**TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET
UNIWERSITETI**

**O. Annaorazow, B. Kömekow, T. Kerimow,
H. Geldiýew, A. Öwezow**

OPERASIÝALARY DERŇEMEK

Ýokary okuw mekdepleriň talyplary üçin okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi*

Aşgabat – 2010

O. Annaorazow, B. Kömekow, T. Kerimow, H. Geldiýew, A. Öwezow

Operasiýalary derňemek. – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda Operasiýalary derňemek dersiniň esasy düşünjeleri beýan edilýär.Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

Giriş

Mälim bolşy ýaly ylmy-tehniki progresiň häzirki pajarlap ösýän döwründe matematikany çuňňur öwrenmekligiň zerurlygy öňkä garanyňda has artdy. Bu okuw kitbynda operasiýalary derňemegiň esasy düşünjeleri beýan edilýär. Okuw kitaby operasiýalary derňemek dersi boýunça okuw maksatnamalaryna doly gabat gelýär. Getirilýän nazary maglumatlary berkitmek üçin köp sanly anyk mysallar işlenip görkezilýär. Okuw kitaby matematika hünärini ele alýan talyplara niýetlenendir.

I bölüm . Çyzykly programmirleme

1.1 Çyzykly programmirlemäniň umumy meselesi

Çyzykly programmirleme - bu matematikanyň aýratyn ugry bolup,ol üýtgeýän ululyklar bilen çyzykly kriteriýalaryň arasyndaky çyzykly baglylyk bilen häsiýetlendirilýän ekstremal meseleleriň çözüliş usullaryny öwrenýär.

Çyzykly programmirlemegiň meselesi umumy görnüşde aşakdaky görnüşde formulirlenýär:

$$C(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (1.1)$$

Maksat funksiýasynyň

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n * b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n * b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n * b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \dots ; x_n \geq 0 \qquad (1.3)$$

Şertleri kanagatlandyrýan maksimum (minimum) bahalaryny tapmaly, bu ýerde * simwoly " ≤","=","≥" baglanyşyklaryň islendik biri bolup bilýär.Ýokardaky meseläni başgaça aşakdaky gönüşde ýazyp bolýar:

$$\max(min)C(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j \qquad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j * b_i \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (1.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (1.6)$$

Ýokardaky (1.1) funksiýasyna (1.1)-(1.3) meseläniň maksat funksiýasy, (1.2) we (1.3) şertlere bolsa ol meseläniň çäklendirijileri diýilýär.

Eger-de çyzykly programmirlemegiň (1.1) - (1.3) meselesindäki çäklendirijileriň (1.2) ulgamy deňlik görnüşinde berlen bolsa, onda ol mesele kanonik görnüşinde berlendir diýilýär.

Käbir ýagdaýlarda bolsa (1.2) çäklendirijilar "$\leq$" ýa-da"$\geq$" ýaly deňsizlikler görnüşinde berilýär.

Bu ýagdaýda (1.1)-(1.3) meselä çyzykly programmirlemegiň standart (ýa-da simmetrik) meselesi diýilýär.

Eger-de meseläniň çäklendirijileriniň (1.2) ulgamy hem deňlikleri, hem-de deňsizlikleriözünde saklaýan bolsa, onda (1.1)-(1.3) meselä çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi diýilýär.

Üýtgeýän ululyklaryň (1.2)-(1.3) çäklendirmeleri kanagatlandyrýan islendik $X = (x_1^*, x_2^*, \dots x_n^*)$ çözüwi bolsa meseläniň optimal çözüwi diýilýär.

Çyzykly programmirlemegiň meseleleriniň umumy häsiýetlerini we onuň usullaryny öwrenmäge girişmezden öň olar bilen käbir anyk mysallaryň üstünde tanyşalyň.

Mysal 1. Tikinçilik sehinde 840m, bir penjegi tikmeklik üçin bolsa 3m mata sarp edilýär.Bu she satylan her bir halatdan 6 manat , satylan her bir penjekden bolsa 3 manat girdeýji gazanýar.Eger-de taýýarlanan halatlaryň sanynyň 150-den, taýýarlanan penjekleriň sanynyň hem 200-den köp bolmazlyk şerti berlen bolsa, onda sehiň maksimum girdeýjini almagy üçin taýýarlanan halatlaryň we penjekleriň sanyny kesgitlemeli.

Çözülişi:

Bu meseläni analizläliň.Ilki bilen haýsy ululyklary bu meseledäki näbelli (üýtgeýän) ululyk hökmünde kabul etmelidigini kesgitlemeli.Meseläniň şertine görä, gözlenýän näbelli ululyklarymyz taýýarlanyljak halatlaryň we penjikleriň sanydyr.Onda aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

x_1- halatlaryň sany;

x_2- penjekleriň sany;

Şeýlelikde, gözlenýän çözüw X=(x_1, x_2) görnüşinde bolar.Indi bolsa ol ululyklaryň özara baglanyşygyny, ýagny esasy çäklendirijileri kesgitlemek zerurdyr.

Bu maksat bilen biz ýokarda berlen meseläni täzeden jikme-jik öwrenmeli bolýarys.Meseläniň şertinden belli bolşy ýaly, taýýarlanjak halatlar we penjekler üçin sarp ediljek matanyň umumy möçberi (bu mukdar halatlar üçin $4x_1$ m, penjekler üçin hem $3x_2$ m) bar bolan 840m-den uly bolup bilmeýär.Diýmek meseläniň şertleriniň biri

$$4x_1 + 3x_2 \leq 840$$

deňsizlik bolar.Mundan başga-da ,

$$x_1 \leq 150$$

$$x_2 \leq 200$$

deňsizlikleriň hem çäklendirijileriň biri boljakdygy meseläniň şertinden äşgärdir.Biziň maksadymyz bolsa ýokardaky deňsizlikleri kanagatlandyrýan mümkin bolan $x_1 we x_2$ bahalaryň köplüginiň içinden girdeýjiniň jemini, ýagny

$$C = 6x_1 + 3x_2$$

funksiýany maksimum baha alyp barýanlaryny tapmakdan ybaratdyr.

Umuman, ýokarda berlen meseläniň matematiki formulirowkasy (matematiki modeli) aşakdaky ýaly bolar:

$$\max C = 6x_1 + 3x_2 ,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 840; \\ x_1 \leq 150; \\ x_2 \leq 200; \\ x_1 \geq 0 ;\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Gönükmeler

Aşakdaky meseleleriň matematiki modelini gurmaly:

1. Konditer sehi söwda kärhanalaryň buýurmalary esasynda iki görnüşli önüm öndürýär we olary öndürmek üçin dört görnüşli çig mal ulanýar.Her bir önümi öndürmek üçin sarp edilýän çig malyň mukdary aşakdaky tablisada berlendir.

Çig malyň görnüşi	1 kg önüm üçin sarp edilýän çig mal		Bar bolan çig malyň mukdary, kg
	B_1 önüm	B_2 önüm	
A_2	0,3	0,2	120
A_2	0,9	1,1	195
A_3	0,4	0	140
A_4	0	0,3	105
Girdeýji, manat			

Sehiň netijede aljak girdeýjisiň maksimum bolmaklygy üçin öndüriljek önümiň matematiki modelini gurmaly.

2. A we B önümi öndürmekli üçin 100 kg demir bar.Bir sany A önümi öndürmekli üçin 2 kg, bir sany B önümi öndürmeklik üçin hem 4 kg demir harçlanýar.Eger-de bir sany A önüm 3 manatdan ,bir sany B önüm hem 2 manatdan satylýan bolsa şeýlede ýasalan A önümiň umumy sany 40-dan , ýasalan B önümiň umumy sany hem 20-den uly bolmazlyk şerti belli bolsa,onda ol önümleri satylanda alynjak puluň maksimum bolmaklygy üçin önümçilik meýilnamasynyň matematiki modelini gurmaly.

3. Ýygnaýjy sehiň öndürijilik kuwwaty bir günde A görnüşli önümiň 120 sanysyny , B görnüşli önümiň hem 360 sanysyny ýygnamaklyga mümkinçilik berýär.Tehniki barlag bölümi bir günüň dowamynda şol ýada beýleki önümden (tapawudy ýok) jemi 200 sanysyny öz üstünden geçirýär.Eger-de A görnüşli önümiň B görnüşli

önümden dört esse gymmatdygy belli bolsa , onda önümleri satylanda alynjak peýdanyň maksimum bolmaklyk şerti bilen taýýar önümi goýbermekligiň matematiki modelini guruň.

4. Üç sany daýhan birleşiginden bazara getirilýän soganyň 1 kilogramynyň bahasy her daýhan birleşigi üçin degişlilikde 12,10 we 8 teňňä barabardyr. Ol daýhan birleşikleriniň her birinde 1 tonna sogany ulaga ýüklemeklik üçin degişlilikde 1, 6 we 5 minut wagt sarp edilýär. Sogany häzirki döwrüň talaplaryna laýyklykda bellenen ýerine daşamaklyk üçin 12 tonna sogany ýüklemeklik üçin sarp-edilýän wagt 20 minutdan köp bolmaly däldir.

Eger-de her bir daýhan birleşigi satmaklyk üçin degişlilikde 10,8 we 6 tonna sogany bölüp bolsa onda bahasy minumym bahany almanlygy öçin haýsy daýhan birleşiginden näçe mukdardaky sogany bazara getirmeli? Meseläniň modelini gurmaly.

1.2 Çyzykly programmirlemegiň esasy meselesi.

Biz bu bölümde çäklendirijileri deňlikler bolan çyzykly programmirlemegiň meselesine garарys. Beýle meselelere çyzykly programmirlemegiň meselesiniň kanonik görnüşi ýa-da çyzykly programmirlemegiň esasy meselesi (ÇPEM) diýip at berilýär.

Çyzykly programmirlemegiň esasy meselesi aşakdaky görnüşde berilýär:

üýtgeýän ululuklaryň $x_1, x_2, \dots x_n$ köplügi berilendir.

