_y^* dispersiýa kemelýär. Bu bolsa, nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň güýjüniň artýandygyny aňladýar. $|r_s| = 1$ bolsa, (12) deňlikden alarys

$$D_y^* = D_y \cdot \left(1 - r_s^2\right) = 0.$$

Bu ýerden, ξ we η nyşanlaryň bahalarynyň islendik $(x; y)$ jübütiniň

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_s \cdot \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\left(x - \bar{x}\right)$$

deňlemäni kanagatlandyrýandygy gelip çykýar. Bu bolsa, ξ we η nyşanlaryň bahalarynyň arasynda çyzykly funksional baglylygyň bardygyny aňladýar.

Garalan bu häsiýetlerden görnüşi ýaly, saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nyşanlaryň arasyndaky çyzykly baglylygyň güýjüni häsiýetlendirýär: korrelýasiýa koeffisiýentiniň absolýut ululygy bire golaý boldugyça baglylyk güýjeýär, nula golaý boldugyça gowşaýar.

Bellik 1. Saýlamada nyşanlaryň bahalarynyň çyzykly funksional baglylykda bolmagy, baş toplumda-da şeýle baglylygyň bolmagyny üpjün etmeýär. Onuň üçin saýlamanyň göwrüminiň uly bolmagy $(n \geq 50)$ we saýlamanyň wekilçilikli bolmagy gerekdir.

Bellik 2. Eger saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nula deň bolsa, onda nyşanlar çyzykly däl korrelýasiýa ýa-da funksional baglylygynda bolup bilerler.

Mesele. Ölçemeler hatarlarynyň arasyndaky korrelýasiýanyň kesgitlenişi.

Ölçemeler hatarlarynyň arasyndaky korrelýasiýany kesgitlemek üçin koordinatalar tekizliginde nyşanlaryň bahalar jübütlerine degişli nokatlary gurýarlar we korrelýasiýa baglylygynyň görnüşini anyklaýarlar.

Çyzykly korrelýasiýa bolan halatynda:

1) ölçemeler hatarynyň ikisi üçin hem nyşanlaryň orta arifmetiki bahalaryny, orta bahalardan gyşarmalary we standartyň empirik bahasyny hasaplamak;
2) korrelýasiýa koeffisiýentini tapmak;
3) regressiýa gönüsiniň parametrlerini tapmak;
4) regressiýa gönüsiniň iň ähtimal gyşarmalaryny we olaryň orta kwadratik bahasyny hasaplamak;
5) barlag üçin iň ähtimal gyşarmalaryň orta kwadratik bahasynyň kömegi bilen korrelýasiýa koeffisiýentini tapmak;
6) regressiýa gönüsiniň grafigini gurmak;
7) korrelýasiýa koeffisiýentiniň takyklygyny barlamak gerekdir.

Ýumuşyň ýerine ýetirilişine aşakdaky mysalda garalyň.

Tablisada trilatesiýanyň taraplarynyň uzynlyklary we olaryň orta kwadratik ýalňyşlyklary berlen.

x 1	y 2	δx 3	δy 4	δx^2 5	δy_i^2 6	$\delta x\,\delta y$ 7	Y_i 8	$v_i = Y - y$ 9	v_i^2 10
0,5	1,7	-9,41	-6	88,55	36	56,46	2,22	0,52	0,274
1,4	3,6	-8,51	-4,1	72,42	16,81	34,89	2,75	-0,85	0,728
2,2	6,5	-7,71	-1,2	59,44	1,44	9,25	3,21	-3,29	10,808
2,7	4,8	-7,21	-2,9	51,98	8,41	20,91	3,50	-1,30	1,681
3,5	4,5	-6,41	-3,2	41,09	10,24	20,51	3,97	-0,53	0,282
3,8	4,7	-6,11	-3	37,33	9	18,33	4,14	-0,56	0,310
5,6	2,9	-4,31	-4,8	18,58	23,04	20,69	5,19	2,29	5,250
6,3	6,7	-3,61	-1	13,03	1	3,61	5,60	-1,10	1,213
7,9	5,9	-2,01	-1,8	4,04	3,24	3,62	6,53	0,63	0,397
8,6	5,4	-1,31	-2,3	1,72	5,29	3,01	6,94	1,54	2,363
9,3	6,5	-0,61	-1,2	0,37	1,44	0,73	7,34	0,84	0,713
10,5	4,4	0,59	-3,3	0,35	10,89	-1,95	8,04	3,64	13,271
11,3	4,1	1,39	-3,6	1,93	12,96	-5,00	8,51	4,41	19,436
12,6	8,2	2,69	0,5	7,24	0,25	1,35	9,27	1,07	1,135
13,1	10,2	3,19	2,5	10,18	6,25	7,98	9,56	-0,64	0,414
14,5	12,4	4,59	4,7	21,07	22,09	21,57	10,37	-2,03	4,117
17,6	13,7	7,69	6	59,14	36	46,14	12,18	-1,52	2,325
19,1	17,9	9,19	10,2	84,46	104,04	93,74	13,05	-4,85	23,540
22	13,5	12,09	5,8	146,17	33,64	70,12	14,74	1,24	1,528
25,7	16,4	15,79	8,7	249,32	75,69	137,37	16,89	0,49	0,240
$\sum x =$ 198,2	$\sum y =$ =154	$\sum \delta x = 0$	$\sum \delta y = 0$	$\sum \delta x^2 =$ =968,40	$\sum \delta y^2 =$ =417,72	$\sum \delta x\,\delta y =$ =563,33	-	-	$\sum v^2 =$ =90,024

Korrelýasiýa baglygynyň grafigi tablisanyň 1-nji we 2-nji sütünlerindäki maglumatlar boýunça gurulýar. x_i we y_i degişli bahalaryň her bir jübüti üçin gönüburçly koordinatalar ulgamynda nokatlar gurulýar. Grafik garalýan nyşanlaryň arasyndaky baglylygyň görnüşi barada çen etmäge mümkinçilik berýär. Nokatlar bir göni çyzygyň golaýynda toplanandyklary sebäpli, nyşanlaryň arasynda çyzykly baglylyk bar diýip hasap etmek bolar.

1.Ölçemeler hatarlarynyň ikisi üçin hem nyşanlaryň $\bar{x}$ we $\bar{y}$ orta arifmetiki bahalaryny tapalyň.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{198{,}2}{20} = 9{,}91;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{154{,}0}{20} = 7{,}70;$$

$$\delta x_i = x_i - \bar{x}\,; \quad \delta y_i = y_i - \bar{y}\,.$$

gyşarmalary hasaplap, degişlilikde tablisanyň üçünji we dördünji sütünlerinde ýazalyň. Eger hasaplamalar dogry geçirilen bolsa, onda

$$\sum_{i=1}^{n} \delta x_i = 0 \quad \text{we} \quad \sum_{i=1}^{n} \delta y_i = 0\,.$$

deňlikler ýerine ýetmelidirler.

Gyşarmalaryň

$$\delta x_i^2 = (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{we} \quad \delta y_i^2 = (y_i - \bar{y})^2$$

kwadratlaryny hasaplap, tablisanyň bäşinji we altynjy sütünlerinde ýazalyň. Gyşarmalaryň $\delta x_i \delta y_i$ köpeltmek hasyllaryny hasaplap, tablisanyň ýedinji sütüninde ýazalyň. Standartyň empirik bahasyny tapalyň.

$$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{968{,}4}{20}} = 6{,}96$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{417{,}72}{20}} = 4{,}57\,.$$

2. Korrelýasiýa koeffisiýentini tapalyň

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta x_i \delta y_i}{n} \cdot \frac{1}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{563{,}33}{20} \cdot \frac{1}{6{,}96 \cdot 4{,}57} = 0{,}886..$$

3. $$Y = \rho \cdot x + b\,.$$

regressiýa gönüsiniň parametrlerini tapalyň

$$\rho = r\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} = 0{,}896\frac{4{,}57}{6{,}96} = 0{,}582\,.$$

$$b = \bar{y} - \rho \cdot \bar{x} = 7{,}70 - 0{,}582\ 9{,}91 = 1{,}932.$$

Onda gözlenýän regressiýa gönüsiniň deňlemesi

$$Y = 0{,}582x + 1{,}932 \qquad (13)$$

bolar.

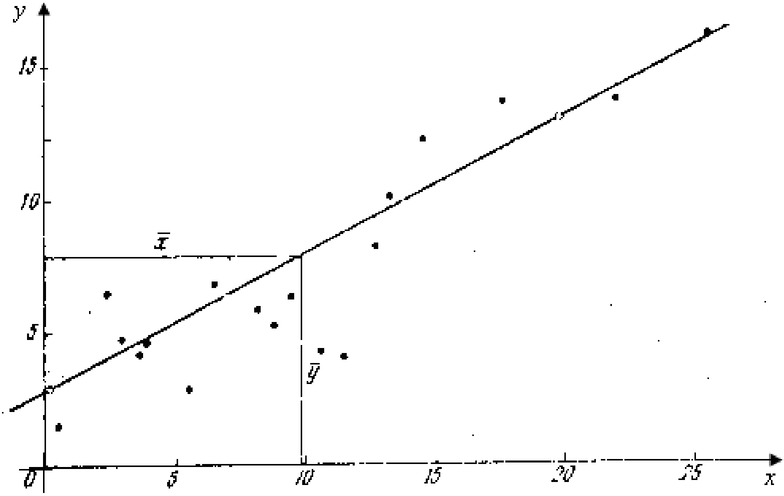
4. Regressiýa gönüsiniň $\nu_i = Y_i - y_i$ iň ahtimal gyşarmalaryny we olaryň kwadratlaryny hasaplap, degişlilikde tablisanyň dokuzynjy we onunjy sütünlerinde ýazalyň. Regressiýa gönüsiniň iň ähtimal gyşarmasynyň orta kwadratik bahasyny tapalyň.

$$\bar{\sigma}_\nu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{90{,}024}{20}} = 2{,}12\,.$$

5. Hasaplamalaryň dogry geçirilendigini barlamak üçin, iň ähtimal gyşarmanyň orta kwadratik bahasynyň kömegi bilen korrelýasiýa koeffisiýentini tapalyň.

$$r = \sqrt{1 - \frac{\bar{\sigma}_\nu^2}{\sigma_\eta^2}} = \sqrt{1 - \frac{4{,}49}{20{,}88}} = 0{,}886\,.$$

6. Tablisadan peýdalanyp, *Y=0,582x+1,932* regressiýa gönüsiniň grafigini guralyň.



Ölçemeler hatarlarynyň arasyndaky korrelýasia baglylygy

7. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň takyklygyny tapalyň.

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} = \frac{1-(0{,}886)^2}{\sqrt{20}} = 0{,}048.$$

Bellik. Göwrümi 50-den uly bolan $(n > 50)$ hatar üçin $|r| \geq 3\sigma_r$ deňsizlik ýerine ýetýan bolsa, onda garalýan nyşanlaryň arasynda korrelýasiýa baglylygy bar hasap etmek bolar.

II.5. Statistiki çaklamalar we kriteriler.

II.5.1. Statistiki çaklamalar.

Goý, baş toplum haýsy hem bolsa bir nyşana görä öwrenilýan bolsun. Bu nyşanyň näbelli paýlanyşy ýa-da belli paýlanyşynyň näbelli parametrleri barada aýdylan güman etmelere **statistiki çaklamalar** diýilýär. Näbelli θ parametriň kesgitli bir θ_0 baha eýedigi barada aýdylan güman etmä **ýönekeý çaklama** diýilýär. Eger θ parametr käbir köplükden bahalary kabul edýän bolsa, onda oňa **çylşyrymly çaklama** diýilýär. Mysal üçin, eger

$$f(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

normal kanunyň dykyzlyk funksiýasy bolsa, onda "$a=0,\quad \sigma=1$" diýlen çaklama ýönekeýdir, "$a=a_0$" diýlen çaklama bolsa çylşyrymlydyr, sebäbi soňky çaklamada σ parametr islendik otrisatel däl bahany kabul edip biler.

Statistiki çaklamalary barlamaklyk meselesi şeýle goýulýar. Goý, $f(x;\theta)$ dykyzlyk funksiýaly baş toplumdan bagly däl

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{1}$$

saýlama geçirilen bolsun. θ parametr barada

$$H_0:\theta\in A \quad \text{(A-käbir köplük)}$$

çaklama aýdylýar. Bu çaklama **esasy (nulunjy ýa-da barlanylýan) çaklama** diýilýär. H_0 esasy çaklama bilen bir hatarda

$$H_1:\theta\,\overline{\in}\,A$$

bäsdeş ýa-da alternatiw çaklama hem garaýarlar. Mysal üçin, eger H_0 esasy çaklama “Puasson kanunynyň λ matematiki garaşmasy 5-e deň” diýlen güman etmeden ybarat bolsa, onda H_1 bäsdeş çaklama "$\lambda \neq 5$" diýlen güman etme bolar.

H_0 esasy çaklama bilen (1) saýlamanyň ylalaşygyny anyklamak möhüm meseleleriň biri bolup durýar. Esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde paýlanyşy belli bolan tötän ululykdan peýdalanýarlar. Kesgitli bir kriteri saýlanyp alnandan soň, onuň bahalar köplügini kesişmeýän iki bölege bölýärler. Bu bölekleriň birinde esasy çaklama kabul edilýär, beýlekisinde bolsa inkär edilýär. Esasy çaklamanyň inkär edilýän bölegine **kritiki köplük** diýilýar. Çaklamanyň kabul edilýän we kritiki köplüklerini bölýän nokatlara **kritiki nokatlar** diýilýär we k_{kr} bilen belgilenýär.

Eger kriteri hökmünde saýlanyp alnan tötän ululygyň paýlanyş kanuny gyzyklandyrmaýan bolsa, onda ony K bilen belgileýärler.

$$K < k_{kr}, \quad K > k_{kr}, \quad (k_{kr} > 0), \quad K < k_{kr.1} \text{ we}$$

$$K > k_{kr.2}. \quad (k_{kr.1} < k_{kr.2})$$

deňsizliker bilen kesgitlenýän köplüklere degişlilikde **çeptaraplaýyn, sagtaraplaýyn** we **ikitaraplaýyn kritiki köplükler** diýilýär. (1) saýlamanyň S kritiki köplüge düşmeginiň ähtimallygyny

$$P(x \in S) = P_\theta(S) = \int_S f(x;\theta)dx \qquad (2)$$

bilen belgileýärler. Kritiki köplügi (2) ähtimallyk iň kiçi bolar ýaly edip saýlaýarlar.

II.5.2. Kriteriniň ähmiýetlilik derejesi we kuwwatlylygy.

S kritiki köplügiň kömegi bilen gurulýan kriterä ***S*-kriteri** diýilýar. Her bir S-kriteri bilen ýalňyşlygyň iki jynsyny baglanyşdyrýarlar. Birinji jynsly ýalňyşlyk dogry H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmegidir. Ikinji jynsly ýalňyşlyk nädogry H_0 esasy çaklamanyň kabul edilmegidir. Bu ýalňyşlyklaryň haýsysynyň nähili netijelere getirjekdigi goýulýan meselä baglydyr.

$$P_i(A) = \int_A f(x;\theta_i)dx, \quad i = 0;1 \tag{3}$$

belgilemäni girizeliň, bu ýerde *A*-käbir köplük. Onda S-kriteriniň birinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy

$$\alpha = P_0(S), \tag{4}$$

ikinji jynsly ýalňyşlygynyň ähtimallygy bolsa

$$\beta = P_1(\overline{S}), \tag{5}$$

bolar, bu ýerde $\overline{S} = X \setminus S,$ (*X*-baş toplum)

Birinji jynsly ýalňyşlygyň α ähtimallygyna *S*-kriteriniň **ähmiýetlilik derejesi** diýilýär.

$$W(S;\theta) = \int_S f(x;\theta)dx \tag{6}$$

funksiýa *S*-kriteriniň **kuwwatlylyk funksiýasy** diýilýär. Bu funksiýa parametriň hakyky bahasy θ bolanda, H_0 esasy çaklamanyň inkär edilmeginiň ähtimallygydyr. (4)-(6) aňlatmalardan görnüşi ýaly, birinji we ikinji jynsly ýalňyşlyklaryň ähtimallyklaryny kuwwatlylyk funksiýasy arkaly

$$\alpha = W(S;\theta), \quad 1-\beta = W(S;\theta)$$

görnüşde aňlatmak bolar.

