TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

D. Nurmämmedow, M. Handöwletow

DEŇLEŞDIRME HASAPLAMALARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Aşgabat – 2010

D. Nurmämmedow, M. Handöwletow, Deňleşdirme hasaplamalary.

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby, Aşgabat – 2010 ý.

GIRIŞ

Geodeziýa işleri geçirilende dürli görnüşli ölçemeler ýerine ýetirilýär. Her bir ölçeme, ňäçe gowy ýerine etirilse-de, onda ýalňyşlyk goýberilýär. Geodeziýa işlerinde takyk bolmadyk ölçemelerdäki ýalňyşlyklary tapmak üçin her bir ululygy birnäçe gezek ölçemek gerek bolýar. Köplenç matematiki gatnaşyklaryň ululyklary bilen bagly bolan goşmaça birnäce ululyklar hem ölçenilýär. Goşmaça ölçemeler diňe barlag etmeklige mümkinçilik döretmän, eýsem ölçenilýän ululyklaryň iň esasy, bolaýjak bahalaryny tapmaklyga mümkinçilik döredýär. Has ähtimal bahalar ölçemeleriň netijelerine düzediş girizmek arkaly tapylýar.

Ölçemeleriň netijelerine dürli görnüşli düzedişler girizip, gözlenilýän ululygyň dürli bahalaryny alyp bolýar. Bu ululygyň has ygtybarly bahasy bolup, v_i -girizilen düzedişden alnan kwadratlaryň jeminiň iň kiçisi bolýan, deňtakykly ýagdaýda $[vv]=min.$, deňtakykly däl ýagdaýda $[pvv]=min$ hyzmat edýär. Bu ýerde *p*- ölçemäniň netijesiniň agramy, kwadrat ýaý bolsa, Gauss tarapyndan girizilen birmeňzeş goşulyjylaryň doly jeminiň belgisini aňladýar.

Iň kiçi kwadratlar usulyna laýyklykda, düzedişler girizmek arkaly ölçelen ululyklaryň has ähtimal bahalarynyň kesgitlenilişi ölçemeleriň netijelerini iň kiçi kwadratlar usuly boýunça deňleşdirmek diýlip atlandyrylýar.

Ölçemeleriň netijeleri deňleşdirilen ýagdaýynda, gözlenýän ululyklaryň we olaryň funksiýalarynyň deňleşdirilen ululyklarynyň ölçemeleriniň netijeleriniň takyklygyna baha berilýär.

Ölçemeleriň netijelerini deňleşdirmegiň iki usuly bar: zerur näbelliler usuly (parametrik usul) we ölçemeleriň şertli usuly (korrelat usul) [10]. Zerur näbelliler usulynda özara matematiki gatnaşyklar bilen bagly bolmadyk belli parametrler saýlanyp alynýar. Mundan beýläk ýöne näbelliler diýlip funksiýa görnüsinde saýlanyp alnan näbelli parametrleriň hemme ölçelen ululyklaryna aýdylýar.

I. ÖÇEMELER HATARLARY

I.1. Ölçemeler barada umumy düşünjeler

Ölçemeler işleri durmuşda uly ähmiýete eýedir. Şol sebäpli ölçemeler düşunjesini öwrenmeklik uly zerurlygy ýüze çykýar. Praktiki işlerde ölçemeler geçirilýär we olar barada maglumatlar alynýar. Alnan maglumatlar ölçeme prosesiniň esasy bölegidir.

Ölçeme diýlip ölçenýän ululyklary özüne meňzeş bir ululyk bilen deňeşdirme prosesine aýdylýar. Ölçemeleriň netijesinde takmynan san alynýar. Ol ölçenýan ululygyň ölçeg birliginden näçe esse ulu ýa-da kiçidigini görkezýär. Ölçenýän ululyk matematiki taýdan

$$L=MN$$

deňlik bilen aňladylýar. Bu ýerde *L*- ölçenýän ululyk; *M*- ölçeme birligi; *N*-ölçeme netijesinde alnan ululyk.

Polat ruletka bilen ýerasty teodolit ädiminiň uzynlygyny ölçemek muňa mysal bolup biler.

Ölçenýän ululyklar iň takyk gurallar bilen ölçenende hem ýalňyşlyklar goýberilýär.

Islendik ölçemeler bu prosese gatnaşýan, aşakdaky elementleriň barlygynda we olaryň özara baglanyşygy bar wagtynda ýerine ýetýärler:

1) Ölçenýän obýekt; (gurluşyk meýdany)
2) Ölçemeleri amala aşyrýan gözegçi;
3) Ölçemeleri amala aşyrýan gurallar;
4) Ölçeme amala aşyrylandaky daşky şertler.

Şu görkezilen ýagdaýlar ölçemäniň şertlerii diýilip atlandyrylýar. Ölçeme geçirilen wagtynda aşakdaky talaplar ýerine ýetmeli:

1. Ölçeg birliginiň ululygy takyk bolmaly hem-de üýtgemeýän bolmaly.
2. Ölçeme geçirilýan wagtynda ölçeg meýdany uýtgemeýän bolmaly.

Ölçemeleriň şerti ýalňyşlygyň döremeginiň çeşmesi bolup durýar. Esasy ýalňyşlyk, ölçeme wagtynda ölçeýjiniň ölçemelere bolan ukybyna, we abzallaryň takyklygyna, daşky sreda baglydyr. Ölçemeleriň netijeleri ylmyň we tehnikanyň dürli oblastlaryndaky alnan bahalaryň hiç wagt takyk bolmaýandygyny görkezýär. Dürli ölçemeleriň dürli bolýandygy ýalňyşlygyň peýda bolýandygyny görkezýär. Şol sebäpli, ölçeg geçirilende ölçenýän aralyga tötän sanlar hökmünde garamak bolar. Ölçenýän obýektiň takyk ýa-da hakyky bahasy barada aýdylanda tebigatda absolýut üýtgemän galýan ölçeme obýektleriniň ýokdugyna garamazdan, ölçenýän obýektiň ölçeglerini praktiki taýdan üýtgemän galýan diýlip hasap etmek mümkin bolan wagt aralygyny mydama görkezmek bolar diýlen tassyklamany aýtmak bolar. Ölçenýän obýektiň şeýle ölçeglerine takyk ýa-da hakyky diýilýär.

Ýerde gowy berkidilen iki punktyň arasyndaky aralyga ýa-da berkidilen punktlaryň arasyndaky burçlara we ş.m. üýtgemeýan ululyklar hökmünde garap bolýar.

Ölçenýan ululygyň hakyky bahasyny L, şol ululygyň ölçenen bahasyny bolsa l bilen belgiläp, olaryň

$$l\text{-}L=\Delta$$

tapawudyny hakyky ölçeme ýalňyşlygy diýip atlandyralyň.

Ölçemelerde alynýan dürli ululyklar ölçenýän ululygyň hakyky bahasyndan tapawutlanýarlar. Abzallar näce täze bolsalar, ölçeýjiniň iş tejribesi näç köp bolsa, şeýle-de howa şertleri gowy bolsa, ölçeme ýalňyşlygy şonça-da az bolýar. Geodeziýa hünärmeniniň öňünde ölçenýän obýekti nähili takyklykda ölçemeli diýlen sorag durýar. Eger ony örän ýokary takyklykda ölçemeli bolsa, onda oňa örän gymmat täze abzallar we köp zähmet talap edilýär.

I.2. Ölçemeleriň görnüşleri

Göni ölçemeler - ölçeme birligi bilen ölçenýän ululygy deňeşdirmek. Mysal üçin, teodolidiň limbi boýunça haýsy hem bolsa bir ugry ölçemek. Termometr bilen howanyň temperaturasyny ölçemek.

Goşmaça ölçemeler - göni ölçemeler bilen ölçenýän ululyklar däl-de, başga funksional baglanyşykda bolan ululyklar ölçenýär. Mysal üçin, iki reperiň arasyndaky beýiklk ýapgyt ýagdaýynda

$$h = l \sin \delta + i - v$$

formula bilen hasaplanýar. Bu ýerde *h*- iki reperiň arasyndaky beýiklik; *l*-ýapgyt uzynlygy; δ -ýapgytlyk bürçy; *i*-guralyň beýikligi; *v*-signalyň beýikligi.

Baglanyşykly şertli ölçemeler-bu ölçemeler belli bolan nazary şertleri kanagatlandyrmalydyrlar. Mysal üçin, üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180 gradus bolmalydyr. Ýapyk niwelir ädiminiň artdyrmasynyň jemi nula deňdir.

Baglanyşykly şertli däl ölçemeler-bu ölçemelere netijesi öň nazary belli däl ölçemeler girýärler.

Bagly däl ölçemeler-bir ölçeme ýalňyşlygy beýleki ölçeme ýalňyşlygyna täsir etmeýär. Mysal üçin, bir tarapa ölçenende goýberilen ýalňyşlyk beýleki tarapa ölçenendäki ýalňyşlyga täsir etmeýär.

Bagly ölçemeler-bir ölçemäniň ýalňyşlygy beýleki ölçemäniň ýalňyşlygyna täsir edýär.

Deňtakykly ölçemeler- dürli ýalňyşlyklara getirýän şertler toplumy gözegçilik wagtynda üýtgemeýän ölçemelere aýdylýar.

Deňtakykly däl ölçemeler- gözegçilik şertleriniň üýtgemegi sebäpli dürli ýalňyşlyklara sezewar edilen aýratyn ölçemelere ýa-da aýratyn ölçemeleriň hatarynyň netijelerine aýdylýar.

Zerur ölçemeler-Her bir gözlenýän ululygyň ýeke-täk bahasynyň alynmagy.

Artykmaç ölçemeler-bu zerur ölçemelerden başga geçirilýäň ölçemeler. Mysal üçin, üçburçlugyň burçlarynyň ululygyny kesgitlemek üçin islendik iki burçy ölçemek zerur, ücünji burçy ölçemek bolsa artykmaçdyr.

I.3. Ölçeme ýalňyşlyklary we olaryň klassifikasiýasy

Görnüşi ýaly, ölçeme geçirilende takyk bahalar alynman dürli ýalňyşlyklar goýberilýär.Ýalňyşlyklar esasan hem abzala, ölçeýjä we daşky sreda bagly bolýar. Nähili ýalňyşlyklar bolýar we olary nädip azaltmaly diýlen meselä garap geçeliň.

Ölçenýän obýektiň ýerleşişiniň we onuň ölçegleriniň üýtgemegi sebäpli goýberilýän ýalňyşlyklar-geodeziki praktikada obýekt ölçenýän wagtynda obýektiň ululygynyň we ýerleşişiniň üýtgeýän wagtlary bolýar. Ölçegleriň netijeleri gaýtadan işlenende ýalňyşlyklar döreýär. Mysal üçin, barometriki niwelirleme geçirilende atmosferanyň üýtgemegini göz öňünde tutmaly.

Ölçeýjiniň goýberýän ýalňyşlygy-bu ölçeýjiniň duýgurlygyna, saglygyna baglydyr. Sebäbi ölçeýji üçin ölçegiň ululygy we goýberilýän ýalňyşlygyň alamaty belli däl, olar tötän häsiýete eýedirler.

Abzal ýalňyşlygy-abzalyň dogry işlemeýändigi ýa-da onyň dogry iş ýagdaýynda gurulmandygy bu ýalňyşlyklara getirýär.

Abzal ýalňyşlyklary esasan şu şertlere baglydyr:

a) Abzalyň käbir detalynyň dogry ýasalmanlygy.Mysal üçin, limbiň bölekleriniň dogry goýulmanlygy, ruletkada ştrihiň nädogry goýulmagy we ş.m.

b) Abzal gurlanda takyk gurulmanlygy.

Daşky sredanyň täsiri netijesinde döreýän ýalňyşlyk- ölçegiň netijesine daşky sredanyň ýaramaz täsir etmegi. Temperatura, basyş, howanyň çyglylygy, tozan we ş.m. Käbir ýalňyşlyklara goşmaçalar girizip düzedip bolýar, käbirlerini bolsa, düzedip bolmaýar.

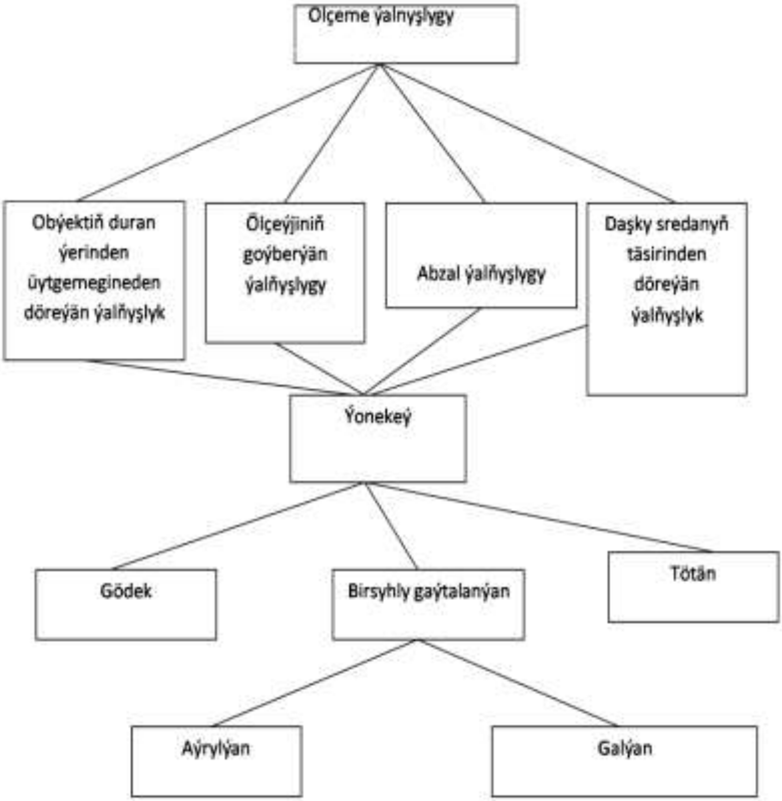
Durmuşda gabat gelýän ýalňyşlyklar öz häsiýetlerine görä iki topara bölünýärler: **gödek** we **gutulgysyz** ýalňyşlyklar.

Gödek ýalňyşlyk- geçirilýän ölçemede talap edilýän takyklykdan geçýän ýalňyşlyk. Ol daşky şertiň çalt üýtgemeginden ýa-da ölçeýjiniň ýalňyşlygyndan emele gelýär. Mysal üçin, polat ruletka bilen ölçenende dessimetre geçmek, niwelir reýkasynda santimetre geçmek. Gödek ýalňyşlyklar tapylyp ölçeglerden aýrylmalydyrlar.

Gödek ýalňyşlyklar aýrylandan soň **gutulgysyz** ýalňýşlyklar galýar olar hem iki topara bölüňýärler.

1-nji topar-eger deňtakykly ölçemeleriň orta ýalňyşlygy nuldan tapawutly käbir predele ymtylýan bolsa onda bu görnüşli ýalňyşlyklara birsyhly ýalňyşlyklar diýilýär. Bu ýalňyşlyk abzalyň kemçiligi gözegçiniň goýberýän ýalňyşlygy, we daşky sredanyň täsiri esasynda döreýär. Birsyhly ýalňyşlyklar absolýut ululygy boýunça uly bolmaýar, ýöne olary hökman göz öňünde tutmaly. Eger bu ýalňyşlygyň çeşmesi belli bolsa, hem-de bu ýalňyşlyklary aýryp bolsa, onda oňa aýryp bolýan birsyhly ýalňyşlyklar diýilýär.

2-nji topar-gödek we aýryp bolýan birsyhly ýalňyşlyklar aýrylandan soň aýrylmasy mümkin däl ýalňyşlyklar galýarlar. Bular belli bir ugurly däl. Alamatlary hem hemişelik däl. Eger deňtakykly ölçegiň şol bir ululygy nula ymtylýan bolsa, onda oňa tötän ýalňyşlyklar diýilýär. Galýan tötän ýalňyşlyklar ähtimallyklar nazarýetinde öwrenilýär.



I.4. Deňtakykly ölçemeler. Ölçemäniň tötän ýalňyşlygynyň häsiýeti

Ölçemelerden görnüşi ýaly, tötän ýalňyşlyklar hiç bir kanuna gabat gelmezden her ölçemede gabat gelýärler. Şol sebäpli, bu tötän ýalňyşlyklary ähtimallyk kanunlarynyň esasynda öwrenmelidir. Tötän ýalňyşlyklar şeýle häsiýetlere eýedirler.

1. Berlen şertlerde geçirilýän ölçemäniň tötän ýalňyşlygynyň absolýut ululygy käbir çäkden geçmeýär. Eger bu çägi $\Delta_{\text{çäk}}$ bilen belgilesek,

$$|\Delta| \leq \Delta_{\text{çäk}}$$

bolar.

2. Absolýut ululygy boýunça kiçi ýalňyşlyklar uly ýalňyşlyklardan köp ýüze çykýar. Eger ýalňyşlyk öz çägine golaýlaýan bolsa, onda bu ölçemede hemme mümkinçiligiň ulanylmandygyny görkezýär, ýagny onuň hili gowulandyrylmaly bolýar.
3. Alnan ölçemelerde položitel ýalňyşlyklar hem edil absolýut ululygy boýunça otrisatel ýalňylňyşlar ýaly köp gabat gelýärler.
4. Deňtakykly ölçemelerde şol bir ululyk ölçenende tötän ýalňyşlyklaryň orta arifmetiki bahasy ölçeme näçe köp geçirildigiçe nula ymtylýar.

$n \to \infty$ 4-nji häsiýeti şeýle ýazyp bolýar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n}{n} = 0,$$

bu ýerde Δ_n ölçemelerdäki tötän ýalňyşlyklar, *n*- ölçemeleriň sany.

Drobyň sanawjysyndaky jemi Gausyň

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = [\Delta]$$

belgilemesi bilen belgiläliň. Onda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0$$

bolar. Eger ölçemeleriň sany artdygyça orta arifmetiki baha nula ymtylmasa, onda

$$\frac{[\Delta]}{n} = A \neq 0$$

bolar. Bu bolsa, birsyhly ýalňyşlyklaryň täsiri ölçemeleriň netijesinden doly aýrylmandygyny görkezýär. Olary ölçemeler hataryndan aýyrmagyň üstünde işlemeli.

I.5. Orta arifmetiki prinsip

Goý birnäçe deňtakykly ölçemeleriň netijesi berlen bolsun

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

Ölçenýän ululygyň hakyky bahasy L bolsun. Onda ölçenen ululyk bilen hakyky ululygyň tapawudy tötän ýalňyşlykdyr

$$\begin{cases} \Delta_1 = l_1 - L \\ \Delta_2 = l_2 - L \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta_n = l_n - L \end{cases} \qquad (1.1)$$

Bu deňlikleriň çep we sag taraplaryny goşup alarys

$$[\Delta] = [l] - Ln \qquad (1.2)$$

Bu ýerden

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - L \qquad (1.3)$$

we

$$\frac{[\Delta]}{n} = \omega, \qquad (1.4)$$

$$\frac{[l]}{n} = X \qquad (1.5)$$

belgileri girizeliň, bu ýerde *X*- deňtakykly ölçemeleriň orta arifmetiki bahasy, ω- ýalňyşlyklaryň orta arifmetiki bahasy.

Onda (1.3) deňligi

$$\omega = X - L \tag{1.6}$$
görnüşde ýazmak bolar.

Ýalňyşlyklaryň dördünji häsiýetiniň esasynda tötän ýalňyşlyklar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = \lim_{n\to\infty} \omega = 0 \tag{1.7}$$

bolar.

Ölçemeleriň sany tükeniksizlige ymtylanda deňtakykly ölçemeleriň orta arifmetiki bahasy şol ululyklaryň hakyky bahasyna ymtylýar. Orta arifmetiki bahany tapmak üçin (1.5) formula ulanylanda uly hasaplamalara getirýär. Hasaplary aňsatlaşdyrmak üçin käbir ýakynlaşmalary girizeliň

$$\left.\begin{aligned} l_1 - l_0 &= l_1^{/} \\ l_2 - l_0 &= l_2^{/} \\ . \quad . \quad & . \quad . \\ l_n - l_0 &= l_n^{/} \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Bu deňlikleriň çep we sag taraplaryny goşup alarys

$$[l] - l_0 n = [l^{/}] \tag{1.9}$$

Bu ýerden

$$X = l_0 + \frac{[l^{/}]}{n} \tag{1.10}$$

(1.10) formula orta arifmetiki bahany tapmagyň formulasydyr.

Mysal. Öçenen ululygyň orta arifmetiki bahasyny tapmaly.

n	*l, m*	*l′ mm*	*n*	*l, m*	*l′ mm*
1 2 3	27,483 27,485 27,482	+3 +5 +2	4 5 6	27,484 27,481 27,483	+4 +1 +3
					$[l^{/}] = 18$

$l_0 = 27{,}480$ ýakynlaşan baha.

$$\frac{[l']}{n} = \frac{18}{6} = 3$$

Onda

$$X = l_0 + \frac{[l']}{n} = 27{,}480 + 0{,}003 = 27{,}483$$

I.6. Ölçemeleriň netijeleriniň takyklygyna baha bermek.

Orta kwadratik ýalňyşlyk

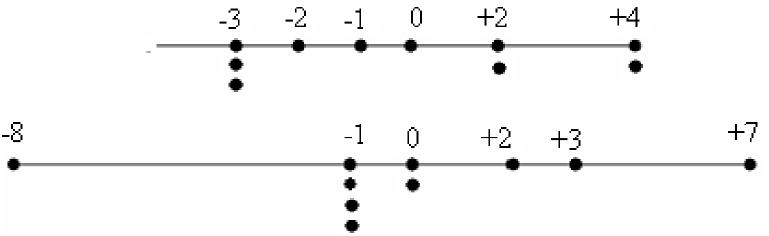
Orta kwadratik ýalňyşlyk we ýalňyşlyklar nazarýeti esasan hem alnan ölçemelere ýaňlyşlyklaryň edýän täsirini öwrenýär. Ýalňyşlyklara baha bermek üçin ölçegleriň takyk bahasyny bilmeli. Ölçemeleriň takyklygyny bilmek üçin ölçenen hataryň hemme ýalňyşlygyny bilmeli. Eger ölçemeler hatarlarynyň bahalary dürli bolsa onuň ýalňyşlygynyň ýaýrawy uly bolýar we oçegleriň takyklygy azalýar.

Dürli şertlerde geçirilen ölçemeler hatarynyň hakyky ýalňyşlyklaryna garalyň

1-nji ölçemeler hatary: -3, +2, +4, -2, -1, 0, +4, -3, +2, -3

2-nji ölçemeler hatary: 0, -1, +7, +2, -1, -1 -8, 0, +3, -1

Haýsy ölçemeler hatarynyň ölçemeleri gowy ýerine ýetirilipdir diýlen sorag ýüze çykýar. Deňeşdirmek üçin masştablar okunda nokatlary guralyň.



Ölçemeleriň netijesinde 1-nji hataryň ýalňyşlygynyň ýaýrawy 2-nji hatara görä kiçiräk, şol sebäpden, 1-nji geçirilen ölçeg has takyk diýlen netijä gelip bolýar.

Absolýut ululygy boýunça orta ýalňyşlygy tapalyň.

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n} \qquad (1.11)$$

!-nji hatar üçin

$$|\Delta|_1 = 3 + 2 + 4 + 2 + 1 + 0 + 4 + 3 + 2 + 3 = 24$$

2-nji hatar üçin

$$|\Delta|_2 = 0 + 1 + 7 + 2 + 1 + 1 + 8 + 0 + 3 + 1 = 24$$

$$\theta_1 = \frac{24}{10} = 2{,}4 \qquad \theta_2 = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

Alnan netije grafik arkaly alnan netije bilen ylalaşmaýar. Iki netijäniň deň gelmegi ýalňyşlyklaryň absolýut ululygynyň orta bahasy uly ýalňyşlyklara duýgur däldigi bilen düşündirilýär. Şol bir şertlerde geçirilen iki topar ölçemeleriň takyk bahasyny häsiýetlendirmek talap edilýär. Şonuň üçin orta kwadratik ýalňyşlyk diýlen düşünje girizilýär.