Bu üýtgeýän ululuklaryň deňlemeleriň

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n \ = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

ulgamyny kanagatlandyrýan we mundan başga-da

$$C = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_n x_n \qquad (2.2)$$

Funksiýany minimuma getirýän otrisatel bolmadyk bahalaryny tapmaly.

ÇPEM-niň ýol bererli çözüwi

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0$

üýtgeýän ululuklaryň (2.1) deňlemeleri kanagatlandyrýan islendik köplügi bar. Onuň optimal çözüwi bolsa ýol bererli çözüwleriniň arasyndan (2.2) funksiýany öz minimum bahasyna getirýän çözüwi bolar.

Çyzykly programmirlemegiň esasy meselesiniň çözüwi boman hem biler. Ýagny, (2.1) deňlemeler bir-birlerine gapma-garşy bolup bilerler; olaryň çözüwleri $x_1, x_2, \ldots x_n$ bahalaryň otrisatel ýaýlasynda bolup biler. Bu ýagdaýda ÇPEM-iň ýol bererli çözüwleri bolmaýar. Bulardan başga-da ÇPEM-iň ýol bererli çözüwleri bar bolup, olaryň arasynda optimal çözüwiniň ýok bolmagy hem mümkin: beýle ýagdaýda C funksiýasy ýol bererli çözüwleriň ýaýlasynda aşakdan çäklendirilmedik bolýar.

Biz ilki ÇPEM-iň ýol bererli çözüwleriniň barlygy ýa-da ýoklugy baradaky soraga garalyň. Bu soraga garalanda C maksat funksiýasy hiç hili rol oýnamaýar, çünki, öň belläp geçişimiz ýaly, ýol bererli çözüwleri diňe deňlemeleriň (2.1) ulgamy kesgitleýär.

Diýmek, goý, deňlemeleriň (2.1) ulgamy berlen bolsun. Bu deňlemeleri kanagatlandyrýan $x_1, x_2, \ldots x_n$ otrisatel däl sanlar barmy? Bu sorag matematikanyň ýörite bölüminde – çyzykly algebrada düýpli öwrenilýär.

Çyzykly algebradan mälim bolşy ýaly, (2.1) ulgamyň çözüwiniň bolmagy üçin ulgamyň koeffisientleriniň matrisasynyň rangynyň onuň giňeldilen matrisasynyň rangyna deň bolmaklygy zerur we ýeterlikdir.

Mälim bolşy ýaly, (2.1) ulgamyň rangy deňlemeleriň sanyndan uly bolup bilmejegi:

$$r \leq m,$$

şeýle hem, onuň näbellileriň sanyndan uly bolup bilmejegi

$$r \leq n,$$

düşnüklidir.

İlkinji nobatda r=n bolan ýagdaýyna seredeliň, ýagny (2.1) ulgamyň deňlemeleriniň çyzykly bagly bomadyklarynyň sanynyň näbellileriň sanyna deň bolan ýagdaýyna garalyň. (2.1) ulgamyň "artykmaç" deňlemelerini, ýagny beýlekileriň çyzykly kombinasiýalary bolanlaryny toplasak, ÇPEM-iň çäklendirijileriniň ulgamy

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ ... + a_{ni}x_i + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

görnüşe geler. r=n bolandygy üçin

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots \ a_{1i} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2i} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ldots a_{ni} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bolar we ÇPEM-iň ýeke-täk $x_{1,} x_{2,} \ldots x_n$ çözüwi bolar. Eger-de $x_{1,} x_{2,} \ldots x_n$ ululuklaryň iň bolmanda biri otrisatel bolsa, onda ol çözüw ýol bererli däldir, netijede ÇPEM-iň çözüwi ýokdur.

Eger-de $x_{1,} x_{2,} \ldots x_n$ ululuklaryň ählisi hem otrisatel däl bolsa, onda ol çözüw ýol bererlidir we optimaldyr (çünki başga çözüw ýok).

Görşümiz ýaly, bu triwial ýagdaý bizi gyzyklandyrmaýar. Şonuň üçin hem gelejekde biz diňe r<n bolan ýagdaýa garajakdyrys. Bu ýagdaýda çyzykly bagly bolmadyk çäklendirijileriň sany $x_{1,}x_{2,}$ ... x_n näbellileriň sanyndan kiçi bolýar. Onda, eger ulgamyň çözüwi bar bolsa, ol çözüwleriň sany tükeniksizdir we n-r sany näbellä islendik bahany bereris (erkin üýtgeýän ululyklar), galan r näbelli bolsa (bazis üýtgeýän ululuklar) beýlekileriň üsti bilen aňladylar.

1.3. Çyzykly programmirlemegiň umumy meselesini grafiki usulda çözmek.

Goý, çyzykly programmirlemegiň meselesiniň çäklendirijileriniň ulgamy n sany näbelliden ybarat bolsun. Eger-de

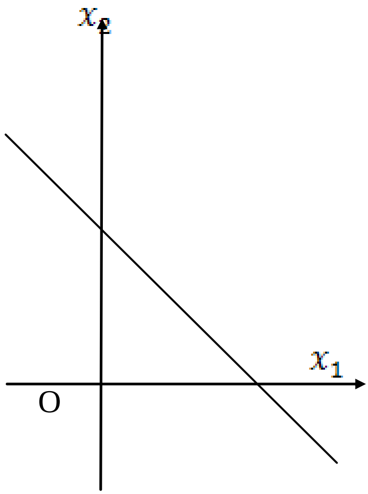
n - m=2

şert ýerine ýetýän bolsa, onda bu meseläni grafiki usulda çözmek mümkindir.

Bu ýagdaýda n sany näbelliniň iki sanysyny, aýdalyň $x_{1,}we\ x_2$ näbellileri erkin, galan m sany näbellini bolsa bazis hökmünde alyp bilýäris. Netijede, m sany bazis näbellileri erkin (azat) näbellileriň üsti bilen aşakdaky görnüşde aňladyp bolýar:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

$Ox_1we\ Ox_2$ oklaryň üstünde $x_{1,}we\ x_2$ azat näbellileriň bahalaryny ýerleşdirýäris. (şekil 3.1)



Şekil 3.1

x_1, we x_2 üýtgeýän ululuklaryň otrisatel bolup bilmeýändigi üçin olaryň alyp biljek bahalarynyň ýaýlasy Ox_1 okdan ýokarda, Ox_2 okdan hem sagda ýerleşer.

Beýleki $x_3, x_4, \dots x_n$ näbellileriň hem otrisatel bolup bilmeýärler, ýagny aşakdaky şertleriň ýerine ýetmekleri zerurdyr:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0 \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Bu şertleriň geometriki şekillendirilişine garalyň. Şokardaky şertleriň birini, mysal üçin, birinjisini alalyň:

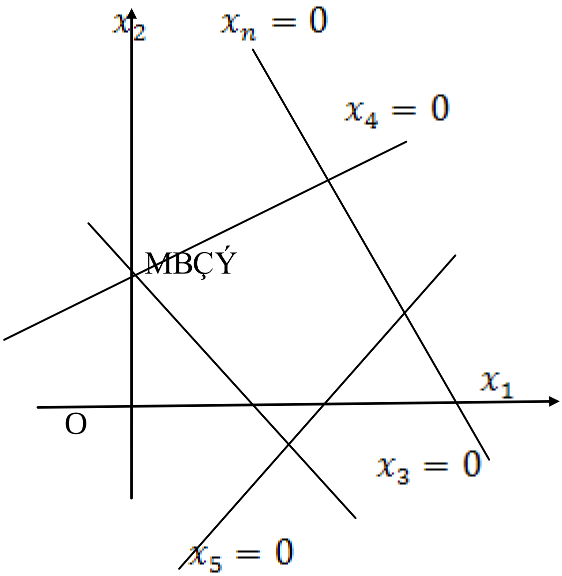
$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0$$

x_3 ululyga özüniň iň gyraky bahasy bolan nul bahany bersek

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$$

göni çyzygyň deňlemesini alarys. Bu göni çyzygyň üstünde $x_3 = 0$ boljakdygy düşnüklidir. Onuň bir tarapynda $x_3 \geq 0,$ beýleki tarapynda bolsa $x_3 < 0$ deňsizlikler ýerine ýetýärler. $x_3 = 0$ göni çyzygyň $x_3 > 0$ şerti kanagatlandyrýan tarapyny ştrih çyzyklar bilen belgiläliň (şekil 3.1).

Ýokardaky usulda beýleki $x_4 = 0, x_5 = 0, \dots, x_n = 0$ çäklendiriji göni çyzyklary gurarys we olaryň $x_i > 0\ (i = \overline{4,n})$ şerti kanagatlandyrýan taraplaryny ştrihläris. (şekil 3.2).



Şekil 3.2.

Şeýlelikde, biz n sany göni çyzyklary: iki sany koordinatalar okuny we n-2 sany göniçyzyklary gurdyk. Olaryň her biriniň haýsy hem bolsa bir tarapy mümkin bolan çözüwleriň ýarymtekizligini kesgitleýär. $x_3 = 0$ $x_1 O x_2$ tekizligiň ol ýarymtekizlikleriň ählisine hem degişli bolan bölegini hem mümkin bolan çözüwleriň ýaýlasyny (MBÇÝ) emele getirýär (Şekil 3.2.).

Mysal.

Goý, meseläniň çäklendiriji şertleri üç sany çyzykly deňsizlikden we bäş sany näbelliden ybarat bolan ulgamdan ybarat bolsun:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 = 15 \end{cases}$$

Bu ulgamyň otrisatel bolmadyk çözüwleriniň içinden

$$C = x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 10$$

çyzykly funksiýanyň maksimum bahasyny berýän çözüwini tapmaklyk talap edilýär.