Şeýlelikde H_1 bäsdeş çaklamada H_0 esasy çaklamany barlamaklyk meselesi şeýle goýulýar: ilki α ähmiýetlilik derejesi berilýär we şeýle ähmiýetlilik derejeleri bolan hemme *S*-kriterileriň F_α köplügine garalýar. Soňra bu kriterileriň arasyndan $\theta = \theta_1$ bolanda iň uly kuwwatlylygy bolan S^*-kriteri saýlanyp alynýar, ýagny

$$W(S^*;\theta_0) = \alpha, \quad W(S^*;\theta_1) = \max_{S\in F_\alpha} W(S;\theta_1).$$

Bu S^*-kriterä **has kuwwatly ýa-da optimal** diýilýär.

II.5.3. Korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetliligi baradaky çaklamanyň barlanyşy.

Goý, normal kanun boýunça paýlanan baş toplum ξ we η mukdar nyşanlara görä öwrenilýän bolsun. Bu toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilip tapylan r_s saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti nuldan tapawutly bosun. Bu ýerden r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti hem nuldan tapawutlydyr diýlen netije gelip çykmaýar. Şol sebäpli, berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1 : r_b \neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nula deňdigi baradaky $H_0 : r_b = 0$ esasy çaklamany barlamaklyk zerurlygy ýüze çykýar.

Eger H_0 esasy çaklama kabul edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti nula deňdir. Diýmek, ξ we η nyşanlaryň arasynda çyzykly korrelýasiýa baglylygy ýokdur. Eger H_0 esasy çaklama inkär edilse, onda r_b baş korrelýasiýa koeffisiýenti nuldan tapawutlydyr. Bu ýagdaýda ξ we η nyşanlar çyzykly korrelýasiýa baglylygyndadyrlar.

H_0 esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde k=n-2 erkinlik derejeleri bolan Stýudent kanuny boýunça paýlanan

$$T = \frac{r_s \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

tötän ululygy kabul edýärler. Bäsdeş çaklama $H_1 : r_b \neq 0$ bolandygy sebäpli, kritiki köplük ikitaraplaýyndyr. Ikitaraplaýyn kritiki köplük gurulanda *T* kriteriniň bu köplüge düşmeginiň ähtimallygynyň berlen α ähmiýetlilik derejesine deň bolmagyndan ugur alýarlar. Bu ýagdaýda iň uly kuwwatlylyk

$$P(T < t_{kr.1.}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{we} \quad P(T > t_{kr.2.}) = \frac{\alpha}{2}, \qquad (t_{kr.1.} < t_{kr.2.})$$

deňlikler adalatly bolanlarynda alynýar. Stýudent paýlanyşynyň nula görä simmetrikdigi sebäpli, $t_{kr.}(\alpha;k)$ sag we $-t_{kr.}(\alpha;k)$ çep $(t_{kr.}>0)$ kritiki nokatlary tapmaklyk ýeterlikdir. Bu ýagdaýda ikitaraplaýyn kritiki köplük

$$|T|<t_{kr.}(\alpha;k)$$

deňsizligiň kömegi bilen gurulýar. H_0 esasy çaklamanyň kabul ediýän köplügi bolsa, $[-t_{kr.}(\alpha;k);t_{kr.}(\alpha;k)]$ kesimdir.

Saýlamanyň maglumatlary boýunça kriteriniň gözegçilik edilen bahasyny $T_{gozeg.}$ bilen belgileýärler. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde we $H_1:r_b\neq 0$ bäsdeş çaklamada r_b baş korrelýasiýa koeffisiýentiniň nula deňdigi baradaky $H_0:r_b=0$ esasy çaklamany barlamak üçin ilki T kriteriniň gözegçilik edilen

$$T_{gozeg.}=\frac{r_s\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

bahasyny tapýarlar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, k=n-2 erkinlik derejeleriniň sany we Stýudent paýlanyşynyň kritiki nokatlarynyň tablisasy boýunça(Goşmaça VI) ikitaraplaýyn kritiki köplük üçin $t_{kr.}(\alpha;k)$ kritiki nokady tapýarlar. Eger $|T|<t_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdur. Eger $|T|>t_{kr.}(\alpha;k)$ bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär edýärler.

II.5.4. Pirsonyň kriterisi.

Goý, baş toplum paýlanyş kanuny näbelli bolan ξ nyşana görä öwrenilýän bolsun. Bu näbelli paýlanyşyň güman edilýän kanundygy baradaky çaklamany barlamak üçin ulanylýan kriterä ylalaşyk kriterisi diýilýär. Şeýle kriterileriň biri hem iňlis matematigi K. Pirsonyň (Karl Pirson, 27.03.1857-27.04.1936) χ^2 (hi-kwadrat) kriterisidir. Bu kriteriniň hususu halda, ξ nyşan normal kanun boýunça paýlanan diýlen guman etmede ulanylyşyna garalyň.

Goý, baş toplumdan *n* göwrümli saýlama geçirilip

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_m

statistiki paýlanyş alnan we $n_i^{/}$ nazary ýygylyklar hasaplanan bolsun. Berlen α ähmiýetlilik derejesinde ξ nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin kriteri hökmünde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(n_i - n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}} \qquad (1)$$

tötän ululykdan peýdalanýarlar. Saýlamanyň göwrümi artdygyça bu tötän ululygyň paýlanyşy baş toplumyň haýsy kanun boýunça paýlanandygyna garamazdan *k* erkinlik derejeleri bolan we

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0. \end{cases}$$

dykyzlyk funksiýaly χ^2 paýlanyş kanunyna ýygnanýar, bu ýerde

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} y^{x-1}\cdot e^{-y}dy$$

gamma funksiýa. Şol sebäpli (1) tötän ululyga χ^2 ylalaşyk kriterisi diýilýär. Erkinlik derejeleriniň sanyny k=m-1-r deňlikden peýdalanyp tapýarlar, bu ýerde *m*-dürli wariantalaryň (ýa-da bölek interwallaryň) sany, *r*-güman edilýän paýlanyş kanunynyň bahalandyrylýan parametrleriniň sany. Normal kanun üçin *r=2* (matematiki garaşma we orta kwadratik gyşarma).

Garalýan ýagdaýda, H_0 esasy çaklama adalatly bolanda we berlen α ähmiýetlilik derejesinde

$$P\left(\chi^2 > \chi_{kr.}(\alpha;k)\right)=\alpha$$

deňlik ýerine ýeter ýaly edip sagtaraplaýyn kritiki köplügi gurýarlar.

χ^2 ylalaşyk kriterisiniň saýlamanyň maglumatlary boýunça gözegçilik edilip tapylan bahasyny $\chi^2_{gozeg.}$ bilen belgiläliň. Şeýlelikde, ξ nyşanyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany barlamak üçin ilki $n_i^{/}$ nazary ýygylyklary, soňra χ^2 kriteriniň gözegçilik edilýän

$$\chi^2_{gozeg.}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(n_i-n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}}$$

bahasyny tapýarlar. Soňra berlen α ähmiýetlilik derejesi, k=m-3 erkinlik derejesiniň sany we χ^2 paýlanyşyň kritiki nokatlarynyň tablisasy (GoşmaçaV) boýunça $\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$ kritiki nokady tapýarlar. Eger

$$\chi^2_{gozeg.}<\chi^2_{kr.}(\alpha;k)$$

bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär etmäge esas ýokdur. Eger

$$\chi^2_{gozeg.} > \chi^2_{kr.}(\alpha; k)$$

bolsa, onda H_0 esasy çaklamany inkär edýärler.

Bellik. (1) formulany

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{n_i^/} - n$$

görnüsde hem ýazmak bolar.

III. MYSALLAR

III.1. Aerofotometrik ölçeglerde meýdan hasaplamak.

Aerofotometrik ölçegiň netijesinde surata düşürilen meýdan kwadrat görnüşde we onuň tarapy 350 metre deň. Aerofoto düşürilende, suratyň hili

0 metr ýalňyşlyk goýberilmeginiň ähtimallygy 0,42 -ä,

± 10 metr ýalňyşlyk goýberilmeginiň ähtimallygy 0,16-a,

± 20 metr ýalňyşlyk goýberilmeginiň ähtimallygy 0,08-e,

± 30 metr ýalňyşlyk goýberilmeginiň ähtimallygy 0,05-e

deň bolmaklygy bilen kesgitlenýär. Meýdanyň orta bahasyny tapmaly.

Aerofotometrik ölçegiň netijesinde surata düşürilen meýdanyň tarapy tötän ululyk. Onuň paýlanyş kanuny

ξ	320	330	340	350	360	370	380
p	0,05	0,08	0,16	0,42	0,16	0,08	0,05

tablisa görnüşde berlen. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$M\xi =$320 0,05+330 0,08 +340 0,16 +350 0,42 +360 0,16+370 0,08 +380 0,05=

= (320+380) 0,05+ (330+370) 0,08+ (340+360) 0,16 +350 0,42=

=2 350 0,05 +2 350 0,08+2 350 0,16+350 0,42=

=350(2 0,05 +2 0,08 +2 0,16 +042)=350 m

Taraplaryň uzynlyklarynyň orta arifmetiki bahasy hem 350 metre deňdir: $\bar{x} = 350\ m$

Surata düşürilen meýdanyň orta bahasy 350^2=122500 m^2 bolaýmaly ýaly, emma ol beýle däl, sebäbi tötän ululygyň kwadratynyň orta bahasy orta bahanyň kwadratyna deň däldir. Ölçenýän meýdançanyň meýdany tötän ululykdyr. Onuň paýlanýş kanuny

$S = \xi^2$	320^2	330^2	340^2	350^2	360^2	370^2	380^2
p	0,05	0,08	0,16	0,42	0,16	0,08	0,05

bolar. Bu tötän ululygyň matematiki garaşmasyny tapalyň

$MS = M\xi^2$ =320^2 0,05+330^2 0,08 +340^2 0,16 +350^2 0,42 +360^2 0,16+370^2 0,08 +380^2 0,05=

=(320^2+380^2) 0,05+ (330^2+370) 0,08+ (340^2+360^2) 0,16 +350^2 0,42=

=350^2 0,42 +[$(350-30)^2$+$(350+30)^2$] 0,05+[$(350-20)^2$+$(350+20)^2$] 0,08+

+[$(350-10)^2$+$(350+10)^2$] 0,16=350^2[0,42+2 0,16+2 0,08+2 0,05]+

+2 10^2 0,16 + 2 20^2 0,08+ 2 30^2 0,05=350^2 +2(16+32+45)=122686 m^2

Şeýlelikde, gözlenýan meýdanyň orta bahasy takmynan 122686 m^2 deňdir.

III.2. Wariasiýa hatarynyň häsiýetlendirijilerini hasaplamak.

Mysal. Berlen A we B maglumatlar boýunça

1. Wariasiýa hataryny düzmeli;
2. Otnositel we toplanan ýygylyklary hasaplamaly;
3. Wariasiýa hatarynyň grafigini gurmaly (poligon we gistogramma);
4. Empirik paýlanyş funksiyýasyny tapmaly we onuň grafigini gurmaly;
5. Wariasiýa hatarynyň san häsiýetlendirijilrtini:
   a) $\bar{x}_s$ saýlama orta bahany;
   b) D_s saýlama dispersiýany;
   ç) σ_x saýlama orta kwadratik gyşarmany;
   d) M_0 modany;
   e) M_e medianany
   tapmaly.

A

2	1	0	3	7	4	3	0
4	2	2	3	4	3	6	0
2	3	4	1	3	1	4	4
4	2	3	1	4	4	1	6
3	2	2	2	2	5	3	4
3	4	2	3	3	3	2	7
3	3	3	1	2	4	4	4
2	3	3	4	3	2	1	1
0	5	1	3	3	4	3	3
6	1	3	1	1	5	1	

B.

65	71	69	74	80	73	71	68	72	78	76	66	73	74
65	69	68	72	72	69	70	71	74	70	78	75	72	74
74	74	74	76	72	71	76	71	70	73	65	73	69	65
67	75	72	75	69	74	71	67	75	75	69	66	67	63
73	70	66	72	69	71	73	67	69	73	76	62	72	70
71	78	66	72	75	71	69	77	64	68	73	68	77	
74	66	74	64	72	75	68	80	70	78	66	70	75	
71	69	69	68	71	74	63	68	76	73	71	69	72	
70	74	72	73	69	72	74	71	70	71	66	69	68	
76	81	78	68	75	71	70	71	69	71	69	65	67	
68	73	67	74	68	73	69	70	76	74	74	71	69	
67	74	77	68	76	66	74	72	78	67	79	69	69	
71	63	73	69	69	69	63	72	61	74	65	70	73	
73	67	69	71	70	64	68	68	68	74	69	67	67	
71	70	66	60	72	68	74	69	66	74	71	76	73	

Çözülişi. 1. Mysaly ilki A maglumatlar üçin çözeliň. Maglumatlary artýan tertipde ýerleşdireliň

Tablisa1

0	1	2	2	3	3	4	4
0	1	2	3	3	3	4	5
0	1	2	3	3	3	4	5
0	1	2	3	3	3	4	5
1	1	2	3	3	3	4	6
1	1	2	3	3	4	4	6
1	1	2	3	3	4	4	6
1	2	2	3	3	4	4	7
1	2	2	3	3	4	4	7
1	2	2	3	3	4	4	

Wariasiýa hataryndan görnüşi ýaly 0-lyk warianta $n_1 = 4$, 1-lik warianta $n_2 = 13$, 2-lik warianta $n_3 = 14$, 3-lik warianta $n_4 = 24$, 4-lük warianta $n_5 = 16$, 5-lik warianta $n_6 = 3$, 6-lyk warianta $n_7 = 3$, 7-lik warianta $n_8 = 2$ gezek duş gelýär.

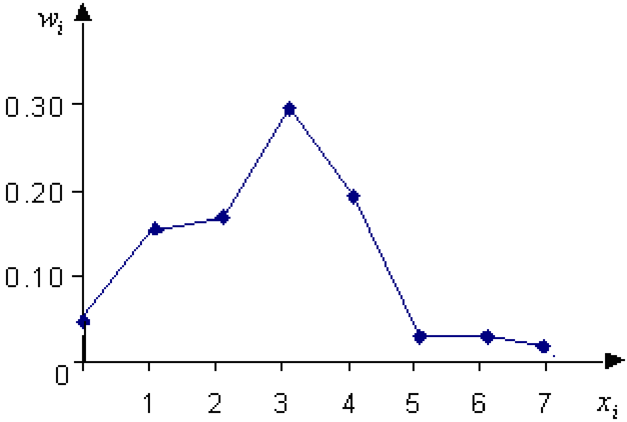
Netijede ranžirlenen hatary alarys. Tablisa 2-niň 1-nji sütüninde wariantalary, 2-nji sütüninde bolsa wariantalaryň ýygylyklaryny ýazalyň.

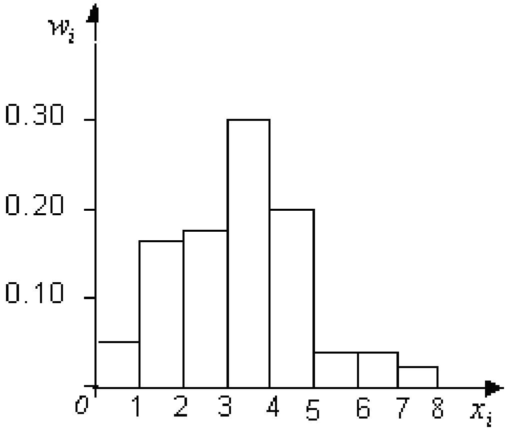
2. Wariantalaryň otnositel ýygylyklaryny $w_i = \frac{n_i}{n}$ formulla boýunça, toplanan ýygylyklary bolsa $a_1 = w_1,\ a_2 = a_1 + w_2,\ a_3 = a_2 + w_3$ we ş.m.formulalar boýunça hasaplap, degişlilikde Tablisa 2-niň 3-nji we 4-nji sütüninlerinde ýazal

Tablisa 2

Wariantal ar x_i	Wariantanýň ýygylygy n_i	Otnositel ýygylyk $w_i = \frac{n_i}{n}$	Toplanan ýygylykl ar a_i
0	4	0.0506	0.0506
1	13	0.1646	0.2152
2	14	0.1772	0.3924
3	24	0.3038	0.6962
4	16	0.2025	0.8987
5	3	0.0380	0.9367
6	3	0.0380	0.9747
7	2	0.0253	1.0000
	$n = \sum n_i = 79$	$\sum w_i = 1$	

3. Tablisa 2-niň birinji we üçünji sütünleriniň maglumatlaryny ulanyp, otnositel ýygylygyň poligonyny we gistogrammasyny guralyň.