Orta kwadratik ýalňyşlyk

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad (1.12)$$

formula boýunça hasaplanýar, bu ýerde

$$[\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 .$$

Garalýan mysalda

$$[\Delta\Delta]_1 = 9+4+16+4+1+0+16+9+4+9 = 72,$$
$$[\Delta\Delta]_2 = 0+1+49+4+1+1+64+0+9+1 = 130$$

Onda

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{72}{10}} = \pm 2{,}7,$$
$$m_2 = \pm\sqrt{\frac{130}{10}} = \pm 3{,}6,$$

m_1 we m_2 orta kwadratik ýalňyşlyklary deňeşdirip 1-nji ölçenen hatar 2-nji ölçenen hatara görä gowy geçirilipdir diýlen netijä gelmek bolar.

$n \to \infty$ m haýsy bolsada bir predele ymtylýar, ýagny

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = m_0. \qquad (1.13)$$

Orta arifmetiki baha ölçenýan ululygyň L hakyky bahasyna deň däldir, sebäbi Δ boýunça hasaplanan m orta kwadratik ýalňyşlyk m_0 hakyky orta kwadratik ýalňyşlyga deň bolmaýar, m_0 bolsa standart diýlip atlandyrylýar. Praktikada tükeniksiz ölçeme geçirilmeýär, standartyň bahasy bolsa, näbelli bolup galýar, şol sebäpli onuň ýakynlaşan m bahasyny ulanmaly bolýar, ol hem ýakynlaşýan m_m baha bilen bilen kesgitlenýär.

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \qquad (1.14)$$

ýa-da otnositel bahalarda

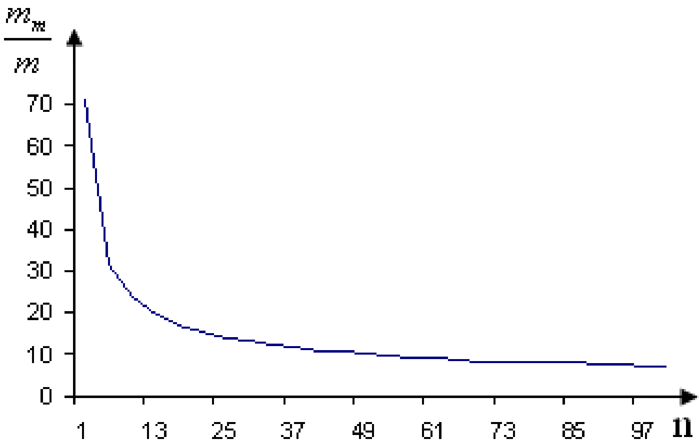
$$\frac{m_m}{m} = \frac{1}{\sqrt{2n}}100\% \qquad (1.15)$$

bolar.

Orta kwadratik ýalňyşlygyň ölçemeleriň sanyna nähili täsir edýändigini bilmek üçin *n*-e dürli bahalary berip aşakdaky tablisany alarys

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	100
$\frac{m_m}{m}$	50	41	35	32	29	27	25	24	22	18	16	14	7

Alnan netijeler boýunça orta kwadratik ýalňyşlygyň ölçemeleriň sanyna görä üýtgeýşiniň grafigini guralyň



1-nji surat

$n=10$ bolýança ýalňyşlyk her ölçemede örän äşak gaçyp başlaýar, ondan soň durnukly ýagdaýa geçýär.

Ölçegiň standarty boýunça ýalňyşlygyň çägini tapyp bolýar

$$\Delta_{\text{çäk}} = km_0 \qquad (1.16)$$

bu ýerde $\Delta_{\text{çäk}}$ ölçegiň çägi, k hemişelik koeffisiýent, m_0 ölçegiň standarty.

Absolýut ululygy boýunça tötän ýalňyşlyklar hakyky ýalňyşlykdan uly bahalary alsa, onda ol gödek ýalňyşlyga girýär.

Ähtimallyklar nazaryýeti boýunça tötän ýalňyşlyklar 100 ýagdaýdan 32 gezek orta kwadratik ýalňyşlykdan artykmaç bahany alyp biler. Eger orta kwadratik baha ikä köpeldilse, onda 100 gezekden bäş gezek artykmaç bahany alyp biler. Orta kwadratik baha üçe köpeldilse, onda 1000 gezekden üç gezek artykmaç bahany alyp biler. Şol sebäpden, geodeziki ölçemelerde $k=3$ diýlip kabul edilýär.

$$\Delta_{\text{çäk}} = 3m_0 \tag{1.17}$$

Geodeziki surata düşürmelerde bolsa,

$$\Delta_{\text{çäk}} = 2m_0 \tag{1.18}$$

diýlip kabul edilýär.

I.7. Orta we ähtimal ýalňyşlyklar

Orta ýalňyşlyk öňden bilşimiz ýaly,

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n}$$

formula boýunça kesgitlenýar.

Ahtimallyklar nazaryýetinde orta ýalňyşlyk bilen standartyň arasynda $n \to \infty$

$$\theta = m_0\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979m_0 \approx \frac{4}{5}m_0 \tag{1.19}$$

görnüşli baglanyşyk bardyr.

Eger tötan ýalňyşlyklar absolýut ululyklary boýunça artýan tertipde ýerleşdirilse, onda ähtimal ýalňyşlyk täk ölçemelerde hataryň ortasynda ýerleşer, eger ölçemeleriň sany jübüt bolsa, onda hataryň ortasyndaky iki bahanyň orta arifmetiki bahasy alnar. Ähtimal ýalňyşlygyň standart bilen baglanyşygy $n \to \infty$

$$r = 0{,}6745m_0 \approx \frac{2}{3}m_0 \tag{1.20}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Mysal. 60 üçburçlugyň burçlary ölçenen. Tötän ýalňyşlyklaryň häsiýetlerine we ululygyň takyklygyna garalyň

№	W	W^2	№	W	W^2	№	W	W^2
1	-1,38	1,9044	21	0,38	0,1444	41	-0,41	0,1681
2	0,82	0,6724	22	0,87	0,7569	42	0,98	0,9604
3	-1	1	23	-1,2	1,44	43	-0,54	0,2916
4	0,45	0,2025	24	0,76	0,5776	44	0,55	0,3025
5	-1,95	3,8025	25	0,73	0,5329	45	0,34	0,1156
6	-0,79	0,6241	26	-0,79	0,6241	46	-0,05	0,0025
7	-0,28	0,0784	27	-0,33	0,1089	47	0,48	0,2304
8	0,51	0,2601	28	-0,26	0,0676	48	-0,14	0,0196
9	-0,22	0,0484	29	0,97	0,9409	49	-1,06	1,1236
10	1,04	1,0816	30	0,25	0,0625	50	-1,04	1,0816
11	-0,41	0,1681	31	-0,51	0,2601	51	-0,63	0,3969
12	-0,73	0,5329	32	-0,21	0,0441	52	0,75	0,5625
13	-1,55	2,4025	33	-0,72	0,5184	53	1,99	3,9601
14	2,03	4,1209	34	0,46	0,2116	54	-1,36	1,8496
15	0,56	0,3136	35	0,35	0,1225	55	-0,97	0,9409
16	-1,57	2,4649	36	-0,45	0,2025	56	0,88	0,7744
17	1,31	1,7161	37	-0,14	0,0196	57	1,13	1,2769
18	0,09	0,0081	38	0,03	0,0009	58	0,74	0,5476
19	-0,73	0,5329	39	0,08	0,0064	59	-0,26	0,0676
20	0,76	0,5776	40	-0,41	0,1681	60	0,61	0,3721

Berlen hatarda alamatlar boýunça hem-de ululyklar boýunça görnüp duran ýalňyşlyklar ýok.

1. Absolýut ululygy boýunça kiçi bahalar uly bahalardan köp gabat gelýär. Tötän ýalňyşlyklaryň ikinji häsiýeti.

0 dan o,5 çenli	0,5-den 1-e çenli	1-den ,5-çenli	1,5-den 2-ä çenli	2-den ýokary
23	24	8	4	1

2. Polozitel ýalňyşlyklaryň sany 29, olaryň jemi bolsa, 20,90, otrisatel ýalňyşlyklaryň sany 31 we olaryň jemi - 22,09. Bu bolsa, ýalňyşlyklaryň üçünji häsiýetine gabat gelýär.
3. Berlen hataryň orta arifmetiki bahasyny hasaplalyň

$$\frac{[W]}{n} = \frac{-1{,}19}{60} = -0{,}02$$

Tapylan baha kiçi, ol bolsa tötän ýalňyşlyklaryň dördünji häsiýetine gabat gelýär. Gözegçilik näçe köp geçirilse, ýalňyşlyk nula ymtylýar.

Orta kwadratik ýalňyşlygy hasaplalyň

$$m = \sqrt{\frac{[WW]}{60}} = \sqrt{\frac{44{,}36}{60}} = 0{,}86$$

Orta ýalňyşlyk berlen hatar üçin

$$\theta = \frac{[|W|]}{n} = \frac{42{,}99}{60} = 0{,}72$$

Eger berlen hatary absolýut ululygy boýunça artýan tertipde ýerleşdirsek, onda hataryň ortasynda ähtimal *r* ýalňyşlygy taparys.

№	$\lvert W \rvert$	№	$\lvert W \rvert$	№	$\lvert W \rvert$
1	0,03	21	0,45	41	0,82
2	0,05	22	0,46	42	0,87
3	0,08	23	0,48	43	0,88
4	0,09	24	0,51	44	0,97
5	0,14	25	0,51	45	0,97
6	0,14	26	0,54	46	0,98
7	0,21	27	0,55	47	1
8	0,22	28	0,56	48	1,04
9	0,25	29	0,61	49	1,04
10	0,26	30	0,63	50	1,06
11	0,26	31	0,72	51	1,13
12	0,28	32	0,73	52	1,2
13	0,33	33	0,73	53	1,31
14	0,34	34	0,73	54	1,36
15	0,35	35	0,74	55	1,38
16	0,38	36	0,75	56	1,55
17	0,41	37	0,76	57	1,57
18	0,41	38	0,76	58	1,95
19	0,41	39	0,79	59	1,99
20	0,45	40	0,79	60	2,03

Garalýan mysalda 30-njy ýalňyşlyk 0,63-e, 31-nji ýalňyşlyk bolsa, 0,72-ä deň, onda ähtimal ýalňyşlyk

$$r = \frac{0{,}63 + 0{,}72}{2} = 0{,}68$$

bolar.

Ýalňyşlyklaryň çägi bolsa,

$$\Delta_{\text{çäk}} = 3m_0 = 3\ 0{,}86 = 2{,}58$$

bolar.

Ölçemeler hatarynyň bahalary ýalňyşlygyň çäginden geçmeýär. Orta we ähtimal ýalňyşlyklary standart bilen baglanyşykly formulalar bilen hasaplalyň

$$\theta \approx \frac{4}{5}m = 0{,}69$$

$$r = \frac{2}{3}m = 0{,}57$$

Öňki tapylan θ we r-iň bahalary bilen deňeşdirip, olaryň ýeterlik golaýdygyna göz ýetireris.

I.8. Deňtakykly däl ölçemeler we olaryň agramlary

Ölçemeleriň netijesiniň ähmiýetini, onuň ygtybarlygynyň ölçegini bu ölçegiň agramy diýlip atlandyrylýan san bilen belgileýärler.

Ölçemeler geçirilýän wagtynda ölçemeler üçin geçirilýän şertler näçe gowy bolsalar, şonça-da alnan maglumatlar takyk bolýarlar we olaryň agramlary uly bolýar. Şeýlelikde agram ölçemeleriň şertlerine bagly bolýar. Beýleki tarapdan ölçemeler näçe gowy geçirilen bolsalar olaryň orta kwadratik ýalňyşlygy şonça-da kiçi bolýar. Agram hökmünde orta kwadratik gyşarmanyň kwadratyna degişlilikde ters proporsional ululygy almak bolar.

Goý, haýsy bolsada bir ululyk n gezek öçenip $l_1, l_2, .. l_n$ bahalar alnan bolsun. Olaryn orta kwadratik ýalňyşlygy degişlilikde, $m_1, m_2, ..., m_n$ bolar. Onda olaryň agramlaryny

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{1}{m_2^2}; \ldots; p_n = \frac{1}{m_n^2} \qquad (1.21)$$

gatnaşyklar bilen ýazyp bileris.

Agram otnositel ululyk bolup ol bir ululygyň beýleki ululyga bolan ygtybarlylygyny häsiýetlendirýär, şonuň üçin bize olaryň absolýut ululyklary däl-de olaryň diňe gatnaşyklary gerek.

Şol sebäpli, (1.21) aňlatmany

$$p_1 = \frac{C^2}{m_1^2}; \quad p_2 = \frac{C^2}{m_2^2}; \ldots; p_n = \frac{C^2}{m_n^2} \qquad (1.22)$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde C^2 -islendik san, ýöne hemme agramlar üçin şol bir ululyk bolmaly.

Mysal. Haýsyda bolsa bir ululyk oçenende orta kwadratik ýalňyşlyklar $m_1 = \pm 0,3$ we $m_2 = \pm 0,5$ deň bolupdyr. Onda olaryň agramlaryny (1.21) aňlatma görä

$$p_1 = \frac{1}{0,09}; \quad p_2 = \frac{1}{0,25};$$

bolar.

Mundan beýläk agramlary şu görnüsde ulanmak hasaplama işlerinde kynçylyklara getirýär.

$C^2 = 0,09 \cdot 0.25 \cdot 100$ kabul edip alarys

$$p_1 = \frac{0,09 \cdot 0,25 \cdot 100}{0,09} = 25;$$

$$p_2 = \frac{0,09 \cdot 0,25 \cdot 100}{0,25} = 9;$$

Agramy kesgetlemek üçin iki şert ýerine ýetmelidir

1. *p* agramy kesgitlemek üçin hasaplanan *m* orta kwadratik ýalňyşlyk ýeterlilikli köp gözegçiligiň netijesinden tapylmalydyr.
2. *p* agram we *m* orta kwadratik ýalňyşlyk hasaplananda ölçemelerden birsyhly ýalňyşlyklar aýrylmalydyr.

Deňtakykly öçemelerde olaryn orta kwadratik ýalňyşlygy $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ bolar. Onda olaryň agramlary

$$p_1 = \frac{m^2}{m^2} = 1; \quad p_2 = \frac{m^2}{m^2} = 1; \ldots; p_n = \frac{m^2}{m^2} = 1 \qquad (1.23)$$

bolar.

I.9. Iň kiçi kwadratlar usuly

Deňtakykly ölçemeleriň iň ygtybarly bahasy hökmünde orta arifmetiki baha alynýar. Orta arifmetiki baha Gauss (**Gauss Karl Fridrih 30.4.1777-23.2.1855 – nemes matematigi)** tarapyndan hödürlenen iň kiçi kwadratlar usulynyň hususy haly bolup durýar. Deňtakykly ölçemelerde iň ygtybarly bahany almak üçin alnan ölçeglere düzedişler girizip olaryň kwadratlarynyň jeminiň

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \min. \qquad (1.24)$$

minimumyny tapmaly.

I.5 getirilen mysala garap geçeliň.

N	*l, m*	v, *mm*	vv	v', *mm*	$v'v'$	v'', *mm*	$v''v''$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	27,483	0	0	-1	1	+2	4
2	27,485	-2	4	-3	9	0	0
3	27,482	+1	1	0	0	+3	9
4	27,484	-1	1	-2	4	+1	1
5	27,481	+2	4	+1	1	+4	16
6	27,483	0	0	-1	1	+2	4
X	27,483	$[v]=0$	$[vv]=10$	$[v']=-6$	$[v'v']=16$	$[v'']=12$	$[v''v'']=34$
X'	27,482						
X''	27,485						

Ölçemeler hatarynyň orta arifmetiki bahasy 27, 483 deň bolupdy, olaryň gyşarmalaryny

$$v_i = X - l_i. \quad (i=1,2,\ldots,6).$$

formula boýunça hasaplalyň we tablisanyň üçünji sütüninde ýazalyň..

Gyşarmalaryň $[vv]$ kwadratlarynyň jemi bolsa 10-a deň.

Orta arifmetiki baha deň bolmadyk başga bir X'=27,482 bahany alalyň hem-de olaryň v' gyşarmasyny we gyşarmanyň $v'v'$ kwadratlaryny hasaplalyň.

Hasaplanan v' gyşarmalary we gyşarmalaryň $v'v'$ kwadratlaryny tablisanyň bäşinji we altynjy sütünlerinde ýazalyň. Gyşarmalaryň $[v']$ jemi nula deň däl, $[v'v']$ kwadratlaryň jemi bolsa $[vv]$ bahadan uly bolup çykýar. X''=27,485 bahany alyp v'' gyşarmalary hem-de gyşarmalaryň $v''v''$ kwadratlaryny we $[v''], [v''v'']$ jemlerini hasaplap, tablisanyň 7-nji we 8-nji sütünlerinde ýazalyň.

Alnan hasaplamalardan görnüşi ýaly, diňe ölçeme netijeleriniň orta arifmetiki bahadan gyşarmalarynyň jemi nula deň we kwadratlaryň jeminiň bolsa, minimum baha eýe bolýar. $X^{/}$=27,482, $X^{//}$=27,485 ululyklaryň ölçenen bahalardan gyşarmalarynyň jemi nula deň bolanok. $\left[v^{/}v^{/}\right]$, $\left[v^{//}v^{//}\right]$ kwadratlaryň jemi bolsa $[vv]$ bahadan uly bolýar.

Garalýan mysaldan görnüşi ýaly, gyşarmanyň orta arifmetiki baha baglylykda üýtgeýändigine görä şeýle netijä gelmek bolar:

1. Ölçeme netijeleriniň orta arifmetiki bahadan gyşarmalarynyň kwadratlarynyň jemi minimuma eýedir.
2. Ölçemeleriň netijesine düzedişler girizip, olaryň kwadratlarynyň jeminiň iň kiçi bahasy tapylan netije, ölçenen ululyklaryň iň ygtybarly orta arifmetiki bahasy bolup durýar.

Orta arifmetiki bahanyň iň kiçi kwadratlar usulyny kanagatlandyrýandygyny görkezeliň.

Şol bir şertlerde haýsy bolsa-da bir ululyk *n* gezek ölçenip $l_1, l_2, \ldots, l_n$ bahalar alnan bolsun. Ölçenen ululgyň iň ygtybarly bahasy hökmünde X bahany alalyň we

$$X - l_i = v_i \quad (i = 1,2,\ldots,n) \,. \tag{1.25}$$

tapawutlary hasaplalyň.

X bahany

$$Q = [vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \min . \tag{1.26}$$

şertden tapalyň. (1.25) deňlemedäki v-nyň bahasyny (1.26) aňlatma ornuna goýup,

$$Q = [vv] = \left(X - l_1\right)^2 + \left(X - l_2\right)^2 + \cdots + \left(X - l_n\right)^2 = \min \tag{1.27}$$

aňlatmany alarys.

Bu funksiýanyň minimum bahasyny tapmak üçin ol funksiýadan *X*-sa göra önüm alyp nula deňläliň

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 2(X - l_1) + 2(X - l_2) + \cdots + 2(X - l_n) = 0$$

(1.28)

ýa-da

$$nX = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$

bu ýerden

$$X = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}.$$

(1.29)

X –sa görä (1.28)-den alnan ikinji önüm

$\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} = 2n > 0$, bu bolsa $[vv]$ funksiýanyň X argumentde minimum bahany alýandygyny görkezýär, ol-da öz gezeginde orta arifmetiki bahadyr.

Eger ölçemeleriň netijeleri deňtakykly däl, olaryň agramlary bolsa $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bahalar bolsalar, *X*-yň iň ygtybarly bahasyny iň kiçi kwadratlaryň jemininden kesgitläliň;

$$Q = [pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = \min.$$

(1.30)

Bu funksiýanyň minimum bahasyny tapmak üçin ondan *X* –sa göra önüm alyp nula deňläliň

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 2p_1(X - l_1) + 2p_2(X - l_2) + \cdots + 2p_n(X - l_n) = 0$$

(1.31)

ýa-da

$$X(p_1 + p_2 + \ldots p_n) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n$$

bu ýerden

$$X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (1.32)$$

(1.32) aňlatmadan görnüşi ýaly, haçan-da (1.31) funksiýanyň argumenti orta arifmetiki baha bolanda $[pvv]$ funksiýa minumuma eýe bolýar.

II. ZERUR NÄBELLI LER USULY BILEN GEODEZIÝA ÖLÇEMELERINIŇ NETIJELERINI DEŇLEŞDIRME NAZARYÝETINDEN UMUMY DÜŞÜNJELER

II.1. Düzedişleriň deňlemeleri

Biri-biri bilen bagly bolmadyk t sany zerur näbellileri almak üçin n sany ululyklar ölçelýär, bu ýerde $n>t$. Ölçemeleriň $p_1, p_2, ..., p_n$ agramlaryna degişlilikde $q_1, q_2, ..., q_n$ belgilenen netijeleri alarys (deňtakykly ölçemeler ýagdaýynda hemme agramlar bire deňdir). $x_1, x_2, ..., x_t$ bilen näbellileriň deňleşdirilen bahalaryny belgiläliň.

.Zerur näbelliniň we ölçemeleriň netijeleriniň arasyndaky funksional baglanyşygy

$$q_i+v_i=f_i(x_1, x_2, ..., x_t) \qquad i=1, 2, ... ,n \qquad (2.1)$$

görnüşde aňladalyň, bu ýerde v_i –i –nji ölçemeleriň netijesindäki has ähtimal düzedişiň bahasy.

Düzedişleriň

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_t) - q_i = v_i \,. \qquad (2.2)$$

deňlemesini umumy görnüşde (2.1) deňlemeden alarys.

Düzedişleriň deňlemesindäki hasaplamalary ýeňilleşdirmek maksady bilen, näbellileriň deňleşdirilen bahalaryny ýakynlaşan x_i^0 bahalar we olara degişli δx_i düzedişleriň jemi bilen çalşyralyň.

$$x_i = x_i^0 + \delta x_i \ , \ i=1,\ 2,\ \ldots,t. \qquad (2.3)$$

Bu ýagdaýda x_i –bahanyň deregine uly bolmadyk δx_i we x_i^0 - ýakynlaşan bahalary gözläris. Onda (2.2) deňlemäni

$$f_i(x_1^0 + \delta x_1, x_2^0 + \delta x_2, \ldots, x_t^0 + \delta x_t) - q_i = v_i \ . \qquad (2.4)$$

görnüşde ýazyp bileris.

Eger düzedişiň deňlemesi çyzykly däl görnüşde bolsa, onda ony çyzykly görnüşe getirmelidir. Önuň üçin (2.4) denlemäni Teýlor hataryna dargadyp, onuň birinji tertipli agzalary bilen çäklenmelidir.

$$f_i(x_1^o, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1^0}\delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2^0}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_t^0}\delta x_t - q_i = v_i$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1^0} = a_i \ , \ \frac{\partial f_i}{\partial x_2^0} = b_i, \ldots, \ \frac{\partial f_i}{\partial x_t^0} = t_i; \qquad (2.5)$$

we

$$f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_t^0) - q_i = l_i$$

belgilemeleri girizip, agramy p_i bolan düzedişiň deňlemesini aşakdaky çyzykly görnüşde ýazarys:

$$a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + \ldots + t_i\delta x_t + l_i = v_i \,, \qquad (2.6)$$

bu ýerde a_i, b_i, ... ,t_i – koeffisiýentler; l_i - i-nji düzedişiň deňlemesiniň azat agzasy; ol bolsa öz gezeginde funksiýanyň ýakynlaşan bahasynyň we ölçelen bahalaryň tapawudyna deňdir.
i-nji düzedişiň deňlemesiniň agramy ölçelen ululygyň q_i agramyna deňdir.