<u>Çözlüşi:</u>

Azat näbelliler hökmünde, goý, x_1, we x_2 näbellileri alalyň we galan x_3, x_4 we x_5 näbellileri ol ikisiniň üsti bilen aňladalyň:

$$\begin{cases} x_3 = -5 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = -15 + x_1 + 5x_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bu bahalary maksat funksiýasynda ornuna goýup we çäklendirijileriň ulgamynda x_3, x_4 we x_5 bazis näbellileri taşlap diňe x_1, we x_2 azat näbellileriň üsti bilen aňladylan aşakdaky meseläni alarys:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 5x_2 \geq 15, \end{cases}$$

max C = $2x_1 + x_2$

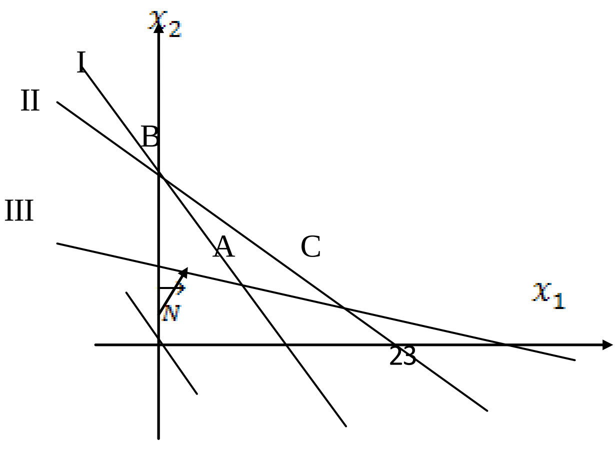
çözüwleriň köpburçlugyny gurmak üçin $x_1\, O\, x_2$ tekizlikde

$$x_1 + x_2 = 5 \quad \text{(I)}$$

$$x_1 + 2x_2 = 10 \quad \text{(II)}$$

$$x_1 + 5x_2 = 15 \quad \text{(III)}$$

çäk göni çyzyklaryny guralyň (şekil 3.3.).



O C

Şekil 3.3.

Netijede, meseläniň mümkin bolan çözüwleriniň ýaýlasyny kesgitledik. Ol ýaýla depeleri A,B,C nokatlary bolan üçburçluga deňdir. Ol üçburçlugyň içindäki islendik nokat (A) ulgamyň çäklendirijilerini kanagatlandyrýar. Ol çözüwleriň içinden optimal bolanyny saýlamak üçin hem C funksiýany we $\vec{N}$ (2;1) wektory gurýarys. C göni çyzygyny $\vec{N}$ wektoryň ugrunda öz-özüne parallel edip hereketlendirýäris. Şekil 3.3.-den mälim bolşy ýaly, bu göni çyzyk ABC üçburçlukdan iň soňunda C nokatda çykyp gidýär. Bu nokat hem C funksiýanyň özüniň maksimum bahasyny alýan nokadydyr.

C nokady (II) we (III) göni çyzygyň kesişme nokadydyr. Onuň koordinatalaryny tapmak üçin hem deňlemeleriň

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases}$$

ulgamyny çözýäris. Netijede

$x_1 = \frac{20}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$ taparys. C (x) funksiýasynyň maksimum bahasy hem

$\max C = \frac{40}{3} + \frac{5}{3}$ =15 deň bolar.

Başdaky meseläniň optimal çözüwini tapmak üçin hem kesgitlenen $x_{1,} we\ x_2$ bahalary (*) ulgamda ornuna goýsak:

$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}, x_4 = 0, x_5 = 0$ çözüwi alarys.

1.4. Çyzykly programmirlemegiň umummy meselesini çözmekligiň simpleks usuly.

Simpleks usuly bir-birleri bilen baglanşykly çyzykly deňlemeleriň we deňsizlikleriň optimal çözüwini tapmaklyga mümkinçilik berýär. Bu usulyň kömegi bilen mümkin bolan çözüwleriň içinden maksat funksiýanyň maksimum ýa-da minimum bahasyny berýän optimal çözüwini aňsatlyk bilen tapyp bolýar.

Simpleks usulyň algoritmini anyk mysalda görkezeliň.

Mysal.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 840 \\ x_1 \leq 150 \\ x_2 \leq 200 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$

Şertlerde max $C = 6x_1 + 3x_2$

Çözülişi:

Meseläni simpleks usul bilen çözmeklik üçin deňsizlikleriň ulgamyny deňlemeleriň ulgamyna öwürmek zerurdyr. Bu bolsa her bir deňsizlige položitel bahany alýan täze näbellileri goşmak arkaly amala aşyrylýar.

Çäklendirijileriň çep tarapyna x_3, x_4, x_5 näbellileri goşanymyzdan soňra täze

Max $C = 6x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 840 \\ x_1 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 200 \end{cases}$$

$X_j \geq 0 \quad (j=1.5)$

Meseläni alarys.

Meseläniň başlangyç simpleks tablisasyny gurmak üçin ilkinji nobatda deňlemeler ulgamyny goşmaça näbellilere gärä çözeliň:

$$X_3=840-(4x_1+3x_2)$$
$$X_4=150-x_1$$
$$X_5=200-x_2$$

$C=0-(-6x_1-3x_2)$

Indi bolsa Tablissa 1-i guralyň Tablissa 1.

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_3	840	4	3	1	0	0
X_4	150	1	0	0	1	0
X_5	200	0	1	0	0	1
C	0	-6	-3	0	0	0

Tablissanyň soňky setirinde otresatel koefisentleriň bardygyny aýdyňlaşdyrmak zerur. Beýle sanlar ol setirde iki sany: -6 we -3. $-6>-3$ bolýandygy üçin x_1 näbelliniň ýerleşen sütünindäki 4 we1 položitel sanlara üns berýäris. Bu sanlara degişli bolan azat goşuljylary şol sanlara bölýäris: $\frac{840}{4}$; $\frac{150}{1}$. Alnan droblaryň iň kiçisi 150-ä deňdir. Şeýlelikde ýol beriji element 1-e deň boldy. Bu element x_4-iň ňerleşýän setiriniň we x_1-iň ýerleşýän sütüniniň kesişýän öýjüginde ýerleşýär. Ol setiri we sütüni oklar bilen belgileýäris. Diýmek biz täze tablissany gurmaly bolýarys. Bu täze tablissada bazis äýygeýän ululyklar x_3, x_1, x_5 bolar.

Ilkinji nobatda x_1-iň setirindäki element leri tablisa 1-iň degişli setiriniň elementlerini ýol beriji elemente (ýagny 1-e) bölmek arkaly alynýar.

Täze guruljak tablissanyň beýleki elementlerini kesgitlemek üçin bolsa x_1 näbelliniň soňky alnan setiriniň elementlerini x_3 we x_5 näbellileriň setirleriniň elementleri bilen jemlänimizde x_1 näbelliniň sütünininň elementleri nula bolar ýaly sana köpeltmeli we beýleki setirleriň üstüne goşup ýazmaly. Netijede, biz aşakdaky Tablissa 2-ni alarys:

Tablissa 2.

Bazis näbellliler	Azat goşuljylar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_3 X_1 X_5	240 150 200	0 1 0	3 0 1	1 0 0	-4 1 0	0 0 1
C	900	0	-3	0	6	0

Tablissa 2-niň soňky setirinde -3 otresatel element bar, şonuň üçin hem ýokarda ýerine ýetirilen amallary ýene bir gezek gaýtalap (bu gezek ýol beriji element 3-e deň), ňene-de bir erasyýany amala aşyrarys we netijede, Tablisa 3-i alarys.

Tablissa 3.

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2 X_1 X_5	80 150 120	0 1 0	1 0 0	$^{1}/_{3}$ 0 $-^{1}/_{3}$	$-^{4}/_{3}$ 1 $^{4}/_{3}$	0 0 1
C	1140	0	0	1	2	0

Soňky tablisanyň setirinde otresatel elementleriň elementleriň ýokdugy sebäpli , bu tablisa garalýan meseläniň optimal çözüwini berýär:
Max C=1140, x_1=150, x_2=80, x_3=x_4=0, x_5=120.

Şeýlelikde, meseläni simpleks usulynda çözmekligiň algoritmi birnäçe etapdan ybaratdyr:

1. Deňsizlikleriň ulgamyny her bir deňsizlige bir položitel näbellini goşmak arkaly ony deňlemeler ulgamyna öwürmeli.
2. Başlangyç simpleks tablisany gurmaly:

Bazis näbellil er	Azat goşuljyl ar	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	...	X_{n+m}
X_{X+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0
X_{n+1}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	*0*	...	0
...		...	...	...	...	...	...	...
X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	...	1
C	0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	...	0

3. Daýanç çözüwiniň optimal bolup bolmalydygyny barlamaly. Egerde simpleks tablisanyň soňky setirinde otresatel element ýok bolsa, onda bu çözüz optimaldyr. Eger-de bu şert ýerine ýetmeýän bolsa , onda çözüw optimal däldir we indiki etebe geçýäris.
4. Ýol beriji sütüni saýlamaly, ýagny

$$C_e=\min_j\{C_j\}$$ Место для формулы.

Prinsip boýunça täzeden bazis diýilip kesgitlenjek näbellini anyklamaly.

5. Bazis näbellileriň hataryndan çykaryljak näbellini saýlamaly, ýagny

$\frac{b_k}{a_{kl}}$ =min$\left\{\frac{b_i}{a_{il}}\right\}$, $a_{il} > 0$

Prisip boýunça ýol beriji sätüni kesgitlemeli eger-de ähli a_{il} elementler üçin $a_{il} \leq 0$ bolsa, onda maksat funksiýasy çäklendirilmedikdir we bu ýagdaýda çözüwi tapmak mümkin däldir.

Täze simpleks tablisanyň elementlerini aşakdaky formulalar boýunça täzeden hasaplamaly:

$b_k = \frac{b_k}{a_{kl}}$; $a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}$; (j=1,n+m, k- ýol beriji setir).