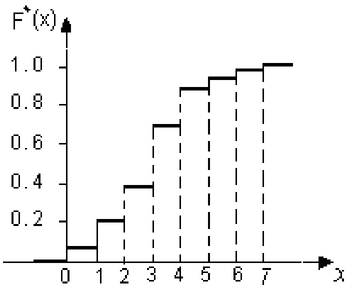
Otnositel ýygylygyň poligony
Otnositel ýygylygyň gistogrammasy

Surat 1
Surat 2

4. Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmak üçin Tablisa 2-niň 4-nji sütüninden (toplanan ýygylyklar) peýdalanalyň.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}0506, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}2152, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}3924, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}6962, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}8987, & 4 < x \le 5, \\ 0{,}9367, & 5 < x \le 6, \\ 0{,}9747, & 6 < x \le 7, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$F^*(x)$ empirik paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň



Surat 3

5. Saýlama orta bahany we dispersiýany degişlilikde

$$\overline{x}_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \,, \quad D_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}_s\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \overline{x}_s^{\,2};$$

formülalar boýunça hasaplalyň, bu ýerde x_i-wariantalar, n_i-degişli ýygylyklar, k-wariantlaryň sany, n- saýlamanyň göwrümi.

Hasaplamalary aňsatlaşdyrmak üçin aşakdaky formulalardan peýdalanalyň

$$\overline{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i - C}{h} n_i}{n} h + C \,, \quad D_s = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i - C}{h}\right)^2 n_i}{n} h^2 - \left(\overline{x}_s - C\right)^2.$$

bu ýerde h-ädim, (göňşy wariantalaryň arasyndaky uzaklyk, garalýan mysalda h=1), C- ýalan nul (ýönekeýlik üçin ýalan nul hökmünde iň uly ýygylykly warianta alynýar).
Tablisa 2-niň ikinji sütüninden görnüşi ýaly iň uly ýygylykly ($n_4 = 24$) warianta $x_4 = 3$. Diýmek $C=3$.
Saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplamak üçin aşakdaky tablisany düzeliň.

Tablisa 3

x_i	n_i	$\frac{x_i - C}{h}$	$\frac{x_i - C}{h} n_i$	$\left(\frac{x_i - C}{h}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - C}{h}\right)^2 n_i$
0	4	-3	-12	9	36
1	13	-2	-26	4	52
2	14	-1	-14	1	14
3	24	0	0	0	0
4	16	1	16	1	16
5	3	2	6	4	12
6	3	3	9	9	27
7	2	4	8	16	32
$\sum$	n=79		-13		189

a) Saýlama orta bahany tapalyň

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - C}{h} n_i}{n} h + C = \frac{-13}{79} \cdot 1 + 3 = 2{,}84$$

b). Saýlama dispersiýany tapalyň

$$D_s = \frac{189}{79} - (2{,}84 - 3)^2 = 2{,}3668.$$

ç) Saýlama orta kwadratik gyşarmany tapalyň

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{2,3668} = 1,54$$

d) Tablisa 3-den görnüşi ýaly, iň uly ýygylyga $(n_4 = 24)$ eýe bolan warianta 3-likdir. Diýmek $M_0 = 3$.

e) Wariantalaryň sany 8-e deň, ýagny 2k=8. Bu ýerden k=4. Onda

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

B. Wariýasiýanyň gerimi kiçi bolmandygy sebäpli interwallaýyn wariasiýa hataryny guralyň. Maglumatlary artýan tertipde ýerleşdireliň

60	65	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	76	78
61	66	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	76	79
62	66	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	76	80
63	66	67	68	69	69	71	71	72	73	74	74	76	80
63	66	67	68	69	70	71	71	72	73	74	75	76	81
63	66	67	68	69	70	71	71	72	73	74	75	76	
63	66	67	68	69	70	71	71	72	73	74	75	76	
64	66	68	68	69	70	71	71	72	73	74	75	77	
64	66	68	69	69	70	71	71	72	73	74	75	77	
64	66	68	69	69	70	71	71	72	73	74	75	77	
65	66	68	69	69	70	71	72	72	73	74	75	78	
65	67	68	69	69	70	71	72	73	73	74	75	78	
65	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	75	78	
65	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	76	78	
65	67	68	69	69	70	71	72	73	74	74	76	78	

Wariantalaryň hemmesiniň düşen interwalyny $h=2$ uzynlyklary bolan bölek interwallara böleliň we asakdaky Tablisa 4-i düzeliň.

1) Bu tablisanyň 1-nji sutüninde bölek interwallary, 2-nji sütüninde bolsa, bu bölek interwallaryň ýygylyklaryny ýazalyň. Bölek interwallaryň ýygylyklary hökmünde bu

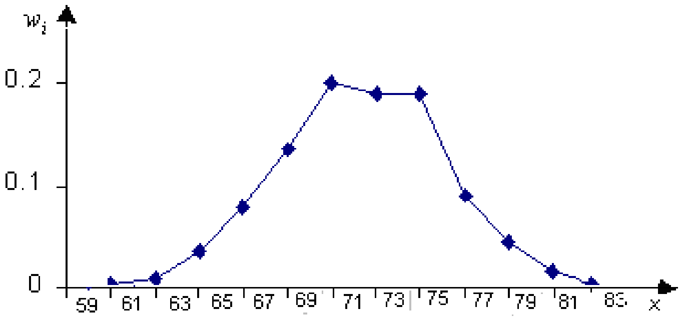
bölek interwallara düşen wariantalaryň ýygylyklarynyň jemi alynýar.

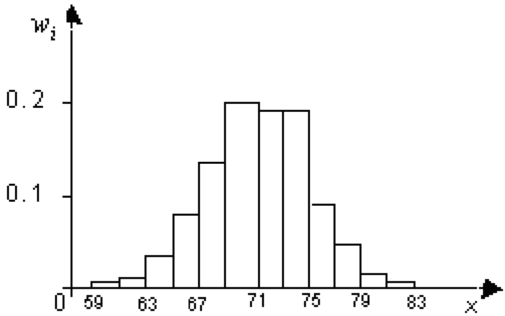
2) Wariantalaryň otnositel we toplanan ýygylyklaryny Tablisa 4-iň degişlilikde 3-nji we 4-nji sütünlerinde ýazalyň.

Tablisa 4

Bölek interwallar $x_i - x_{i+1}$	Bölek interwallaryň ýygylyklary n_i	Otnositel ýygylyklar $w_i = \frac{n_i}{n}$	Toplanan ýygylyklar a_i
59-61	1	0.005	0.005
61-63	2	0.01	0.015
63-65	7	0.035	0.05
65-67	16	0.08	0.13
67-69	27	0.135	0.265
69-71	40	0.2	0.465
71-73	38	0.19	0.655
73-75	38	0.19	0.845
75-77	18	0.09	0.935
77-79	9	0.045	0.98
79-81	3	0.015	0.995
81-83	1	0.005	1
	n=200	$\sum w_i = 1$	

3) Tablisa 4-iň 1-nji we 3-nji sütünlerindäki maglumatlardan peýdalanyp, otnositel ýygylygyň poligonyny we gistogrammasyny guralyň.





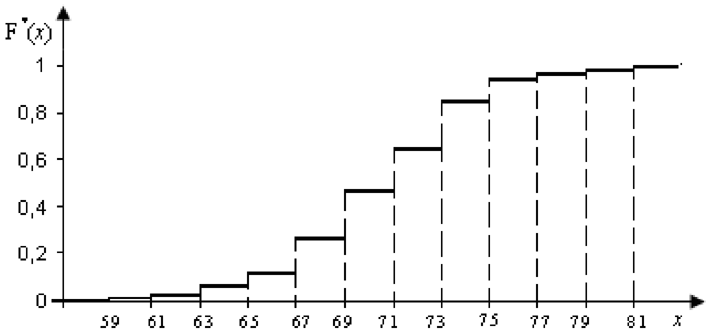
Otnositel ýygylygyň poligony
Otnositel ýygylygyň gistogrammasy

Surat 4

4) Empirik paýlanyş funksiýasyny tapmak üçin Tablisa 4 -iň 4-nji sütüninden (toplanan ýygylyklar) peýdalanalyň.

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x \le 59, \\ 0{,}005, & 59 < x \le 61, \\ 0{,}015, & 61 < x \le 63, \\ 0{,}05, & 63 < x \le 65, \\ 0{,}13, & 65 < x \le 67, \\ 0{,}265, & 67 < x \le 69, \\ 0{,}465, & 69 < x \le 71, \\ 0{,}655, & 71 < x \le 73, \\ 0{,}845 & 73 < x \le 75, \\ 0{,}935 & 75 < x \le 77, \\ 0{,}980 & 77 < x \le 79, \\ 0{,}995 & 79 < x \le 81, \\ 1, & 81 < x. \end{cases}$$

$F^*(x)$ empirik paýlanyş funksiýasynyň grafigini guralyň



Surat 5

5) Saýlama orta bahany we dispersiýany hasaplamak üçin aşakdaky tablisany düzeliň. (C=70; h=2)

Bölek interwallar $x_i - x_{i+1}$	Interwalyň ortasy	Bölek interwallaryň ýygylyklary n_i	$\frac{x_i - C}{h}$	$\frac{x - C}{h} n_i$	$\left(\frac{x_i - C}{h}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - C}{h}\right)^2 n_i$
59-61	60	1	-5	-5	25	25
61-63	62	2	-4	-8	16	32
63-65	64	7	-3	-21	9	63
65-67	66	16	-2	-32	4	64
67-69	68	27	-1	-27	1	27
69-71	70	40	0	0	0	0
71-73	72	38	1	38	1	38
73-75	74	38	2	76	4	152
75-77	76	18	3	54	9	162
77-79	78	9	4	36	16	144
79-81	80	3	5	15	25	75
81-83	82	1	6	6	36	36
		$\sum = 200$		$\sum = 132$		$\sum = 818$

a) Saýlama orta bahany tapalyň

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - C}{h} n_i}{n} \cdot h + C = \frac{132}{200} \cdot 2 + 70 = 71{,}32$$

b). Saýlama dispersiýany tapalyň

$$D_s = \frac{818}{200} \cdot 4 - (71{,}32 - 70)^2 = 14{,}6176.$$

s). Saýlama orta kwadratik gyşarmany tapalyň

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} = \sqrt{14{,}6176} = 3{,}82$$

d) Eger wariasiýa hatary bahalaryň interwallary boýunça gurlan bolsa, onda moda

$$M_0 = x_0 + h\frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})} \qquad (1)$$

formula boýunça hasaplanýar. Bu ýerde x_0- iň uly ýygylygy bolan interwalyň başlangyjy, *h*-bölek interwalyň uzynlygy, n_i-bölek interwalyň ýygylygy. Garalýan mysalda, Tablisa 5-den görnüşi ýaly $x_0 = 69$, h=*2*, *i*=*6*, $n_6 = 40$, $n_5 = 27$, $n_7 = 38$. Bu bahalary (1) formulada ornuna goýup alarys:

$$M_0 = 69 + 2 \cdot \frac{40-27}{(40-27)+(40-38)} = 70{,}7$$

e) Eger wariasiýa hatary bahalaryň interwallary boýunça gurlan bolsa, onda mediana

$$M_e = x_0 + \frac{\frac{n}{2} - T_{i-1}}{n_i} \cdot h \qquad (2)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde x_0- medianany saklaýan bölek interwalyň başlangyjy, *h*-medianany saklaýan bölek interwalyň uzynlygy, n_i-medianany saklaýan bölek interwalyň ýygylygy., *n*- ýygylyklaryň jemi (saýlamanyň göwrümi), T_{i-1}- medianany saklaýan bölek interwala çenli interwallaryň ýygylyklarynyň jemi. Garalýan mysalda, Tablisa 5-den görnüşi ýaly $x_0 = 71$, *h=2,* $n = 200$, $T_{i-1} = 1+2+7+16+27+40 = 93$. Alnan bahalary (2) formulada ornuna goýup alarys:

$$M_e = 71 + \frac{100-93}{38} \cdot 2 = 71{,}4$$

III.3. Ölçemeleriň sanynyň köp bolmadyk halatynda şol bir ululygyň köpsanly deňtakykly ölçemeler hatarynyň derňewi.

Ýumuşyň ýerine ýetirilişine anyk mysalda garalyň. Ölçeg enjamy barlanylan mahalynda bir ululygyň 20 gezek geçirilen ölçemeleriniň netijeleri berlen (Tablisa 6, 2-nji sütün). Ölçemeleriň berlen hataryny derňemek we ony matematiki taýdan işlemek talap edilýär.

Tablisa 6

№	l, *м*	$v_i = l_i - \bar{l}$ sm	v_i^2	v_i^3	v_i^4
1	2	3	4	5	6
1	152,00	-6	36	-216	1296
2	152,07	1	1	1	1
3	152 ,06	0	0	0	0
4	152,00	-6	36	-216	1296
5	152,07	1	1	1	1
6	152,08	2	4	8	16
7	152,06	0	0	0	0
8	152,04	-2	4	-8	16
9	152,07	1	1	1	1
10	152,09	3	9	27	81
11	152,08	2	4	8	16
12	152,05	-1	1	-1	1
13	152,08	2	4	8	16
14	152,08	2	4	8	16
15	152,03	-3	9	-27	81
16	152,11	5	25	125	625
17	152,03	-3	9	-27	81
18	152,07	1	1	1	1
19	152,10	4	16	64	250
20	152,03	-3	9	-27	81
$\sum$	3041,20	0	174	-270	3882

Toplumyň göwrüminiň uly bolmandygy sebäpli (n=20), doly barlaglary geçirip durman, birnäçe ownuk meseleleri çözýärler:

1) ölçemeleriň ähli netijeleriniň orta arifmetiki bahasyny hasaplamak;
2) aýratyn ölçemäniň orta kwadratik gyşarmasynyň (orta kwadratik ýalňyşlygyň) we predel gyşarmanyň takmynan bahasyny hasaplamak;
3) gödek ýalňyşlyklary aradan aýyrmak;
4) ölçemeleriň galan netijeleri boýunça matematiki garaşmany ýa-da orta arifmetiki bahany hasaplamak;
5) aýratyn ölçemäniň orta kwadratik ýalňyşlygynyň gutarnykly bahasyny hasaplamak;
6) matematiki garaşmanyň takyklygyny hasaplamak;
7) ýalňyşlyklaryň paýlanyşynyň kanunalaýyklyklaryny anyklamak:
   a) normal paýlanyş bilen ylalaşma kriterilerini kesgitlemek;
   b) ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň we ähtimallygyň interwallardaky dykyzlygynyň tablisasyny düzmek;
   ç) ýalňyşlyklaryň empirik we normal paýlanyşlarynyň grafiklerini gurmak;
8) ölçemeleriň ýalňyşlyklarynyň derňelýän hatary barada netije çykarmak.

1. Ölçemeleriň netijeleriniň orta arifmetiki bahasyny tapalyň

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} = \frac{3041,20}{20} = 152,06\ m$$

Her bir hetijäniň orta arifmetiki bahadan gyşarmasyny (olary ölçemeleriň ýalňyşlyklary diýip hasap etmek bolar):

$$v_i = l_i - \bar{l}\ ,$$

formuladan peýdalanyp tapalyň we olary Tablisa 6-nyň 3-nji sütüninde ýazalyň. Eger v_i-gyşarmalar dogry tapylan bolsa, onda $\sum v_i = 0$ bolar.

2. Orta kwadratik ýalňyşlygyň takmynan bahasy

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n} v_i^2}{n-1}} \approx \pm 3{,}03 \text{ sм}$$

bolar. Ölçemeler hatarynda diňe 20 sany baha bar bolany sebäpli, V_{predel} predel gyşarmany tapmak üçin normal paýlamanyşdan däl-de, Stýudent paýlanyşyndan peýdalanmak bolar. Normal paýlanyşda erkinlik derejesi k=n-1=19 bolanda üçeldilen orta kwadratik ýalňyşlyga degişli bolan $\beta = 0{,}997$ ynam ähtimallygyndan peýdalanyp, Goşmaça III-den $t_\beta = 3{,}9$ ýolberme koeffisiýentini taparys.