II.2. Iň kiçi kwadratlar usuly boýunça düzedişiň deňlemesiniň çözülişi (normal deňlemeleriň getirilip çykarylyşy)

Düzedişiň deňlemeler ulgamuny çyzykly görnüşde ýazalyň

$$\begin{cases} a_1\delta x_1 + b_1\delta x_2 + \ldots + t_1\delta x_t + l_1 = v_1, & agramy \quad p_1 \\ a_2\delta x_1 + b_2\delta x_2 + \ldots + t_2\delta x_t + l_2 = v_2, & agramy \quad p_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \\ a_n\delta x_1 + b_n\delta x_2 + \ldots + t_n\delta x_t + l_n = v_n, & agramy \quad p_n \end{cases} \tag{2.7}$$

Deňlemeleriň sany näbellileriň sanyndan köp, diýmek (2.7) ulgamyň örän köp çözüwi bolup biler. Olaryň arasynda iň kiçi kwadratlar usulynyň talabyny kanagatlandyrýanlaryny, ýagny $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_t$ - ululyklaryň [pvv]=$min.$ eýe bolýan bahalaryny tapmak zerurdyr.

(2.7) düzedişleriň deňlemeleriniň çep we sag böleklerini kwadrata götereliň we olary degişlilikde agramlaryna köpeldeliň [2].

$$p_1a_1a_1\delta x_1^2+2p_1a_1b_1\delta x_1\delta x_2+p_1b_1b_1\delta x_2^2+....+p_1t_1t_1\delta x_t^2+p_1l_1l_1=p_1v_1v_1$$
$$p_2a_2a_2\delta x_1^2+2p_2a_2b_2\delta x_1\delta x_2+p_2b_2b_2\delta x_2^2+....+p_2t_2t_2\delta x_t^2+p_2l_2l_2=p_2v_2v_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$p_na_na_n\delta x_1^2+2p_na_nb_n\delta x_1\delta x_2+p_nb_nb_n\delta x_2^2+....+p_nt_nt_n\delta x_t^2+p_nl_nl_n=p_nv_nv_n$$

Bu deňlemeleri goşup alarys

$$(p_1a_1a_1+p_2a_2a_2+\dots p_na_na_n)\delta x_1^2+2(p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+p_na_nb_n)\delta x_1\delta x_2+$$
$$+(p_1b_1b_1+p_2b_2b_2+\dots+p_nb_nb_n)\delta x_2^2+....+(p_1t_1t_1+p_2t_2t_2+\dots p_nt_nt_n)\delta x_t^2+$$
$$+(p_1l_1l_1+p_2l_2l_2+\dots p_nl_nl_n)=p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+\dots p_nv_nv_n$$

$[paa]=p_1a_1a_1+p_2a_2a_2+\dots p_na_na_n$,
$[pab]=p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+p_na_nb_n$,
$[pvv]=p_1v_1v_1+p_2v_2v_2+\dots p_nv_nv_n$ we ş.m. Gauss belgilemelerini girizip, soňky deňlemäni

$$[pvv]=[paa]\delta x_1^2+2[pab]\delta x_1\delta x_2+....+2[pat]\delta x_1\delta x_t+2[pal]\delta x_1+$$

$$+[pbb]\delta x_2^2+....+2[pbt]\delta x_2\delta x_t+2[pbl]\delta x_2+$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+[ptt]\delta x_t^2+2[ptl]\delta x_t+$$

$$+[pll] \qquad (2.8)$$

görnüşde ýazyp bileris.

[*pvv*]=*min* almak üçin (2.8) aňlatmadan her näbellä görä hususy önüm alyp, olary nula deňläliň

$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x_1}=2[paa]\delta x_1+2[pab]\delta x_2+...+2[pat]\delta x_t+2[pal]=0$$
$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x_2}=2[pab]\delta x_1+2[pbb]\delta x_2+...+2[pbt]\delta x_t+2[pbl]=0$$
. . . .
$$\frac{\partial[pvv]}{\partial x_t}=2[pat]\delta x_1+2[pbt]\delta x_2+...+2[ptt]\delta x_t+2[ptl]=0$$

Deňlemeleriň ählisini ikä bölüp, normal deňlemeler diýlip atlandyrylýan

$$\begin{cases}[paa]\delta x_1+[pab]\delta x_2+...+[pat]\delta x_t+[pal]=0\\ [pab]\delta x_1+[pbb]\delta x_2+...+[pbt]\delta x_t+[pbl]=0\\ .\ .\ .\ \ \ .\ .\ \ \ .\ .\ \ \ .\ .\ \ \ .\ .\\ [pat]\delta x_1+[pbt]\delta x_2+...+[ptt]\delta x_t+[ptl]=0\end{cases}. \quad (2.9)$$

deňlemeler ulgamuny alarys.

Normal deňlemeleriň sany zerur näbellileriň sanyna deň. [*paa*], [*pbb*],...,[*ptt*] koeffisiýentler položitel we diagonal boýunça ýerleşendiriler. Diagonala görä simmetrik ýerleşen näbellileriň koeffisiýentleri jübüt-jübütden özara deňdirler. Normal deňlemeleriň azat agzalary bolup [*pal*], [*pbl*], . . . , [*ptl*] ululyklar hyzmat edýärler.

II.3. Normal deňlemeleriň çözülişi

Normal deňlemeler ulgamuny çyzykly deňlemeler ulgamuny çözmegiň belli usullarynyň islendigi bilen çözmek bolar. t sany normal deňlemeler ulgamuny Gauss tarapyndan hödürlenen näbellileri yzygiderli ýok etmek usuly boýunça çözeliň.

Normal üç deňlemeler ulgamynyň çözülişine garalyň

$$\begin{cases}[paa]\delta x_1+[pab]\delta x_2+[pac]\delta x_3+[pal]=0\\ [pab]\delta x_1+[pbb]\delta x_2+[pbc]\delta x_3+[pbl]=0\\ [pac]\delta x_1+[pbc]\delta x_2+[pcc]\delta x_3+[pcl]=0\end{cases}.$$

(2.10)

Birinji deňlemeden taparys

$$\delta x_1=-\frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2-\frac{[pac]}{[paa]}\delta x_3-\frac{[pal]}{[paa]}.$$

(2.11)

Birinji näbelliniň bu bahasyny (2.10) ulgamyň ikinji we üçünji deňlemelerinde ornuna goýup we meňzeş agzalary toparlap alarys

$$\begin{cases}\left([pbb]-\frac{[pab].[pab]}{[paa]}\right)\delta x_2+\left([pbc]-\frac{[pab].[pac]}{[paa]}\right)\delta x_3+\\ +\left([pbl]-\frac{[pab].[pal]}{[paa]}\right)=0\\ \left([pbc]-\frac{[pab].[pac]}{[paa]}\right)\delta x_2+\left([pcc]-\frac{[pac].[pac]}{[paa]}\right)\delta x_3+\\ +\left([pcl]-\frac{[pac].[pal]}{[paa]}\right)=0\end{cases}.$$

(2.12)

Gauss algoritminiň nyşanlaryny girizeliň

$$[pbb]-\frac{[pab].[pab]}{[paa]}=[pbb1];$$

$$[pbc]-\frac{[pab].[pac]}{[paa]}=[pbc1];$$

$$[pbl]-\frac{[pab].[pal]}{[paa]}=[pbl1].$$

(2.13)

$$[pcc]-\frac{[pac].[pac]}{[paa]}=[pcc1]$$

$$[pcl]-\frac{[pac].[pal]}{[paa]}=[pcl1]$$

(2.13) deňlikleri göz öňünde tutup, (2.12) ulgamy

$$\begin{cases}[pbb1]\delta x_2+[pbc1]\delta x_3+[pbl1]=0\\ [pbc1]\delta x_2+[pcc1]\delta x_3+[pcl1]=0\end{cases}. \tag{2.14}$$

görnüşde ýazyp bileris.

(2.14) ulgamyň birinji deňlemesinden ikinji näbellini tapalyň

$$\delta x_2=-\frac{[pbc1]}{pbb1}\delta x_3-\frac{[pbc1]}{[pbb1]} \tag{2.15}$$

Bu bahany (2.14) ulgamyň ikinji deňlemesinde ornuna goýup alarys

$$\left([pcc1]-\frac{[pbc1].[pbc1]}{[pbb1]}\right)\delta x_3+\left([pcl1]-\frac{[pbc1].[pbl1]}{[pbb1]}\right)=0$$

(2.16)

$$[pcc1]-\frac{[pbc1].[pbc1]}{[pbb1]}=[pcc2]$$

we

$$[pcl1]-\frac{[pbc1].[pbl1]}{[pbb1]}=[pcl2]$$

belgilemeleri girizip, (2.16) deňlemäni

$$[pcc2]\delta x_3 + [pcl2] = 0 \qquad (2.17)$$

görnüşde ýazalyň.

Bu ýerden

$$\delta x_3 = -\frac{[pcl2]}{[pcc2]} \quad . \qquad (2.18)$$

Näbellileri kesgitlemek üçin (2.11), (2.15) we (2.18) deňlemeleri yzygiderli ýazyp, eliminasion diýlip atlandyrylýan deňlemeler ulgamuny alarys

$$\begin{cases} \delta x_1 = -\dfrac{[pab]}{[paa]}\delta x_2 - \dfrac{[pac]}{[paa]}\delta x_3 - \dfrac{[pal]}{[paa]} \\ \qquad \delta x_2 = -\dfrac{[pbc1]}{pbb1}\delta x_3 - \dfrac{[pbc1]}{[pbb1]} \\ \qquad\qquad \delta x_3 = \dfrac{[pcl2]}{[pcc2]} \end{cases} . \qquad (2.19)$$

Eliminasion deňlemeleri almak üçin başlangyç şertler bolup

$$\begin{cases} [paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + [pac]\delta x_3 + [pal] = 0 \\ \qquad [pbb1]\delta x_2 + [pbc1]\delta x_3 + [pbl1] = 0 \\ \qquad\qquad [pcc2]\delta x_3 + [pcl2] = 0 \end{cases} \qquad (2.20)$$

deňlemeler hyzmat edýär.

(2.20) deňlemeler ulgamy (2.10) deňlemeler ulgamyna deňgüýçlidir.

II.4. Normal deňlemeleriň düzülişiniň we çözülişiniň barlagy

t sany näbellileri tapmak üçin n sany ylylyklar ölçelen, bu ýerde $n>t$. Bu ýagdaýda t sany näbellili n sany düsedişiň deňlemelerini düzýäris

$$a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + c_i\delta x_3 + ... + t_i\delta x_t + l_i = v_i$$

t sany näbellili t sany normal deňleme düzmek üçin, olaryň koeffisiýentlerini we azat agzalaryny hasaplamak zerur. Onuň üçin düzediş deňlemeleriniň koeffisiýentleriniň we azat agzalarynyň tablisasyny düzeliň. Ilki bilen 1-9 sütünleri (1-nji tablisa) dolduralyň. 1-nji tablisanyň her setirinde koeffisiýentleri, azat agzalary hem-de degişli deňlemeleriň agramlaryny ýazalyň. Hasaplanan

$$\begin{aligned} &a_1+b_1+c_1+ \ldots +t_1+l_1=s_1; \\ &a_2+b_2+c_2+ \ldots +t_2+l_2=s_2; \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \\ &a_n+b_n+c_n+ \ldots +t_n+l_n=s_n; \end{aligned} \tag{2.21}$$

setirleriň we

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[t]+[l]=[s]$$

sütünleriň jemi boýunça tablisanyň doldurylyşyny barlap bileris.

Mundan beýläk δx_i -näbelli düzedişi ýazmak üçin 1-nji tablisada jemiň aşagyndaky setiri boş goýýarys. Şol setiriň aşagyndan normal denlemeleriň koeffisiýentlerini we azat agzalaryny ýazýarys. Normal deňlemeleriň düzülişini gös-göni tablisadaky formulalar bilen barlaýarys

$$[paa]+[pab]+[pac]+\ldots+[pat]+[pal]=[pas];$$

$$[pab]+[pbb]+[pbc]+\ldots+[pbt]+[pbl]=[pbs];$$

. . . . (2.22)

$[pat]+[pbt]+[pct]+\ldots+[ptt]+[ptl]=[pts];$

$[pal]+[pbl]+[pcl]+\ldots+[ptl]+[pll]=[pls];$

$[pas]+[pbs]+[pcs]+\ldots+[pts]+[pls]=[pss].$

1-nji tablisa.

№	p	a	b	c	...	t	l	s	v	pvv	pvl	Pvs
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	p_1	a_1	b_1	c_1	...	t_1	l_1	s_1	v_1	$p_1v_1^2$	$p_1v_1l_1$	$p_1v_1s_1$
2	p_2	a_2	b_2	c_2	...	t_2	l_2	s_2	v_2	$p_2v_2^2$	$p_2v_2l_2$	$p_2v_2s_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	....	...	...
n	p_n	a_n	b_n	c_n	...	t_n	l_n	s_n	v_n	$p_nv_n^2$	$p_nv_nl_n$	$p_nv_ns_n$
$\sum$	$[p]$	$[a]$	$[b]$	$[c]$	...	$[t]$	$[s]$	$[s]$		$[pvv]$	$[pvl]$	$[pvs]$

Näbelliler	δx_1	δx_2	δx_3		δx_t	Barlag	
	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	...	$[pat]$	$[pal]$	$[pas]$
		$[pbb]$	$[pbc]$	...	$[pbt]$	$[pbl]$	$[pbs]$
			$[pcc]$	...	$[pct]$	$[pcl]$	$[pcs]$
				...	....	....	....
					$[ptt]$	$[ptl]$	$[pts]$
						$[pll]$	$[pls]$
							$[pss]$

Normal deňlemeleri Gauss usuly boýunça çözýäris. 2-nji tablisada (1-6-njy sütünler) normal üç deňlemeler ulgamynyň çözülişi görkezilen. Normal deňlemeler çözülýän wagtynda özgerdilen deňlemeleriň setirlerini aşakdaky formulalar bilen barlaýarys:

$$[pbb1]+[pbc1]+[pbl1]=[pbs1];$$

$$[pcc2]+[pcl2]=[pcs2] \qquad (2.23)$$

Eliminasion deňlemeleriň setirlerini bolsa

$$-1-\frac{[pab]}{[paa]}-\frac{[pac]}{[paa]}-\frac{[pal]}{[paa]}=-\frac{[pas]}{[paa]};$$

$$-1-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}-\frac{[pbl1]}{[pbb1]}=-\frac{[pbs1]}{[pbb1]} \quad (2.24)$$

$$-1-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}=-\frac{[pcs2]}{[pcc2]}.$$

deňlikler bilen barlaýarys.

$\delta x_3, \delta x_2$ we δx_1 näbelliler hasaplanýan wagtynda aşakdaky barlaglar geçirilýär:

$$[pcc2]\delta x_3+[pcl2]=0;$$

$$[pbb1]\delta x_2+[pbc1]\delta x_3+[pbl1]=0;$$

(2.25)

$$[paa]\delta x_1+[pab]\delta x_2+[pac]\delta x_3+[pal]=0.$$

II.5. Normal deňlemeleriň çözülişiniň we deňleşdirilen hasaplamalaryň gutarnykly barlagy

Her bir deňlemä näbellileriň tapylan bahalaryny goýup, (2.9) normal deňlemeler ulgamynyň çözülişini barlap bileris. Deňlemeleriň sany köp bolanda barlag köpe çekýär. Şu ýagdaýy aňsatlaşdyrmak üçin (2.9) deňlemeler ulgamynda degişli näbellileriň koeffisiýentlerini we azat agzalary toparlap,

$$([paa]+[pab]+\ldots+[pat])\delta x_1+([pab]+[pbb]+\ldots+[pbt])\delta x_2+$$

$$+\ldots+([pat]+[pbt]+\ldots+[ptt])\delta x_t+[pal]+[pbl]+\ldots+[ptl]=0,$$

(2.26)

jemleýji deňlemäni alarys.

$$[paa]+[pab]+\ldots+[pat]=[pas]-[pal],$$

$$[pab]+[pbb]+\ldots+[pbt]=[pbs]-[pbl],$$

we ş. m. göz öňünde tutup, jemleýji (2.26) normal deňlemäni

$$([pas]-[pal])\delta x_1+([pbs]-[pbl])\delta x_2+\ldots+([pts]-[ptl])\delta x_t+$$

$$+[pal]+[pbl]+\ldots+[ptl]=0. \qquad (2.27)$$

görnüşde ýazalyň.

Normal deňlemeleri çözmeklikden tapylan $\delta x_1,\delta x_2,\ldots,\delta x_t$ ululyklary 1-nji tablisanyň degişli setirine ýazalyň hem-de düzedişiň (2.7) deňlemelerinde ornuna goýalyň. Şunlukda alnan has ähtimal düzedişiň v_i ulylyklaryny 1-nji tablisanyň 10-njy sütünine ýazalyň. Goňşy sütunlerde $p_iv_iv_i$, $p_iv_il_i$ we $p_iv_is_i$ köpeltmek hasyllaryny ýazalyň, aşakda bolsa [*pvv*] , [*pvl*] we [*pvs*] ululyklaryň jemini tapalyň, olaryň bahalary hem özara deň bolmalydyrlar.

Deňleşdiriji hasaplamalaryň jemleýji barlagyny geçireliň:

$$[pvv]=[pllt]=[plst]=[psst].$$

Haçan-da näbellileriň sany üçe deň bolanda

$$[pvv]=[pll3]=[pls3]=[pss3]. \qquad (2.28)$$

bolar.

Normal deňlemeleriň çözüliş shemasyndan (2.28) deňligiň hemme agzalaryny aşakdaky formulalar boýunça hasaplarys (2-nji tablisa. 4-nji we 5-nji sütünler.):

$$[pll3]=[pll]-\frac{[pal]^2}{[paa]}-\frac{[pbl1]^2}{[pbb1]}-\frac{[pcl2]^2}{[pcc2]};$$

$$[pls3]=[pls]-\frac{[pal][pas]}{[paa]}-\frac{[pbl1][pbs1]}{[pbb1]}-\frac{[pcl2][pcs2]}{[pcc2]}$$

;

$$[pss3]=[pss]-\frac{[pas]^2}{[paa]}-\frac{[pbs1]^2}{[pbb1]}-\frac{[pcs2]^2}{[pcc2]}.$$

[*pvv*]- ulylygyň dogry tapylandygyny barlamak üçin ony

$$[pvv]=[pll]+[pal]\delta x_1+[pbl]\delta x_2+[pcl]\delta x_3 \tag{2.29}$$

formyla boýunça hasaplap, (2.28) deňlikleriň ýerine ýetýändiklerine göz ýetirmeli.

δx_i -ululyklaryň tapylan bahalaryny (2.3) formula goýup, x_i näbelliniň bahalaryny hasaplaýarys. v_i has ähtimal düzedişleri ulanyp

$$q_{i,deňleme}=q_i+v_i \tag{2.30}$$

formula boýunça ölçelen ululyklaryň deňleşdirilen bahalaryny alarys.

II.6. Normal deňlemeler ulgamuny yzygiderli ýakynlaşma usuly bilen çözmek

Deňlemeler ulgamuny çözmegiň göni we iterasiýa usullary bar [11]. Ýokarda (2.9) deňlemeler ulgamynyň göni çözüliş usulyna garaldy. Iterasiýa usuly bilen çözmek- bu birmeňzeş hereketleriň gaýtalanýan ýolydyr. Ýakynlaşmalaryň sany näçe köp bolsa, näbellileriň bahalary şonça-da takyk bolýar. Hasaplamalaryň başyndaky goýberilen arifmetiki ýalňyşlyklar diňe netijeleriň ýakynlaşma ýagdaýyny haýallaşdyrýarlar, ýöne ahyrky netijä täsir etmeýärler.

Yzygiderli ýakynlaşmanyň birnäçe klassyky usullary bar. Ýakobi-Zeýdel usulyna (Ýakobiniň gowulandyrylan usuly) garap geçeliň.