$b_i = b_i - \frac{b_k}{a_{kl}} a_{il}$; (j=1,n+m); $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il}$; (i=1,m; j=1,n+m);

$C_0 = C_0 - \frac{b_k}{a_{kl}} C_{\text{в}}$; $C_j = C_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} C_{\text{в}}$; (i=1,n+m);

6. 3-nji etaba geçmeli.

-20-

1.5 Çyzykly programmirlemegiň meselesini emeli bazis usuly bilen çözmek.

Çyzykly programmirlemegiň aşakdaky umumy meselesine garalyň:

$$C = \sum_j c_j x_j \qquad (1)$$

funksiýanyň

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_j \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=\overline{1,n})$$

şertlerdäki minimum bahasyny tapmaly, bu ýerde bj≥0 we çäklendiriji-leriň (2) ulgamy birlik matrisany özünde saklamaýar.Birlik matrisany almak üçin (2) ulgamyň her bir deňligine emeli bazis diýlip atlandyryl-ýan yi (i=1,m) näbellini goşýarys we aşakdaky meselä garaýarys:

$$\sum a_{ij} x_j + y_i = b_i$$

$$x_j \geq 0, \ y_i \geq 0 \qquad (j=\overline{1,n}, \ i=\overline{1,m})$$

Şertlerde

$$\min F = \sum_i y_i,$$

$$\min C = \sum_j c_j x_j$$

tapmaly. Bu meseläni çözmek üçin başlangyç simpleks tablisa gurulýar:

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	…	xn
y1 y2 … ym	b1 b2 … bm	a11 a21 … am1	a12 a22 … am2	a13 a23 … am3	… … … …	a1n a2n … amn
F	Σbj	Σai1	Σai2	Σai3	…	Σaim
C	0	-C1	-C2	-C3	…	-Cn

Hasaplamalar (F) setiriň položitel elementine ýol beriji sütüni saýla-maklyk bilen başlanýar. Ýol beriji setiri saýlamaklyk we simpleks tabli-sany täzeden hasaplamaklyk hem adaty simpleks usuly arkaly amala aşy-rylýar.

Zterasiýa prosesi başlangyç meseläniň daýanç çözüwi tapylýança ama-la aşyrylýar: bu ýagdaýda (F) setiriň ähli elementleri nula deň bolýar. Mundan soňra meseläniň optimal çözüwini tapmak üçin (C) setiriň ele-mentlerine görä ýol beriji sütüni kesgitlemek arkaly adaty simpleks usu-ly ulanylýar.

Mysal.

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2+0{,}2x_3+5{,}3x_4 \geq 0.2 \\ 9x_1+5x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4 \geq 1.3 \\ x_1 \geq 0{,}08 \\ \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases} \qquad (3)$$

Şertlerinde

$$\min C = 5{,}2x_1+1{,}4x_2+0{,}5x_3+0{,}6x_4$$

tapmaly.

Çözülişi:

(3) ulgamyň deňsizliklerini deňliklere öwirenimizden soňra deňlemele-riň (4) ulgamyny alarys.

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2+0{,}2x_3-0{,}3x_4-x_5=0.2 \\ 9x_1+5x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4-x_6=1.3 \\ x_1-x_7=0{,}08 \end{cases} \qquad (4)$$

$$C=5{,}2x_1+1{,}4x_2+0{,}5x_3+0{,}6x_4 \rightarrow \min.$$

Kömekçi y_1, y_2, y_3 näbellileri girizeliň:

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2+0{,}2x_3-0{,}3x_4-x_5+y_1=0.2 \\ 9x_1+5x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4-x_6+y_2=1.3 \\ x_1-x_7+y_3=0{,}08 \end{cases} \qquad (5)$$

$$C=5{,}2x_1+1{,}4x_2+0{,}5x_3+0{,}6x_4 \rightarrow \min.$$

Deňlemeleriň (5) ulgamyny y_1, y_2, y_3 näbellilerine görä çözeliň we şol bir wagtyň özünde kömekçi $F= y_1, y_2, y_3$ funksiýany girizeliň. Soňky F funksiýa özüniň minimum bahasyna ymtylmalydyr.

Käbir hasaplamalardan soňra

$$\begin{cases} y_1=0{,}2-(x_1+0{,}5x_2+0{,}2x_3+0{,}3x_4-x_5) \\ y_2=1{,}3-(9x_1+5x_2+2{,}1x_3+0{,}9x_4-x_6) \\ y_3=0{,}08-(x_1-x_7) \\ F=1{,}58-(11x_1+5{,}5x_2+2{,}3x_3+1{,}2x_4-x_5-x_6-x_7) \\ C=0-(-5{,}2x_1-1{,}4x_2-0{,}5x_3-0{,}6x_4) \end{cases}$$

Tablisa 1

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,2	1	0,5	0,2	0,3	-1	0	0
y2	1,3	9	5		0,9	0	-1	0
y3	0,08	1	0	2,1	0	0	0	-1

				0				
F	1,58	11	5,5	2,3	1,2	-1	-1	-1
C	0	- 5,2	- 1,4	- 0,5	- 0,6	0	0	0

(F) setiriň iň uly elementine görä ilki ýol beriji sütüni, soňra bolsa ýol beriji setiri kesgitleýäris. Ýol beriji element 1-e deň bolar.

Tablisa 2

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,1	0	0,5	0,2	0,3	-1	0	0
y2	0,6	0	5	2,1	0,9	0	-1	9
y3	0,08	1	0	0	0	0	0	-1
F	0,7	0	5,5	2,3	1,2	-1	-1	10
C	0,4	0	- 1,4	- 0,5	- 0,6	0	0	- 5,2

Ýene-de (F) setiriň iň uly položitel koefisientinden ugur alyp, x7 ýol beriji sütüni, (y2) ýol beriji setiri we 9 ýol beriji elementi kesgitleýäris. Netijede üçünji simpleks tablisany gurarys.

Tablisa 3

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,03	0	-0,06	-0,03	0,2	-1		0
x7	0,067	0	0,56		0,1	0	0,1	1
x1	0,15	1	0,56	0,23	0,1	0	-	0
							0,1	
				0,23			-	
							0,1	

F	0,03	0	-0,06	-0,03	0,2	- 1	 0,1	0
C	0,55	0	15	0,7	- 0,1	0	- 5,2	0

Soňky tablisada ýol beriji sütün x4, ýol beriji setir y1, ýol beriji element hem 0,2 bolar. **Indiki** simpleks tablisany gurarys.

Tablisa 4

Bazis nӓbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x4 x7 x1	0,15 0,08 0,17	0 0 1	-0,3 0,59 0,59	 0,15 0,23 0,23	1 0 0	-5 0,5 0,5	0,5 - 0,15 0,15	0 1 0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0,57	0	 1,47	0,6	0	 0,5	-4,7	0

Soňky simpleks tablisanyň (F) setiriniň ӓhli koefisentleri nula deňdir. Bu bolsa bize F funksiýa minimuma getirmek başardandygyny aňladýar, onuň bahasy hem nula deňdir. (C) setiriň iň uly položitel koefisientinden ugur alyp ýol beriji x2 sütüni ýol beriji x7 setiri we 0,59 elementini kesgitlӓris. Şeýlelik-de, indiki simpleks tablisa aşakdaky ýaly bolar:

Tablisa 5

Bazis	Azat			x3		x5	x6	x7

näbellileri	goşuljylar	x1	x2		x4			
x4 x2 x1	0,2 0,13 0,09	0 0 1	0 1 0	 0,27 0,4 0	1 0 0	- 5,2 0,8 0	0,4 -0,3 3	 0,5 1,6 -1
C	0,3 7	0	0	0	0	- 1,7	- 4,4	- 2,4

Tablisa 5-iň iň soňky setirinde položitel koefisient ýokdur. Bu bolsa biziň optimal çözüwimiz

$$x1=0,009, \quad x2=0,13, \; x3=0, \; C=0,37$$

bolar.

Gönükmeler.

Sahypa 25-26-daky mysallar.

1.6 Ikitaraply meseleler? (Двойственные задачи)

Çyzykly programmirlemegiň iki sany meselesine garalyň.

$$\max F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1, n, \; i=1, m)$$

we

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

m

$\Sigma a_{ij} y_i \geq c_i$ (2)
$i=1$

$y_i \geq 0$ $(j=\overline{1, n},\ i=\overline{1, m})$.

Bu meseleleriň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

1. Eger-de birinji meselede çyzykly funksiýanyň maksimum bahasyny tapmaly bolsa, onda ikinji meselede çyzykly funksiýanyň minimum baha
2. syny tapmaly;
3. 2.Birinji meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisienleri ikinji meseläniň çäklendirjileriniň ulgamynyň azat goşuljylaryna deňdir;
4. 3.Birinji meseläniň çäklendirjileriniň azat goşuljylary ikinji meseläniňmaksat funksiýasynyň koeffisientlerine deňdir.;
5. 4. Çäklendirjileriň ulgamlaryndaky käbellileriň koffisientleri bir-birlerine görä transpanirlenen matrisalar görnüşinde berilýär;
6. 5. Bir meseläniň çäklendirjileriniň ulgamyndaky deňsizlikleriň sany beýleki meseledäki näbellileriň sanyna deňdir;
7. 6.Näbellileriň otrisatel dällik şerti meseleleriň ikisinde hem bardyr.
8. Şu görnüşdäki meseleleri özara ikitaraply meseleler diýilýär.
9. Göni we ikitaraplaýyn çözüwleriniň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky lemmanyň we teoremalaryň üsti bilen görkezilýär.
10. Lemma: (1) we (2) meseleleriň käbir X^* we Y^* çözüwleri üçin F(x^*)=Z(y^*) şert ýerine ýetýän bolsa, onda X^*- bu başlangyç meseläniň, Y^* bolsa ikitaraplaýyn meseläniň optimal çözüleridir.