Onda

$$V_{predel} = t_\beta . m = 3{,}9 \cdot (\pm 3{,}03) = \pm 11{,}80 \text{ sм}$$

3. Derňelýäň hatarda v_i ýalňyşlygyň absolýut ululygy V_{predel} bahadan uly bolan ululyk ýokdur. Diýmek, gödek ýalňyşlyk ýok we ölçemeleriň ähli netijelerini we olaryň orta bahadan gyşarmalaryny tötän we ygtybarly hasap etmek bolar.

4. Ozal hasaplanan orta arifmetiki bahany gutarnykly netije diýip hasap etmek bolar.

5. Orta kwadratik ýalňyşlygyň gutarnykly bahasy onuň ozal hasaplanan m bahasydyr.

6. Gutarnykly netijäniň takyklygynyň bahasynyň kriterisi onuň orta kwadratik ýalňyşlygydyr:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0{,}68 \text{ sм.}$$

7. Ölçemeleriň netijeleriniň empirik paýlanyşyny nazary (normal) paýlanyş bilen deňeşdirmek üçin empirik paýlanyşyň egrisiniň A_s asimmetriýasyny we E_k ekssessini hasaplamak zerurdyr. $\sigma = m$ diýip hasap edeliň, onda

$$A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^3}{m^3} = \frac{-270:20}{(3{,}03)^3} = -0{,}48;$$

$$E_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} v_i^4}{m^4} - 3 = \frac{3882:20}{(3{,}03)^4} - 3 = -0{,}70.$$

Normal paýlanyşda A_s we E_k ululyklaryň ýolbererlik bahalary

$$|A_s| \le 3\sigma_A \qquad \text{we} \qquad |E_k| \le 3\sigma_E$$

bolmaly; bu ýerde:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6}{n}} = 0{,}55 \qquad \text{we} \qquad \sigma_E = \sqrt{\frac{24}{n}} = 1{,}01$$

Garalýan mysalda

$$|A_s| < 1{,}65 \qquad \text{we} \qquad |E_k| < 3{,}30$$

Diýmek, bu görkezijiler boýunça tötän ululyklaryň empirik paýlanyşy normal paýlanyş bilen gowy derejede ylalaşýar diýip hasap etmek bolar.

Ähli v_i ýalňyşlyklary artýan tertipde hatara düzüp, olary nuldan iki tarapa hem $\pm 0{,}5m = \pm 1{,}51$ aralyklara böleliň we Tablisa 7-niň 2-nji we 3-nji sütünlerinde ýazalyň. Ýalňyşlyklaryň her bir interwaldaky n_i sanyny 4-nji sütünde ýazalyň. 5-nji sütünde ähtimallyklaryň (otnositel ýygylyklaryň), aýdyňlyk üçin 100 esse ulaldylan bahalaryny ýazalaýň.

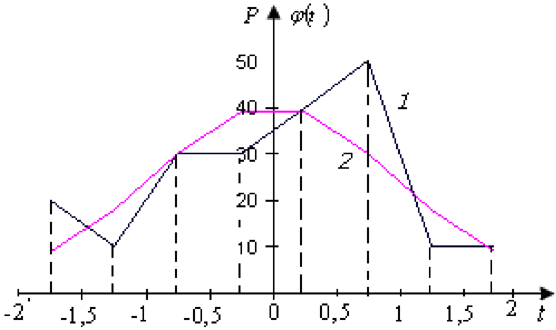
$$P_i = 2\frac{n_i}{n}100$$

By ýerde $\frac{n_i}{n}$ gatnaşyk ikä köpeldilýär, sebäbi birneme soňrak tapylyp, Tablisa 7-de ýazylýan we alnan p_i-ler bilen deňeşdirilýän ähtimallyk dykyzlygy normal paýlanyşyň iki şahasynyň biri üçin tapylýar.

Otnositel ýygylyklaryň bahalary arkaly (Tablisa 7, 5-nji sütün) ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň grafigini guralyň. Abssissalar okunda (Surat 6, 1-döwük çyzyk) bölek interwallara degişli deň kesimleri alyp goýalyň. Kesimleriň ortalaryndan uzynlyklary otnositel ýygylyklara deň bolan ordinatalary galdyralyň. Goňşy ordinatalaryň depelerini göni çyzygyň kesimleri bilen birikdireliň.

Tablisa 7

№	Bölek interwallar		n_i	P_i	δ_i	$t_i = \frac{\delta_i}{m}$	Ähtimallygyň dykyzlygy	
	Umumy görnüşde	$(mx_i;\ mx_{i+1})$					$\varphi(t_i)$	$\varphi(t_i)\cdot 100$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(-2.0; -1,5)	(-6,1; -4,5)	2	20	-1,75m	-1,75	0,09	9
2	(-1.5; -1,0)	(-4,5; -3,0)	1	10	-1,25m	-1,25	0,18	18
3	(-1.0; -0,5)	(-3,0; -1,5)	3	30	-0,75m	-0,75	0,30	30
4	(-0.5; 0,0)	(-1,5; 0.0)	3	30	-0,25m	-0,25	0,39	39
5	(0.0; 0,5)	(0.0; 1,5)	4	40	0,25m	0,25	0,39	39
6	(0.5; 1,0)	(1,5; 3,0)	5	50	0,75m	0,75	0,30	30
7	(1.0; 1,5)	(3,0; 4,5)	1	10	1,25m	1,25	0,18	18
8	(1,5; 2,0)	(4,5; 6,1)	1	10	1,75m	1,75	0,09	9
$\sum$	-	-	20	200	-	-	-	192



Surat 6

Ýalňyşlyklaryň normal paýlanyşynyň grafigini ähtimallygyň $\varphi(t)$ dykyzlygynyň bahalary (Tablisa 7-niň 8-nji we 9-nji sütünleri) boýunça gurýarlar. Bu bahalary Goşmaça I-den normirlenen ýalňyşlygyň

$$t_i = \frac{\delta_i}{m}$$

bahalary boýunça tapýarlar, bu ýerde δ_i -ýalňyşlygyň *i*-nji aralykdaky orta bahasy. Meselem, 1-nji aralykda:

$$\delta_1 = \frac{(-2{,}0m) + (-1{,}5m)}{2} = -1{,}75\ m$$

we ş. m.

Normal paýlanyşyň egrisini (Surat 6, 2-egri) empirik paýlanyşyň egrisiniň gurulýan koordinatalar ulgamynda guralyň. Onuň ücin bu koordinatalar ulgamynda $(t_i; \varphi(t_i))$ nokatlary guralyň we olary egri çyzyk bilen birikdireliň.

Normal paýlanyşyň egrisini we empirik paýlanyşyň poligonyny deňeşdirip, empirik paýlanyşyň normal paýlanyşdan uly tapawutlanmaýandygyny görmek bolar.

III.4. Ölçeme ýalňyşlyklarynyň paýlanyşynyň ähtimallyk-statisttiki derňewi.

Bu tejribe işinde deňtakykly geodeziýa ölçemeleriniň ýalňyşlyklarynyň hatary derňelýär we onuň normal paýlanyş bilen nä derejede ylalaşýandygyny anyklamak maksat edinilýär. Ähtimallyk-statistiki derňewde her bir ölçeme ýalňyşlygyna statistiki toplumyň elementi hökmünde garalýar.

Tabşyrygyň ýerine etiriliş tertibine aşakdaky mysalda garalyň. Triangulýasiýada burçlar ölçelende 150 üçburçlukda sazlaşyksyzlyklar alyndy. Bu sazlaşyksyzlyklaryň (tötän hakyky ýalňyşlyklaryň) bahalary Tablisa 8-de berlen. Tötän ýalňyşlyklaryň paýlanyşynyň ähtimallyk-statistiki derňewini aşakdaky tertipde amala aşyrmak talap edilýär:

1. Ýalňyşlyklaryň iň uly we iň kiçi bahalarynyň tapawudy (wariasiýanyň gerimi) arkaly ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň tablisasy üçin interwalyň uzynlygyny anyklamaly we bu tablisany düzmeli.
2. Ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň esasy parametrlerini: matematiki garaşmanyň empirik bahasyny we standartyň (orta kwadratik gyşarmanyň) empirik bahasyny hasaplamaly.
3. Berlen aralyklarda ýalňyşlyklaryň bu empirik paýlanyşynyň we toplanan ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň egrilerini gurmaly. Şol grafikler esasynda modanyň we mediananyň bahalaryny tapmaly.
4. Ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň tablisasy üçin anyklanan interwallarda ýalňyşlyklaryň nazary paýlanyşynyň tablisasyny düzmeli.
5. Ýalňyşlyklaryň we toplanan ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň egrileriniň gurlan oklarynda ýalňyşlyklaryň nazary paýlanyşynyň egrisini we bu paýlanyşyň integral egrisini (ogiwany) gurmaly.
6. 3-nji we 4-nji tertipli momentleri hasaplamaly hem-de olaryň bahalaryndan peýdalanyp, ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň egrisiniň asimmetriýasynyň we ekssessiniň

görkezijilerini tapmaly. Bu görkezijileriň ähmiýetliligini anyklamaly.

7. Ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň nazary paýlanyşdan gyşarmasyny anyklamaly. Bu gyşarmanyň ähmiýetliligini anyklamak üçin Pirsonyn, Kolmogorowyň, Şarlýeniň, Şoweneniň kriterilerini we alamatlar kriterisini ulanmaly.
8. Normal paýlanyş üçin ýüze çykarylan, orta ýalňyşlygyň we standartyň bahasynyň gatnaşygynyň ýerine ýetýändigini ýa-da ýetmeýändigini barlamaly.
9. Ölçemeleriň ýalňyşlyklarynyň derňelýän hatarynyň paýlanyşynyň häsiýetleri barada netije çykarmaly.

Tabşyrygyň her bir bölegine anyk mysalda garalyň

Tablisa 8

Üçburç belgisi	Sazlaşyk-syzlyk, x_i	Üçburç belgisi	Sazlaşyk-syzlyk, x_i	Üçburç belgisi	Sazlaşyk-syzlyk, x_i	Üçburç belgisi	Sazlaşyk-syzlyk x_i
1.	-2,00	39	1,09	77	-0,03	115	-0,19
2.	-0,52	40	-0,02	78	-1,32	116	0,87
3.	1,74	41	0,19	79	-1,22	117	1,32
4.	0,82	42	-0,16	80	-0,63	118	0,14
5.	1,01	43	0,50	81	-0,57	119	0,75
6	2,06	44	0,15	82	-0,12	120	-1,74
7	1,00	45	-1,10	83	-0,75	121	-0,43
8	-1,88	46	0,06	84	1,36	122	-1,34
9	-0,28	47	-1,90	85	-1,66	123	0,04
10	-2,25	48	-2,15	86	1,40	124	0,21
11	0,38	49	0,92	87	3,03	125	-2,53
12	-1,37	50	0,59	88	-3,42	126	-0,80
13	1,47	51	-1,50	89	1,09	127	2,13
14	-0,45	52	0,53	90	-0,33	128	-0,86
15	-0,36	53	1,24	91	-0,29	129	0,12
16	1,62	54	1,24	92	0,94	130	-2,47
17	0,82	55	-2,51	93	0,10	131	1,39
18	-1,17	56	1,70	94	-2,95	132	2,06
19	1,42	57	-1,08	95	1,54	133	-0,40
20	0,80	58	0,27	96	-0,50	134	-0,59
21	-0,13	59	-1,41	97	-0,02	135	2,04
22	-0,57	60	-1,12	98	1,73	136	-0,30
23	-0,37	61	-0,75	99	-0,51	137	-0,58
24	0,09	62	0,19	100	0,23	138	-0,19
25	-0,01	63	0,54	101	1,94	139	-0,03
26	1,40	64	1,23	102	-2,88	140	-0,06
27	1,53	65	-2,16	103	-0,53	141	-0,34
28	1,00	66	0,06	104	0,61	142	1,02
29	0,47	67	0,75	105	-0,69	143	-1,11
30	-0,85	68	0,26	106	0,01	144	-0,25
31	1,76	69	2,80	107	0,39	145	-0,58
32	0,79	70	2,33	108	-0,95	146	0,20
33	0,15	71	1,34	109	-0,83	147	0,57
34	1,83	72	-0,80	110	-0,70	148	2,02
35	-1,61	73	-0,73	111	0,65	149	-1,20
36	0,06	74	2,17	112	-0,18	150	0,60
37	-1,59	75	-1,50	113	0,83		
38	2,31	76	2,15	114	-0,36		

1. Ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň esasy parametrlerini hasaplamagy sadalaşdyrmak üçin hataryň ähli ýalňyşlyklaryny artýan tertipde ýerleşdirip, olary interwallara bölmek zerurdyr. Bölek interwallardaky $\tilde{n}_i$ ýygylyklaryň (ýalňyşlyklaryň sanynyň) empirik paýlanyşy üçin Tablisa 9 düzülýär. Tablisanyň iň kiçi ädiminiň bahasyny ýalňyşlyklaryň interwallaryň içindäki bahalarynyň tapawutlary ähmiýetsiz bolar ýaly saýlaýarlar. Interwal uly bolanda ýalňyşlyklaryň paýlanyşynyň mahsus aýratynlyklary ýylmanýarlar, interwal kiçi bolanda bolsa, tötän ýalňyşlyklaryň ikinji derejeli häsiýetleriniň täsiri artýar we şunlukda ýalňyşlyklaryň paýlanyşynyň nädogry suratlandyrylmagyna getirýär.

Iň kiçi interwalyň uzynlygy

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$$

bolar, bu ýerde x_{max} we x_{min} – ýalňyşlyklaryň degişlilikde iň uly we iň kiçi bahalary; k-interwalyň sany, adatça $k=12$ diýlip kabul edilýär.

k- nyň bahasyny aşakdaky pikir ýöretmelerden ugur alyp saýlaýarlar. Aralygy onuň çäkleriniň tapawudy m orta kwadratik ýalňyşlygyň ýarysyna deň bolar ýaly edip almaly. Ýalňyşlyklaryň predel bahalary, adatça, $\pm 3m$ deň diýlip kabul edilýär. Onda uzynlygy $0{,}5m$ -e deň bolan interwaly almak üçin ýalňyşlyklaryň $-3m$-den $+3m$-e çenli hataryny 12 bölege bölmeli.

Tablisa 8-den görnüşi ýaly x_{max}= 3,03 we x_{min}= -3,42. Onda

h=[3,03-(-3,42)]:12=6.45:12=0,538

Tablisa 9-yň 1-nji sütüninde interwallaryň belgilerini, 2-nji sütüninde interwallaryň çäklerini (olaryň tapawutlary h ululyga deň) ýazalyň. Her bir bölek interwalyň $\tilde{n}_i$ ýygylygyny hasaplap, Tablisa 9-yň 3-nji sütüninde ýazalyň. Barlag üçin ähli ýygylyklaryň jemini hasaplalyň. Ol wariasiýa hatarynyň ähli ýalňyşlyklarynyň N sanyna deň bolmaly. 4-nji sütünde interwallar boýunça toplanan empirik ýygylyklary ýazalyň: 1-nji interwalda

$$\sum_{i=1}^{1}\tilde{n}_i=\tilde{n}_1=2,$$

ikinji interwalda

$$\sum_{i=1}^{2}\tilde{n}_i=\tilde{n}_1+\tilde{n}_2=2+4=6,$$

üçünji interwalda

$$\sum_{i=1}^{3}\tilde{n}_i=\tilde{n}_1+\tilde{n}_2+\tilde{n}_3=6+6=12,$$

we ş.m.

5-nji sütünde bölek interwallaryň $x_{i,orta.}$ orta bahalaryny ýazalyň. Bu ululyklar interwallaryň ýokarky we aşaky çäkleriniň orta arifmetiki bahalary hökmünde alynýar. Mysal üçin,

$$x_{1.orta}=\frac{-3{,}42+(-2{,}882)}{2}=-3{,}151$$

2. Hasaplamalary ýeňilleşdirmek üçin

$$u_i=\frac{x_{i.ort.}-x_0}{h}$$

şertli wariantalardan peýdalanalyň. Ýalan nul hökmünde iň uly ýygylykly bölek interwalyň $x_0=0{,}077$ ortasyny kabul edeliň. Mysal üçin,

$$u_1=\frac{-3{,}151-0{,}077}{0{,}538}=-6,$$

$$u_{10}=\frac{1{,}691-0{,}077}{0{,}538}=3$$

we ş. m. u_i ululyklaryň tapylan bahalaryny Tablisa 9-yň 6-njy sütüninde ýazalyň. $\tilde{n}u_i$, $\tilde{n}u_i^2$, $\tilde{n}u_i^3$ we $\tilde{n}u_i^4$ ululyklary hasaplap, Tablisa 9-yň degişlilikde 7, 8, 9 we 10-njy sütünlerinde ýazalyň.