2-nji tablisa

a	b	c	l	s	*Barlag*
1	2	3	4	5	6
$[paa]$ -1	$[pab]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}$	$[pac]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}$	$[pal]$ $-\frac{[pal]}{[paa]}$	$[pas]$ $-\frac{[pas]}{[paa]}$	*Barlag*
	$[pbb]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pab]$ $[pbb1]$ -1	$[pbc]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pac]$ $[pbc1]$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}$	$[pbl]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]$ $[pbl1]$ $-\frac{[pbl1]}{[pbb1]}$	$[pbs]$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pas]$ $[pbs1]$ $-\frac{[pbs1]}{[pbb1]}$	*Barlag* *Barlag*
		$[pcc]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pac]$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbc1]$ $[pcc2]$ -1	$[pcl]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbl1]$ $[pcl2]$ $-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}$	$[pcs]$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pas]$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbs1]$ $[pcs2]$ $-\frac{[pcs2]}{[pcc2]}$	*Barlag* *Barlag*
$-\frac{[pal]}{[paa]}$ $-\frac{[pac]}{[paa]}\delta x_3$ $-\frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2$ $\overline{\delta x_1}$	$-\frac{[pbl1]}{[pbb1]}$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}\delta x_3$ $\overline{\delta x_2}$	$-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}$ $\overline{\delta x_3}$	$[pll]$ $-\frac{[pal]}{[paa]}[pal]$ $-\frac{[pbl1]}{[pbb1]}[pbl1]$ $-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}[pcl2]$ $[pll3]$	$[pls]$ $-\frac{[pal]}{[paa]}[pas]$ $-\frac{[pbl1]}{[pbb1]}[pbs1]$ $-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}[pcs2]$ $[pls3]$	
$-\frac{[pal]_1}{[paa]}$ $-\frac{[pac]}{[paa]}Q_{13}$ $-\frac{[pab]}{[paa]}Q_{12}$ Q_{11}	$-\frac{[pbl1]_1}{[pbb1]}$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}Q_{13}$ Q_{12}	$-\frac{[pcl2]_1}{[pcc2]}$ Q_{13}		$[pss]$ $-\frac{[pas]^2}{[paa]}$ $-\frac{[pbs1]^2}{[pbb1]}$ $-\frac{[pcs2]^2}{[pcc2]}$ $[pss3]$	
$-\frac{[pal]_2}{[paa]}$ $-\frac{[pac]}{[paa]}Q_{23}$ $-\frac{[pab]_2}{[paa]}Q_{22}$ Q_{21}	$-\frac{[pbl1]_2}{[pbb1]}$ $-\frac{[pbc1]_2}{[pbb1]}Q_{23}$ Q_{22}	$-\frac{[pcl2]_2}{[pcc2]}$ Q_{23}			
$-\frac{[pal]_3}{[paa]}$ $-\frac{[pac]}{[paa]}Q_{33}$ $-\frac{[pab]}{[paa]}Q_{32}$ Q_{31}	$-\frac{[pbl1]_3}{[pbb1]}$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}Q_{33}$ Q_{31}	$-\frac{[pcl2]}{[pcc2]}$ Q_{33}			

Q_{x_1}	Q_{x_2}	Q_{x_3}	F
7	8	9	10
$[pal]_1 = 1$ $-\frac{[pal]_1}{[paa]}$	$[pal]_2 = 0$ $-\frac{[pal]_2}{[paa]}$	$[pal]_3 = 0$ $\frac{[pal]_3}{[paa]}$	f_1 $\frac{f_1}{[paa]}$
$[pbl]_1 = 0$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]_1$ $[pbl1]_1$ $-\frac{[pbl1]_1}{[pbb1]}$	$[pbl]_2 = 0$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]_2$ $[pbl1]_2$ $-\frac{[pbl1]_2}{[pbb1]}$	$[pbl]_3 = 0$ $-\frac{[pab]}{[paa]}[pal]_3$ $[pbl1]_3$ $-\frac{[pbl1]_3}{[pbb1]}$	f_2 $-\frac{[pab]}{[paa]} f_1$ $[f_2 1]$ $-\frac{[f_2 1]}{[pbb1]}$
$[pcl]_1 = 0$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]_1$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbl1]_1$ $[pcl2]_1$ $-\frac{[pcl2]_1}{[pcc2]}$	$[pcl]_2 = 0$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]_2$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbl1]_2$ $[pcl2]_2$ $-\frac{[pcl2]_2}{[pcc2]}$	$[pcl]_3 = 0$ $-\frac{[pac]}{[paa]}[pal]_3$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[pbl1]_3$ $[pcl2]_3$ $-\frac{[pcl2]_1}{[pcc2]}$	f_3 $-\frac{[pac]}{[paa]} f_1$ $-\frac{[pbc1]}{[pbb1]}[f_2 1]$ $[f_3 2]$ $-\frac{[f_3 2]}{[pcc2]}$
			$-\frac{f_1^2}{[paa]}$ $-\frac{[f_2 1]^2}{[pbb1]}$ $-\frac{[f_3 2]^2}{[pcc2]}$ $-\frac{1}{P_F}$

(2.9) ulgamyň her deňlemesinde kwadrat koeffisiýent duran näbellini kesgitläliň. Onuň üçin deňlemäniň hemme agzalaryny şol koeffisiýente böleliň we deňligiň sag tarapyna geçireliň:

$$\delta x_1 = \frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2 - \frac{[pac]}{[paa]}\delta x_3 - ....- \frac{[pat]}{[paa]}\delta x_t - \frac{[pal]}{[paa]};$$

$$\delta x_2 = \frac{[pab]}{[pbb]}\delta x_1 - \frac{[pbc]}{[pbb]}\delta x_3 - ....- \frac{[pbt]}{[pbb]}\delta x_t - \frac{[pbl]}{[pbb]};$$

. . . .

$$\delta x_t = \frac{[pat]}{[ptt]}\delta x_1 - \frac{[pbt]}{[ptt]}\delta x_2 - \frac{[pct]}{[ptt]}\delta x_3 - ...- \frac{[pll]}{[ptt]}.$$

(2.31)

Birinji ýakynlaşmada näbellileri aşakdaky formulalar boỳunça tapalyň:

$$\delta x_1 = -\frac{[pal]}{[paa]};$$

$$\delta x_2 = -\frac{[pbl]}{[pbb]};$$

. . . . .

$$\delta x_t = -\frac{[ptl]}{[ptt]} \quad . \qquad (2.32)$$

Soňky ýakynlaşmalarda näbellileri (2.31) formulany ulanyp taparys. Şol ýerde näbellileriň iň soňky tapylan bahalaryny ulanalyň. *i*- nji ýakynlaşmada bolsa, näbellileri aşakdaky formulalar boỳunça hasaplalyň.

$$\delta x_1^i = \frac{[pab]}{[paa]}\delta x_2^{(i-1)} - \frac{[pac]}{[paa]}\delta x_3^{(i-1)} - ....- \frac{[pat]}{[paa]}\delta x_t^{(i-1)} - \frac{[pal]}{[paa]};$$

$$\delta x_2^i = \frac{[pab]}{[pbb]}\delta x_1^i - \frac{[pbc]}{[pbb]}\delta x_3^{(i-1)} - ....- \frac{[pbt]}{[pbb]}\delta x_t^{(i-1)} - \frac{[pbl]}{[pbb]};$$

. . . .

$$\delta x_t^i = \frac{[pat]}{[ptt]}\delta x_1^1 - \frac{[pbt]}{[ptt]}\delta x_2^i - \frac{[pct]}{[ptt]}\delta x_3^i - ...- \frac{[pll]}{[ptt]} \quad (2.33)$$

Hasaplamalary goňşy bahalaryň arasyndaky tapawut gerek bolan takyklygy berỳänçä dowam edỳäris. Hasaplamalaryň dogrydygyny jemleỳji normal deňlemä $\delta x_1, \delta x_2, ...,\delta x_t$ ululyklary goỳmak arkaly barlaỳarys. Oňaỳlylyk üçin hasaplamalaryň hemme netijelerini 3-nji tablisa ỳazalyň

3-nji tablisa.

№	Näbelli-ler	δx_1	δx_1	δx_1	… .	δx_1	1-nji	2-nji	….	n-nji
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	δx_1	$-\frac{[pab]}{[pbb]}$	$-\frac{[pab]}{[paa]}$	$-\frac{[pac]}{[paa]}$		$-\frac{[pat]}{[paa]}$	$-\frac{[pal]}{[paa]}$		…	…..
2	δx_1	$-\frac{[pac]}{[pcc]}$	$-\frac{[pbc]}{[pcc]}$	$-\frac{[pbc]}{[pbb]}$		$-\frac{[pbt]}{[pbb]}$	$-\frac{[pbl]}{[pbb]}$		…	
3	δx_1					$-\frac{[pct]}{[pcc]}$	$-\frac{[pcl]}{[pcc]}$		…	
…	…			….		.. …..	…..			
t		…. $-\frac{[pal]}{[ptt]}$	$-\frac{[pbt]}{[ptt]}$	$-\frac{[pct]}{[ptt]}$	…		$-\frac{[ptl]}{[ptt]}$	… .	…	

3-nji tablisanyň 1-nji setirine (2.31) deňlemäniň birinji näbellisiniň koeffisiýentlerini, ikinji we galan setirlerinde bolsa, şol deňlemäniň degişli koeffisiýentlerini ỳazalyň. 8-nji sütüne (2.32) formula boỳunça tapylan birinji ýakynlaşmadaky näbellileri ỳazalyň. Soňky ýakynlaşmalary (2.33) formula boỳunça hasaplap, 3-nji tablisanyň degişli sütünine ỳazalyň. Şu ỳerde islendik soňky ýakynlaşmalarda δx_i näbellini tapmak üçin *i*-nji setirdäki koeffisiýentleri (3-7-nji sütünler) degişli näbellileriň soňky bahalaryna köpeltmek hem-de alnan jeme 8-nji sütüniň 1-nji setirindäki bahalary goşmak ỳeterliklidir.

III. MATRISALAR NAZARYÝETINIŇ ELEMENTLERI. GEODEZIÝA ÖLÇEMELERINI MATEMATIKI TAÝDAN GAÝTADAN IŞLEMEK NAZARYÝETINDE MATRISALARYŇ ULANYLYŞY

III.1. Matrisalar nazaryýetinden ỳönekeỳ düşünjeler

Matrisalar nazaryýeti-bu çyzykly algebranyň düzüm bölegidir we deňleşdirme hasaplamalaryny ỳönekeỳleşdirmäge mümkinçilik döredỳär. Matrisalar nazaryýetiniň gadyr-gymmaty ỳazgylaryň gysgalygynda hem-de operator özgertmeleriň amatlylygyndadyr. Häzirki wagtda matrisalar nazaryýeti ỳygy-ỳygydan geodeziỳada ulanylýar.

m setirli we *n* sütünli tablisa görnüsinde ýerleşdirilen sanlaryň toplumyna *m*x*n* ölçegli gönüburçly matrisa diýilýär we

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

görnüşde belgilenýär.

Setir – matrisasy diýlip bir setirden ybarat bolan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \end{bmatrix};$$

görnüsli matrisa aýdylýar.

Sütün – matrisasy diýlip bir sütünden ybarat bolan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix};$$

görnüsli matrisa aýdylýar.

Setirleriniň we sütünleriniň sanlary deň bolan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

görnüsli matrisa kwadrat matrisa diýilýär.

Baş diagonalyndaky elementlerinden başga hemme elementleri nula deň bolan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

görnüşli kwadrat matrisa diagonal matrisa diýilýär

Eger $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = \alpha$ bolsa, onda diagonal matrisa skalýar matrisa diýilýär we

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \alpha \end{bmatrix}$$

görnüşde ýazylýar.

Hususy halda, $\alpha = 1$ bolanda birlik matrisa diýlip atlandyrylýan

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

matrisany alarys.

Matrisalary goşmak we aỳyrmak.

Ölçegleri deň bolan matrisalary goşmak we aỳyrmak bolar.

$$A \pm B = C .$$

belgilemäni girizeliň. C matrisanyň c_{ij} elementi

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Matrisalary goşmak we aýyrmak amallary orunçalşyrma (kommutatiw), ýagny

$$A \pm B = B \pm A$$

we utgaşdyrma (assosiatiw), ýagny

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

häsiýetlere eýedir.

Matrisany sana köpeltmek.

A matrisa α ckalỳara köpeldilende käbir C matrisa alynýar, ýagny

$$A\alpha = C,$$

şunlukda C matrisanyň c_{ij} elementi A matrisanyň a_{ij} elementini α skalỳara köpeltmek arkaly alynýar, ýagny

$$c_{ij} = a_{ij}\alpha .$$

Matrisany skalỳara köpeltmegň häsiỳetleri

orun çalşyrma (kommutatiwlik)

$$\alpha A = A\alpha ,$$

utgaşdyrma (assosiatiwlik)

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$$

paỳlaşdyrma (distributiwlik)

$$(A+B)\ \alpha = A\alpha + B\alpha ,$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

bu ýerde α we β skalýar ululyklar, A we B –şol bir ölçegli matrisalar.

Matrisalary köpeltmek.

Eger A matrisanyň sütunleriniň sany B matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolsa, A matrisany B matrisa köpeltmek bolar. A matrisany B matrisa köpeldip, käbir C matrisa alynýar

$$AB = C ,$$

ýagny

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{k1} & b_{k2} & . & . & . & b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & . & . & c_{mn} \end{bmatrix}$$

şunlukda C matrisanyň c_{ij} elementi A matrisanyň i –nji setiriniň elementlerini degişlilikde B matrisanyň j-nji sütüniniň elementlerine köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir, ýagny C matrisanyň birinji setiriniň elementleri:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ...+ a_{1k}b_{k1};$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ...+ a_{1k}b_{k2};$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$c_{1n} = a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + ...+ a_{1k}b_{kn},$$

C matrisanyň ikinji setiriniň elementleri:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + ...+ a_{2k}b_{k1};$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + ...+ a_{2k}b_{k2};$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$c_{2n} = a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + ...+ a_{2k}b_{kn}.$$

we ş.m.ýaly kesgitlenýärler.

Mysal. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisany $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisa köpeldip, C matrisany alarys

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -18 \end{bmatrix}$$

Matrisalary köpeltmek amaly utgaşdyrma, ýagny $(A\cdot B)C=A(B\cdot C)$ we paỳlaşdyrma, ýagny $(A+B)C=AC+BC;$ $A(B+C)=AB+BC$- häsiỳetlere eýedir, emma umuman, orun çalşyrma häsiýetine eýe däldir. Hususy halda, islendik matrisany birlik matrisa köpeltmek amaly orun çalşyrma häsiýetine eỳedir, ýagny

$$AE=EA=A$$

Matrisalary transponirlemek.

A matrisanyň setirleri bilen degişli sütünleriniň orunlary çalşyrylyp alnan matrisa transponirlenen matrisa diỳilỳär we A^* bilen belgilenýär.

Transponirlenen matrisalaryň häsiýetieri.

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

b) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$;

ç) $(AB)^* = B^* A^*$.

Simmetrik matrisa diỳlip elementleri $a_{ij}=a_{ji}$ deňligi kanagatlandyrýan

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisa aỳdylỳar.

Normal deňlemeleriň koeffisiýentlerinden düzülen matrisa simmetrikdir. Islendik gönüburçly matrisany onuň transponirlenen matrisasyna köpeldip simmetrik matrisany alarys.

Ters matrisa.

Berlen A kwadrat matrisanyň A^{-1} ters matrisasy diỳlip başky matrisa sagyndan köpeldilende-de, çepinden köpeldilende-de birlik matrisany berỳän matrisa aỳdylỳar, ỳagny

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad .$$

Kesgitleýjisi nuldan tapawutly kwadrat matrisa aýratyn däl matrisa diýilýär. Diňe äýratyn däl matrisanyň ters matrisasy bardyr. Aýratyn däl

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisanyň her bir a_{ij} elementiniň A_{ij} algebraik doldurgyjy

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Setirleri sütünleri bilen çalşyrylan, algebraik doldurgyçlardan düzülen kwadrat matrisa baglaỳjy matrisa diỳilỳär we

$$A^{/} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ . & . & \cdots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

bilen belgilenýär.

Aýratyn däl A matrisanyň baglaýjy $A^{/}$ matrisasyny A matrisanyň $|A|$ kesgitleýjisine bölüp, A^{-1} ters matrisany alarys:

$$\frac{A^{/}}{|A|} = A^{-1}$$

Mysal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisanyň ters matrisasyny tapmaly.

Çözülişi.

Ilki berlen A matrisanyň $|A|$ kesgitleýjisini hasaplalyň

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 84 + 100 - 105 + 16 + 90 = -1.$$

Indi A matrisanyň elementleriniň algebraik doldurgyçlaryny tapalyň

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 18 + 20 = 38,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 25 = 29,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 42 = 34,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24.$$

Onda

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$AA^{-1} = E$ deňligiň ýerine ýetýändigini barlalyň

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-190+189 & -2+205-203 & 2-170+168 \\ 6-114+108 & -6+123-116 & 6-102+96 \\ 5+76-81 & -5-82+87 & 5+68-72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

III.2. Geodeziýa ölçemeleriň netijelerini matematiki taỳdan gaýtadan işlemek nazaryýetinde matrisalaryň ulanylyşy

Mundan beýläk matrisalaryň belgileriniň indekslerinde olaryň setirleriniň we sütünleriniň sanlaryny görkezeliň. *t*-näbellili (2.7) düzedişiň *n* deňlemeler ulgamy matrisa görnüşinde

$$A_{nt} x_{t1} + L_{n1} = V_{n1} \tag{3.1}$$

ỳa-da

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_1 & b_2 & \cdots & t_2 \\ . & . & \cdots & . \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdots \\ \delta x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(3.2)

ýaly ýazylýar.

Agramlaryň matrisasy diagonal matrisadyr, ýagny

$$P_{nn} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & p_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & p_n \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Iň kiçi kwadratlar usuly boỳunça düzedişiň deňlemesiniň esasy şerti

$$\Phi = [pvv] = \min .$$

bolar. Bu şerti matrisa görnüşinde

$$\Phi = V_{n1}^{*} P_{nn} V_{n1} = \min . \tag{3.4}$$

ýaly ýazmak bolar. Deňtakykly ölçemeler üçin bu şert

$$\Phi = V_{n1}^{*} V_{n1} = \min .$$

görnüşdedir.

Matrisalar baradaky maglumatlary ulanyp, normal deňlemeleri getirip çykaralyň. (2.7) düzediş deňlemesiniň hersini degişli $p_i a_i$ ululyga köpeldip alarys

$$\begin{aligned} & p_1 a_1 a_1 \delta x_1 + p_1 a_1 b_1 \delta x_2 + \ldots + p_1 a_1 t_1 \delta x_t + p_1 a_1 l_1 = p_1 a_1 v_1; \\ & p_1 a_2 a_2 \delta x_1 + p_2 a_2 b_2 \delta x_2 + \ldots + p_2 a_2 t_2 \delta x_t + p_2 a_2 l_2 = p_2 a_2 v_2; \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & p_n a_n a_n \delta x_1 + p_n a_n b_n \delta x_2 + \ldots + p_n a_n t_n \delta x_t + p_n a_n l_n = p_n a_n v_n . \end{aligned}$$

Bu deňlemeleri goşup alarys

$$\begin{aligned} & (p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \ldots + p_n a_n a_n)\delta x_1 + (p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \ldots + p_n a_n b_n)\delta x_2 + \\ & + \ldots + (p_1 a_1 t_1 + p_2 a_2 t_2 + \ldots + p_n a_n t_n)\delta x_t + (p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2 + \ldots + p_n a_n l_n) = \\ & = (p_1 a_1 v_1 + p_2 a_2 v_2 + \ldots + p_n a_n v_n). \end{aligned}$$

Gauss belgilemelerini girizip, soňky deňligi

$$[paa]\delta x_1 + [pab]\delta x_2 + \cdots + [pat]\delta x_t + [pal] = [pav]$$

görnüde ýazyp bileris. Bu deňligiň çep tarapynda normal deňleme bolany üçin, onuň hem nula deňdigi sebäpli, $[pav] = 0$. Edil şuňa meňzeşlikde

$$[pbv] = 0; [pcv] = 0; \cdots, [ptv] = 0.$$

bolar. Bu aňlatmalary

$$\begin{cases} p_1 a_1 v_1 + p_2 a_2 v_2 + \cdots p_n a_n v_n = 0 \\ p_1 b_1 v_1 + p_2 b_2 v_2 + \cdots p_n b_n v_n = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p_1 t_1 v_1 + p_2 t_2 v_2 + \cdots p_n t_n v_n = 0 \end{cases}$$

görnüşde ýazmak bolar. Soňky ulgam matrisa görnüşinde

$$A^*_{nt} P_{nn} V_{n1} = 0. \tag{3.5}$$

ýaly ýazylýar. (3.1) deňlikden tapylan V_{n1} -iň bahasyny (3.5) deňlikde ornuna goýup,

$$A^*_{nt} P_{nn} (A_{nt} X_{t1} + L_{n1}) = 0$$

deňligi alarys. Bu ýerden

$$A^*_{nt} P_{nn} A_{nt} X_{t1} + A^*_{nt} P_{nn} L_{n1} = 0. \tag{3.6}$$

$$N_{tt} = A^*_{nt} P_{nn} A_{nt}$$

we

$$B_{t1} = A^*_{nt} P_{nn} L_{n1},$$

belgilemeleri girizip (3.6) deňligi

$$N_{tt} X_{t1} + B_{t1} = 0 \qquad (3.7)$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde N_{tt} - normal deňlemäniň koeffisiýentlerden düzülen matrisa; B_{t1}- normal deňlemäniň azat agzalaryndan düzülen matrisa, düzedişiň matrisa görnüşdäki deňlemesi (3.7) deňleme görnüşinde ýazylýar.

Deňtakykly ölçemelerde matrisanyň agramlary birlik matrisany emele getirýän bolsalar, onda normal deňlemeleriň elementleri

$$N_{tt} = A^{*}_{nt} A_{nt} \qquad (3.8)$$

we

$$B_{t1} = A^{*}_{nt} L_{n1}. \qquad (3.9)$$

görnüşde ýazylýarlar.

(3.6) we (3.7) deňlemeleri ulanyp, normal deňlemeleriň koeffisiýentlerini we azat agzalaryny taparys

$$N_{tt} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ . & . & \cdots & . \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ . & . & \cdots & . \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [paa] & [pab] & \cdots & [pat] \\ [pab] & [pbb] & \cdots & [pbt] \\ . & . & \cdots & . \\ [pat] & [pbt] & \cdots & [ptt] \end{bmatrix};$$

$$B_{t1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ . & . & \cdots & . \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \cdots \\ [ptl] \end{bmatrix}.$$

Bu ýerde, koeffisiýentler we azat agzalar (2.9) normal deňlemeler ulgamynyň degişli agzalary ỳalydyr.

III.3. Ters matrisanyň elementleriniň kömegi bilen normal deňlemeleriň çözülişi

(3.7) normal deňlemeleriň matrisasyny çepinden N_{tt}^{-1} ters matrisa köpeldip alarys

$$N_{tt}^{-1}N_{tt}X_{t1}+N_{tt}^{-1}B_{t1}=0.$$

Bu deňlikden

$$N_{tt}^{-1}N_{tt}=E$$

deňligi göz öňünde tutup, alarys

$$X_{t1}+N_{tt}^{-1}B_{t1}=0$$

ỳa-da

$$-X_{t1}=N_{tt}^{-1}B_{t1} \tag{3.10}$$

Q_{ij} bilen ters matrisanyň elementlerini belgiläp alarys

$$N_{tt}^{-1}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2t} \\ . & . & \cdots & . \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots & Q_{tt} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Onda (3.10) deňlik

$$-\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \cdots \\ \delta x_t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2t} \\ . & . & \cdots & . \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots & Q_{tt} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} [pal] \\ [pbl] \\ \cdots \\ [ptl] \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

görnüşe geler.

(3.12) deňlikden her näbelli üçin

$$
\begin{aligned}
-\delta x_1 &= [pal]Q_{11} + [pbl]Q_{12} + \cdots [ptl]Q_{1t}\,; \\
-\delta x_2 &= [pal]Q_{21} + [pbl]Q_{22} + \cdots [ptl]Q_{2t} \quad (3.13) \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
-\delta x_t &= [pal]Q_{t1} + [pbl]Q_{t2} + \cdots [ptl]Q_{tt}
\end{aligned}
$$

aňlatmalary ýazmak bolar. Ters matrisanyň elementlerini tapmak üçin

$$
N_{tt}^{-1} N_{tt} = E
$$

ỳa-da

$$
\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1t} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2t} \\ . & . & \cdots & . \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots & Q_{tt} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} [paa] & [pab] & \cdots & [pat] \\ [pab] & [pbb] & \cdots & [pbt] \\ . & . & \cdots & . \\ [pat] & [pbt] & \cdots & [ptt] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

(3.14)

deňlikden peýdalanmaly. Bu ýerden agramly normal deňlemeler diỳlip atlandyrylỳan

$$
\begin{cases}
[paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + \cdots + [pat]Q_{1t} = 1 \\
[pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + \cdots + [pbt]Q_{1t} = 0 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
[pat]Q_{11} + [pbt]Q_{12} + \cdots + [ptt]Q_{1t} = 0
\end{cases}
$$

(3.15)

$$
\begin{cases}
[paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + \cdots + [pat]Q_{2t} = 0 \\
[pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + \cdots + [pbt]Q_{2t} = 1 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
[pat]Q_{21} + [pbt]Q_{22} + \cdots + [ptt]Q_{2t} = 0
\end{cases}
$$

(3.16)

$$\begin{cases} [paa]Q_{t1} + [pab]Q_{t2} + \cdots + [pat]Q_{tt} = 0 \\ [pab]Q_{t1} + [pbb]Q_{t2} + \cdots + [pbt]Q_{tt} = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ [pat]Q_{t1} + [pbt]Q_{t2} + \cdots + [ptt]Q_{tt} = 1 \end{cases}$$

(3.17)

deňlemeler ulgamlaryny alarys.

Normal agramly deňlemeleriň çözüwinden tapylan, ters matrisanyň Q_{ij} elementlerine agramly koeffisiýentler diỳilỳär. Agramly koeffisiýentler (3.13) formula bilen näbellileri kesgitlemek üçin ulanylýarlar. (3.15)-ulgamyň çözüwinden δx_1 birinji näbellini almak üçin gerek bolan agramly Q_{x_1} koeffisiýentleri, ỳagny Q_{11}, Q_{12}. . .Q_{1t} tapmak bolar, (3.16) ulgamdan bolsa, δx_2 näbellini tapmak üçin gerek bolan Q_{x_2}-koeffisiýentleri, ỳagny Q_{21}, Q_{22}. . .Q_{2t} koeffisiýentleri tapmak bolar we ş.m.

Agramly koeffisiýentler näbellileriň deňleşdirilen bahalaryndan funksiỳanyň agramyny, kwadrat Q_{11}, Q_{22}. . .Q_{tt} koeffisiýentler bolsa, näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň agramlaryny hasaplamak üçin hyzmat edỳärler.