11. Teorema1: Düşnüksiz

12. Teorema2: (1) meseläniň $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ çözüwi we (2) meseläniň $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ çözüleri tappylan bolsun. Onda diňe

13. $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 \quad (j = \overline{1, n})$

14. Bolan ýagdaýynda ol çözüwler optimaldyr.

15. Goý, B-bu (1) meseläniň optemal çözüwiniň bazisiniň wektorlarynyň matrissasy, $\bar{C}$ - bazis näbellileriň bahalarynyň wektory bolsun. Onda ikitaraplaýyn meseläniň optimal çözüwi

16. $\bar{Y} = \bar{C} \cdot B^{-1}$

17. deňdir.

Ikitaraplaýyn meseleleriň jübütleri aşakdaky birnde bolup biler:

	Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele
I.	minF=CX	maxZ=YB
	AX=B	YA≤C
	X≥0	
II.	maxF=CX	maxZ=YB
	AX=B	YA≥C
	X≥0	
III.	minF=CX	maxZ=YB
	AX≥B	YA≤0
	X≥0	Y≥0

IV. Başlangyç mesele — Ikitaraplaýyn mesele

Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele
$\min F = CX$	$\min Z = YB$
$AX \leq B$	$YA \geq 0$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$

Mysal. Başlangyç mesele

$$\begin{cases} 13x_1+12x_2 \leq 260 \\ 4x_1+4x_2 \leq 124 \\ 3x_1+14x_2 \leq 280 \end{cases}$$

şertlerde $F=12x_1+10x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny tapmaly.

Ikitaraplaýyn mesele:

$$\begin{cases} 13y_1+4y_2+3y_3 \geq 12 \\ 12y_1+4y_2+14y_3 \geq 0 \\ y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

18. Şertlerde
19. $\check{Z}=260y_1+124y_2+280y_3$
20. Funksiýanyň minimum bahasyny tapmaly.
21. Çözülüşi: Başlangyç meseläniň çözüwini simpleka usuly bilen taparys:
22. (tablissa 1-3) Tabl

Bazis	Bazisiň O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	260	13	2	1	0	0
x_4	0	124	4	4	0	1	0
x_5	0	280	3	14	0	0	1
F	-	0	-12	-10	0	0	0

23.

Tablissa2

Bazis	Bazisiň O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	12	20	1	0.15	0.08	0	0
x_4	0	44	0	3.4	-0.3	1	0
x_5	0	20	0	13.5	-0.23	0	1
F	-	240	0	-82	0.0	0	0

24.

Tablissa3

Bazis	Bazisiň O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	12	18	1	0	0.09	-0.04	0
x_2	10	13	0	1	-0.09	0.3	0
x_5	0	47	0	0	0.22	-4	1
F	-	346	0	0	0.22	2.4	0

25.

26. Başlangyç meseläniň optimal çözüwiniň x^*=(18;13;0;0;47) we maxF=34.6 bolýandygyny iki taraplaýyn meseläniň hem optimal çözüwiniň Tablissa 3-iň x_3, x_4, x_5 sütünleriniň soňky setirinden y^*=(0.22;2.4;0) we minŽ=346 bolýandygyna göz ýetirdik.

28

27. Gönükmeler

28. Sah.31-däki meseleler

29.

30. 1.6 Ikitaraplaýyn simpleks usuly.

31. Eger-de çyzykly programirlemegiň meselesinde bazisler poležitel bolup, çäklendirijileriň ulgamyndaky azat goşuljylar islendik alamatly bolanda ol meseläni ikitaraplaýyn simpleks usuly bilen aňsatlyk bilen çözülýär. Bu usul çäklendirjileriň ulgamynda amala aşyrylýan öwürmeleriň sanyny azaltmaga, şeýle hem sipmleks tablissanyň ölçegini kiçeltmäge mümkinçilik berýär. Ikitaraplaýyn simpleks usulynyň algoritmine anyk mysalyň üstünde garalyň

32. Mysal:

33. F=$2x_1 - x_2 + x_3$

34. Funksiýanyň

35. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$$

36. $$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3)$$

37. Şertlerdäki maksimum bahasyny tapmaly

38. Çözülüşi:

39. Ýokardaky deňsizlikleriň birinjisini -1-e köpeldenimizden soňra meseläni kanonik görnüşde ýazarys:

40. $$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

41. $$x_j \geq 0, (j = 1,2,3),$$

42.

43.

44.

45.

46. -29-

47. Max F=$2x_1$-x_2+x_3

48. Indi bu meseläni adaty simpleks usuly bilen çözýäris(Tablisa 1-2)

49. **Tablisa-1**

Bazis	Bazism C	Mat goş B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	-6	-1	-1	-1
x_5	0	2	2	-1	1
F		-2	1	-1	0

Tablisa-2

Bazis	C	B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	-5	0	-3/2	-1/2
x_5	2	1	1	-1/2	1/2
		2	0	0	0

50.

51. Tablisa 2-niñ soñky setirinde otrisatel elementleriñ bolmazlygy çözüwiñ optimaldygyny,emma B sütüniñ elementlerinde otrisatel elementleriñ bolmagy hem ol çözüwiñ ýol bererli däldigini añlad-ýar.Ikitaraplaýyn simpleks usulyny ulanyp bu çözüwi ýol bererli çözüwe öwüreris.

52. Ýol beriji setiri B sütüniñ otrisatel elementleriniñ absolýut ululuklarynyñ iñ ulusuna görä saýla-rys.Biziñ mysalymyzda ol birinji setirdir.

53.

54.

55. Ýol beriji sütüni bolsa iñ soñky setiriñ elementleriniñ ýol beriji setiriñ otrisatel elementlerine bolan gatnaşygynyñ absolýut ululyklarynyñ iñ kiçisine görä saýlanýar.Egerde ýol beriji setirde hiç hili atresatel element ýok bolsa,onda meseläniñ çözüwi ýokdyr.Biziñ garaýan mysalymyzda ýol beriji sütün ikinji,ýol beriji element hem a=-3/2 bolar.Täze simpleks tablisany gurmak üçin hem adaty simpleks usuly ulanýarys(Tablisa-3).Eger-de soñky alynan çözüwi yene-de ýol bererlik däl bolýa,onda yokardaky proses ýene-de gaýtalanýar.

Tablisa-3

Bazis	C	B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	-1	10/3	0	1	-1/3
x_5	2	8/3	1	0	2/3
		2	0	0	0

56.

57. Tablisa 3-iñ soñky setirinde otrisatel elementleriñ ýokdygy alnan daýanç çözüwiñ optimaldygyny añladýar.Optimal çözüwe görä

58. MaxF=2

x_2=10/3

59.

x_1=8/3

x_3=0

60. Gönükmeler:Sah-34-däki gönükmeler.

1.7. Çyzykly programmirlemegiň ulag meselesi.

Ulag meselesi- bu bir jynsly önümi üpjün edijilerden sarp edijilere daşamandaky sarp edilýän çykdaýjynyň minimum bahasyny tapmak we şol meýilnamany düzmekden ybaratdyr.

Ulag meseläniň şertleri tablisa görnüşinde beriýär.

Sarp edijiler / Üpjin edijiler		1	2	...	j	...	N
		B_1	B_2	...	Bj	...	B_n
1	A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}		C_{1j} X_{1j}		C_{1n} X_{1n}
2	A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2j} X_{2j}		C_{2n} X_{2n}
...	...						
i	A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}		C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}
...	...						
m	A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mj} X_{mj}		C_{mn} X_{mn}

Tablisadaky C_{ij} koeffisentler i-nji üpjün edijiden j-nji sarp edijä önümiň bir bölegini daşamak üçin sarp edilýän çykdaýjy A_i –bu i- nji üpjün edijiniň kuwwaty (gory), B_j bolsa j-nji sarp edijiniň talabydyr.

Tablisadaky X_{ij} hem i-nji üpjün edijiden j-nji sarp edijä daşamaly ömümiň gözlenýän mukdary.

Ulag meseläniň matematiki modeli aşakdaky ýalydyr:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

çyzykly funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \qquad (i=1,2,...m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \qquad (j = 1,2,...n)$$

Şertleri kanagatlandyrýan iň kiçi bahasyny tapmaly.

Eger-de ulag meselesi $\sum_i A_i = \sum_j B_j$ deňligi kanagatlndyrýan bolsa, onda oňa ýapyk (ýa-da dogry bolanşly)
Ulag meselasi diýilýär.Eger-de ol mesele ýokardaky deňligi kanagatlandyrmaýan bolsa, ýagny $\sum_i A_i \neq \sum_j B_j$ onda oňa açyk (ýa-da nädogry bolanşly) ulag meselesi diýilýär.

Nädogry balanşly ulag meselsini çözmeklik üçin oňa fiktiw (emeli) üpjün edijini (sarp edijini) goşmak arkaly ony dogry balansla öwrülýär we ondan soňra çözülýär.
Eger-de $\sum_i A_i < \sum_j B_j$ bolýan bolsa, onda bu meselä umumy gory

$$A_{m+1} = \sum_j B_j - \sum_i A_i$$

deň bolan we daşamaklygyň bahasy $C_{m+1}, j = 0\ (j = \overline{1,n})$ bolan emeli üpjün ediji goşulýar(girizilýär).Eger $\sum_j B_j > \sum_i A_i$ bolýan bolsa onda ol meselä umumy talaby

$$A_{m+1} = \sum_i A_i - \sum_j B_j$$

Daşamaklygyň bahasy bolsa $C_{i,n+1} = 0\ \ (i = \overline{1,m})$ deň bolan emeli sarp ediji girizilýär.

Ulag meselsiniň optimal çözüwini tapmaklyk prosesi onuň daýanç çözüwini tapmakdan başlanýar.Ulag meselesiniň başlangyç

Daýanç çözüwini tapmaklygyň birnäçe usullary bardyr. Olary mysallarda görkezeliň.

Demirgazyk-günbatar burçy usuly.

Goý ulag meselesininňşertleri Tablisa 1-däki ýaly berlen bolsun.