Tablisa 9

Bölek interw. belgisi	Bölek interwallar $x_i - x_{i+1}$	Ýygylyk $\tilde{n}_i$	Toplanan ýygylyklar a_i	Bölek interw. ortasy $x_{i.orta}$	$u = \frac{x_{i.orta} - x_0}{h}$	$\tilde{n}u_i$	$\tilde{n}u_i^2$	$\tilde{n}u_i^3$	$\tilde{n}u_i^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	(-3,42; -2,882)	2	2	-3,151	-6	-12	72	-432	2592
2	(-2,882; -2,344)	4	6	2,613	-5	-20	100	-500	2500
3	(-2,344; -1,806)	6	12	-2,075	-4	-24	96	-384	1536
4	(-1,806; -1,268)	11	23	-1,537	-3	-33	99	-297	891
5	(-1,268; -0,730)	13	36	-0,939	-2	-26	52	-104	208
6	(-0,730; -0,192)	24	60	-0,461	-1	-24	24	-24	24
7	(-0,192; 0,346)	33	93	0,077	0	0	0	0	0
8	(0,346; 0,884)	18	111	0,015	1	18	18	18	18
9	(0,884; 1,422)	15	120	1,153	2	30	60	120	240
10	(1,422; 1,960)	13	139	1,691	3	39	117	351	1053
11	(1,960; 2,498)	9	148	2,229	4	36	144	576	2304
12	(2,498; 3,03)	2	150	2,764	5	10	50	250	1250
Σ		150	-	-	-	-6	832	-426	12616

Matematiki garaşmanyň empirik bahasy hökmünde saýlama orta bahany tapalyň.

$$\bar{x}_s = \frac{\sum_{i=1}^{150} x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i x_{i.ort.}}{N} = x_0 + h\frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i u_i}{N} = 0,077 + 0,538\frac{(-6)}{150} = 0,055.$$

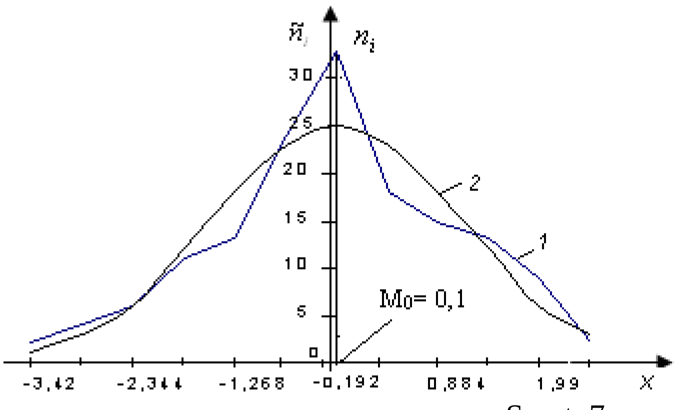
Standartyň empirik bahasy bolsa,

$$\bar{\sigma}_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{150}(x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12}\tilde{n}_i\left(x_{i.ort.} - \bar{x}\right)^2}{N}} = h \cdot \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{12}\tilde{n}_i u_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{12}\tilde{n}_i u_i}{N}\right)^2\right)} =$$

$$= 0{,}538\sqrt{\left(\frac{832}{150} - \left(\frac{6}{150}\right)^2\right)} = 0{,}538\sqrt{\left(5{,}547 - 0{,}002\right)} = 1{,}27$$

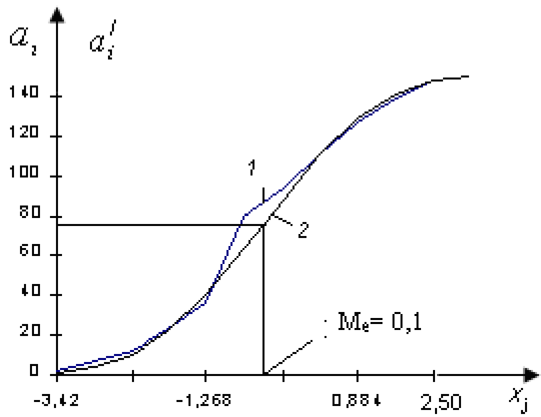
bolar.

3. Ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň grafigini (Sur 7, 1-döwük çyzyk) guralyň. Onuň üçin abssissalar okunda bölek interwallary belläliň. Interwallaryň ortalaryndan ýygylyklara deň uzynlykly ordinatalary galdyralyň. Oklaryň masştablary saýlanyp alnanda iň uly ordinatanyň abssissalar okundaky x_{min} we x_{max} nokatlaryň arasyndaky uzaklykdan iki esse töweregi kiçi bolmagyny gazanmaly. Goňşy ordinatalaryň depelerini göni çyzygyň kesimleri bilen birikdireliň.



Surat. 7

Ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň grafiginde ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň M_0 modasynyň bahasyny tapalyň. Moda-ölçeg ýalňyşlyklarynyň iň uly ýygylykly bahasydyr. Garalýan mysalda $M_o \approx 0{,}1$. Grafikde moda iň uly ordinataly nokadyň abssissasydyr. Tablisa 9-yň 4-nji sütünindäki maglumatlary ulanyp, toplanan ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň grafigini guralyň (Surat 8, 1-döwük çyzyk).



Surat. 8

Abssissalar okundaky kesimleriň interwallaryň çäklerine degişli bolan uçlaryndan uzynlyklary interwallaryň toplanan ýygylyklaryna deň bolan ordinatalary galdyralyň.

Grafikde M_e medianany̆ň empirik bahasyny tapalyň. Ol wariasiýa hataryny ýalňyşlyklaryň sany boýunça deň iki bölege bölýändir. Tötän ululygyň medianadan kiçi bolan bahalarynyň ýüze çykyş ýygylygy onuň medianadan uly bolan bahalarynyň ýüze çykyş ýygylygyna deňdir. Medianany̆ň empirik bahasyny toplanan ýygylyklaryň grafiginden tapmak aňsatdyr. Medianany̆ň bahasyny tapmak üçin ordinatalar okunda

$$y_i = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

koordinataly E nokady almaly we egriniň üstündäki oňa degişli e nokady tapmaly. Şol e nokadyň abssissasy medianany̆ň empirik bahasydyr. Surat 6-dan görnüşi ýaly $M_e \approx 0{,}1$.

Modanyň we medianänyň bahalarynyň tapylyşynyň dogrydygyny barlamak üçin

$$M_0 = \bar{x}_s + 3(M_e - \bar{x}_s);$$

deňligiň adalatlydygyny barlamak ýeterlikdir.

$$M_0 = 0{,}055 + 3(0{,}07 - 0{,}055) = 0{,}1.$$

Simmetrik wariasiýa hatarynyň aýratynlygy $\bar{x}_s$, M_e *we* M_o görkezijileriň deňliginden ybaratdyr:

$$\bar{x}_s = M_e = M_o$$

4. Ýalňyşlyklaryň nazary (normal) paýlanyşynyň tablisasyny (Tablisa 10) düzmek üçin, Tablisa 9-da görkezilen interwallarda tötän ululygyň (ölçeme ýalňyşlygynyň) berlen interwala düşmeginiň

$$P_{-t}^{+t} = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

ähtimallygyny hasaplamak gerek, bu ýerde *t*-tötän ululygyň (interwalyň çäginiň) matematiki garaşmanyň $\bar{x}_s$ empirik bahasyndan normirlenen gyşarmasy, ýagny

$$t_j = \frac{x_j - \bar{x}_s}{\sigma}$$

t-ululygyň tapylan bahalary boýunça ýalňyşlygyň (-t; t) interwala düşmeginiň P_-^+ ähtimallyklaryny hasaplap, olary Tablisa 10-yň 5-nji sütüninde ýazalyň. *Φ(t)* Laplas funksiýasynyň bahalaryny Goşmaça II-den tapmak bolar. 6-njy sütünde (0; t) interwala düşmek ähtimallyklary, 7-nji sütünde bolsa *i*-nji interwala düşmegiň

$$P_i = P_{j+i} - P_j$$

ähtimallyklaryny ýazalyň.

Her bir interwal üçin nazary ýygylyklary

$$n_i^{/} = p_i . N$$

deňlikden peýdalanyp taparys. Bu ýerde: N=150.

Nazary we toplanan ýygylyklaryň tapylan bahalaryny Tablisa 10-nyň 8-nji we 9-njy sütünlerinde ýazalyň.

Tablisa 10

№	Araçäk x_j	$x_j - \overline{x}$	$t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$\Phi(t)$	$\frac{1}{2}\Phi(t)$	P_i	Ýygylyk n_i'	a_i'
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-3,42	-	-2,74	-	-	0,007	1	1
2	-	3,47	-2,31	0,99	0,497	0,020	3	4
3	2,88	5	-1,89	4	-	0,041	6	10
4	2	-	-1,47	-	0,490	0,078	1	22
5	-2344	2,83	-1,04	0,97	-	0,119	2	40
6	-	7	-0,62	9	0,470	0,156	1	63
7	1,80	-	-0,19	-	-	0,167	8	88
8	6	2,39	0,23	0,94	0,429	0,151	2	111
9	-	9	0,65	1	-	0,118	3	129
1	1,26	-	1,08	-	0,351	0,076	2	141
0	8	1,86	1,52	0,85	-	0,086	5	147
1	-	1	1,92	8	0,232	0,018	2	150
1	0,73	-	2,34	-	-		3	
1	0	1,32		0,70	0,076		1	
2	0,192	3		2	0,091		8	
1	0,346	-		-	0,242		1	
3	0,884	0,78		0,46	0,360		2	
	1,422	5		5	0,436		6	
	1,990	-		-	0,472		3	
	2,498	0,24		0,15	0,490			
	3,03	7		1				
		0,291		0,18				
		0,829		2				
		1,367		0,48				
		1,935		4				
		2,443		0,72				
		2,975		0				
				0,87				
				1				
				0,94				
				5				

5. Normal paýlanyşyň egrisi (Surat 7, 2-egri) hem ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň grafigine (Surat 7, 1-döwük çyzyk) meňzeşlikde we şol bir masştabda gurulýar.

Toplanan ýygylyklaryň empirik paýlanyşynyň egrisini (Surat 8, 2-egri) guralyň. Onuň üçin interwallaryň çäklerinden galdyrylan ordinata çyzyklarynda toplanan nazary ýygylyklara deň kesimleri alyp goýalyň we olaryň depelerini egri çyzyk bilen birikdireliň.

6. 3-nji we 4-nji tertipli merkezi momentleriň empirik bahalaryny

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{12} n_i \left(x_{i.opt} - \bar{x}\right)^3}{N}, \quad m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{12} n_i \left(x_{i.opt} - \bar{x}\right)^4}{N}$$

formulalardan peýdalanyp tapmak bolar. Ilki M_1^*, M_2^*, M_3^* we M_4^* şertli momentleri tapalyň. Olary hasaplamak üçin gerek bolan maglumatlarý Tablisa 9-yň 7- 10-njy sütünlerinden almak bolar

$$M_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i u_i}{N} = -\frac{-6}{150} = -0{,}040$$

$$M_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i u_i^2}{N} = -\frac{832}{150} = 5{,}55$$

$$M_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i u_i^3}{N} = -\frac{426}{150} = -2{,}840$$

$$M_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{12} \tilde{n}_i u_i^4}{N} = \frac{12616}{150} = 84{,}107$$

Merkezi we şertli momentleriň arasyndaky

$$m_3 = \left\{M_2^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3\right\} \cdot h^3$$

$$m_4 = \left\{M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6M_2^*\left(M_1^*\right)^2 - 3\left(M_1^*\right)^4\right\} \cdot h^4$$

baglanyşyklardan peýdalanyp taparys

$$m_3 = \left\{-2{,}84 - 3(-0{,}040).5{,}55 + 2(-0{,}04)^3\right\} \cdot 0{,}538^3 =$$

$$= \{-2{,}84 + 0{,}666 - 0{,}0001\} \cdot 0{,}156 = -0{,}339$$

$$m_4 = \{84{,}107 - 4(-0{,}04).(-2{,}84) + 6.5{,}55.(-0{,}04)^2 -$$

$$-3(-0{,}04)^4\} \cdot 0{,}538^4 = \{84{,}107 - 0{,}454 + 0{,}053\} \cdot 0{,}0838. = 7{,}015.$$

Egriniň asimmetriýasynyň görkezijisi

$$A_s = \frac{m_3}{\bar{\sigma}^3} = -\frac{0{,}339}{2{,}05} = -0{,}165$$

Eger $|A_s| < 3\sigma_{A_s}$ bolsa, onda egriniň asimmetriýasy ähmiýetsiz hasap edilýär, bu ýerde $\sigma_{A_s} = \sqrt{\frac{6}{N}}$. Garalýan mysalda $\sigma_{A_s} = 0{,}20$ we $|A_s| < 3\sigma_{A_s}$. Şol sebäpli, ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň egrisini simmetrik diýip hasap etmek bolar.

Ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň ekssesini tapalyň

$$E_k = \frac{m_4}{\bar{\sigma}^4} - 3 = \frac{7{,}05}{2{,}60} - 3 = -0{,}29$$

Ekssesiň orta kwadratik gyşarmasy:

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24}{N}} = 0{,}40$$

$|E_k| < 3\sigma_E$ bolany sebäpli, ekssesi ähmiýetsiz hasap etmek bolar.

7. Kolmogorowyň we Pirsonyň kriterilerini ulanmak üçin zerur bolan maglumatlar Tablisa 11–de getirilýär.

Kolmogorowyň kriterisi. Bu kriteri boýunça toplanan empirik ýygylyklaryň nazary ýygylyklardan absolýut ululygy boýunça iň uly gyşarmasy tapylýar.

Tablisa 11

№	Ýygylyklar		$\tilde{n}_i - n_i^{/}$	$\left(\tilde{n}_i - n_i^{/}\right)^2$	$\dfrac{\left(\tilde{n}_i - n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}}$	Toplanan ỳygylyklar		$a_i - a_i^{/}$
	$\tilde{n}_i$	$n_i^{/}$				a_i	$a_i^{/}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	1	1	1	1,000	2	1	1
2	4	3	1	1	0,333	6	4	2
3	6	6	0	0	0	12	10	2
4	11	12	-1	1	0,083	23	22	1
5	13	18	-5	25	1,389	36	40	-4
6	24	23	1	1	0,043	60	63	-3
7	33	25	8	64	2,560	83	88	5
8	18	23	-5	25	1,087	111	111	0
9	15	18	-3	9	0,500	126	129	-3
10	13	12	1	1	0,083	139	141	-2
11	9	6	3	8	1,500	148	147	1
12	2	3	-1	1	0,333	150	150	0
$\sum$	150	150			8,911			

Tablisa 11-iň 9-njy sütüninden görnüsi ýaly

$$d = \max\left|a_i - a_i^{/}\right| = 5$$

Onda

$$\lambda = \frac{d}{\sqrt{N}} = \frac{5}{\sqrt{150}} = 0{,}41$$

λ argumentiň bahasy boýunça Kolmogorowyň kriterisi üçin ýörite tablisadan (Tablisa 12) $\lambda_T > \lambda$ deňsizligiň ähtimallygyny tapýarys. Eger ýalňyşlyklaryň empirik we nazary paýlanyşlary özara gowy ylalaşykda bolsalar, onda $P(\lambda_T > \lambda)$ ähtimallyk 1-e golaý bolmalydyr. Garalýan mysalda $P(\lambda_T > \lambda)$=0,994, diýmek bu kriteri boýunça ýalňyşlyklaryň empirik we nazary paýlanyşlary gowy ylalaşykdadyrlar.

Kolmogorowyň kriterisi. Tablisa 12.