Agramly normal deňlemeler Gauss usuly boýunça çözülýär. Agramly deňlemeleriň koeffisiýentleri (2.9) ulgamyň normal deňlemeleriniň koeffisiýentleri bilen gabat gelỳärler. (3.16), (3.17) ulgamlar (2.9) normal deňlemelerden (4-nji tablisada görkezilen) diňe azat agzalar bilen tapawutlanỳarlar.

4-nji tablisa.

Azat agzalar					
Normal deňlemeler	Normal deňlemäniň agramlary				
	Q_{x_1}	Q_{x_1}	Q_{x_1}	…	Q_{x_1}
[pal]	-1			…	
[pbl]		-1		…	
[pcl]			-1	…	
….	….	….	….	…	
[ptl]				…	-1

Agramly normal deňlemeler ulgamuny çözmek we agramly koeffisiýentleri tapmak üçin, Gauss shemasynda Q_{x_1} üçin azat agzalary 2-nji tablisanyň 7-nji sütünine, Q_{x_2} üçin 8-nji sütünine, Q_{x_3} üçin 9-nji sütünine ỳazmak zerur we ş.m.

Agram koeffisiýentleriň Gauss shemasyndan tapylyşy, agramly normal deňlemeleriň çözüwinden $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_t$ düzedişleriň tapylyşyna meňzeşdir, ỳöne 2-nji tablisanyň *l* azat agzalar ýazylan 4-nji sütüninie derek 7, 8, 9 we ş.m. sütunleri yzygider ulanmaly.

$Q_{ij}=Q_{ji}$ (ỳagny $Q_{12}=Q_{21}$; $Q_{23}=Q_{32}$; we ş.m.) deňlemeler agramly koeffisiýentleriň dogry hasaplanyşynyň barlagy bolup hyzmat edỳärler.

$$
\begin{aligned}
&([pas]-[pal])Q_{11}+([pbs]-[pbl])Q_{12}+\cdots([pts]-[ptl])Q_{1t}=1;\\
&([pas]-[pal])Q_{21}+([pbs]-[pbl])Q_{22}+\cdots([pts]-[ptl])Q_{2t}=1;\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (3.18)\\
&([pas]-[pal])Q_{t1}+([pbs]-[pbl])Q_{t2}+\cdots([pts]-[ptl])Q_{tt}=1.
\end{aligned}
$$

IV. NETIJELERI DEŇLEŞDIRMEGIŇ TAKYKLYGYNA BAHA BERLIŞI

IV.1. Ölçenen ululyklaryň agramlarynyň kesgitlenişi

Ölçenen ululygyň agramy

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} \tag{4.1}$$

deňlikden kesgitlenýär, bu ỳerde m_i –ölçenen ululygyň orta kwadratik ỳalňyşlygy, μ-agram birliginiň orta kwadratik ỳalňyşlygy (agramy bire deň bolan netijäniň ỳalňyşlygy).

Eger-de burçlar deňleşdirilse, onda

$$P_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2} \tag{4.2}$$

bolar. $P_\beta = 1$ bahany almak üçin $\mu = m_\beta$ diỳlip kabul edilýär.

Niwelir tory deňleşdirilen ỳagdaỳynda uzynlyklar dürlüdirler, we gidişiň artdyrmasy deňtakykly däldir. Düzgün boýunça uly bolmadyk takyklyk niwelirlenỳän wagtynda ölçemeleriň netijeleriniň agramlary gidişiň uzynlygyna proporsional diỳlip kabul edilýär, ỳagny

$$P = \frac{C}{L} \tag{4.3}$$

(4.3) aňlatmany almak üçin, uzynlyklaryy C we L bolan, gidişler boýunça artdyrmalaryň orta kwadratik ỳalňyşlyklaryny ỳazalyň

$$m_c = m_1\sqrt{C}\,;$$
$$m_L = m_1\sqrt{L}\,,$$

bu ýerde m_1 -uzynlyk birligine düşỳän orta kwadratik ỳalňyşlyk.

$$\frac{p_L}{P_c} = \frac{m_c^2}{m_L^2},$$

bolany üçin

$$\frac{p_L}{P_c} = \frac{C}{L}$$

$P_c=1$ hasap edip, (4.3) deňligi alarys, bu ýerde, *C*- gidişiň uzynlygy.

IV.2. Takyklyga baha berlişi

Deňtakykly ölçemeleriň netijelerniň orta kwadratik ỳalňyşlygy

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-t}}, \qquad (4.4)$$

formula boýunça kesgitlenýär, bu ỳerde *n* –ölçenen ululyklaryň sany; *t*- näbellileriň sany.

Ölçemeler deňtakykly bolmasa, onda agram birliginiň orta kwadratik ỳalňyşlygy

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-t}}.$$

formula boýunça kesgitlenýär

Uzynlyk birligine düşỳäň ỳalňyşlyk bolsa,

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{C}}. \qquad (4.5)$$

gatnaşyk boýunça hasaplanýar.

Ölçemeleriň agramlary (4.1) formula boỳunça hasaplananda μ-agram birliginiň deňleşdirmeden söň alnan ỳalňyşlygy, ol bolsa mydama deňleşdirmä çenli kabul edilen baha bilen gabat gelip durmaýar.

Näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň funksiỳasynyň takyklygyna baha berlişi.

$$F = f(x_1, x_2, \cdots, x_t) \tag{4.6}$$

funksiỳa baha bermek üçin, onuň agramyny hasaplamak zerurdyr. (4.6) deňlemäni çyzykly görnüşe getireliň, onuň üçin deňlemäni

$$F = f\left(x_1^0 + \delta x_1, x_2^0 + \delta x_2, \cdots, x_t^0 + \delta x_t\right)$$

görnüşde ỳazalyň we Teỳloryň hataryna dargadalyň

$$F = f\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_t^0\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_t}\delta x_t$$

$$f\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_t^0\right) = f_0; \quad \text{we} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i,$$

belgilemeleri girizip

$$F = f_0 + f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2 + \cdots + f_t\delta x_t, \tag{4.7}$$

aňlatmany alarys, ỳa-da matrisa görnüşde

$$F = f_0 + F_{t_1}^{*} X_{t1}, \tag{4.8}$$

deňligi alarys, bu ỳerde

$$F_{t1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_t \end{bmatrix}.$$

(4.7) funksiỳanyň takyklygyna baha bermegiň birnäçe usuly bar. Funksiỳanyň agramynyň dürli usullar bilen hasaplanyşyna garap geçeliň.

1. Ters matrisanyň elementleriniň kömegi bilen

$$\frac{1}{P_F} = f_1 f_1 Q_{11} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + 2 f_1 f_3 Q_{13} + \cdots + 2 f_1 f_t Q_{1t} +$$

$$+ f_2 f_2 Q_{22} + 2 f_2 f_3 Q_{23} + \cdots + 2 f_2 f_t Q_{2t} +$$

$$+ f_3 f_3 Q_{33} + \cdots + 2 f_3 f_t Q_{3t} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$

$$+ f_t f_t Q_{tt} \qquad (4.9)$$

deňligi alarys, (4.9) aňlatma matrisa görnüşinde

$$\frac{1}{P_F} = F_{t1}^{*} N_{tt}^{-1} F_{t1} \qquad (4.10)$$

deňlik arkaly ýazylýar.

2. Gauss shemasynyň goşmaça sütüninde funksiýanyň agramy

$$-\frac{1}{P_F} = -\frac{f_1^2}{[paa]} - \frac{[f_2 1]^2}{[pbb1]} - \frac{[f_3 2]^2}{[pcc2]} - \cdots - \frac{[f_t(t-1)]^2}{[ptt(t-1)]} \qquad (4.11)$$

formula boỳunça hasaplanýar. $\frac{1}{P_F}$ - ululyklary hasaplamak 2-nji tablisanyň 10-njy sütüninde ỳerine ỳetirilỳär. (4.11) deňlemäniň sag tarapynyň her bir goşulyjysyny almak üçin, degişli eliminasion setirdäki agzany bir setir ỳokarda durỳan ululyga köpeltmeli.

3. Geçiş koeffisiýentleriniň kömegi bilen

$$\frac{1}{P_F} = f_1 q_1 + f_2 q_2 + \cdots + f_t q_t \ . \tag{4.12}$$

funksiýanyň agramynyň hasaplanyşy.

Geçiş koeffisiýentler

$$\begin{cases} [paa]q_1 + [pab]q_2 + \cdots + [pat]q_t - f_1 = 0 \\ [pab]q_1 + [pbb]q_2 + \cdots + [pbt]q_t - f_2 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [pat]q_1 + [pbt]q_2 + \cdots + [ptt]q_t - f_t = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

geçiş normal deňlemeler ulgamynyň çözüwinden tapylýar.

(4.13) ulgam (2.9) normal deňlemeler ulgamyndan diňe azat agzalary bilen tapawutlanỳar. Eger-de normal deňlemeler Gauss shemasynda çözülse, q geçiş koeffisiýentleri hasaplamak üçin $-f_1, -f_2, \ldots, -f_t$ azat agzalar üçin tablisa goşmaça sütün göşmaly.

Deňtakykly we deňtakykly däl ölçemelerde, näbellileriň deňleşdirilen funksiỳasynyň bahalarynyň orta kwadratik ỳalňyşlygyny degişlilikde

$$m_F = m\sqrt{\frac{1}{p_F}}\,; \tag{4.14}$$

we

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{p_F}}. \qquad (4.15)$$

formulalar boỳunça hasaplaýarlar

Nabellileriň deňleşdirilen bahalarynyň takyklygyna baha berlişi. Näbellileriň deňleşdirilen bahalaryny şol näbellileriň funksiýasy hökmünde garamak we baha bermek bolar. Eger-de funksiỳa hökmünde näbellileriň haỳsy hem bolsa birini alsak, onuň agramyny kesgitlemek üçin (4.9) ỳa-da (4.11) formulalary ulanmak bolar.

i-nji näbellä baha bermek üçin (4.7) formulany

$$F_i = x_i = x_i^0 + \delta x_i,$$

görnüşde ỳazalyň, bu ỳerde f_i - δx_i -iň koeffisiýenti +1-e deň, f –ululygyň galan hemme koeffisiýentleri nula deň.

Onda (4.9) formulany ulanyp

$$\frac{1}{P_{x_i}} = Q_{ii} \qquad (4.16)$$

deňligi alarys. Mysal üçin,

$$\frac{1}{P_{x_1}} = Q_{11}; \quad \frac{1}{P_{x_2}} = Q_{22}, \cdots, \frac{1}{P_{x_t}} = Q_{tt}.$$

Islendik näbelliniň agramyny Gauss shemasynyň goşmaça sütüninde (4.11) formula boỳunça hasaplamak bolar. Hemme hasaplamalar funksiỳanyň agramynyň (4.7) deňlemedäki (2-nji tablisa, 10-njy sütün) hasaplanyşyna meňzeş:

eger-de x_1-e baha bersek, onda $f_1=1; f_2=f_3= . . . =f_t=0;$

eger-de x_2-e baha bersek, onda $f_2=1; f_1=f_3= . . . =f_t=0;$

eger-de x_t-e baha bersek, onda $f_t=1; f_1=f_2= . . . =f_{t-1}=0.$

Şeỳle usul bilen aşakdaky niwelir torunyň deňleşdiriş mysalynda näbellileriň agramlary hasaplanandyr. Iň soňky näbellileriň agramyny

$$P_{x_t} = [ptt(t-1)]. \tag{4.17}$$

normal deňlemeleriň çözüliş shemasyndan almak bolar.

Üç näbelliler üçin

$$P_{x_3} = [pcc2],$$

bolar. Ikinji näbelliniň agramyny

$$P_{x_2} = P_{x_3} \frac{[pbb1]}{[pcc1]}. \tag{4.18}$$

formula boýunça hasaplamak bolar.

Näbellileriň orta kwadratik ỳalňyşlygyny

$$m_{x_i} = n\sqrt{\frac{1}{P_{x_i}}} \tag{4.19}$$

we

$$m_{x_i} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{x_i}}} \quad . \tag{4.20}$$

formulalar boýunça hasaplamak bolar.

V. DEŇLEŞDIRILEN HASAPLAMALARA DEGIŞLI MYSALLAR

V.1. Stansiỳalarda deňtakykly burç gözegçilikleriniň deňleşdirilişi

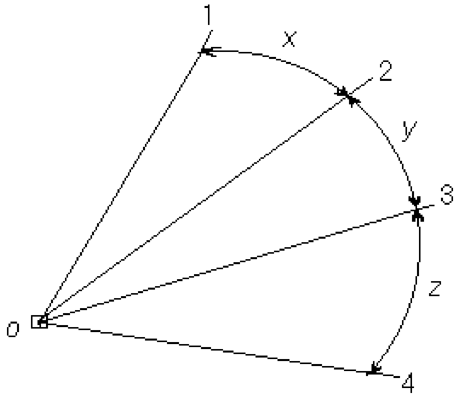
Hasaplamalaryň yzygiderligine stansiỳalarda burç gözegçiliginiň deňleşdiriş mysalynda garalyň. Näbellileriň we olaryň funksiỳalarynyň denleşdirilen bahalarynyň ölçemeleriniň netijeleriniň takyklygyna hem baha bereliň [11].

1) Zerur näbellileriň saỳlanyşy we düzedişleriň deňlemeleriniň düzülişi;
2) Normal deňlemeleriň düzülişi;
3) Takyklyga baha bermek üçin deňleşdirilen ululyklaryň funksiỳasynyň düzülişi;
4) Gauss shemasynda normal deňlemeleriň çözülişi we şol shemada koeffisiýentleriň agramlarynyň hasaplanyşy (ters matrisanyň elementleri);
5) Gauss shemasynyň goşmaça sütüninde funksiýanyň agramlarynyň hasaplanyşy;
6) Düzedişleriň hasaplanyşynyň jemleýji barlagy;
7) Normal deňlemeleriň koeffisiýentleriniň ters matrisanyň kömegi bilen hasaplanyşy;
8) Ölçenen burçlaryň has ähtimal düzedişleriniň hasaplanyşy we deňleşdirilen hasaplamalaryň jemleýji barlagy;
9) Näbellileriň we ölçenen ululyklaryň deňleşdirilen bahalarynyň hasaplanyşy;
10) Gauss shemasynda soňky we ondan öňki näbellileriň agramlarynyň hasaplanyşy; agramly koeffisiýentleriň kömegi bilen näbellileriň we funksiýalaryň agramlarynyň kesgitlenişi;
11) Näbellileriň we funksiýalaryň deňleşdirilen bahalarynyň ölçemeleriniň netijesiniň takyklygynyň bahalandyrylyşy;
12) Düzedişleriň deňlemeleriniň matrisa görnüşinde ýazylyşy.

Dürli görnüşlerde ölçenen burçlaryň netijeleri aşakdaky görnüşde berlen (5-nji tablisa, 1-2 sütün).

5-nji tablisa.

Burçlar	Ölçenen burçlaryň bahalary q	Näbelliler we olaryň funksiýalary	Düzediş v	Deňleşdirilen burçlaryň bahalary $q+v$
1	2	3	4	5
1.2	$45\ 15^{/}42^{//}0$	x	$-0^{//},05$	$45^{0}\ 15^{/}\ 41^{//},05$
2.3	32 20 17,5	y	+0,05	32 20 17,55
3.4	27 43 25,3	z	+0,55	27 43 25,85
1.3	77 35 59'0	$x+y$	+0,50	77 35 59,50
2.4	60 03 43,5	$y+z$	-0,10	60 03 43,40
1.4	105 19 25,8	$x+y+z$	-0,45	105 19 25,35



2-nji surat.

1. x, y we z näbellileri hasaplamak üçin alty sany burç ölçenen. Burçlary näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň funksiýalary bilen aňladalyň we olary 5-nji tablisanyň 2-nji sütüninde ýazalyň.

Umumy görnüşde düzedişleriň alty sany deňlemesini düzeliň. Olaryň her biri näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň (5-nji tablisa, 3-nji sütün) we q ölçenen ululygyň funksiýalarynyň tapawudydyr, ýagny

$$f(x,y,z)-q_i=v_i$$

bu ýerde $i=1,2,3,\ldots,6.$

1. $x - q_1 = v_1$
2. $y - q_2 = v_2$
3. $z - q_3 = v_3$
4. $x + y - q_4 = v_4$
5. $y + z - q_5 = v_5$
6. $x + y + z - q_6 = v_6$

Hasaplary ýeňilleşdirmek maksady bilen x, y we z – i ýakynlaşan x_0 , y_0 we z_0 bahalar bilen, näbellileri bolsa δx, δy, δz düzedişler bilen çalşyralyň;

$$x = x_0 + \delta x; \qquad y = y_0 + \delta y; \qquad z = z_0 + \delta z.$$

Onda

1. $\delta x + (x_0 - q_1) = \delta x + l_1 = v_1,$
2. $\delta y + (y_0 - q_2) = \delta y + l_2 = v_2,$
3. $\delta z + (z_0 - q_3) = \delta z + l_3 = v_3,$
4. $\delta x + \delta y + (x_0 + y_0 - q_4) = \delta x + \delta y + l_4 = v_4,$
5. $\delta y + \delta z + (y_0 + z_0 - q_5) = \delta y + \delta z + l_5 = v_5,$
6. $\delta x + \delta y + \delta z + (x_0 + y_0 + z_0 - q_6) = \delta x + \delta y + \delta z + l_6 = v_6.$

Näbellileriň ýakynlaşan bahalary hökmünde olaryň ölçenen burçlarynyň $x_0 = q_1; \quad y_0 = q_2; \quad z_0 = q_3$ bahalaryny alalyň.
Düzedişleriň deňlemelerini gutarnykly görnüşde aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$
\begin{cases}
\delta x = v_1 \\
\delta y = v_2 \\
\delta z = v_3 \\
\delta x + \delta y + 0'',5 = v_4 \\
\delta y + \delta z - 0,7 = v_5 \\
\delta x + \delta y + \delta z - 1,0 = v_6
\end{cases}.
$$

(5.1)

2. Has ähtimal δx, δy, δz düzedişleri tapmak üçin üç sany normal deňlemeleri düzmeli we olary çözmeli. Normal deňlemeleri umumy görnüşde ýazalyň

$$
\begin{cases}
[aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z + [al] = 0 \\
[ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z + [bl] = 0 \\
[ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z + [cl] = 0
\end{cases}.
$$

(5.2)

Normal deňlemeleriň koeffisiýentleriniň we azat agzalarynyň san bahalaryny kesgitlemek üçin, ilki bilen 5-nji tablisanyň 1-6 –njy sütünlerini dolduryp, düzedişler deňlemesiniň koeffisiýentleriniň we azat agzalarynyň tablisasyny 1-nji tablisa meňzeşlikde düzeliň.

6-njy tablisa.

№	*a*	*b*	*c*	$l_1^{//}$	*s*	*v*	*vv*	*vl*	*vs*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1				1	-0,05	0,00		-0,06
2		1			1	0,05	0,00		0,05
3			1		1	0,55	0,30		0,55
4	1	1		0,5	2,5	0,50	0,25	0,25	+1,25
5		1	1	-0,7	1,3	-0,10	0,01	0,07	-0,13
6	1	1	1	-1.0	2,0	-0,45	0,20	0,45	-0,90
$\sum$	3	4	3	-1,2	8,8		0,76	0,77	0,77
	-0,05	0,05	0,55						
Näb	3	2	1	-0,5	5,5	Barlag	5,5		
elli-		4	2	-1,2	6,8		6,8		
ler			3	-1,7	4,3		4,3		
				-1,74	-1,66		-1,66		
					14,94		+14,94		

(5.2) düzedişleriň deňlemesiniň azat agzalarynyň koeffisiýentlerini hasaplalyň.

$$[aa]=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+a_4a_4+a_5a_5+a_6a_6=1+1+1=3;$$
$$[ab]=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6=1+1=2;$$
$$[ac]=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+a_4c_4+a_5c_5+a_6c_6=1;$$
$$[bb]=b_1b_1+b_2b_2+b_3b_3+b_4b_4+b_5b_5+b_6b_6=1+1+1+1=4;$$
$$[bc]=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4+b_5c_5+b_6c_6=1+1=2;$$
$$[cc]=c_1c_1+c_2c_2+c_3c_3+c_4c_4+c_5c_5+c_6c_6=1+1+1=3.$$
$$[al]=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+a_4l_4+a_5l_5+a_6l_6=-0{,}5-1{,}0=-0{,}5;$$
$$[bl]=b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3+b_4l_4+b_5l_5+b_6l_6=0{,}5-0{,}7-1=-1{,}2;$$
$$[cl]=c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3+c_4l_4+c_5l_5+c_6l_6=-0{,}7-1=-1{,}7.$$

Onda, düzedişleriň deňlemelerini

$$\begin{cases} 3\delta x + +2\delta y + \delta z - 0{,}5 = 0 \\ 2\delta x + 4\delta y + 2\delta z - 1{,}2 = 0 \\ \delta x + 2\delta y + 3\delta z - 1{,}7 = 0 \end{cases}.$$

görnüşde ýazyp bileris. Jemleýji deňleme bolsa,

$$+6\delta x + 8\delta y + 6\delta z - 3{,}4 = 0$$

görnüşi alar.

3. 1.4- burçuň agramyny kesgitlemek üçin

$$F = x + y + z$$

funksiýany düzeliň, ýagny

$$F = \left(x_0 + y_0 + z_0\right) + \delta x + \delta y + \delta z = f_0 + \delta x + \delta y + \delta z .$$

Düzedişleriň koeffisiýentleri $f_1 = f_2 = f_3 = +1$ deň.

4. Normal deňlemeleriň we agramly normal deňlemeleriň çözülişi 7-nji tablisada ýerine ýetirilendir.

Hasaplamalaryň düşündirilişini 2-nji tablisada getirilen Gauss shemasyndan tapmak bolar. Normal deňlemeler çözülende özgerdilen deňlemeleriň setirleri (2.23) formula, eliminasion deňlemeler bolsa (2.25) formula bilen barlanylýar. Her ädimdäki barlaglarda (2.25) deňlemeler ulanylýar.

Agramly kwadrat däl koeffisiýentleri hasaplamagyň barlagynyň dogrylygyny bilmek üçin $Q_{12} = Q_{21} = -0{,}250$; $Q_{13} = Q_{31} = 0{,}000$; we $Q_{23} = Q_{32} = -0{,}250$ deňlikler hyzmat edýärler. Ähli agramly koeffisiýentleri barlamak üçin (3.18) anlatmany ulanmak bolar.

5. Näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň funksiýasynyň agramyny (1.4 burçyň agramy) 7-nji tablisanyň 10-njy sütüninde hasaplalyň, şoňa-da $f_1 = f_2 = f_3 = +1$ koeffisiýentleri ýazalyň. Elminiasion setirleriniň köpeltmek

hasyllarynyň jemi - $\frac{1}{P_F}$ ululygy berýär, ol –0,50 –ä deňdir.