A_i \ B_j	75	80	60	85
100	75^6	25^7	^{3}	^{5}
150	^{1}	55^2	60^5	35^6
50	^{18}	^{10}	^{20}	50^1

Demirgaüyk-güngatar burçy 4 uauly bilen ilkinji daýanç çözüwi tapalyň

Tablisa 1-iň öýjükleri demirgaüyk-günbatar burçundan doldurylyp başlanýar.

X_{11}=min $\{A_{1,}|B_1\}$=min $\{100,|75\}$=75; X_{i1}=0(i=2,3)

Bolar we indi

X_{22}={150,80-25}=55; x_{32}=0;

X_{23}=min{150-55,60}=60;X_{33}=0;

X_{24}=min{150-55-60,85}=35;

X_{34}=min{50,85-35}=50

Şunluk bilen berlen meseläniň ilkinji daýanç çözüwini gurdyk. Tablisa 1-den belli bolşy ýaly , bu çözüw hiç hili tikli özünde saklamaýar we alty sany (m+n-1=3+4-1=6) položitel daşamalardanybaratdyr, diýmek, bu çözüw daýanç çözüwidir. Onuň bahasy bolýa

C=6

$$\cdot 75 + 7 \cdot 25 + 2 \cdot 55 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 35 + 1 \cdot 50 = 1295$$

Deň bolar.

Iñ kiçi bahalar usuly.

Bu usulyñ kömegi bilen ýokarda garalan mysalyñ daýanç çözüwini tapalyñ. Onuñ tapylşyny tablisa 2-de görkezeliñ

B_j / A_i	75	80	60	85
100	6	7 5	3 60	5 35
150	1 75	2 75	5	6
50	8	10	20	1 50

Tablisadaky iñ kiçi bahany saýlalyñ . Ol baha bire deñdir we A_2B_1 we A_3B_4 öýjüklerde ýerleşendir. Ol öýjükleri aşakdaky görnüşde dolduralyñl:

X_{21}=min{150,75}=75 we x_{34}=min{50,85}=50 .

Tablisanyñ iñ kiçi bahany A_2B_2 öýjüde ýerleşär, ony hem dolduralyñ:

$X_{22}=\min\{150-75,80\}=75$.

Bu prosesi tä gordaky önümler gutarýança we ähli srp edijiler kanagtlanýança dowam etdirilýär we netijede Tablisa-2-ni alarys.

Alnan çözüw hiç hili sikli saklamaýar we alty sany polozitel daşamadan ybaratdyr , diýmek , budaýanç çözüwdir. Onuñ bahasy bolsa

C=5*7+3*60+5*35+1*75+2*75+1*50=665

deň bolar.

Meseläniň daýanç çözüwi tapylandan soňra onuň optimal bolup-bolmalydygy barlanýar. Eger-de çözüw optimal bolmasa, onda üpjün etme täzeden paýlanýar. Optimal çözüwi almaklyk üçin hem paýlanyş we potensiallar usullary ulanylýar.

Mysal 1.

Meseläni paýlanyş usuly bilen çözmeli.

Tablisa 3

B_j / A_i	70	120	105	105
90	14	8	17	5
180	21	10	7	11
130	3	5	8	4

Çözülişi:

Başlangyç daýanç çözüwi iň kiçi bahalar usuly bilen çözüp, aşakdaky tablisany gurarys:

Tablisa 4

B_j / A_i	70	120	105	105
90	14	45^{8}-	17	45^{5}+
180	4	75^{10}	105^{7}	11
130	70^{3}	$+^{5}$	8	-60^{4}

Bu çözüwiň bahasy

$$C=8*45+5*45+10*75+7*105+4*60=2520$$

bolar.

Alnan daýanç çözüwiň optimallygyny barlaýarlar. Onuň üçin bolsa her bir boş öýjük üçin Δ_{ij} häsiýetlen-diriji hasaplaýarlar:

$$\Delta_{11}=14-5+4-3=10;$$
$$\Delta_{13}=17-8+10-7=12;$$
$$\Delta_{21}=21-3+4-5+8-10=15;$$
$$\Delta_{24}=11-5+8-10=4;$$
$$\Delta_{32}=5-8+5-4=-2<0;$$
$$\Delta_{33}=8-7+10-8+5-4=4.$$

Bu ýerde $\Delta_{32}<0$ bolýandygy üçin çözüw optimal däldir. Täze daýanç çözüwe Δ_{32}-ä degişli bolar. Zynjyr arkaly amala aşyrylýar.

Zynjyryň depeleri boş bolan öýjükden başlap, (+,-,+,-,...) alamatlar gezekleşip gelýärler.

Otrisatel ýarymzynjyrdaky daşaljak ýükleriň göwrüminden minimumy saýlanylyp alynýar we daşaljak ýükleriň mukdary täzeden paýlanýar:

$$\Lambda=\min\{45,60\}=45.$$

we tablisa doldurylýar.

Tablisa 5

B_j \ A_i	70	120	105	105
90	14	8	17	90 5
180	21	75 10	105 7	11
130	70 3	45 5	8	15 4

Bu meýilnama ediljek çykdaýjy

gazanar. Ol nokatlary hem göni çyzyklaryň üstünde ýerleşdirip, B_2B_2 gönisi bilen birleşdireris.

Edil şu usuly ulanyp B_3B_3 gönisini hem guranymyzdan soňra, çyzga görä utuşyň aşaky çägini kesgitläris we onda ordinatasy oýunyň bahasyna deň bolan iň uly ordinataly M nokadyny taparys. Birinji oýunçy üçin M nokatda kesişýän oňaýly strategiýalary kesgitläris. Ol B_2 *we* B_3 strategiýalardyr:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = v \\ 0x_1 + 9x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

bolýandygyny göz öňünde tutup, birinji oýunçynyň optimal strategiýasyny taparys.

$x_1 = \frac{7}{12}, x_2 = \frac{5}{12}, v = \frac{45}{12} = \frac{15}{4},$

Edil şuňa meňzeşlikde, ikinji oýunçynyň hem optimal strategiýasyny kesgitläris.

$$\begin{cases} 5y_2 + 0y_3 = v \\ 2y_2 + 9y_3 = v \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$y_2 = \frac{3}{4}, y_3 = \frac{1}{4}, v = \frac{15}{4}.$

Şeýlelikde, bu oýunyň çözüwi

$x = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}), y = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ *we* $v = \frac{15}{4}$

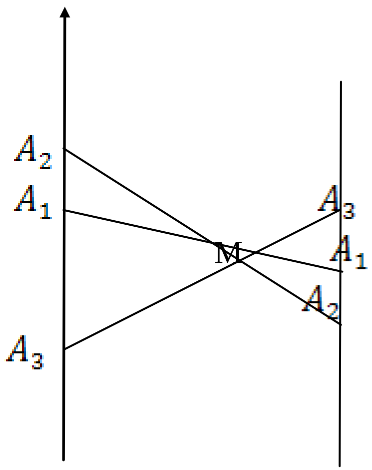
Şeýlelikde, bu oýunyň çözüwi

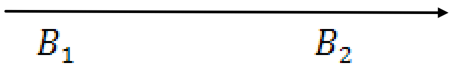
$$x = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}), y = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\ we\ \nu = \frac{15}{4}$$

bolar.

II) oýunyň matrisasynyň ölçeginiň (3x2) bolandygy sebäpli, oýunyň çözüwini ikinji oýunçy üçin taparys.
Oýunyň grafiki şekilini geçen mysaldaka görä gurarys. (Şekil 2). Bu ýerde kesimiň başlangyç nokadyny B_2 strategiýa hökmünde kabul ederis.

$B_1\ we\ B_2$ nokatlaryň üstünden ikin sany perpendikulýar geçireris we onuň üstünde birinji oýunçynyň utuşlaryny ýerleşdireris.
Birinji oýunçynyň strategiýalaryna degişli bolan göni çyzyklary guranymyzdan soňra, utuşyň ýokarky çägini kesgitläris we onuň üstündäki iň kiçi ordinataly M nokadyny taparys. Ol nokadyň ordinatasy hem oýunyň bahasyna deňdir.





Şekil 2.

Birinji oýunçynyň aktiw strategiýalary A_1 *we* A_3 bolar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

we

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = v \\ y_1 + 3y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

bolýandygyny göz öňünde tutup, ikinji oýunçynyň optimal strategiýasyny kesgitläris:

$$y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, v = \frac{7}{3}.$$

Edil şuňa meňzeşlikde

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = \dfrac{7}{3} \\ 2x_1 + 3x_2 = \dfrac{7}{3} \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ulgamdan

$x_1 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$ taparys

Şeýlelikde bu oýunyň çözüwi

$x = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}), y = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *we* $v = \frac{7}{3}$ deň bolar.

2.3. Matrisa oýunlary simpleks usuly bilen çözmek.

Aşakdaky matrisa bilen berlen oýuna garalyň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu oýunyň $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ optimal strategiýalaryny çyzykly programmirlemegiň ikitaraplaýyn meseleleriniň çözüliş usulynda taparys.

Başlangyç mesele (birinji oýunçy üçin)

max F=v;

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \geq v; (j = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

$$\sum_i x_i = 1;$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$$

görnüşde, ikitaraplaýyn mesele bolýar (ikinji oýunçy ýçin)

min $F' = v$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \leq v \ (\varepsilon = \overline{1,m})$$

$$\sum_i x_i = 1;$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$$

görnüşde, ikitaraplaýyn mesele bolýar (ikinji oýunçy üçin)

min $F' = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \leq v \ (\varepsilon = \overline{1,m})$$

$$\sum_j y_i = 1;$$

$$y_i \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$$

görnüşinde bolar.

Oýunyň bahasy bolan v ululyk belli däldir, emma v>0 bolýandygy kabul edip bileris. Bu şert $x_{ij} \geq 0 \ (\varepsilon = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n})$ bolan ýagdaýynda ýerine ýetýändir, ony bolsa matrisanyň ähli elementleriniň üstüne käbir položitel M sany goşmak arkaly amala aşyryp bolar. Bu ýagdaýda oýunyň çözüwi üýtgemeýär we oýunyň bahasy M san artýar.