λ	$P(\lambda_T > \lambda)$	λ	$P(\lambda_T > \lambda)$
0,30	1,000	0,85	0,465
0,40	0,997	0,90	0,393
0,50	0,964	0,95	0,328
0,60	0,864	1,00	0,270
0,65	0,702	1.10	0,178
0,70	0,711	1,20	0,112
0,75	0,627	1,30	0,068
0,80	0,544	1,40	0,010

Pirsonyň kriterisi. Bu kriterini ulanmak üçin Tablisa 11-iň 6-njy sütüninden peýdalanyp,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{12} \frac{\left(\tilde{n}_i - n_i^/\right)^2}{n_i^/} = 8{,}911$$

ululygy taparys. Erkinlik derejeleriniň sany

$$K = r\text{-}s$$

deňlikden peýdalanyp tapylýar, bu ýerde *K*- erkinlik derejeleriniň sany, *r*- ýalňyşlyklaryň paýlanyşynyň tablisasyndaky interwallaryň sany, *r=12*; s- ýalňyşlyklaryň nazary paýlanyşyny ýazmak üçin zerur bolan parametrleriň (bu ýerde $\overline{x}_s, \overline{\sigma}$ we N) sany. Diýmek, K=12-3=9

Goşmaça IV-den *K* we χ^2 ululyklar boýunça K erkinlik derejeleri bolan χ_T^2 nazary paýlanyşly ululygyň χ^2 ululygyň empirik bahasyndan uly bolmagynyň ähtimallygyny tapýarys. $P(\chi_T^2 > \chi^2) \geq 0{,}3$ bolanda ýalňyşlyklaryň empirik we nazary paýlanyşlarynyň ylalaşygyny gowy, $\tilde{n}_i$ -ululyklaryň $n_i^/$ ululyklardan gyşarmalaryny bolsa, tötän diýip hasap etmek bolar. $0{,}1 \leq P\left(\chi_T^2 > \chi^2\right) \leq 0{,}3$ bolanda ylalaşygy kanagatlanarly, $P\left(\chi_T^2 > \chi^2\right) \leq 0{,}1$ bolanda bolsa, kanagatlanarsyz diýip hasap etmek bolar.

Goşmaça VIII-den K=9 we $\chi^2 = 8{,}91$ boýunça $P\left(\chi_T^2 > \chi^2\right) = 0{,}45$ ähtimallygy taparys. Bu bolsa paýlanyşlaryň gowy ylalaşýandyklaryny aňladýar.

Alamatlar kriterisi. Bu kriteri boýunça statistiki hatardaky n_+ položitel we n_- otrisatel ýalňyşlyklaryň sanlarynyň arasyndaky ýolbererlik aratapawut kesgitlenýär. Eger ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşy normal paýlanyş bilen gowy ylalaşykly bolsa, onda $\left(n_+ - n_-\right) \leq 1{,}96\sqrt{N}$ deňsizlik p=0,95 ähtimallyk bilen ýerine etmeli.

Garalýan mysalda

$$(76-74)<1{,}96\sqrt{150}$$

<u>Şoweneniň kriterisi.</u> Bu kriterä laýyklykda, ýalňyşlyklaryň normal kanun boýunça paýlanan hatarynda absolýut ululygy boýunça

$$x_{\max}=t_{\max}\overline{\sigma}_s$$

sandan uly bolan ýeke ýalňyşlyk hem bolmaly däldir.

t_{max} argumentiň bahasyny $\Phi(t)$ funksiýanyň bahalarynyň tablisasyndan (Goşmaça II)

$$\Phi(t_{\max})=\frac{2N-1}{2N}$$

funksiýanyň bahasy boýunça tapmak bolar.

Hatardaky absolýut ululygy boýunça x_{max}-dan uly bolan ýalňyşlygy gödek diýip hasap etmeli we oňa degişli ölçemäni taşlamaly.

Garalýan mysalda

$$\Phi(t_{\max})=\frac{299}{300}=0{,}9967;$$

Goşmaça II-den taparys

$$t_{max}=2{,}94$$

Onda

$$x_{\max}=2{,}94\cdot 1{,}27=3{,}73$$

Görnüşi ýaly hataryň iň uly (+3,03) we iň kiçi (-3,42) ýalňyşlyklary predel bahadan (3,73) kiçidir. Diýmek gödek ýalňyşlyk ýokdur.

Şarlýeniň kriterisi. Bu kriterä laýyklykda ýalňyşlyklaryň normal kanun boýunça paýlanan hatarynda absolýut ululygy boýunça

$$x'_{\max} = t'_{\max}\overline{\sigma}_s$$

sandan uly bolan diňe bir ýalňyşlygyň bolup bilmekligi anyklanýar. Goşmaça II-den

$$\Phi\left(t'_{\max}\right) = \frac{N-1}{N}$$

funksiýanyň bahasy boýunça $t'_{\max}$ ululygy tapmak bolar.

Eger görkezilen çäkden çykýan ýalňyşlyklaryň sany 1-den köp bolsa, onda olara degişli ölçemeleri taşlamaly ýa-da ýalňyşlyklaryň empirik paýlanyşynyň normal paýlanyşdan gyşarmasyny ähmiýetli hasap etmeli.

Garalýan mysalda

$$\Phi\left(t'_{\max}\right) = \frac{149}{150} = 0,9933$$

Goşmaça II-den taparys

$$t'_{\max} = 2,71$$

Onda

$$x_{\max} = 2,71 \cdot 1,27 = 3,44$$

Görnüşi ýaly, hataryň iň uly (+3,03) we iň kiçi (-3,42) ýalňyşlyklary predel bahadan (3,44) kiçidir. Diýmek gödek ýalňyşlyk ýokdur.

8. Statistiki hataryň orta ýalňyşlygyny hataryň ähli ýalňyşlyklarynyň absolýut ululyklarynyň orta arifmetiki bahasy hökmünde tapalyň

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i|}{N}$$

ýa-da

$$v = x_0 + h\frac{\sum_{i=1}^{12}|\tilde{n}_i u_i|}{N} = 0{,}077 + 0{,}538\frac{272}{150} = 1{,}053$$

Ýalňyşlyklaryň normal paýlanyşynda standartyň bahasy

$$v = 0{,}798\overline{\sigma}_s = 1{,}013$$

Soňky iki deňlikden görnüşi ýaly, orta ýalňyşlygyň we standartyň bahalary biri-birine golaýdyr.

9. Deňtakykly geodeziýa ölçemeleriniň ýalňyşlyklar hatarynyň garalyp geçilen derňewi hataryň ähli ýalňyşlyklaryny tötän, ýalňyşlyklar hataryny bolsa, normal kanun boýunça paýlanan diýip hasap edip boljakdygyny görkezýär.

III.5. Gözegçilik maglumatlarynyň ähtimallyk-statistiki derňewi.
(Empirik paýlanyşyň normal paýlanyş bilen ylalaşygynyň barlagy.)

Berlen maglumatlar: Käbir ξ tötän ululygyň x_i, $i = \overline{1,n}$, ölçegleriň netijeleri hökmündäki bahalarynyň baş toplumyndan alnan *n* göwrümli saýlama.

Ýumuşyň ýerine ýetirilişiniň meýilnamasy.

Berlen saýlamany statistiki toparlanan hatara özgertmek, empirik ýygylyklaryň grafigini (paýlanyşyň köpburçlugyny) gurmak we baş toplumyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky çaklamany öňe sürmek. Paýlanyşyň egrisiniň asimmetriýasy we ekssesi baradaky çaklamany öňe sürmek.

Her bir interwal üçin (gipotetik) ýygylyklary hasaplamak. Nazary ýygylyklaryň grafigini gurmak we Pirsonyň χ^2 ylalaşyk kriterisiniň empirik bahasyny hasaplamak.

Hemme öňe sürülen çaklamalary barlamak, çaklamalary barlamagyň jemleýji tablisasyny düzmek we derňewiň netijeleri boýunça karara gelmek.

Ýumuşyň ýerine ýetirlişine usuly görkezmeler.

Berlen saýlamany statistiki toparlanan hatara özgertmeklik aşakdaky tertipde ýerine ýetirilýär:

1) Saýlamanyň

$R = x_{\max} - x_{\min}$

gerimini tapmaly, bu ýerde $x_{\max}$ we $x_{\min}$ degişlilikde iň uly we iň kiçi wariantalar.

2) Interwalyň (toparlaryň)

$$h = \frac{R}{K}$$

uzynlyklaryny (ädimi) tapmaly, bu ýerde *K*-*v* interwallaryň sany. (K=10 diýip kabul etmeli)

3) Interwallaryň y_i çaklerini tapmaly.

$$y_1 = x_{\min}, \quad y_{k+1} = x_{\max}, \quad y_{i+1} = y_i + h, \quad i = \overline{1,k}$$

Interwallaryň belgilerini (nomerlerini) we olaryň çäkleriniň tapylan bahalaryny Tablisa 13-iň degişlilikde 1-nji we 2-nji sütünlerinde ýazmaly.

Tablisa 13

Interw. belgileri i	Interw. çäkleri y_i	$\tilde{n}_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{n}_i\tilde{y}_i$	$\tilde{y}_i-\bar{y}$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i-\bar{y})^2$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i-\bar{y})^3$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i-\bar{y})^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$y_1=x_{min}$							
1	$y_2=y_1+C$	$\tilde{n}_1$	$\tilde{y}_1$					
2	$y_3=y_2+C$	$\tilde{n}_2$	$\tilde{y}_2$					
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	$y_k=y_{k-1}+C$							
k		$\tilde{n}_k$	$\tilde{y}_k$					
	$y_{k+1}=x_{max}$							
Σ		Σ		Σ		Σ	Σ	Σ

4) Bölek interwallaryň $\tilde{n}_i$ ýygylyklary hökmünde bu bölek interwallara düşen wariantalaryň ýygylyklarynyň jemini almaly we Tablisa 13-iň 3-nji sütüninde ýazmaly. Bölek interwallaryň

$$\tilde{y}_i=\frac{y_i+y_{i+1}}{2},\quad i=\overline{1,k},$$

ortalaryny tapyp, Tablisa 13-iň 4-nji sütüninde ýazmaly. Bu tablisanyň 3-nji we 4-nji sütünlerindäki maglumatlar berlen saýlamanyň özgerdilen statistiki toparlanan hataryny düzýär.

5) Statistiki toparlanan hataryň maglumatlary boýunça empirik ýygylyklaryň grafigini (paýlanyşyň köpburçlugyny) gurmaly. Onuň üçin gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda $(\tilde{y}_i;\tilde{n}_i)$ nokatlary gurmaly we olary göni çyzygyň kesimleri bilen yzygider birikdirmeli.

6) Empirik ýygylyklaryň grafiginiň görnüşi boýunça ξ tötän ululygyň bahalarynyň baş toplumynyň normal kanun boýunça paýlanandygy baradaky H_0 esasy çaklamany öňe sürmeli.

Statistiki toparlanan hataryň maglumatlary boýunça:

a) tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň statistiki bahasy hökmünde

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i \tilde{y}_i}{n}$$

orta arifmetiki bahany tapmaly;

b) orta kwadratik gyşarmanyň

$$\tilde{\sigma}_{\xi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i \cdot (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

statistiki bahasyny tapmaly.

ç) üçünji we dördünji merkezi momentleriň

$$\tilde{m}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i \cdot (\tilde{y}_i - \bar{y})^3}{n} \quad \text{we} \quad \tilde{m}_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{n}_i \cdot (\tilde{y}_i - \bar{y})^4}{n}$$

statistiki bahalaryny tapmaly.

d) paýlanyşyň egrisiniň asimmetriýasynyň

$$\tilde{A}_s = \frac{\tilde{m}_3}{\tilde{\sigma}^3}$$

statistiki bahasyny tapmaly we asimmetriýanyň nula deňdigi baradaky $H_0 : A_s = 0$ esasy çaklamany öňe sürmeli;

e) paýlanyşyň egrisiniň ekssesiniň

$$\tilde{E}_k = \frac{\tilde{m}_4}{\tilde{\sigma}^4} - 3$$

statistiki bahasyny tapmaly we ekssesiň nula deňdigi baradaky $H_0 : E_k = 0$ esasy çaklamany öňe sürmeli;

Hasaplanyp tapylan ululyklary Tablisa 13-iň 5-9-njy sütünlerinde ýazmaly.

Momentler usulynyň esasynda $M\xi$ we σ_{ξ} parametrleri olaryň degişli $\bar{y}$ we $\tilde{\sigma}$ statistiki bahalaryna deňläp $\left(M\xi = \bar{y}, \quad \sigma_{\xi} = \tilde{\sigma}\right)$ we

$$n_i^{/} = n \cdot P_i$$

formuladan peýdalanyp, ξ tötän ululygyň bölek interwallara düşmeginiň $n_i^{/}$, $i = \overline{1,k}$, nazary ýygylyklaryny tapmaly, bu ýerde

$$P_i = P(y_i < \xi < y_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)$$

ξ tötän ululygyň *i*-nji interwala düşmeginiň ähtimallygy,

$$t_i = \frac{y_i - \bar{y}}{\bar{\sigma}}, \qquad t_{i+1} = \frac{y_{i+1} - \bar{y}}{\bar{\sigma}}, \qquad i = \overline{1,k},$$

interwallaryň çäkleriniň merkezleşdirilen we normirlenen bahalary,

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

normal kanunyň paýlanyş funksiýasy (Goşmaça II). Hasaplanyp tapylan ululyklary Tablisa 14-iň 1-6-njy sütünlerinde ýazmaly.

Nazary ýygylyklaryň grafigini empirik ýygylyklaryň grafiginiň gurlan koordinatalar ulgamynda gurmaly.

Paýlanyş barada aýdylan çaklamany barlamak üçin zerur bolan, Pirsonyň χ^2 ylalaşyk kriterisiniň gözegçilik edilýän

$$\chi^2_{gozeg.} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\tilde{n}_i - n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}}$$

empirik bahalarynyň goşulyjylaryny Tablisa 14-iň 9-njy sütüninde ýazmaly.

Öne sürülen çaklamanyň barlagyny $\alpha = 0{,}05$ ähmiýetlilik derejesi we $k = K - s - 1$ erkinlik derejeleriniň sany boýunça χ^2 kriteriniň gözegçilik edilýän $\chi^2_{gozeg.}$ bahasyny χ^2_{kr} kritiki nokadyň H_0 esasy çaklamanyň çarçuwasyndaky ýolbererlikli bahasy bilen deňeşdirip amala aşyrmaly, bu ýerde K-bölek interwallaryň sany, *s*-nazary paýlanyşyň parametrleriniň sany. Normal kanun üçin $s=2$. χ^2_{kr} kritiki nokady berlen α ähmiýetlilik derejesi we k erkinlik derejeleriniň sany boýunça Goşmaça V-den tapmaly.

Nazary häsiýetlendirijileriň hasaplanyşy kriterisi $\chi^2_{gozeg.} = |A_s|$, kritiki nokat $\chi^2_{kr} = 3\tilde{\sigma}_{\tilde{A}_s}$, bu ýerde

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{A}_s} = \sqrt{\frac{6}{n}} \ .$$

Eksses baradaky çaklama barlananda barlag kriterisi $\chi^2_{gozeg.} = |\tilde{E}_k|$, kritiki nokat $\chi^2_{kr} = 3\tilde{\sigma}_{\tilde{E}_k}$, bu ýerde

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{E}_k} = \sqrt{\frac{24}{n}} \ .$$

Çaklamalary barlamagyň netijelerini jemleýji tablisada ýazmaly.

Tablisa 14

Interw belgisi i	Interw çäkleri y_i	t_i	$\Phi(t)$	P_i	n_i'	$\tilde{n}_i$	$\tilde{n}_i - n_i'$	$\frac{(\tilde{n}_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$y_1 = x_{min}$	t_1	$\Phi(t_1)$	P_1	n_1'	$\tilde{n}_1$	$\tilde{n}_1 - n_1'$	$\frac{(\tilde{n}_1 - n_1')^2}{n_1'}$
	y_2	t_2	$\Phi(t_2)$					
2				P_2	n_2'	$\tilde{n}_2$	$\tilde{n}_2 - n_2'$	$\frac{(\tilde{n}_2 - n_2')^2}{n_2'}$
	y_3	t_3	$\Phi(t_3)$					
...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	y_k	t_k	$\Phi(t_k)$	P_k	n_k'	$\tilde{n}_k$	$\tilde{n}_k - n_k'$	$\frac{(\tilde{n}_k - n_k')^2}{n_k'}$
	$y_{k+1} = x_{max}$	t_{k+1}	$\Phi(t_{k+1})$					
Σ								$\chi^2_{gozeg} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\tilde{n}_i - n_i')^2}{n_i'}$

Tablisa 15

Çaklama. belgileri N	Esasy çaklama H_0	Esasy çaklamanyň şertli ýazylyşy	Çaklamanyň barlagy	Caklama boýunça netije
1	Paýlanyş barada	$H_0 : M\xi = \bar{y},\ \sigma_{\xi} = \tilde{\sigma}$	$\chi^2_{gözeg.}$ χ^2_{kr}	
2	Asimmetriýa barada	$H_0 : A_s = 0$	$\lvert A_s \rvert$ $3 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}}$	
3	Eksses barada	$H_0 : E_k = 0$	$\lvert \tilde{E}_k \rvert$ $3 \cdot \sqrt{\frac{24}{n}}$	

Iş derňewiň netijeleri boýunça umumy netijä gelmek bilen tamamlanýar.
Gözegçilik maglumatlarynyň ähtimallyk-statistiki derňewine anyk mysalda garalyň.