6. δx, δy we δz düzedişleriň dogrulygyny barlamak üçin olaryň bahalaryny jemleýji normal deňlemä goýalyň:

$$6(-0,05)+8\cdot 0,051+6\cdot 0,55-3,4=$$

$$=-0,300+0,408+3,300-3,400=+0^{//},008$$

7-nji tablisa.

a	*b*	*c*	*l*	*s*	Barlag
1	2	3	4	5	6
+3,0 -1,000	+2,0 -0,667	+1,0 -0,333	-0,5 +0,107	-0,5 -1,833	 -1,833
	+4,0 -1,33 +2,07 -1,000	+2,0 -0,67 +1,33 -0.500	-1,2 +0,33 -0,87 +0,326	+6,8 -3,67 +3,13 -1,173	 +3,13 -1,174
		+3,0 -0,33 -0,67 +2,00 -1,00	-1,7 +0,17 +0,43 -1,10 +0,85	+4,3 -1,84 -1,5 +0,9 -0,45	 +0,9 -0,45

+0,67 -0,183 -0,034 -0,050 δx	+0,32 -0,275 +0,051 δy	+0,550 δz	+1,74 -0,08 -0,28 -0,60 +0,78	-1,66 +0,82 +1,02 +0,50 +0,78	[*vv*]
+0,333 0,00 +0,167 +0,500 Q_{11}	-0,250 0,00 -0,250 Q_{12}	0,000 Q_{13}		+14,94 -10,08 -3,67 -0,41 +0,78	[*vv*]
0,00 +0,083 -0,333 -0,250 Q_{21}	+0,375 +0,12 +0,500 Q_{22}	-0,250 Q_{23}			
0,00 -0,167 +0,067 0,009 Q_{13}	0,00 -0,250 0,250 Q_{32}	+0,500 Q_{33}			

Q_x	Q_y	Q_z	F
7	8	9	10
-1,0 +0,333			+1,0 -0,333
 +0,67 +0,67 -0,250	-1,0 -1,0 +0,375		+1,0 -0,67 +0,33 -0,124
 +0,33 -0,33	 0,50	-1,0	+1,0 -0,33 -0,17

0,00 0,00	+0,50 -0,250	-1,00 +0,500	+0,50 -0,250
			-0,33 -0,04 -0,13 $\frac{-1}{P_y}$=0,50

we (2.29) formula boýunça [*vv*] ululygy hasaplamak arkaly barlalyň,

$$[vv]=[ll]+[al]\delta x_1+[bl]\delta x_2+[cl]\delta x_3=$$

$$=1{,}74+-0{,}5(0{,}05)-1{,}2\cdot 0{,}05-1{,}7\cdot 0{,}55=$$

$$=1{,}74+0{,}025-0{,}06-0{,}935=0{,}77,$$

bu ýerde

$$[ll]=1{,}74,\quad [al]=-0{,}5,\quad [bl]=-1{,}2,\quad [cl]=-1{,}7,$$

$$\delta x_1=-0{,}05,\ \delta x_2=0{,}05,\ \delta x_3=0{,}55.$$

7. Ters matrisanyň elementlerini ulanyp, näbellileriň düzedişlerini hasaplalyň

$$-\delta x=[al]Q_{11}+[bl]Q_{12}+[cl]Q_{13}=-0{,}250+0{,}300+0{,}000=+0{,}050;$$

$$-\delta y=[al]Q_{21}+[bl]Q_{22}+[cl]Q_{23}=-0{,}125-0{,}600+0{,}425=-0{,}050;$$

$$-\delta z=[al]Q_{31}+[bl]Q_{32}+[cl]Q_{33}=0{,}000+0{,}300-0{,}850=-0{,}550$$

.

8. Duzeldijileriň deňlemelerine $\delta x, \delta y$ we δz bahalary goýup, ölçenen burçlaryň ähtimal bolan v_i düzedişlerini taparys. Alnan bahalary 5-nji tablisanyň 5-nji sütünine we 6-njy tablisanyň 7-nji sütünine ýazalyň.

6-njy tablisanyň soňky üç sütüni (8-10 sütünler) [*vv*], [*vl*] we [*vs*] ululyklary tapmak üçin hyzmat edýär, olar hem hasaplamalaryň takyklyk çäginde ozara deňdirler. Deňleşdirmeleri hasaplamalaryň jemleýji barlagy üçin 7-nji tablisanyň 4-nji we 5-nji sütünlerinde hasaplanyp alnan, [*vv*] bahany [*ll3*], [*ls3*] we [*ss3*] bilen deňeşdireliň. Görnüşi ýaly jemiň hemme bahalary *+0,780* deň bolup çykdy.

9. Näbelliniň deňleşdirilen bahalary

$$x = x_0 + \delta x = 45^0 15^{/} 42^{//},0 - 0^{//},05 = 45^0 15^{/} 41^{//},95;$$
$$y = y_0 + \delta y = 32^0 20^{/} 17^{//},5 + 0^{//},05 = 32^0 20^{/} 17^{//},55;$$
$$z = z_0 + \delta z = 27^0 43^{/} 25^{//},3 + 0^{//},55 = 27^0 43^{/} 25^{//},85.$$

$q_i + v_i$ burçlaryň deňleşdirilen bahalaryny 5-nji tablisanyň 6-njy sütününe ýazalyň.

Ähli edilen hasaplamalary barlalyň, onuň üçin näbellileriň has ähtimal bahalaryny burçlaryň algebraik jemi (8-nji tablisa) hökmünde alnan bahalary bilen deňeşdireliň.

8-nji tablisa.

Burçlaryň alnyşy	Alnan burçlaryň jemi	Degişli burçlar
1	2	3
1.2 + 2.3	$77^0 35^{/} 59,50$	1.3
2.3 + 3,4	$60^0\ 03^{/}\ 43,10$	2.4
1.2 + 2.3+ 3,4	$105^0\ 19^{/}\ 25,35$	1.4

10. Näbelliniň soňky we ondan öňki agramyny Gauss shemasy boýunça hasaplalyň;

$$P_z = [cc2] = 2,00;$$

$$P_y = P_z \frac{[bb1]}{[cc1]} = 2,00 \frac{2,67}{2,67} = 2,0$$

Näbellileriň agramlaryny we funksiýanyň agramyny (4.9) we (4.16) formulalaryň kömegi bilen agramly koeffisiýentler arkaly hasaplalyň;

$$\frac{1}{P_x}=Q_{11}=0{,}50;\qquad \frac{1}{P_y}=Q_{22}=0{,}50;$$

$$\frac{1}{P_z}=Q_{33}=0{,}50;$$

$$\frac{1}{P_y}=0{,}50+2(-0{,}25)+2{,}00+0{,}50-$$

$$2(-0{,}25)+0{,}50=+0{,}50.$$

11. Ölçenen burçlaryň orta kwadratik ýalňyşlygy

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-t}}=\sqrt{\frac{0{,}77}{3}}=\pm0'',51.$$

bolar. Bu ýerde $n=6$- ölçenen ululyklaryň sany, $t=3$- näbellileriň sany.

Näbellileriň orta kwadratik ýalňyşlyklary

$$m_x=m\sqrt{\frac{1}{P_x}}=\pm0'',51\cdot0{,}71=\pm0'',36;$$

$$m_y=m\sqrt{\frac{1}{P_y}}=\pm0'',51\cdot0{,}71=\pm0'',36;$$

$$m_z=m\sqrt{\frac{1}{P_z}}=\pm0'',51\cdot0{,}71=\pm0'',36$$

bolar.

$F=x+y+z$ funksiýanyň orta kwadratik ýalňyşlygy

$$m_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 0'',51 \cdot 0,71 = \pm 0'',36$$

bolar.

12. (5.1) düzedişler deňlemeler ulgamy matrisa

$$A_{63} X_{31} + l_{61} = v_{61}.$$

görnüşde ýazylýar.

Normal deňlemeleriň koeffisiýentlerinden düzülen matrisa

$$N_{33} = A^{*}_{36} A_{63}$$

ýa-da

$$N_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

görnüşde ýazylýar.

Normal deňlemeleriň azat agzalaryndan düzülen matrisa

$$B_{31} = A^{*}_{36} L_{61}$$

ýa-da

$$N_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5 \\ -0,7 \\ -1,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,2 \\ -1,7 \end{bmatrix}$$

görnüşde ýazylýar.

Normal deňlemeler matrisa görnüşinde

$$N_{33} X_{31} + B_{31} = 0 .$$

ýaly ýazylýar. Garalýan mysalda bu deňleme

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,2 \\ +1,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

görnüşde bolar.

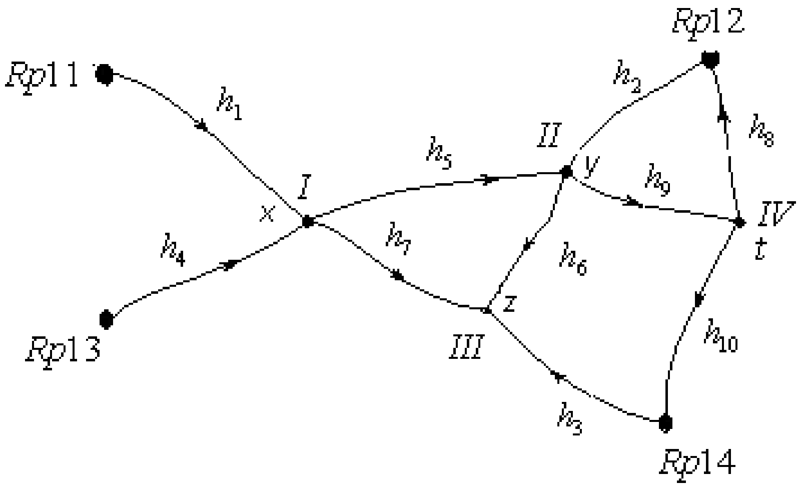
V.2. Zerur näbelliler usuly bilen niwelir torunyň deňleşdirilişi

Deňtakykly däl ölçemeleri deňleşdirmegiň mysaly aşakdaky yzygiderlikde işlenen:

1. Zerur näbellileriň saýlanyşy we düzedişleriň deňlemeleriniň düzülişi;
2. Takyklyga baha bermek üçin deňleşdirilen ululyklaryň funksiýasynyň düzülişi;
3. Normal deňlemeleriň düzülişi we olaryň Gauss shemasynda çözülişi;
4. Düzedişleriň hasaplanyşynyň jemleýji barlagy;
5. Funksiýanyň agramlarynyň we näbellileriň agramlarynyň goşmaça sütünlerde hasaplanyşy;
6. Ölçenen (artdyrylan) ululyklaryň has ähtimal düzedişleriniň hasaplanyşy we deňleşdirilen hasaplamalaryň jemleýji barlagy;
7. Näbellileriň (düwün reperleriniň belligi) we ölçenen artdyrmalaryň deňleşdirilen bahalarynyň hasaplanyşy;
8. Ölçemeleriň netijeleriniň takyklygyna baha berlişi;
9. Normal deňlemeleriň Zeýdeliň yzygiderli ýakynlaşma usuly bilen çözülişi;

Niwelir torunyň (3-nji surat) shemasynda peýkamlar gidişiň ugruny görkezýärler. Başky reperiň bellikleri aşakdaky görnüşde berlen:

Reper	11	12	13	14	
Bellikler, *m*. (*H*)	50,816	49,876	56,819	54,721	*t*



3-nji surat

Niwelirlemegiň jemleri we gidişiň uzynlyklary 9-njy tablisada getirilen.

9-njy tablisa

№	Geçişiň uzynlygy *L,km*	Ölçemeleriň ýalňyşlyklary *h, m*	Düzediş *v, mm*	Ýalňyslygyň deňlemesi $h^{/}=h+v$
1	2	3	4	5
1	16	+2,660	-5,8	+2,6548
2	21	-6,748	-13,3	-6,7613
3	31	-7,349	+3,7	-7,3453
4	26	-3,363	+14,2	-3,3488
5	18	-10,363	+7,6	-10,3554
6	14	+4,260	+1,0	+4,2610
7	16	-6,091	-3,4	-6,0944
8	20	-2,543	+11,2	-2,5318
9	15	+9,298	-5,0	+9,2900
10	10	+2,322	-8,6	+2,3134

Ölçemeleriň jemleriniň agramy hökmünde $P=\frac{2}{L}$ kabul edilen.

Zerur näbellileriň deňleşdirilen bahalary hökmünde I, II, III we IV düwün reperleriniň belliklerini saýlap alalyň, olary degişlilikde *x, y, z* we *t* bilen belgiläliň. Ýalňyşlyklaryň deňlemelerini umumy görnüşde özara deňleşdirilen we artdyrylan ölçemeleriň tapawudy hökmünde ýazalyň:

1. $(x-H_{11})-h_1=v_1$; 6.
$(z-y)-h_6=v_6$;
2. $(y-H_{12})-h_2=v_2$; 7.
$(z-x)-h_7=v_7$;
3. $(z-H_{14})-h_3=v_3$; 8.
$(H_{12}-t)-h_8=v_8$;
4. $(x-H_{13})-h_4=v_4$; 9.
$(t-y)-h_9=v_9$;
5. $(y-x)-h_5=v_5$; 10.
$(H_{14}-t)-h_{10}=v_{10}$.

Näbellileriň has ähtimal bahalaryny ýakynlaşan bahalar we düzedişler girizmek arkaly aňladalyň:

$$x=x_0+\delta x; \qquad z=z_0+\delta z;$$
$$y=y_0+\delta y; \qquad t=t_0+\delta t;$$

Olary düzedişleriň deňlemelerine goýup alarys

1. $\delta x+\{(x_0-H_{11})-h_1\}=v_1$; 6.
$\delta z-\delta y+\{(z_0-y_0)-h_6\}=v_6$;
2. $\delta y+\{(y_0-H_{12})-h_2\}=v_2$; 7.
$\delta z-\delta x+\{(z_0-x_0)-h_7\}=v_7$;
3. $\delta z+\{(z_0-H_{14})-h_3\}=v_3$; 8.

$$-\delta t+\{(H_{12}-t_0)-h_8\}=v_8;$$

4. $\delta x+\{(x_0-H_{13})-h_4\}=v_4;$ 9. $\delta t-\delta y+\{(t_0-y_0)-h_9\}=v_9;$

5. $\delta y-\delta x+\{(y_0-x_0)-h_5\}=v_5;$ 10. $-\delta t+\{(H_{14}-t_0)-h_{10}\}=v_{10}$,

Düwün reperleriniň näbelli bellikleriniň ýakynlaşan bahalaryny kesgitläliň

$$x_0=H_{11}+h_1=50{,}816+2{,}660=53{,}476\ m;$$
$$y_0=H_{12}+h_2=49{,}876-6{,}748=43{,}128\ m;$$
$$z_0=H_{14}+h_3=54{,}721-7{,}349=47{,}372\ m;$$
$$t_0=H_{14}-h_{10}=54{,}721-2{,}322=52{,}399\ m.$$

Onda düzedişleriň deňlemelerini

1. $\delta x=v_1;$ 6. $\delta z-\delta y+1{,}6=v_6;$

2. $\delta y=v_2;$ 7. $\delta z-\delta x+1{,}3=v_7;$

3. $\delta z=v_3;$ 8. $-\delta t+2{,}0=v_8;$

4. $\delta x+2{,}0=v_4;$ 9. $\delta t-\delta y-2{,}7=v_9;$

5. $\delta y-\delta x+1{,}5=v_5;$ 10. $-\delta t=v_{10}.$

görnüşde yazmak bolar.

Näbellileriň deňleşdirilen bahalarynyň funksiýasy hökmünde onyň takyklygyny bahalandyrmak üçin bäşinji gidiş boýunça artrdyrmasyny alalyň

$$F_u = h_5 = y - x$$

ýa-da

$$F_u = (y_0 - x_0) + \delta y - \delta x.$$

Koeffisiýentler: $f_1 = -1; \quad f_2 = +1; \quad f_3 = f_4 = 0.$
bolar.

Koeffisiýentleriň we düzedişleriň deňlemeleriniň azat agzalarynyň tablisasyny düzeliň (10-njy tablisa) we olary 1-7 sütünlerde ýazalyň. Şu ýerde-de normal deňlemeleriň koefisiýentlerini we azat agzalaryny hasaplalyň. Harp görnüşinde, edil şonuň ýaly ululyklar 1-nji tablisada ýazylandyr. Normal deňlemeleriň düzülişi (2.22) deňlemeler boýunça barlanylýar.

Normal deňlemeleriň

$$\begin{cases} [paa]\delta x + [pab]\delta y + [pac]\delta z + [pad]\delta t + [pal] = 0 \\ [pab]\delta x + [pbb]\delta y + [pbc]\delta z + [pbd]\delta t + [pbl] = 0 \\ [pac]\delta x + [pbc]\delta y + [pcc]\delta z + [pcd]\delta t + [pcl] = 0 \\ [pad]\delta x + [pdb]\delta y + [pdc]\delta z + [pdd]\delta t + [pdl] = 0 \end{cases}$$

ulgamynyň $[paa], \quad [pab], \quad [pac], \quad [pad]$ we ş.m.koeffisiýentlerini kesgitläp

$$[paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + \cdots + p_{10}a_{10}a_{10} = 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}11 + 0{,}12 = 0{,}43;$$

$$[pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \cdots + p_{10}a_{10}b_{10} = -0{,}11;$$

$$[pac] = p_1a_1c_1 + p_2a_2c_2 + \cdots + p_{10}a_{10}c_{10} = -0{,}12;$$

$$[pad] = p_1a_1d_1 + p_2a_2d_2 + \cdots + p_{10}a_{10}d_{10} = 0;$$

$$[pal] = p_1a_1l_1 + p_2a_2l_2 + \cdots + p_{10}a_{10}l_{10} = 2{,}0 \cdot 0{,}08 - 1{,}5 \cdot 0{,}11 + 1{,}3 \cdot 0{,}12 = 0{,}151;$$

$$[pbb] = p_1b_1b_1 + {}_2b_2b_2 + \cdots + p_{10}b_{10}b_{10} = 0{,}10 + 0{,}11 + 0{,}14 + 0{,}13 = 0{,}48;$$

$$[pbc] = p_1b_1c_1 + p_2b_2c_2 + \cdots + p_{10}b_{10}c_{10} = -0{,}14;$$

$$[pbd] = p_1b_1d_1 + p_2b_2d_2 + \cdots + p_{10}b_{10}d_{10} = -0{,}13;$$

$$[pbl] = p_1b_1l_1 + p_2b_2l_2 + \cdots + p_{10}b_{10}l_{10} = 1{,}5 \cdot 0{,}11 - 1{,}6 \cdot 0{,}14 + 2{,}7 \cdot 0{,}13 = 0{,}74;$$

$$[pcc] = p_1c_1c_1 + p_2c_2c_2 + \cdots + p_{10}c_{10}c_{10} = 0{,}07 + 0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}33;$$

$$[pcd] = p_1c_1d_1 + p_2c_2d_2 + \cdots + p_{10}c_{10}d_{10} = 0;$$

$$[pcl] = p_1c_1l_1 + p_2c_2l_2 + \cdots + p_{10}c_{10}l_{10} = -1{,}6 \cdot 0{,}14 - 0{,}13 \cdot 0{,}12 = -0{,}38;$$

$$[pdd] = p_1d_1d_1 + p_2d_2d_2 + \cdots + p_{10}d_{10}d_{10} = 0{,}10 + 0{,}13 + 0{,}20 = 0{,}43;$$

$$[pdl] = p_1d_1l_1 + p_2d_2l_2 + \cdots + p_{10}d_{10}l_{10} = -2 \cdot 0{,}1 - 2{,}7 \cdot 0{,}13 = -0{,}551;$$

alarys

$$\begin{array}{llllr}
+0{,}43\delta x & -0{,}11\delta y & -0{,}12\delta z & +0 & +0{,}15 = 0 \\
-0{,}11\delta x & +0{,}48\delta y & -0{,}14\delta z & -0{,}13\delta t & +0{,}74 = 0 \\
-0{,}12\delta x & -0{,}14\delta y & +0{,}33\delta z & +0 & -0{,}38 = 0 \\
0 & -0{,}13\delta y & +0 & +0{,}43\delta t & -0{,}55 = 0
\end{array}$$

$$\sum \quad +0{,}20\delta x + 0{,}10\delta y + 0{,}07\delta z + 0{,}30\delta t - 0{,}55 = 0,$$

Normal deňlemeler 11-nji tablisanyň 1-7sütünlerinde çözülen. Näbellileriň tapylan bahalaryny jemleýji normal deňlemä goýalyň

0,20 (-0,584)+0,1(-1,328)+0,07(0,374)+0,30(0,875)-0,55=

=-0,1168 - 0,1328 + 0,0262 + 0,2624 - 0,0400= -0,001.

Tapylan bahalary 10-njy tablisa ýazalyň.

10-njy tablisa.

b	c	d	l_{sm}	s	[illegible]	v_{sm}	vv	pvv	pvl
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
				+1,0	0,12	-0,58	0,336	0,040	0
+1				+1,0	0,10	-1,33	1,769	0,180	0
	+1			+1,0	0,07	+0,37	0,137	0,010	0
			2,0	+3,0	0,08	+1,42	2,016	0,161	+0,227
+1			1,5	+1,5	0,11	+0,76	0,578	0,064	+0,125
-1	+1		-1,6	-1,6	0,14	+0,10	0,010	0,001	-0,022
	+1		-1,3	-1,3	0,12	-0,34	0,116	0,014	+0,053
		-1	2,0	+1,0	0,10	+1,12	1,254	0,125	+0,224
-1		+1	-2,7	-2,7	0,13	-0,50	0,250	0,032	+0,176
		-1		-1,0	0,20	-0,80	0,740	0,148	0
0	3	-1	-0,1	1,9				0,784	0,783
-1,328	+0,374	0,875			Barlag				
-0,11	-0,12	0	+0,15	0,35	0,35				
+0,48	-0,14	-0,13	+0,74	0,84	0,84				
	+0,33	0	-0,38	-0,31	-0,31				
		0,43	-0,55	-0,25	-0,25				
			+2,477	2,437	2,437				

Funksiýanyň agramyny hasaplamak üçin, normal deňlemeleriň çözüliş shemasyna (11-nji tablisa) 8-nji sütüni, näbellileriň agramlaryňy hasaplamak üçin bolsa 9-12 sütünleri goşalyň. Her sütüne degişli funksiýanyň koeffisiýentlerini ýazalyň. Änli sütünlerde hasaplamalary bir bada amala aşyralyň. $\sum_1 = [pas] + \sum f_1$; $\sum_2 = [pbs] + \sum f_2$ we s.m. bilen bolsa, geçirilen hasaplamalaryň jemi barlanylýar.

Fünksiýanyň agramyna we näbellileriň agramyna ters bolan ululyklary degişli goşmaça sütünlerde (4.11) formula boýunça hasaplalyň.

$\delta x, \delta y, \delta z$ we δt-ululyklaryň tapylan bahalaryny düzedişler deňlemesine goýup, has äntimal düzedişleri v_i tapýarys , olary hem 9-njy tablisanyň 4-nji sütünine we 10-njy tablisanyň 9-njy sütünine ýazalyň.

1-nji tablisa.