(1) we (2) meseleleriň çäklendirijilerindäki deňsizlikleriň ähli goşulyjylaryny v sana bölüp we $x_i' = \frac{x_i}{v}, \ y_j' = \frac{y_i}{v}$ belgilemeleri girizip, başlangyç çäklendirijileri üýtgederis. $\sum_i x_i = 1 \ we \ \sum_j y_j = 1$ şertlerden hem

$\sum_i x_i' = \frac{1}{v} \ we \ \sum_j y_j' = \frac{1}{v}$ şertleri alarys. Netijede bolsa aşakdaky iki taraplaýyn meseläni alarys:

başlangyç mesele (birinji oýunçy üçin)

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i' \geq 1 \ (j = \overline{1,n}),$

$x_i' \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$ şertlerde

F=$\sum_{i=1}^{m} x_i'$ funksiýanyň minimum bahasyny berýän $x_1', x_2', \dots, x_m'$ bahalary tapmaly;

ikitaraplaýyn mesele (ikinji oýunçy üçin)

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 1 \ (i = \overline{1,m}),$

$y_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$ şertlerde

$$F' = \sum_j y_j'$$

Funksiyanyň maksimum bahasyny berýän $y_1', y_2', \dots, y_n'$ bahalary tapmaly.

Şeýlelikde, berlen oýuny çözmek üçin çyüykly programirlemegiň ikitaraplaýyn simmetrik meseleleriňjübütini aldyk. Meseläniň simmetrik häsýetinden peýdalanyp ilki bilen olaryň hasaplamany talap edýänini çözüp bolýar, alnan çözüwiň netijesinde-de beýleki meseläniň çözüwini tapmak aňsat bolýar.

Mysal:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisa bilen berlen oýunyň çözüwini tapmaly.

Çözülüşi: Oýun matrisasy atrusatel elementi özünde saklaýar $(a_{11=-1})$. Matrisanyň ähli elementine 1 sany goşup täze oýun alarys:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Meseläni çözmäge girişmezden öň onuň eýer nokadyny barlaýarys

$$\alpha = max \min \ a_{ij}=1, \ \beta=\min \ \max \ a_{ij}=3$$

$\alpha \neq \beta$ bolýandygy üçin bu oýunyň çözüwigaeyşyk strategiýada bolar we onuň v=v+v bahasy $1\leq v \leq 3$ aralykda ýatar.

Optimal x=(x_1, x_2) we y=(y_1, y_2, y_3) strategiýaly tapmaklyk çyzykly programmirlemegiň ikitaraplaýyn meselesini çöümek bilen meňzeşdir.

Başlangyç mesele(birinji oýunçy üçin)

$$\begin{cases} 7x_2' \geq 1 \\ 6x_1' + 6x_2' \geq 1 \\ 3x_1' + 2x_2' \geq \end{cases}$$

$$x_1' \geq 0, x_2' \geq 0$$

Şertlerde

$$\text{Min } F' = x_1' + x_2'$$

Tapmaly:

Ikitaraplaýyn mesele(ikinji oýunçy üçin)

$$\begin{cases} 6y_2' + 3y_3' \le 1 \\ 7y_1' + y_2' + 2y_3' \le 1 \\ y_1' \ge 0, y_2' \ge 0, y_3' \ge 0 \end{cases}$$

Şertlerde

$$\text{Max F=}y_1' + y_2' + y_3'$$

Tapmaly,bu ýerde $x_i' = \frac{x_i}{v}, y_j' = \frac{y_j}{v}$, min $F' = max$ F=$\frac{1}{v}$.

Ikitaraplaýyn neseleleriň birini çözenimizden soňra olaryň beýlekisini aňsatlyk bilen çözeris.

Aşakdaky tablisa 1-4-de ikinji oýunçy üçin goýulan meseläniňçözlüşi görkeüilendir.

Yablisa 1

Bazis	c	Azat goşuljy	1	1	1	0	0
			y_1'	y_2'	y_3'	y_4'	y_5'
y_4'	0	1	0	6	3	1	0
y_5'	1	1	7	1	2	0	1
F'	-	0	-1	-1	-1	0	0

Tablisa 2

Bazis	c	Azat goşuljy	1	1	1	0	0
			y_1'	y_2'	y_3'	y_4'	y_5'
y_4'	0	$^1/_7$	0	6	3	1	0
y_5'	1		1	$^1/_7$	$^2/_7$	0	$^1/_7$
F'	-	$^1/_7$	0	$-^6/_7$	$-^6/_7$	0	$^1/_7$

Tablisa 3

Bazis	C	Azat goşuljylar	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_2	1	1/6	0	1	1/2	1/6	0
y'_1	1	5/12	1	0	3/4	-1/42	1/7
F’	-	2/7	0	0	-2/7	1/7	1/7

Tablisa 4

Bazis	C	Azat goşuljylar	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_3	1	1/3	0	2	1	1/3	0
y'_1	1	1/21	1	-3/7	0	-2/21	1/7
F’	-	8/21	0	4/7	0	5/21	1/7

Tablisa 4-de $y'_1=1/21$, $y'_2=0$, $y'_3=1/3$, max=F’8/21 optimal çözüw alyndy. Bu ýerden hem

$\partial=\frac{1}{maxF'}=\frac{21}{8}$, $y_1=y'_1\,\partial=\frac{1}{8}$, $y_2=y'_2\,\partial=0$, $y_3=y'_3\,\partial=\frac{7}{8}$

alarys. Şeýlelikde ikinji oýunçynyň optimal strategiýasy $Y=\left(\frac{1}{8},0,\frac{7}{8}\right)$ bolar.

Iň soňky Tablisa 4-iň iň soňky setiriniň goşmaça y'_4 we y'_5 üýtgeýänleriniň garşysyndaky elementler hem birinji oýunçynyň optimal strategiýalarydyr:

$X = \frac{5}{8}, \frac{3}{8}.$

Gönükmeler

Sahypa 64-däki meseleler.

2.4 Oýunlary çözmekligiň ýakynlaşan usuly (Braunyň usuly.)

Töleg matrisasy

$$A\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

bolan oýuna garalyň.Bu oýuny Braunyň usuly bilen çözmek üçin aşakdaky yzygider iterasiýalar ýerine ýetirilýär:

1) A oýunçy haýsy hem bolsa bir A_1 strategiýasyny saýlaýar.(erkin);
2) B oýunçy hem A oýunçynyň utuşyny minumyma getirer ýaly özüniň B_j strategiýasyny saýlaýar;
3) A oýunçy B oýunçynyň utulyşyny maksimuma getirýän A_n strategiýasyny saýlaýar(a_{ij} – sütüniň iň uly elementi şertinden) we öňki ädimlerdäki umumy utuşyny hasaplaýar;
4) A oýunçynyň umumy utuşyny minumyma getirer ýaly B oýunçy özünoň B_o strategiýasyny saýlaýar we öňki ädimlerden gelýän umumy utulyşyny hasaplaýar;
5) Eger iterasiýalaryň sany n bolsa ,onda optimal trategiýalary kesgitlenýäris:

A oýunçy üçin $X=\left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n}, \dots \frac{t_m}{n}\right)$,

B oýunçy üçin $X=\left(\frac{s_1}{n}, \frac{s_2}{n}, \dots \frac{s_n}{n}\right)$,

bu ýerde t_i we s_j degişlilikde i-nji setirdäki we j-nji sütündäki ýyldyzjyklaryň sany.

Ýa-da bolmasa 3-nji ädime gaýdyp gelýäris.

Mysal.

Oýunyň töleg matrisasy berlipdir:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ony Braunyň usuly bilen çözmeli.

Çözülişi.

Braunyň usulyny ulynyp bu oýunyň ýakynlaşan çözüwini taparys.Goý, A oýunçy A_1 strategiýasyny saýlasyn.

Töleg matrisasynyň aşagynda bu setiriň elementleri ýazylýar.B oýunçy bolsa B_2 strategiýasyny saýlaýar, çünki $a_{12} = 1$ element bu setiriň iň kiçi bahasydyr. a_{12} elementi (*) ýyldyzjyk bilen belgileýäris we matrisanyň sag tarapynda onuň ikinji sütüniniň elementleri ýazylýar.

A oýunçy hem öz gezeginde A_2 strategiýasyny ulanýar, çünki a_{22}^{-3} element ol sütüniň iň ulusydyr. a_{22} elementi ýyldyzjyk bilen belgileýäris we A oýunçynyň geçen iki ädimdäki umumy utuşyny hasaplaýarys.(Utuşly strategiýalaryň degişli elementlerini goşmak arkaly)We ony hem matrisanyň aşagynda ýazýarys.B oýunçy hem A oýunçynyň summar utuşyny minumyma getirer ýaly B_1 strategiýasyny saýlaýar.B oýunçynyň geçen iki ädimdäki summar utulyşyny kesgitleýäris we ony matrisanyň sag tarapynda ýazýarys we şç.m.

Aşakdaky Braunyň usuly bilen iterasion prosesiniň ilkinji 10 ädimi görkezilendir.

Tablisa 1.

2	1	9	1	3	4	5	6	7	8	10	11	13
1	3	7	3*	4	7	10	13	16*	19*	20*	23*	24*
4	2	4	2	6*	8*	10*	12	14	16	20*	22*	26*

2 1^* 9

3^* 4 16

7 6^* 20

11 8^* 24

15 8^* 24

Meseläniň çözüwine ýakynlaşma derejesi başlangyç strategiýasynyň saýlanyşyna we ädimleriň sanyna baglydyr. n=1 bolanda

$$\frac{23}{10} \le \partial \le \frac{26}{10} \ , X = \left(\varphi \ \frac{5}{10}, \frac{5}{10}\right),$$

$$Y = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 0\right)$$

IV Bölüm. Köpçülikleýin hyzmat ediş nazaryýetiniň modelleri.