Berlen maglumatlar:

0,30 -1,24 0,59 -1,79 0,24 0,27 1,73
0,45 0,34 -0,09
1,09 -2,04 0,93 -0,07 -1,81 0,20 -0,71
1,58 -0,33 -2,18
0,98 0,45 -0,47 -0,13 1,01 0,66 -1,61 -
0,88 0,15 -0,86
-0,28 0,23 1,16 -0,13 -0,88 1,05 0,03
0,12 -1,45 0,85
-0,76 -1,27 -1,44 -0,43 -0,99 -0,68 -0,40 -
0,10 -2,46 0,58
-0,80 -0,52 0,28 0,48 1,28 0,19 -1,83 -
0,44 0,36 -0,62
-0,12 -0,85 -1,18 0,13 -0,94 -0,36 -0,84 -
1,32 -1,39 -0,29
-0,76 -0,27 -1,07 0,60 -0,46 -0,39 -0,87 -
1,67 -0,61 0,62
0,34 -1,99 0,25 0,21 -1,11 -0,99 0,93 -
0,74 0,64 0,28
-1,14 0,33 -0,84 -0,45 1,32 1,91 1,01
0,61 -1,27 -1,36

Çözülişi

n=100-saýlamanyň göwrümi,

$x_{max} = 1{,}91$-iň uly warianta,

$x_{min} = -2{,}46$-iň kiçi warianta,

$R = x_{max} - x_{min} = 4{,}37$ -wariasiýanyň gerimi,

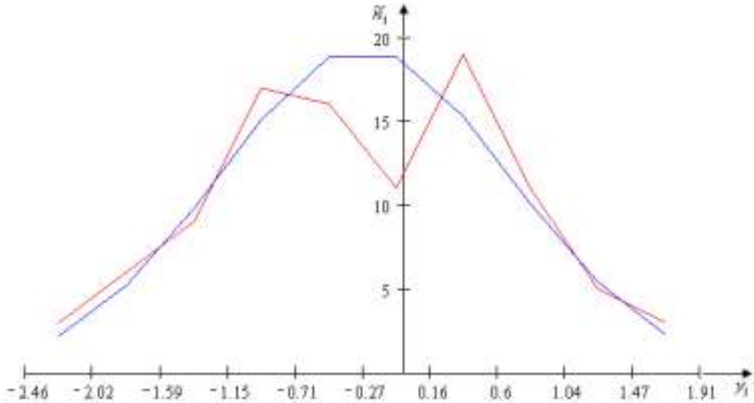
K=10 -bölek interwallaryň (toparlaryň) sany (K ululyk erkin saýlanyp alynýar),

$h = \dfrac{R}{K} = 0{,}44$ bolek interwalyň uzynlygy (ädim).

Empirik häsiýetlendirijileriň hasaplanyşy

Tablisa 16

Interw. belgileri i	Interw. çäkleri y_i	$\tilde{n}_i$	$\tilde{y}_i$	$\tilde{n}_i\tilde{y}_i$	$\tilde{y}_i - \bar{y}$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i - \bar{y})^2$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i - \bar{y})^3$	$\tilde{n}_i(\tilde{y}_i - \bar{y})^4$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	-2,46							
1		3	-2,2415	-6,7245	-1,975	11,705	-23,1196	45,666
	-2,023							
2		6	-1,8045	-10,827	-1,538	14,197	-21,838	33,593
	-1,586							
3		9	-1,3675	-12,307	-1,101	10,915	-12,019	13,236
	-1,149							
4		17	-0,9305	-15,818	-0,664	7,5007	-4,982	3,309
	-0,712							
5		16	-0,4935	-7,896	-0,227	0,826	-0,187	0,043
	-0,275							
6		11	-0,0565	-0,6215	0,209	0,484	0,102	0,021
	0,162							
7		19	0,3805	7,2295	0,646	7,947	5,140	3,324
	0,599							
8		11	0,8175	8,9925	1,084	12,919	14,002	15,174
	1,036							
9		5	1,2545	6,2725	1,521	11,564	17,585	26,743
	1,473							
10		3	1,6915	5,0745	1,957	11,498	22,511	44,071
	1,91							
Σ		100		-26,626		89,556	-2,807	185,184



Empirik we nazary ýygylyklaryň grafikleri.

Paýlanyş barada esasy H_0 çaklama: baş toplum normal kanun boýunça paýlanan.

San häsiýetlendirijiler we çaklamalar

$\bar{y} = \dfrac{-26,626}{100} = 0,266$-matematiki garaşmanyň bahasy (orta arifmetiki baha).

$\tilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\dfrac{89,556}{99}} = 0,95$-orta kwadratik gyşarmanyň bahasy.

$\tilde{m}_3 = \dfrac{-2,807}{100} = -0,028$-üçünji tertipli merkezi momentiň bahasy.

$\tilde{m}_4 = \dfrac{185,184}{100} = 1,85$-dördünji tertipli merkezi momentiň bahasy.

$\tilde{A}_s = \dfrac{-0,028}{(0,95)^3} = -0,03$ empirik egriniň asimmetriýasy.

$H_0 : A_s = 0$-asimmetriýa baradaky esasy çaklama.

$\tilde{\sigma}_{\tilde{A}} = \sqrt{\dfrac{6}{100}} = 0{,}24$-asimmetriýanyň orta kwadratik gyşarmasynyň bahasy.

$\tilde{E}_k = \dfrac{1{,}85}{(0{,}95)^4} - 3 = -0{,}69$-empirik egriniň ekssesi.

$H_0 : E_k = 0$-eksses baradaky esasy çaklama.

$\tilde{\sigma}_{\tilde{E}} = \sqrt{\dfrac{24}{100}} = 0{,}49$-ekssesiň orta kwadratik gyşarmasynyň bahasy.

Nazary häsiýetlendirijileriň hasaplanyşy

.

$\chi^2_{kr} = 14{,}1$ -Pirsonyň kriterisiniň $\alpha = 0{,}05$ ähmiýetlilik derejesinde we $k = K - 3 = 7$ erkinlik derejeleriniň sanynda kritiki nokadyň Goşmaça V-den tapylan bahasy.

Çaklamanyň bahalarynyň jemleýji tablisasy.

Pirsonyň χ^2 ylalaşyk kriterisiniň empirik bahas

Tablisa 17

Interw. belgisi i	Interw. çäkleri y_i	t_i	$\Phi(t)$	P_i	n_i'	$\widetilde{n}_i$	$\widetilde{n}_i - n_i'$	$\frac{(\widetilde{n}_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	-2,46	-2,32	0,010					
1				0,021	2,2	3	0,8	0,34
	-2,02	-1,86	-0,032					
2				0,050	5,0	6,0	1,0	0,21
	-1,59	-1,40	0,082					
3				0,094	9,4	9	-0,4	0,02
	-1,15	-0,93	0,175					
4				0,143	14,3	17	2,7	0,50
	-0,71	-0,47	0,319					
5				0,177	17,7	16	-1,8	0,17
	-0,27	-0,01	0,496					
6				0,178	17,8	11	-6,8	2,61
	0,16	0,45	0,675					
7				0,145	14,5	19	4,5	1,38
	0,60	0,91	0,820					
8				0,096	9,6	11	1,4	0,21
	1,04	1,38	0,916					
9				0,051	5,1	5	-0,1	0,00
	1,47	1,84	0,967					
10				0,022	2,2	3	0,8	0,27
	1,91	2,30	0,989					
Σ								$\chi^2_{gozeg} = 5{,}70$

Tablisa 18

Çaklama belgileri N	Esasy çaklama H_0	Esasy çaklamanyň şertli ýazylyşy	Çaklamanyň barlagy		Çaklama boýunça netije
			χ^2_{gozeg}	χ^2_{kr}	
1	Paýlanyş barada	$H_0 : M\xi = 0{,}27,\ \sigma_\xi = 0{,}95$	5,70	14,1	Çaklama inkär edilmeýär
2	Asimmetriýa barada	$H_0 : A_s = 0$	0,03	0,73	Çaklama inkär edilmeýär
3	Ekses barada	$H_0 : E_k = 0$	0,69	1,47	Çaklama inkär edilmeýär

Netije. Statistiki çaklamanyň barlagynyň maglumatlarynyň derňewi garalýan tötän ululygyň $M\xi = 0{,}27$ matematiki garaşmasy we $\sigma_\xi = 0{,}95$ orta kwadratik gyşarmasy bolan normal kanun boýunça paýlanandygy barada netije çykarmaga mümkinçilik berýär.

III.6. Korrelýasiýa derňewi. (Gözegçilik hatarlarynyň arasyndaky korrelýasiýa baglylygynyň tapylyşy.)

Tablisa 19-da uzaklygy ýagtylyk bilen ölçeýji abzalyň kömegi bilen ölçenen taraplaryň $D_i = x_i$ uzynlyklary we olaryň $|\Delta_i| = y_i$ ululykly hakyky ýalňyşlyklary getirilen.

1) X we Y tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa koeffisiýentiniň bahasyny hasaplamaly we onuň ähmiýetliligini hem-de ygtybarlygyny hasaplamaly.

2) Regressiýa deňlemesini (maglumatlar formulasyny) ýazmaly we regressiýanyň takyklygyny bahalandyrmaly.

3) Netije çykarmaly.

Ýumuşy ýerine ýetirmegiň meýilnamasy.

Gönüburçly dekart koordinatalar ulgamynda her bir $(x_i; y_i)$ gözegçilik jübütine degişli nokatlary şekillendirip, korrelýasiýa meýdanyny (nokatlaýyn diagrammany) gurmaly.

Korrelýasiýa meýdany esasynda X we Y tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygy we bu baglylygyň görnüşi (çyzykly ýa-da çyzykly däl) baradaky gümanetmäni aýtmaly.

X we Y tötän ululyklaryň matematiki garaşmalarynyň bahalary hökmünde $\bar{x}$ we $\bar{y}$ orta arifmetiki bahalary hasaplamaly.

Orta kwadratik gyşarmalaryň $\bar{\sigma}_x$ we $\bar{\sigma}_y$ bahalaryny hasaplamaly.

Korrelýasiýa koeffisiýentiniň bahasy hökmünde r_s saýlama korrelýasiýa koeffisiýentini hasaplamaly.

Korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetliligi baradaky çaklamany barlamaly.

Korrelýasiýa koeffisiýentiniň ygtybarlygyny bahalandyrmaly (Fişer kriterisi).

Y tötän ululygyň *X* tötän ululyga regressiýa deňlemesini ýazmaly. Regressiýa gönüsiniň grafigini çyzmaly.

Regressiýanyň takyklygyny bahalandyrmaly.

Regressiýa deňlemesiniň parametrleriniň takyklygyny nokatlaýyn we interwallaýyn bahalandyrmaly.

Derňewiň maglumatlary boýunça umumy netije çykarmaly.

Ýumuşy ýerine ýetirmeklige usuly görkezmeler we peýdalanylýan formulalar

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ - *X* tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň bahasy (orta arifmetiki baha).

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$ - *Y* tötän ululygyň matematiki garaşmasynyň bahasy (orta arifmetiki baha).

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$ - *X* tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasynyň bahasy.

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$ - *Y* tötän ululygyň orta kwadratik gyşarmasynyň bahasy.

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y}$$ -korrelýasiýa koeffisiýentiniň bahasy (saýlama korrelýasiýa koeffisiýenti).

$H_0: r = 0$ - korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetsizdigi baradaky çaklama.

$t_{gozeg} = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$ çaklamany barlag kriterisiniň empirik bahasy.

Kriteriniň $t_{kr.}$ kritiki nokatlary α ähmiýetlilik derejesi we $k = n-2$ erkinlik derejeleriniň sany boýunça Stýudent paýlanyşynyň tablisasyndan tapylýar. (Goşmaça VI)

Eger $t_{gozeg} > t_{kr.}$ bolsa, onda H_0 esasy çaklama inkär edilýär we korrelýasiýa koeffisiýenti ähmiýetli diýlip hasap edilýär.

$P(thZ_1 \le r_s \le thZ_2) = \beta$ - Fişer kriterisine laýyklykda, r_s korrelýasiýa koeffisiýentiniň $(thZ_1; thZ_2)$ ynam interwalyna düşmeginiň ähtimallygy , bu ýerde β -kabul edilen ynam ähtimallygy, th -giperbolik tangensiň belgisi,

$Z_1 = Z - t_\beta \cdot \sigma_z$, $\quad Z_2 = Z + t_\beta \cdot \sigma_z$,

$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_s}{1-r_s}$ - Fişer funksiýasy.

$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ - Z ululygyň orta kwadratik gyşarmasy.

$t_\beta = \arg(\Phi(t_\beta))$- Laplas funksiýasynyň β ynam ähtimallygyna degişli argumenti (standart normal kanunyň $100\beta\%$ kwantili)

Eger

$|r_s| > thZ_2 - thZ_1$

bolsa, onda korrelýasiýa koeffisiýentini ygtybarly, *X* we *Y* tötän ululyklaryň arasyndaky korrelýasiýa baglylygyny bolsa, kesgitlenen hasap etmeli.

$Y = \rho x + b$ -regressiýa gönüsiniň deňlemesi.

$$\left.\begin{aligned} \rho &= r_s \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x} \\ b &= \overline{y} - \rho\overline{x} \end{aligned}\right\}$$ regressiýa deňlemesiniň parametrleri.

Regressiýanyň takyklygynyň hasaplanyşy.

$\overline{\sigma}_{gal.} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2}{n-2}}$ regressiýanyň takyklygy (korrelýasiýa meýdanynyň nokatlarynyň regressiýa gönüsinden galyndy orta kwadratik gyşarmasy ýa-da başgaça, bahalaryň ölçegleriniň orta kwadratik ýalňyşlygy), bu ýerde

$Y_i = \rho x_i + b$.

Regressiýa gönüsiniň parametrleriniň bahalandyrylyşy:

a) nokatlaýyn bahalandyrma.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\rho &= \frac{\overline{\sigma}_{gal.}}{\overline{\sigma}_x\sqrt{n-2}} \\ \tilde{\sigma}_b &= \frac{\overline{\sigma}_{gal.}}{\sqrt{n-2}} \end{aligned}\right\}$$ -regressiýa deňlemesiniň parametrleriniň orta kwadratik gyşarmalary (takyklygy)

b) interwallaýyn bahalandyrma.

$P\left(\rho - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_\rho \le A \le \rho + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_\rho\right) = \beta$ - regressiýa funksiýasynyň A koeffisiýentiniň $(\rho - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_\rho;\ \rho + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_\rho)$ ynam interwalyna düşmeginiň ähtimallygy.

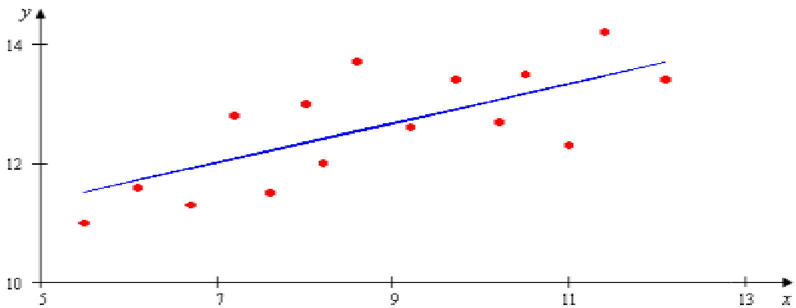
$P\left(b - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_b \le B \le b + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_b\right) = \beta$ - regressiýa funksiýasynyň B koeffisiýentiniň $\left(b - t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_b;\ b + t_\beta \cdot \tilde{\sigma}_b\right)$ ynam interwalyna düşmeginiň ähtimallygy.