δx	δy	δz	δt	*l*	*s*	*Barlag*
1	2	3	4	5	6	7
0,43 -1,00	-0,11 0,2558	-0,12 0,2790	0 0	0,15 - 0,3488	0,35 - 0,8140	-0,8140
	0,48 -0,028 0,425 -1,00	-0,14 -0,031 -0,171 0,3783	-0,13 0 -0,130 0,2877	0,74 0,038 0,778 - 1,7218	0,84 0,089 0,929 - 2,0558	0,929 -2,0558
		0,33 -0,033 -0,065 0,232 -1,00	0 0 -0,049 -0049 0,2113	-0,38 0,042 0,294 -0,044 0,1897	-0,31 0,098 0,351 0,139 - 0,5991	0,139 -0,5990
			0,43 0 -0,037 -0,010 0,383 -1,00	-0,55 0 0,224 -0,009 -0,335 0,8741	-0,25 0 0,268 0,029 0,047 - 0,1298	0,048 -0,1253
- 0,3488 0 0,1045 - 0,3398 - 0,5841 δx	- 1,7218 0,2516 0,1417 - 1,3285 δy	0,1897 0,1848 0,3745 δz	0,8747 δt	2,477 -0,062 -1,340 -0,008 -0,293	2,437 -0,122 -1,60 0,026 0,041	
				0,784	0,728	

F_u	F_x	F_y	F_z	F_t	Σ	*Barlag*
8	9	10	11	12	13	14
-1 2,3256	1 -2,3256	0 0	0 0	0 0	0,35 -0,8140	 -0,8140
1 -0,256 0,744 -1,6460	0 0,256 0,256 -1,5664	1 0 1,0 -2,2123	0 0 0 0	0 0 0 0	2,84 0,089 2,929 -6,480	 2,929 --6,480
0 -0,279 0,281 0,002 -0,0086	0 0,279 0,097 0,376 -1,6203	0 0 0,378 0,378 -1,6294	1 0 0 1,00 -4,3104	0 0 0 0 0	0,69 0,098 1,1,08 1,896 -8,172	 1,895 -8,168
0 0 0,214 0,00 0,214 -0,5588	0 0 0,074 0,079 0,153 -0,3995	0 0 0,288 0,080 0,368 -0,9609	0 0 0 0,211 0,211 -0,5509	1 0 0 0 1,00 -2,6110	0,75 0 0,843 0,401 1,994 -5,206	 1,944 -5,204
-2,326 -1,225 0 -1,120 -3,671 $-\frac{1}{P_u}$	-2,326 -0,145 -0,609 -0,061 -3,141 $-\frac{1}{P_x}$	-2,212 -0,616 -0,354 -3,182 $-\frac{1}{P_y}$	-4,310 -0,116 -4,426 $-\frac{1}{P_z}$	-2,611 $-\frac{1}{P_t}$		

10-njy tablisanyň 11-12 sütünlerinde [*pvv*]=0,784 we [*pvl*]=0,783 ululyklary alarys we olaryň hasaplanan (11-nji tablisa) [*pll4*]=0,784 we [*pls4*]=0,782 ululyklar bilen deňeşdirilmegi hemme hasaplamalaryň dogry ýerine ýetirilendigne güwä geçýär.

[*pvv*] we $\delta x, \delta y, \delta z$ we δt-ululyklaryň dogry hasaplanandygyny (2.29) formula bilen barlaýarys:

$[pvv]$= -0,087-0,9827-0,1421 –0,4812+2,4770=+0,783.

Ölçenen artdyrmalaryň deňleşdirilen bahalaryny

$$h_i^/ = h_i + v_i$$

formula boýunça hasaplalyň we tapylan bahalary 9-njy tablisanyň 5-nji sütüninde ýazalyň.

Deňleşdirilen artdyrmalary gutarnykly barlag etmek üçin geometrik şertleriň ýerine ýetişini barlalyň:

$$h_1^/ + h_5^/ - h_2^/ - \left(H_{12} - H_{11}\right) = 0,$$

+2,6548-10,3554+6,7613-(49,876-50,816)=-0,0003 *m*;

$$h_1^/ - h_4^/ - \left(H_{13} - H_{11}\right) = 0,$$

+2,6548+3,3488-956,819-50,816)= + 0,0006 *m*;

$$h_5^/ + h_6^/ - h_7^/ = 0,$$

-10,3554+4,2610+6,0940= -0,0004 *m*;

$$h_2^/ + h_9^/ + h_8^/ = 0,$$

-6,7613+9,2930-2,5318= -0,0001 *m*;

$$h_9^/ + h_{10}^/ + h_3^/ - h_6^/ = 0,$$

+9,2930+2,3134-7,3453-4,2610=+0,0001 *m*;

$$h_8^/ - h_{10}^/ - \left(H_{12} - H_{14}\right) = 0,$$

-2,5318-2,3134-(49,876-54,721)=0 .

Näbellileriň we funksiýanyň has ähtimal bahalary bolsa,

$x = x_0 + \delta x =$ 53,476 *m* –0,0058 *m* =53,4702 *m*,

$y = y_0 + \delta y =$ 43,128 *m* –0,0133 *m* =43,1147 *m*,

$z = z_0 + \delta z =$ 47,372 *m* +0,0037 *m*

=47,3757 *m*,

$t = t_0 + \delta t =$ 52,399 *m* + 0,0088 *m*

=52,4078 *m*,

$h_5 = y - x =$43,1147 *m* –53,4702 *m* = -

10,3555 *m*,

görnüşi alar. 9-njy tablisada $h_5^/ = -10{,}3554$ *m* .

Ölçemeleriň netijeleriniň takyklygy birlik agramyň ýalňyşy bilen häsiýetlendirilýär

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-t}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}784}{10-4}} = \pm 0{,}362\ sm = \pm 3{,}6\ \ mm\ .$$

Gidişiň bir kilometrniň orta kwadratik ýalňyşlygy

$$m_{km} = \frac{\mu}{\sqrt{C}} = \pm\frac{3{,}6}{\sqrt{2}} = \pm 2{,}6\ \ mm.$$

Näbellileriň orta kwadratik ýalňyşlyklary

$$m_x = \mu\sqrt{\frac{1}{p_x}} = 3{,}6\sqrt{3{,}14} = \pm 6{,}4 \quad mm;$$

$$m_y = \mu\sqrt{\frac{1}{p_y}} = 3{,}6\sqrt{3{,}18} = \pm 6{,}4 \quad mm;$$

$$m_z = \mu\sqrt{\frac{1}{p_z}} = 3{,}6\sqrt{4{,}43} = \pm 7{,}6 \quad mm;$$

$$m_t = \mu\sqrt{\frac{1}{p_t}} = 3{,}6\sqrt{2{,}61} = \pm 5{,}8 \quad mm.$$

Deňleşdirilen ululyklaryň funksiýasynyň orta kwadratik ýalňyşlygy (bäşinji gidiş boýunça artdyrmanyň ýalňyşlygy):

$$m_f = \mu\sqrt{\frac{1}{p_u}} = 3{,}6\sqrt{3{,}67} = \pm 6{,}9 \quad mm.$$

Normal deňlemeler ulgamuny Zeýdeliň usuly bilen çözeliň.

Normal deňlemelerden

$$\begin{cases} +0{,}43\delta x - 0{,}11\delta y - 0{,}12\delta z + 0 \qquad + 0{,}15 = 0 \\ -0{,}11\delta x + 0{,}48\delta y - 0{,}14\delta z - 0{,}13\delta t + 0{,}74 = 0 \\ -0{,}12\delta x - 0{,}14\delta y + 0{,}33\delta z + 0 \qquad - 0{,}38 = 0 \\ 0 \qquad - 0{,}13\delta y + 0 \qquad + 0{,}43\delta t - 0{,}55 = 0 \end{cases},$$

birinji ýakynlaşmadaky näbellileri tapalyň

$$\delta x_1 = -\frac{0{,}15}{0{,}43} = -0{,}349;$$

$$\delta z_1 = \frac{0{,}38}{0{,}33} = 1{,}151;$$

$$\delta y_1 = -\frac{0{,}74}{0{,}48} = -1{,}542;$$

$$\delta t_1 = \frac{0{,}55}{0{,}43} = 1{,}297$$

we olary 12-nji tablisanyň 7-nji sütünine ýazalyň.

Soňky ýakynlaşmalardaky näbellileri aşakdaky deňlemeler boýunça hasaplanýar

$$\delta x_{i+1} = \frac{0{,}11}{0{,}43}\delta y_i + \frac{0{,}12}{0{,}43}\delta z_i - 0{,}349\ ;$$

$$\delta y_{i+1} = \frac{0{,}11}{0{,}48}\delta x_{i+1} + \frac{0{,}14}{0{,}48}\delta z_i + \frac{0{,}13}{0{,}48}\delta t_i - 1{,}542\,;$$

$$\delta z_{i+1} = \frac{0{,}12}{0{,}33}\delta x_{i+1} + \frac{0{,}14}{0{,}33}\delta y_{i+1} + 1{,}151$$

$$\delta t_{i+1} = \frac{0,13}{0,43}\delta y_{i+1} + 1,279$$

ýa-da

$$\delta x_{i+1} = 0,256\delta y_i + 0,279\delta z_i - 0,349 \;;$$

$$\delta y_{i+1} = 0,229\delta x_{i+1} + 0,292\,\delta z_i + 0,271\delta t_i - 1,542;$$

$$\delta x_{i+1} = 0,364\delta x_{i+1} + 0,424\delta y_{i+1} + 1,151;$$

$$\delta t_{i+1} = 0,302\,\delta y_{i+1} + 1,279.$$

Tablisa 12

Näbel-liler	δx	δy	δz	δt	Ýakynlaşmasy								
					I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
δx	-	0,256	0,279	0	-0,349	-0,423	-0,429	-0,520	-0,556	-0,572	-0,580	-0,584	-0,584
δy	0,229	-	0,292	0,271	1,542	-0,956	-1,199	-1,271	-1,303	-1,317	-1,324	-1,327	-1,328
δz	0,364	0,424	-	0	1,151	0,592	0,487	0,423	0,397	0,385	0,379	0,375	0,374
δt	0	0,302	0	-	1,279	0,990	0,917	0,895	0,885	0,881	0,879	0,875	0,875

Näbellileriň koeffisientlerini 12- nji tablisanyň 3-6 sütünlerinde we näbellileriň 9 sany ýakynlaşmadan bahalaryny ýazalyň.

Iň soňky ýakynlaşmadaky hasaplanan näbellileriň bahalaryny jemleýji normal deňleme goýup

0,20(-0,584)+0,10(-1,328)+0,07(+0,374)+0,30(+0,875)-0,040=-0,001

alarys.

V.3. Korrelatlar usuly bilen erkin triangulyasiya toruny deňlesdirme hasaplamalary

Işi ýerine ýetirmek üçin başlangyç şertler :

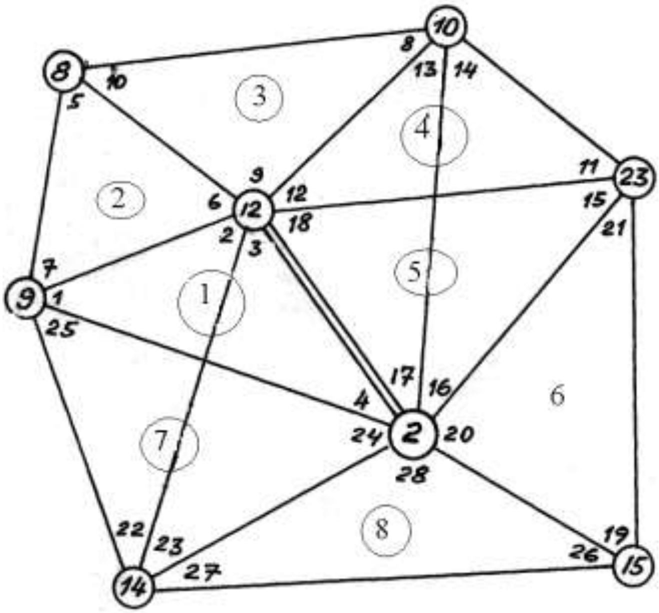
A. Lokal (erkin) triangulýasiýa tory berlen.
B. Burçlar ähli kombinasiýalarda deňtakyk ölçenen. Ölçeme agramy
P=48, 49, 50.
C. Torda dine bir nokadyň şertli koordinatlary X_i, Y_i, O_i nokat bilen bagly bazis uzynlygy

B_{v2} we bazisiň gönükdiriji burçy *a.i.,2.*. berlen (olar mugallym tarapyndan berilýär). Torda deslapky (başlangyç) hasaplamalar ýerine ýetirilip, "ölçenen" burçlar (ugurlar) nokatlaryň (belgileriň) merkezlerine getirilen we Gaussyň – Krýugeriň proýeksiýasynda tekizlik üstüne redusirlenen.

Triangulýasiýa torunyň shemasy

13-nji tablisa

Nokatiar 8-Berzeňňi 9-Depe 10-Parahat 12-Gaýra 23-Maý 2-Ileri 14-Howdan 15-Daşly	dM2=21012.873 m. $D_{2-12}2$=21020.701 m. X_2=l 49447.622 Y_2=l 55744.313 H_2=437.741 α_{2-12}=3°17'46",34



4-nji surat

Deňlemeleriň sanyny kesgitlemek

Ölçenen burçlaryň sany: $B = 28$

Nokatlaryň sany: $n = 8$

Taraplaryň sany; $t = 17$

Merkezi ulgam sany: $m = 2$

Ähli deňlemeleriň sany : $R = B-2n + 4 = 16$,

Şol sanda:

a) üçburçluklar deňlemeleri : $ü = B-t-m+1 = 10$

b) polýus deňlemeleri : $p = t-2n + 3=4$

ç) gorizont deňlemeleri : $g = m = 2$

$R=16$; $ü=10$; $p = 4$; $g = 2$.

I topar üçburçlyklaryň deňlemeleri:

1) $1+2+3+4+w_1=0$ $w_1=-0,07$

2) 5+6+7+w₂=0 w₂=-0,84

3) 8+9+10+w_3=0 w_3=+0,98

4) 1l+12+13+14+w_4=0 w_4=+2,31

5) 15+16+17+18+w_5=0 w_5=+0,79

6) 19+20+2 l+w_6=0 w_6=-0,60

7) 22+23+24+25+w_7=0 w_7=+l,19

8) 26+27+28+w_8=0 w_g=+0,48

I topar üçburçlyklaryň şertli deňlemeleriniň çözgidi

14-nji tablisa

Üçburçlyklar	Depeleri	Burçlar	Ölçenen burçlar	Iv_1-düzed	Düzedilen burçlar	IIv_1-düzed	Gutarnykly düzedilen burçlar
1	2		4	5	6	7	8
1	9	1	38°22°55',15	+0,01	38°22°55',16	-0,50	38°22°54',66
	12	2	504925,86	+0,02	584925,88	+0,76 -	58 49 26, 64
	2	3	434123,62°	+0,02	43 4123,64	0,61	434123,03
		4	3906 15,30	+0,02	39 06 15,32	+0,35	3906 15,67
		Σ	179 5959,53	0,07	1800000,00	0,00	1800000,00
2	8	5	6644 18,68	+0,28	664418,96	-0,17	6644 18,79
	12	6	3728 10,78	+0,28	3728 11,06	+0,37 -	3728 11,43
	9	7	754729,70	+0,28	75 47 29, 98	0,20	75 47 29, 98
		Σ	1795959, 16	+0,84	180 00 00 00	0,00	180000000
3	10	8	55 24 47, 79	-0,33 -	55 94 47, 46	-0,14	552447,32
	12	9	1024423,91	0,33 -	1024423,58	+0,40 -	1024423,98
	8	10	21 5049,28	0,32	21 5048,96	0,26	21 5048,70
		y	1800000,98	-0,98	1 80 00 00, 00	0,00	1800000,00
4	23	11	30 24 55, 39	-0,58 -	302454,81	+0,16	302454,97
	12	12	61 59 12,44	0,58 -	61 5911,86	+0,13 -	61 59 11,99
	10	13	43 1842,91	0,58	43 1842,33	0,50	43 1841,83
		14	44 17 11,57	0,57	44 17 11,00	+0,21	44 17 11,21
		Σ	1800002,31	-2,31	1800000,00	0,00	1800000,00
5	23	15	6448 12,19	-0,20 -	6448 11,99	-0,20	64 48 11, 79 40
	2	16	402941,83	0,20 -	402941,63	+0,40 -	29 42, 03
	12	17	192443,38	0,20 -	192443, 18	0,05 -	192443, 13
		18	55 1723,39	0,19	55 1723,20	0,15	55 1723,05
		Σ	1800000,79	-0,79	1 80 00 00, 00	0,00	1800000,00
6	15	19	59 58 42, 32	+0,20	59 58 42, 52	-0,3 1	595842,21
	2	20	93 20 05, 82	+0,20	93 20 06, 02	+0,32 -	932006,34
	23	21	26 41 11,26	+0,20	26 41 11,46	0,01	2641 11,45
		Σ	1795959,40	+0,60	1800000,00	0,00	1800000,00

II topar şertli deňlemeleri:

a) (l)+(2)+(22)+(25)+w_a=0

Burçlar	I v_1 bilen düzedilen burçlar
1 2 22 25	38°22"55',16 58 49 25, 88 45 53 33, 69 36 54 04, 70
Σ	179 59 59,43

w_a=-0,57

b) (11)+(14)+(15)+(16)+w_b=0

Burçlar	I V_1 bilen düzedilen burçlar
11 14 15 16	30°24"54',81 44 1711,00 64 48 11,99 40 29 41, 63
1	179 59 59,43

$w_{b=}$-0,57

ç) (2)+(3)+(6)+(9)+(12H(18)+$w_ç$=0

Burçlar	I V_1 bilen düzedilen burçlar
2 3 6 9 12 18	58°49'25',88 43 4123,64 37 28 11,06 102 44 23,58 61 5911,86 55 17 23,20
Σ	359 59

$w_ç$=-0,78

c) (4)+(16)+(17)+(20)+(24)+(28)+w_d=0

Burçlar	I v_1 bilen düzedilen burçlar
4 16 17 20 24 28	39°06"3,15' 63402941, 18 192443, 02 34 93 20 06, 23 50 15 18, 1172354
Σ	359 59 58 78

w_d=-l,

Polyus şertli deňlemeleri:

e) polyus 2-nji nokatda (2-14-9-12 dörtburçluk üçin):

[sin(22+23)/sin(25)] [sin(l)/sin(2+3)]* [sin(3)/sin(23)] =1*

$\Delta_1(l)- \Delta_{2+3}(2)+[\Delta_3(3)- \Delta_{2+3}(3)]+ \Delta_{22+23}(22)+[\Delta_{22+23}(23)- \Delta_{23}(23)]-$
$- \Delta_{25}(25)+We=0$

f) polyus 23-nji nokatda (23-10-12-2 dörtburçluk üçin):

*[sin(1 6+ 1 7)sin(1 8)] * [sin(1 2)/sin(13+14)]* [sin(1 4)/sin(1 6)]= 1*

$\Delta_{12}(12)- \Delta_{13+14}(13)-\Delta_{13+14}(14) + \Delta_{14}(14)+\Delta_{16+17}(16)- \Delta_{16}(16)+\Delta_{16+17}(17)-$
$-\Delta_{18}(18)+W_f=0$

g) polýus 1 2-nji nokatda : (2-9-8-10-23- 12 merkezi ulgam üçin):

[sin(4)/sin(l)][sin(7)/sin(5)]*[sin(10)/sin(8)]*[sin(13+14)/ sin(l l)]* *[sin(15)/sin(16+ +17)]=l*

$\Delta_1 (1) - \Delta_4 (4) – \Delta_5 (5) + \Delta_7 (7) - \Delta_8 (8) + \Delta_{IO} (10) – \Delta_{11}(l\ 1) +\Delta_{13+14} (13)+ +\Delta_{13+14}(14) + \Delta_{I3} (15) – \Delta_{16+17}(16)- \Delta_{16+17}(17)+W_g=0$

h) polyus 2-nji nokatda (9 -12 – 23-5-14-2 merkezi ulgam üçin)

[sin(18)/sin(15)][sin(21)/sin(19)]*[sin(26)/sin(27)]*[sin(22+23)/sin(25)]* *[sin(l)/sin(2+3)] =1*

$\Delta_1 (1)- \Delta_{2+3}(2) -\Delta_{2+3}(3) -\Delta_{15}(15) + \Delta_{18}(18) -\Delta_{19}(19) + \Delta_{21} (21) + \Delta_{22+23} (22) + +\Delta_{22+23} (23) –\Delta_{25}(25)-\Delta_{26}(26)- \Delta_{27}(27)+W_h=0$

Polýus deňlemeleriniň azat agzalaryny hasaplama:

15-nji tablisa

Burçlar	I düzedişli burçlar	Burçlaryň sinuslarynyň logarifmleri	Log-miň 6-njy belgidäki Δ_t	Burçlar	I düzedişli burç	Burçlaryň sinuslarynyň logarifmleri	Log-miň 6-njy belgidäki Δ_t
1	38°22"55',16	9.793 0226	2.66	2+3	102°30"49',5	9.9895584	-0.46
3	43 41 23 , 64	9.8393240	2.20	23	2	9.863 7804	1,97
22+23	92 50 37 , 07	9.999 4649	-0.11	25	46 57 03 ;38 36 54 04 , 70	9.778 4685	2.81
	Σ=	9.631 8115	We=+4,2		Σ=	9.6318073	
12 14	61 59 11.86 44 1 7 11.00	9.945 8810 9.844 0080	1.12 2.16	13+14 16	873553.33 402941.63	9.9996183 9.8124991	0.09 2.47
6+17	59 54 24.81	9.937 1224	1.22	18	55 1723.20	9.914 8943	1.46
	Σ=	9.7270114	Wf=-0,3			9.7270117	
4	3906 15.32	9.799 8459	2.59	1	382255.16	9.793 0126	2.66
7	75 47 29.98	9.986 5073	0.53	5	6644 18.96	9.963 1797	0.90
10	245048.96	9.5.70 6926	5.25	8	55 24 47.76	9.915 5407	1.45
13+14	873553.33	9.9996183	0.09	11	302454.81	9.7043761	3.58
15	6448 11.99	9.956 5775	0.99	16+17	595424.81	9.937 1224	1.22
	Σ =	9.3132416	Wg=+0,1			9.3132415	
1	382255.16	9.793 0226	2.66	2+3	1023049.52	9.989 5584	-0.46
18	55 1723.20	9.914 8943	1.46	15	6448 11.99	9.956 5775	0.99
2.1	2641 11.46	9.999 4649	4.19	19	59 58 42.52	9.937 4364	1.22
22+23	925037.07	19.8321666	-0.11	25	36 54 04.70	9.7784685	2.81
26	424806.48		2.28	27	194759.18	9.529 8591	5.85
Σ=		9.191 S999	Wh=0.00			9.191 8999	

II topar deňlemeleriň koeffisiýentlerini hasaplama

6-njy tablisa

Burçlar	Şertli deňlemeler								
	a	b	ç	d	e	f	g	h	s
1 2 3 4	+1 +1		+1 +1	+1	+2,66 +0,46 +2,66		-2,66 +2.59	+2,66 +0,46 +0,46	+3,66 +2,92 +4,12 +3,59
Σ=	+2,00		+2,00	+1,00	+5,78		-0,07	+3,58	+ 14,29
5 6 7			+1				-0,90 +0,53		-0,90 + 1,00 +0,53
Σ=			+1,00				-0,37		+0,63
8 9 10			+1				-1,45 +5,25		-1,45 +1,00 +5,25
Σ=			+ 1,00				+3,80		+4,80
11 12 13 14		+1 +1	+1			+1,12 -0,09 +2,07	-3,58 +0,09 +0,09		-2,58 +2,12 +0,00 +3,16
Σ=		+2,00	+1,00			+3,10	-3,40		+2,70
		+1 +1	+1	+1 +1		-1,25 +1,22 -1,46	+0,99 -1,22 -1,22	-0,99 + 1,46	+1,00 -0,47 +1,00 +1,00
Σ=		+2,00	+1,00	+2,00		-1,49	-1,45	+0,47	+2,53
19 20 21				+ 1				-1,22 +4,19	-1,22 +1,00 +4,19
Σ=				+1,00				+2,97	+3,97
22 23 24 25				+1	-0,11 -2,08 -2,81			-0,11 -0,11 -2,81	+0,78 +2,19 +1,00 -4,62
Σ=				+1,00	-5,00			-3,03	-5,03