$\Phi(t_\beta) = \beta,\quad t_\beta$ -Laplas funksiýasynyň argumenti.

Tablisa 19

N	x_i	y_i	N	x_i	y_i	N	x_i	y_i
1	6,1	11,6	6	11,41	14,2	11	8,2	12,0
2	7,2	12,8	7	8,0	13,0	12	12,1	13,4
3	5,5	11,0	8	6,7	11,3	13	10,5	13,5
4	8,6	13,7	9	9,2	12,6	14	9,7	13,4
5	10,2	12,7	10	11,0	12,3	15	7,6	11,5

Korrelýasiýa meýdanyny guralyň.



Korrelýasiýa meýdany

Korrelýasiýa meýdany esasynda *Y* we *X* tötän ululyklaryň arasynda

$$Y = \rho x + b$$

regressiýa funksiýaly çyzykly korrelýasiýa baglylygynyň bardygyny güman etmek bolar.

Tablisa 20

№	x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	Y_i	(Y_i-y_i)
1	6,1	11,6	-2,7	-1,0	7,29	1	2,70	11,7	0,009
2	7,2	12,8	-1,6	0,2	2,56	0,04	-0,32	12,0	0,541
3	5,5	11,0	-3,3	-1,6	10,89	2,56	5,28	11,5	0,246
4	8,6	13,7	-0,2	1,21	0,04	1,21	-0,22	12,5	1,362
5	10,2	12,7	1,4	0,1	1,96	0,01	0,14	13,1	0,136
6	11,41	14,2	2,6	1,6	6,76	2,56	4,16	13,5	0,533
7	8,0	13,0	-0,8	0,4	0,64	0,16	-0,32	12,3	0,446
8	6,7	11,3	-2,1	-1,3	4,41	1,69	2,73	11,9	0,357
9	9,2	12,6	-0,4	0	0,16	0	0	12,7	0,018
10	11,0	12,3	2,2	-0,3	4,84	0,09	-0,66	13,3	1,074
11	8,2	12,0	-0,6	-0,6	0,36	0,36	0,36	12,4	0,159
12	12,1	13,4	3,3	0,8	10,89	0,64	2,64	13,7	0,093
13	10,5	13,5	1,7	0,9	2,89	0,81	1,53	13,2	0,110
14	9,7	13,4	0,9	0,8	0,81	0,64	0,72	12,9	0,249
15	7,6	11,5	-1,2	-1,1	1,44	1,21	1,32	12,2	0,488
$\sum$	132,0	189,0	0	0	55,94	12,98	20,60	189,0	5,818

Aşakdaky hasaplamalary geçireliň.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{132}{15} = 8,8 \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{189}{15} = 12,6$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{55,94}{14}} = 2$$

$$\bar{\sigma}_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{12,98}{14}} = 0,96.$$

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot \bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y} = \frac{20,60}{15 \cdot 2 \cdot 0,96} = 0,69$$

$$\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2 = 55,94; \quad \sum_{i=1}^{15}(y_i - \bar{y})^2 = 12,98.$$

$H_0 : r = 0$ - korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetsizdigi baradaky esasy çaklama.

H_0 esasy çaklamany barlag kriterisiniň empirik (gözegçilik) bahasy:

$$t_{gozeg} = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = 0{,}69\sqrt{\frac{13}{1-0{,}69^2}} = 3{,}45.$$

$\beta = 0{,}95$ ynam ähtimallygy (ýa-da $\alpha = 0{,}05$ ähmiýetlilik derejesi) we k=n-2=13 erkinlik derejeleriniň sany boýunça Stýudent paýlanyşynyň tablisasyndan (Goşmaça VI) kriteriniň kritiki nokadynyň $t_{kr.} = 2{,}16$ bahasyny taparys.

$t_{gozeg} = 3{,}45 > 2{,}16 = t_{kr.}$ bolandygy sebäpli, korrelýasiýa koeffisiýentiniň ähmiýetsizdigi baradaky H_0 esasy çaklama inkär edilýär.

$\beta = 0{,}95$ ynam ähtimallygy boýunça ters interpolirleme arkaly Goşmaça II-den $t_\beta = 1{,}96$ bahany taparys.

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_s}{1-r_s} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0{,}69}{1-0{,}69}\right) = 0{,}86$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}29.$$

bolandygy sebäpli, taparys

$$Z_1 = Z - t_\beta \cdot \sigma_z = 0{,}86 - 1{,}96 \cdot 0{,}29 = 0{,}29$$

we

$$thZ_1 = th0{,}29 = 0{,}28.$$

$$Z_2 = Z + t_\beta \cdot \sigma_z = 0{,}86 + 1{,}96 \cdot 0{,}29 = 1{,}42$$

we

$$thZ_2 = th1{,}42 = 0{,}89.$$

Şeýlelikde, r_s korrelýasiýa koeffisiýenti üçin ynam interwaly (0,28; 0,89) bolar.

$$|r_s| = 0{,}69 > thZ_2 - thZ_1 = 0{,}89 - 0{,}28 = 0{,}61$$

bolandygy sebäpli, korrelýasiýa koeffisiýentini ygtybarly, Y we X tötän ululyklaryň arasyndaky çyzykly korrelýasiýa baglylygyny bolsa, kesgitlenen hasap etmek bolar.

$$Y = \rho x + b.$$

regressiýa gönüsiniň parametrlerini tapalyň.

$$\rho = r_s \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x} = 0,69 \frac{0,96}{2} = 0,33.$$

$$b = \bar{y} - \rho\bar{x} = 12,6 - 0,33 \cdot 8,8 = 9,65.$$

Onda regressiýa gönüsiniň deňlemesi

$$Y = 0,33x + 9,65.$$

bolar.

Regressiýa gönüsiniň grafigini korrelýasiýa meýdanynyň grafigi çyzylan koordinatalar ulgamynda çyzalyň.

Regressiýanyň takyklygynyň bahasy:

$$\overline{\sigma}_{gal.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - y_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{5,818}{13}} = 0,67$$

Regresiýa deňlemesiniň parametrleriniň takyklygynyň bahalary

$$\tilde{\sigma}_\rho = \frac{\overline{\sigma}_{gal.}}{\overline{\sigma}_x\sqrt{n-2}} = \frac{0,67}{2 \cdot \sqrt{13}} = 0,093.$$

$$\tilde{\sigma}_b = \frac{\overline{\sigma}_{gal.}}{\sqrt{n-2}} = \frac{0,67}{\sqrt{13}} = 0,19.$$

Netije.

1) Y we X tötän ululyklaryň arasynda $r_s = 0,69$ korrelýasiýa koeffisiýentli çyzykly korrelýasiýa baglylygy bar.

2) $Y = 0,33x + 9,65$

regressiýa gönüsiniň deňlemesi $\overline{\sigma}_{gal.} = 0,67$ takyklyk bilen alnan.

Goşmaça I

$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiýanyň bahalarynyň tablisasy**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957

Goşmaça I (dowamy)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Goşmaça II

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

funksiýanyň bahalarynyň tablisasy

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0.00	0.00000	1.25	0.78870	2.50	0.98755
0.05	0.03988	1.30	0.80640	2.55	0.98922
0.10	0.07968	1.35	0.82298	2.60	0.99068
0.15	0.11924	1.40	0.83849	2.65	0.99195
0.20	0.15852	1.45	0.85294	2.70	0.99307
0.25	0.19741	1.50	0.86639	2.75	0.99404
0.30	0.23582	1.55	0.87886	2.80	0.99489
0.35	0.27366	1.60	0.89040	2.85	0.99583
0.40	0.31084	1.65	0.90106	2.90	0.99627
0.45	0.34729	1.70	0.90067	2.95	0.99682
0.50	0.38292	1.75	0.91988	3.00	0.99730
0.55	0.41768	1.80	0.92814	3.10	0.99806
0.60	0.45140	1.85	0.93569	3.20	0.99863
0.65	0.48431	1.90	0.94257	3.30	0.99903
0.70	0.51607	1.95	0.94882	3.40	0.99933
0.75	0.54675	2.00	0.95450	3.50	0.99958
0.80	0.57629	2.05	0.95964	3.60	0.99968
0.85	0.60468	2.10	0.96427	3.70	0.99978
0.90	0.63188	2.15	0.96844	3.80	0.99986
0.95	0.65789	2.20	0.97219	3.90	0.99990
1.00	0.68269	2.25	0.97555	4.00	0.99994
1.05	0.70628	2.30	0.97855	4.10	0.99996
1.10	0.72867	2.35	0.98123	4.20	0.99997
1.15	0.74985	2.40	0.98360	4.30	0.99998
1.20	0.76986	2.45	0.98521	4.40	0.99999

Goşmaça III

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ **bahalaryň tablisasy**

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,754
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	39,2
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Goşmaça IV

$q = q(\gamma, n)$ **bahalaryň tablisasy**

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,1850
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	,162

Goşmaça V

χ^2 paýlanyşyň kritiki nokatlary

Erkinlik derejeleriniň sany k	α -ähmiýetlilik derejesi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Goşmaça VI
Stýudent paýlanyşynyň kritiki nokatlary

Erkinlik derejeleriniň sany k	α - ähmiýetlilik derejesi (ikitaraplaýyn kritiki ýaýla)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	0	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84		12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	22,33	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03		6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	10,22	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	7,17	5,40
8	1,86	2,31	2,09	3,36	5,89	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	5.21	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,79	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,50	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	4,30	4,32
13	1,77	2, 16	2,65	3,01	4,14	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,03	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,93	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,85	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,79	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,73	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,69	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,65	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,61	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,58	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,55	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,53	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,51	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,49	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,47	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,45	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,44	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,42	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,40	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,40	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,39	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,31	3,29
					3,23	
					3,17	
					3,09	
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	α - ähmiýetlilik derejesi (birtaraplaýyn kritiki ýaýla)					

Goşmaça VII

Fişer-Snedekor paýlanyşynyň kritiki nokatlary. (k_1- uly dispersiýanyň erkinlik derejeleriniň sany, k_2-kiçi dispersiýanyň erkinlik derejeleriniň sany)

$\alpha = 0,01$ ähmiýetlilik derejesi

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,47	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,47	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

$\alpha = 0,05$ ähmiýetlilik derejesi

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,70	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Goşmaça VIII
χ^2 kriteri üçin *P* ähtimallyklaryň tablisasy

χ^2	*r*							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3173	0.6065	0.8013	0.9098	0.9626	0.9858	0.9948	0.9982
2	0.1574	0.3679	0.5724	0.7358	0.8491	0.9197	0.9598	0.9810
3	0.0833	0.2231	0.3916	0.5578	0.7000	0.8086	0.8850	0.9344
4	0.0455	0.1353	0.2615	0.406	0.5494	0.6767	0.7798	0.8571
5	0.0254	0.0821	0.1718	0.2873	0.4159	0.5438	0.6600	0.7576
6	0.0143	0.0498	0.1118	0.1991	0.3062	0.4232	0.5398	0.6472
7	0.0081	0.0302	0.0719	0.1359	0.2206	0.3208	0.4289	0.5366
8	0.0027	0.0183	0.0460	0.0916	0.1562	0.2381	0.3326	0.4335
9	0.0016	0.0111	0.2930	0.0611	0.1091	0.1736	0.2527	0.3423
10	0.0009	0.0067	0.0186	0.0404	0.0752	0.1247	0.1886	0.2650
11	0.0006	0.0041	0.0117	0.0266	0.0514	0.0884	0.1386	0.2017
12	0.0003	0.0025	0.0074	0.0174	0.0348	0.0620	0.1006	0.1512
13	0.0002	0.0015	0.0046	0.0113	0.0234	0.0430	0.0721	0.1119
14	0.0001	0.0009	0.0029	0.0073	0.0156	0.0296	0.0512	0.0818
15	0.0001	0.0008	0.0018	0.0047	0.0104	0.0203	0.0360	0.0591
16	0	0.0002	0.0011	0.003	0.0068	0.0138	0.0251	0.0421
17		0.0001	0.0007	0.0019	0.0045	0.0093	0.0174	0.0301
18		0.0000	0.0004	0.0012	0.0029	0.0062	0.0120	0.0212
19			0.0003	0.0006	0.0019	0.0042	0.0082	0.0149
20			0.0002	0.0005	0.0013	0.0028	0.0056	0.0103
21			0.0001	0.0003	0.0008	0.0018	0.0036	0.0071
22			0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0025	0.0040
23			0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0034
24				0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0023
25				0.0001	0.0010	0.0003	0.0008	0.0016
26				0.0000	0.0010	0.0002	0.0005	0.0010
27					0.0010	0.0001	0.0003	0.0007
28					0.0000	0.0001	0.0002	0.0005
29						0.0001	0.0001	0.0003
30						0.0000	0.0001	0.0002

Goşmaça VIII (dowamy)

χ^2	*r*							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9915	0.9963	0.9985	0.9994	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000
3	0.9643	0.9814	0.9907	0.9955	0.9979	0.9991	1.0000	0.9998
4	0.9114	0.9473	0.9699	0.9834	0.9912	0.9955	0.9977	0.9989
5	0.8343	0.8912	0.9312	0.9580	0.9752	0.9858	0.9921	0.9958
6	0.7399	0.8153	0.8734	0.9160	0.9462	0.9665	0.9797	0.9881
7	0.6371	0.7254	0.7991	0.8576	0.9022	0.9345	0.9576	0.9733
8	0.5341	0.6288	0.7133	0.7851	0.8436	0.8893	0.9238	0.9489
9	0.4373	0.5321	0.6219	0.7029	0.7729	0.8311	0.8715	0.9134
10	0.3506	0.4405	0.5304	0.6210	0.6939	0.7622	0.8197	0.8686
11	0.2757	0.3575	0.4433	0.5280	0.6108	0.686	0.7526	0.8095
12	0.2133	0.2851	0.3626	0.4457	0.5276	0.6063	0.6790	0.7440
13	0.1626	0.2237	0.2933	0.3690	0.4478	0.5265	0.6023	0.6728
14	0.1223	0.1730	0.2330	0.3007	0.3738	0.4497	0.5255	0.5987
15	0.0909	0.1321	0.1825	0.2414	0.3074	0.3782	0.4511	0.5246
16	0.0669	0.0996	0.1411	0.1912	0.2491	0.3134	0.3821	0.453
17	0.0487	0.0744	0.1079	0.1496	0.1993	0.2562	0.3189	0.3856
18	0.0352	0.055	0.0816	0.1157	0.1575	0.2068	0.2627	0.3239
19	0.0252	0.0403	0.0611	0.0885	0.1231	0.1649	0.2137	0.2687
20	0.0179	0.0293	0.0153	0.0671	0.0952	0.1301	0.1719	0.2202
21	0.0126	0.0211	0.0334	0.0504	0.7290	0.1016	0.1368	0.1785
22	0.0089	0.0151	0.0244	0.0375	0.5540	0.0786	0.1078	0.1432
23	0.0062	0.0107	0.0177	0.0277	0.0447	0.0603	0.8410	0.1137
24	0.0043	0.0076	0.0127	0.0203	0.0311	0.0458	0.6510	0.0895
25	0.0030	0.0053	0.0091	0.0148	0.0231	0.0346	0.4990	0.0698
26	0.0020	0.0037	0.0065	0.0107	0.0170	0.0259	0.0380	0.0540
27	0.0011	0.0026	0.0046	0.0077	0.0124	0.0193	0.0287	0.0415
28	0.0010	0.0018	0.0062	0.0055	0.0960	0.0142	0.0216	0.0316
29	0.0006	0.0012	0.0023	0.0039	0.0650	0.1040	0.0161	0.0239
30	0.0004	0.0009	0.0016	0.0028	0.0470	0.0076	0.0119	0.018

Edebiýat

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. М., Недра, 2003.
11. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 2000.

12. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2005.

13. Пятницкая М.П. Вероятностно-статистический и корреляционный анализы рядов ошибок геодезических измерений. Л., изд ЛГИ, 2003.

14. Рыжков П.А. Математическая статистика в горном деле. М., Высшая школа, 2004.

15. Смирнов Н.В., Белугин Д.А. . Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. М., Недра, 1999.

Mazmuny