II topar deňlemeleriň üytgedilen koeffisiyentlerini hasaplama

17-nji tablisa

Burçlar	Şertli deňlemeler									Ikinji düzediş
	A	B	Ç	D	E	F	G	H	S	
	Üytgedilen koefflsiyentler									
1	+0,50		-0,50	-0,25	+ 1,22		-2,64	+ 1,76	+0,09	-0,50
2	+0,50		+0,50	-0,25	-0,99		+0,02	-0,43	-0,65	+0,76
3	-0,50		+0,50	-0,25	+ 1,22		+0,02	-0,43	+0,55	-0,61
4	-0,50		-0,50	+0,75	-1,45		+2,60	-0,90	+0,01	+0,35
Σ=	0,0		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
5			-0,33				-0,78		-1.11	-0,17
6			+0,66				+0,12		+0,78	+0.37
7			-0,33				+0,65		+0,33	-0,20
Σ=			0,0				0,0		0,0	0,0
8			-0,33				-2,72		-3,05	-0,14
9			+0,66				-1,26		-0,60	+0.40
10			-0,33				+3,98		+3,65	-0,26
Σ=			0,0				0,0		0,0	0,0
11		+0.50	-0,25			-0,78	-2,73		-3,26	+0,16
12		-0,50	+0,75			+0,34	+0,85		+ 1,44	+0.13
13		-0.50	-0,25			-0,86	+0,94		-0,67	-0,50
14		+0,50	-0,25			+ 1,30	+0,94		+2,49	+0,21
Σ=		0,0	0,0			0,0	0,0		0,0	0,0
15		+0,50	-0,25	-0,50		+0,37	+ 1,35	-1,10	+0,37	-0.20
16		+0,50	-0,25	+0,50		-0,88	-0,86	-0,12	-1.11	+0,40
17		-0,50	-0,25	+0,50		+ 1,60	-0,86	-0,12	+0,37	-0,05
18		-0,50	+0,75	-0,50		-1,09	+0,37	+1,34	+0,37	-0,15
Σ=		0,0	0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
19				-0,33				-2,21	-2,54	-0,31
20				+0,66				-0,99	-0,33	+0,32
21				-0,33				+3,20	+2,87	-0,01
Σ				0,0				0,0	0,0	0,0

Adaty (normal) deňlemeleriň koefflsiýentlerini hasaplama

18-nji tablisa

Adaty deňle-meeleriň koeffisiý-entleri	A]	B]	Ç]	D]	E]	F]	G]	H]	S]	w.	Σ(s)
[A	+2,	0,0	0,0	-	-0,19	0,0	-2,62	-0,07	-1,88	-0,57	-2,45
[B		2,0	-	0,0	0,0	+0,01	-1,30	-1,22	-1,51	-0,57	-2,08
[Ç			+3,8	-	+0,23	-0,75	+0,13	+0,48	+ 1,90	-0,78	+ 1,12
[D				+3,8	-0,20	+0,72	+0,88	-0,19	+3,02	-1,22	+ 1,80
[E					+	0,0	-6,99	+7,69	+ 12,58	+4,20	+ 16,78
[F						+7,81	+2,31	-1,95	+8,15	-0,30	+7,85
[G							+53,00	-7,79	+37,62	+0,10	+37,72
[H								+64,23	+61,18	0,0	+61,18

Adaty deňlemeleriň (Gaussyň usuly bilen) çözüwi

19-njy tablisa

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	Kg	w.	Si	
- 2.0 - 1.00	0,0 0,0	0,0 0,0	-1,00 +0,500 0	-0,19 +0,0950	0,0 0,0	-2,62 + 1,31	-0,07 +0,0350	-0.57 +0,2850	-2,45 + .2250	
1	+2,00 -1,0000	-1,00 +0,5000	0,0 0,0	0,0 0,0	+0,01 -0,0050	-1,30 +0,6500	-1,22 +0,6100	-0,57 +0.2850	-2.08 + ,0400	
		+3,81 -0,50	-1,00 0,0	+0,23 0,0	-0,75 +0,00	+0,13 -0,65	+0,48 -0,61	-0.78 -0,28	+ 1.12 - 1 ,04	
		+3,31 -1,0000	-1.00 +0,3021	+0,23 -0,0695	-0,75 +0,2266	-0,52 +0,1571	-0,13 +0,0393	-1.06 +0,3202	+0,08 - 0,0242	
			+3,81 -0,50 - -0.30	-0,20 -0,10 +0,07	+0,72 0,0 -0,22	+0,88 -1,31 -0.16	-0,19 -0,04 -0,04	-1,22 -0.28 -0,32	+ 1,80 -1 2" +0,02	Derňe
			+3,01 -1,0000	-0,23 +0,0764	+0,50 -0.1661	-0,59 +0,1960	-0,27 +0,0897	-1,82 +0,6047	+0,60 -0, 193	+1.22 5
				+ 12,04 -0,02 -0,01 -0,02	0,0 0,0 +0,05 +0,04	-6,99 -0,24 +0,04 -0,05	+7,69 -0,01 +0,01 -0.02	+4,20 -0.05 +0,07 -0.14	+ 16,78 -0,23 -0,01 +0,05	-2.08 +1- 040
				+ 11,99 -1,0000	+0,09 -0,0075	-7,24 +0,6038	+7,67 -0,6397	+4.08 -0,3403	+ 16,59 - 1,3837	
					+7,81 0,0 -0,17 -0,08 0.0	+2.31 +0,01 -0,12 +0,10 +0,05	-1,95 +0,01 -0,03 +0,04 -0,06	-0,30 0,0 -0.24 +0,30 -0,03	+7,85 +0.0 1 +0,02 -0.10 -0, 12	+0,0 8 - 0.024 2
					+7,50 -1,0000	+2,36 -0,3122	-1,99 +0,2632	-0,27 +0,0357	+7,66 -	+7,66 -
K_1=	K_2= 0.0	K_3= +0,2837 0.0	K_4= +0.1713 0.0 +0,2836	K_5= -0,0269 +0,0269 0,0 -0,0368	K_6= -0,0004 -0,0093 +0,0126 -0,0003 0,0	K_7= +0,0057 -0,0! 1 -0,0036 -0,0029 -0,0120 -0,0241	K_8= +0,0044 +0,0144 -0.0351 +0,0049 +0,0393 +0,0335 +0,0019	+0,0549 -0,0228 +- 0.0357 -0.3403 +0,6047 +0.3"0" + 0.2850 +0.2850	=+0.054 =-0,0184 =+0.055 =-0.3869 +0.5671 +0,5674 K=0,5899 +0,5096	

Üçburçlyklaryň gutarnykly çözgüdi

20-nji tablisa

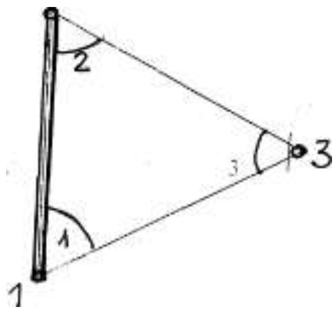
Üçburç-luklar	Depeleriň atlary	Burçlaryň N	gutarnykly deňleşdirile	Burçlaryň sinuslary	Taraplar. m
				33842.632	
	Depe	1	38 22 54.66	0.62089949	21012.873
	Gaýra	2+3	1023049.67	0.97624386	33038.662
	Ileri	4	3906 15.67	0.63073476	21345.724
			1800000.00		
				23234.394	
	Berzeňňi	5	6644 18.79	0.91871232	21345.724
	Gaýra |	6	3728 11.43	0.60834375	14134.499
	Depe	1	75 47 29.78	0.96940940	22523.64
			1800000.00		
				27358.865	
	Parahal	8	552447.32	0.82326662	22523.640
	Gaýra	9	1024423.98	0.97538085	26685.313
	Berzeňňi	10	21 5048.70	0.37212710	10180.975
			1800000.00		
				20110.031	
	May	11	30 24 54.97	0.50626361	10180.977
	Gaýra	12	61 59 11.99	0.88283830	17753.905
	Parahat	13+14	87 35 53.04	0.99912142	20092 .363
			1800000.00		
			6448 11.79	23222.458	
	May	15	59 54	0.90485139	21012.873
	lien	1 6+ 1 7	25.16 55	0.86521259	20091 363
	Gaýra	18	1723.05	0.82204205	19089.837
			1800000.00		
			59 5842.21		
			93 20	22047.847	
	Daşly	19	.6034	0.86583677	19089.837
	Ileri	20	2641	0.99830637	22010 506
	May	21	11.45	0.44910871	9901.880
			1800000.00		
	Howdan	22+23	925036.74	33079.392	33038.662
	Ileri	24	50 15	0.99876873	25434.662
	Depe	25	17.96 36	0.76889751	19862.216

Triangulýasiýa torunyň nokatlarynyň gutarnykly koordinatlaryny hasaplamak

21-nji tablisa

Formulalar	1.Ileri 2.Gaýra	1.Ileri 3. May	Gaýray
	3°17'46".34	3°17'46".34	183°17'46".
1		595425.16	55 1723.05
2		63 12 11.50	1280023.39
3		64°48' 11".79	
X_{n-1}	170425.732	158053.851	158053.851
X_n	149447.622	149447.622	170425.732
X	+20978.110	+8 606.229	-12371.8815
$\cos a$	+0.9983 4563	+0.4508 2778	-0.61575044
d	21 012.873	19089.837	20092.363
$\sin a$	+0.05749791	1-0.8926 1096	+0.7879412
Y	1 208.196	H 7 039.798	+ 15831.601
Y_n	155744.313	155744.313	156 952.509
Y_{n-1}	156952.509	172784.111	172 784.1 10

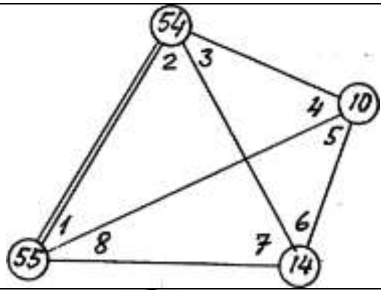
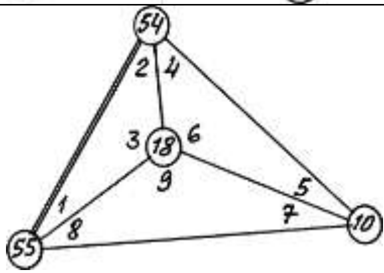
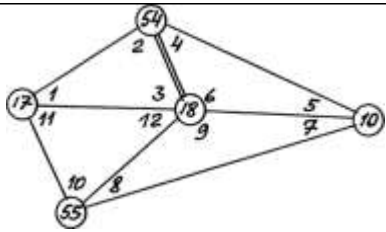
Beýleki nokatlaryň koordinatlaryny "May" nokadyňka meňzeş hasaplamaly.

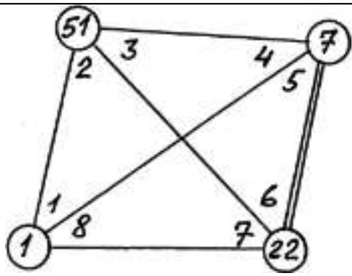


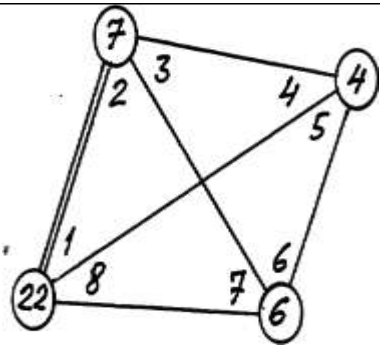
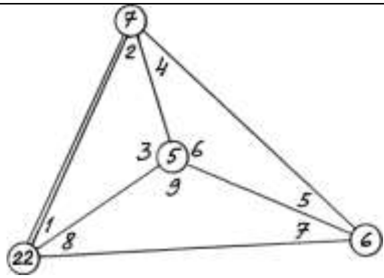
22-nji tablisa

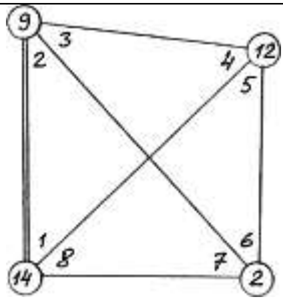
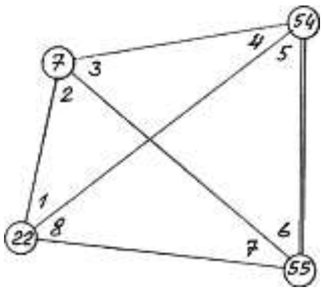
Nokadyň N-we ady	Koordinatlary,m X	Y	Belent-likleri, H,m	Taraplar d,m	Gönükdiriji burçlar	Gönükdirilen nokadyň N-we ady
2-Ileri	149447.622	155 744.313	437.741	21012.873 33038.662 19862.216 9901.880 19089.837	$3^{0}17'46''.34$ 32411 30.67 273 56 12.71 15632 17.84 63 12 1 1.50 22 42	12-Gaýra 9-Depe 14-Howdan 15-Daşly 23-Maý
12-Gaýra	170425.732	156952.509	380.376	22 523.640 21 345.724 10 180.977 20 092.363	323 1647.44 28548 36.01 66011 1.30 1280023.29 226	8-Berzeňňi 9-Depe 10-Parahat 23-Maý
8-berzeňňi	188479.902	143485.464	353.126	14134.499	21001 06.23	9-Depe
				26685.313	121 25 58.74	10- Parahat
9-Depe	176241.337	136414.284	405.680	23454.662	181 05 35.99	14-Howdan
10-Parahat	174563.493	166254.725	416.013	17763.905	1582518.26 1	23-Maý
14-	150811.306	135928.966	500.028	25953.108	664708.11	15-DaşK
15-Daşly	140364.367	159686.609	484.166	22010.606	3631 00.05	23-Maý
23-Maý	158053.051	172784.110				
		426.999				

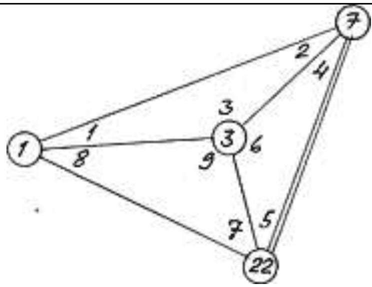
V.4. Talyplar üçin ýumüşlar

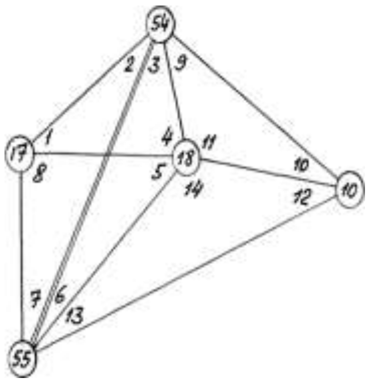
	Burçla-ryň N	Merkeze getirilen we redusirlenen burçlaryň ululyklary	Toruň çyzgysy
1	1 2 3 4 5 6 7 8	$63^0$55 00,85 21 41 54,14 22 04 53,59 72 18 12,44 21 59 08,63 63 37 46,46 71 59 34,18 22 23 30,53	
2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	10° 12 19,85 16 13 ,70 153 37 28,99 27 36 34,03 17 24 43,03 134 58 42,81 54 53 29,41 53 42 41,00 71 23 49,54	
3	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	62°24' 31 ,76 34 20 33,35 83 14 53'',63 27 36 34,03 17 24 43,03 13 45 842,81 54 53 29,41 53 42 41,00 71 23 49,54 23 49 11,43 85 48 18,96 58 70 22 33,60	

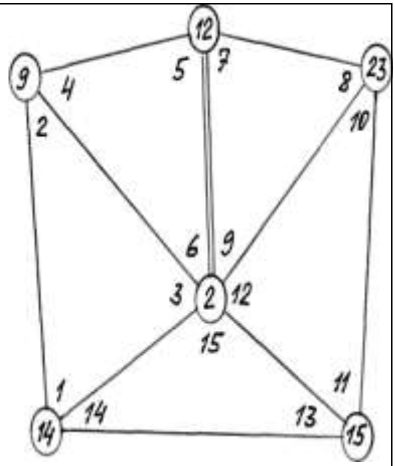
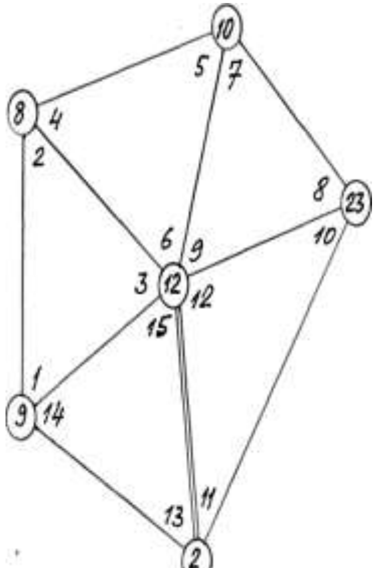
4	1 2 3 4 5 6 7 8	42" 0638 ,41 561145,01 59 1 31,85 23 00 03,86 39 02 42,37 59 15 41, 43 34 32 18, 13 47 09 17,36	

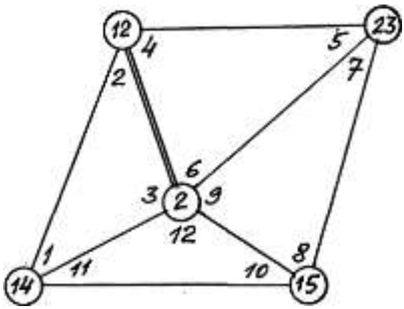
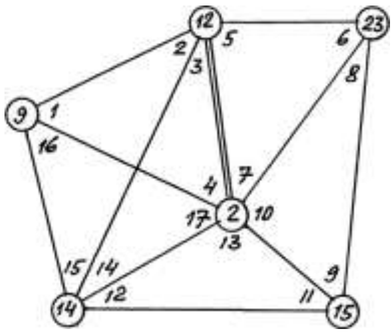
5	1 2 3 4 5 6 7 8	46^0 28 27 ,32 47 22 26,72 36 29 22,39 49 39 43,54 46 48 44,34 47 02 10,31 50 08 18,01 36 00 46,49	
6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	65°45 12,82 3059 17,37 83 15 29,01 16 23 09,35 32 14 07,37 131 22 43,49 17 54 10,64 16 44 00,99 145 21 47,50	

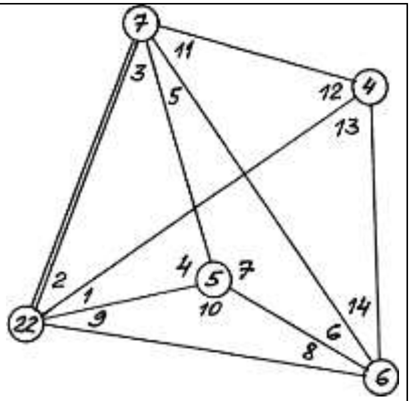
7	1 2 3 4 5 6 7 8	45" 53 33 ,99 36 54 04,99 38 22 55,15 58 49 25,86 43 41 23,62 39 06 15,30 50 15 18,53 4657 02,76	
8	1 2 3 4 5 6 7 8	40 18 15 ,19 76 55 45, 59 49 36 12, 28 13 09 46, 61 78 38 40,90 38 35 20,35 12 41 27,58 50 04 31,78	

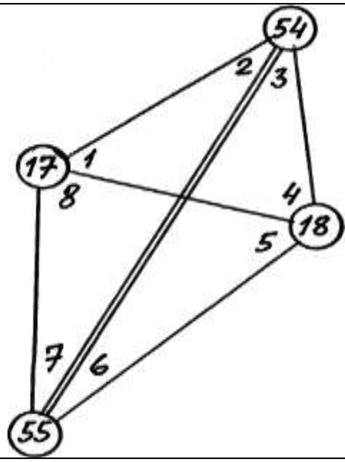
9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9 42 46 ,77 7 53 38,02 162 23 33,10 31 09 04,74 48 15 18,77 100 35 37,21 45 32 41,73 37 26 29,87 97 00 49,69	

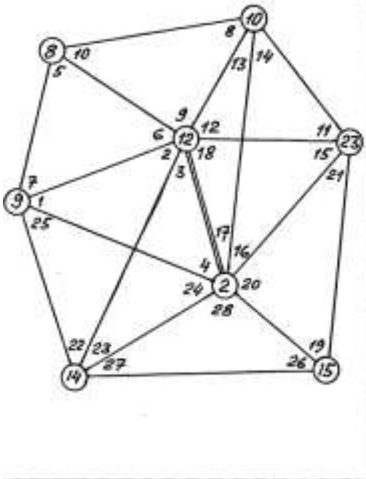
10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	62° 24' 31 ,76 18 10 19,38 16 10 13,97 83 14 53,63 70 22 33,66 10 12 19,47 13 36 51,96 85 48 18,96 27 36 34,03 17 24 43,03 134 58 42,81 54 53 29,41 53 42 41,00 71 23 49,54	

11	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	92° 50' 36 ,75 36 54 04,99 50 15 18,53 38 22 55,15 102 30 49,48 39 06 15,30 55 17 23,39 64 48 12,19 59 54 25,85 26 41 11,26 59 58 42,32 93 20 05,82 42 48 06,64 19 47 59,34 117 23 54,50	
12	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15	75° 47' 29'',70 66 44 18,68 37 28 10,78 21 50 49,28 55 24 47.79 102 44 23,91 87 35 52,80 30 24 55.39 61 59 12,44 64 48 12,19 59 54 25,85 55 1723.39 39 06 15,30 38 22 55,15 102 30 49,48	

13	1	45 57 02,76	
	2	43 41 23,62	
	3	89 21 33,83	
	4	55 17 23,39	
	5	64 48 12,19	
	6	59 54 25,85	
	7	26 41 11,26	
	8	59 58 42,32	
	9	93 20 05,82	
	10	42 48 06,64	
	11	19 47 59,34	
	12	117 23 54,50	
14	1	38 22 55,15	
	2	58 49 25,86	
	3	43 41 23,62	
	4	39,06 15,30	
	5	55 17 23,60	
	6	64 48 12,19	
	7	59 54 25,85	
	8	26,41 11,26	
	9	59 58 42,32	
	10	93 20 05,82	
	11	42,48 06,64	
	12	19 47 59,34	
	13	117 23 54,50	
	14	46 57 02,76	
	15	45 53 33,99	
	16	36,54 04,99	
	17	50 15 18,53	

15	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14	19° 16' 45'',50 46 28 27,32 30 59 17,37 83 15 29,01 16 2 3 09,35 32 1407,37 131 22 43,49 17 54 00,99 16 44 00,99 145 21 47,50 36 29 22,39 49 3943,54 46 48 47,34 47 02 10,31	

16	1 2 3 4 5 6 7 8	62° 24' 31 '',76 18 10 19.38 16 10 13,70 83 14 57,99 70 22 31,00 10 12 19.85 13 3651,58 85 4818,96 70	

17	1	38 22 55,15	
	2	58 49 25,86	
	3	43 41 23,62	
	4	39 06 15,30	
	5	66 44 18,68	
	6	37,28 10,78	
	7	75 47 29,70	
	8	55 24 47,79	
	9	102,44 23,91	
	10	21 50 49,28	
	11	30 24 55,39	
	12	61 59 12,44	
	13	43 18 42,91	
	14	44 17 11,57	
	15	64 48 12,19	
	16	40 29 41,83	
	17	19 24 43,38	
	18	55 17 23,39	
	19	59 58 42,32	
	20	93 20 05,82	
	21	26 41 11,26	
	22	45 53 33,99	
	23	46 57 03,68	
	24	50 15 18,53	
	25	36 54 04,99	
	26	42 48 06,64	
	27	19 47 59,34	
	28	117 23 54,50	

EDEBIÝAT

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. «Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy». Aşgabat, 2006.
10. Гайдаев П. А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М., «Недра», 1996.
11. Папазов М.Г., Могильный С.Г., Теория ошибок и способ наименьших квадратов. М., «Недра», 2001.

12. Бурмистров Г. А. Основы способа наименьших квадратов. М., Госгеолтехиздат, 2004.
13. Юршанский З. М., Поспелова Т. В. Сборник заданий по способ наименьших квадратов. М., НИИГАиК 1998.
14. Бурмистров Г. А. Задачник по способ наименьших квадратов М., Геодезиздат, 2005
15. Павлов Ф.Ф, Бельяев Б.И. и др. Практикум по высшей геодезии. М. Недра. 1966
16. Рабинович Б.Н. Практикум по высшей геодезии. Геодезиздат.1961

MAZMUNY