4.1. Ýitgili hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirjileriniň hasaplanyşy.

Goý, köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamy biri-birleri bilen ekwiwalent bolan n sany hyzmat ediji enjamdan ybarat bolup, bu ulgama talaplaryň λ intensiwlikli ýönekeý akymy gelýän bolsun. Eger-de talabyň ulgama gelen pursatynda boş duran hyzmat ediji enjam bar bolsa, onda ol talap boş duran enjamlaryň haýsy hem bolsa birini eýeleýän we ol talaba hyzmat edilip başlaýar. Eger-de talabyň ulgama gelen momentinde hyzmat ediji enjamlaryň ählisi doly bolsa, onda ol talap ýitirilýär (ulgamy terk edýär).

Her bir talaba edilýän hyzmatyň T_{HYZ} dowamlylygy ν parametrli

$$F(t) = P(T_{HYZ} < t) = 1 - e^{-\nu t} \qquad (\nu > 0)$$

görkeziji kanun boýunça paýlanan üznüksiz tötän ululykdyr.

Ulgamyň ýagdaýlary diýip ondaky talaplaryň sanyna düşünjekdiris. Onda wagtyň islendik momentinde garalýan ulgam aşakdaky ýagdaýlaryň haýsy hem bolsa birinde bolup biler:

S_0 – ulgamda 0 talap bar;
S_1 – ulgamda 1 talap bar;
. . . .
S_n – ulgamda n talap bar.

Wagtyň t momentinde ulgamda k sany talabyň bardygyny aňladýan wakany $S_k^{(t)}$ bilen belgilesek, onda bu wakanyň ähtimallygyny $P_k(t) = P(S_k^{(t)})$ bilen belgiläris. Bu ulgamda bolup geçýän tötän proses üçin $t \to \infty$ bolanda $P_k(t)$ ýagdaý ähtimallyklary başlangyç şertlere bagly bolmadyk käbir P_k hemişelik sanlara ymtylýarlar (bu ýerde $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k$ predeliň bardygynyň subudyny görkezjek däldiris).

Biziň maksadymyz ulgamyň $P_0, P_1, ..., P_n$ stasionar ähtimallyklaryny we onuň häsiýetlendirjilerini tapmakdyr.

Bu ulgama gelýän talaplaryň akymynyň ýönekeý akymdygy üçin h wagt aralygynda ulgama bir talabyň gelmekliginiň ähtimallygy λh+0(h), birden köp talabyň gelmekliginiň ähtimallygy bolsa 0(h) deň boljakdygy düşnüklidir.

Bize mälim bolşy ýaly, egerde talaba edilýän hyzmatyň dowamlylygy görkezijili kanun boýunça paýlanan bolsa, onda hyzmatyň galan böleginiň dowamlylygynyň paýlanyş kanuny onuň haçan başlandygyna bagly däldir. Şuňa görä-de, eger-de haýsy hem bolsa bir hyzmat ediji enjam bir talaba hyzmat edip duran bolsa, onda ol hyzmatyň galan böleginiň dowamlylygynyň h wagtdan kiçi bolmazlygynyň ähtimallygy e^{-h}; eger-de hyzmat ediji enjamlaryň haýsy hem bolsa k sanysy doly bolsa, onda olaryň ählisiniň ýene-de h wagtlap doly bolmaklarynyň ähtimallygy e^{-kh}; h wagtyň dowamynda olaryň iň bolmanda biriniň boşamaklygynyň ähtimallygy hem

$$1-e^{-kh}=kh-0(h)$$

deň bolar.

Bu ulgama talabyň gelmekliginiň we bir talaba edilýän hyzmatyň tamamlanmagynyň (hyzmat ediji enjamyň boşamaklygynyň) her biri ýönekeý wakadyr.

Wagtyň t momentinde ulgam S_i ýagdaýynda bolup, h wagt interwalyň dowamynda S_k ýagdaýyna geçmekliginiň şertli ähtimallygyny $P_{ik}(h)$ bilen belgiläliň, ýagny

$$P_{ik}(h)=P\left\{\frac{S_k^{(t+h)}}{S_i^{(t)}}\right\} \quad (0\le i\le n,\ 0\le k\le n)$$

Onda

$$P_{ik}(h)\ge 0, \qquad \sum_{k=0}^{n}P_{ik}(h)=1 \tag{1}$$

bojakdygy mälimdir.

Ýokardaky aýdylanlardan ugur alyp $h\to 0$ bolanda $P_{ik}(h)$ geçiş ähtimallyklaryny tapmak çylşyrymly däldir. Eger $|i-k|>1$ şert ýerine ýetse, onda ulgamyň S_i ýagdaýyndan S_k ýagdaýyna geçmekligi üçin iň bolmanda iki sany ýönekeý wakanyň ýüze çykmaklygy zerurdyr. Şonuň üçin hem ýokarda belläp geçişimiz ýaly,

$$\lim_{h\to 0}P_{ik}(h)=0(h) \qquad (|i-k|>1)$$

(2)

bolýandyr.

h wagtyň dowamynda ulgamyň S_k ýagdaýyndan S_{k+1} ýagdaýyna geçmekligi üçin hem şol wagt interwalynda ulgama bir ýa-da ondan-da köp talap gelmelidir. Şeýlelikde,

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + 0(h)$$

(3)

h wagtyň dowamynda ulgamyň S_k ýagdaýyndan S_{k+1} ýagdaýyna geçmekligi üçin hem şol wagtyň dowamynda bir ýa-da ondan-da köp talaba edilýän hyzmat tamamlanmalydyr, bu ýerden hem

$$P_{k,k-1}(h) = kh + 0(h)$$

(4)

gelip çykýar.

Onda (2)-(4) aňlatmalardan we (1) deňlikden

$$P_{k,k}(h) = 1 - P_{k,k+1}(h) - P_{k,k-1}(h) + 0(h) = 1 - \lambda h - k\nu h + 0(h)$$

boljakdygy äşgärdir.

k=0 we k=n bolan ýagdaýynda hem

$$P_{0,0}(h) = 1 - \lambda h + 0(h),$$

$$P_{n,n}(h) = 1 - n\nu h + 0(h)$$

alarys. Egerde $t>0$, $h>0$, $0 \le i \le n$, $0 \le k \le n$ bolsa, onda

$$P_{ik}(t+h) = \sum_{r=0}^{n} P_{ir}(t) \cdot P_{rk}(h)$$

(5)

bolýandayr. Bu baglylyk doly ähtimallygyň formulasynyň ýänekeýje ulanylyşynyň netijesidir.

Goý, $P_i(0)$ – bu wagtyň başlangyç momentinde (t=0) ulgamyň S_i ýagdaýynda bolmaklygynyň ähtimallygy bolsun ($0 \le i \le n$). Onda wagtyň t momentinde ($t \ne 0$) ulgamyň S_k ýagdaýynda ($0 \le k \le n$) bolmaklygynyň ähtimallygy doly ähtimallygyň formulasyna görä

$$P_k(t)=\sum_{i=0} P_i(0)P_{ik}(t)$$

deň bolar .

Eger-de (5) deňlemäniň iki tarapyny hem $P_i(0)$ ähtimallyga köpeldenimizden soňra ony i-e görä 0-dan n-e çenli jemlesek

$$P_k(t+h)=\sum_{r=0} P_r(t)\cdot P_{rk}(h) \qquad (6)$$

deňlemäni alarys we oňa Çepman – Kolmogorowyň diýilip atlandyrylýar.

Geçiş ähtimallyklar üçin alnan aňlatmalary ulanyp, Çepman – Kolmogorowyň deňlemesinden

$$P_0(t+h)=P_0(t)(1-\lambda h)+P_1(t)\nu h+0(h),$$

$$P_k(t+h)=P_{k-1}(t)\lambda h+P_k(t)(1-\lambda h-k\nu h)+P_{k+1}(t)(k+1)\nu h+0(h)$$

$$P_n(t+h)=P_{n-1}(t)\lambda h+P_n(t)(1-n\nu h)+0(h)$$

alarys. Bu ýerden hem ýönekeý amallardan soňra

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\nu P_1(t)+0(1),$$

$$\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}=-\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\nu)P_k(t)+(k+1)\nu P_{k+1}(t)$$

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_{n-1}(t)+n\nu P_n(t)$$

aňlatmalary almak kyn däldir. $h\to 0$ bolanda ýokarky aňlatmalaryň sag tarapynyň predelleri bardyr, diýmek, $P_k(t)$ ýagdaý ähtimallyklarynyň önümleri hem bardyr. Şeýlelikde,

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+P_1(t),$$

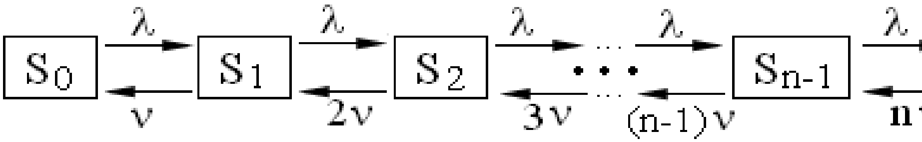
$$P_k'(t)=\lambda P_{k-1}(t)-(\lambda+k\nu)P_k(t)+(k+1)\nu P_{k+1}(t) \qquad (1\le k\le n-$$

(7) $$P_n'(t)=\lambda P_{n-1}(t) n\nu P_n(t)$$

gelip çykar.

Ýokarda alnan bijynsly differensial deňlemeleriň ulgamy Erlangyň ulgamy diýilip atlandyrylýar. Eger-de ulgamyň ýagdaýlarynyň başlangyç ähtimallyklary ($P_k(0)$, $0\le k\le n$) berlen bolsa, onda ol ulgamy çözmeklik kyn däldir.

Eger-de ulgamyň ýagdaýlarynyň belgileneň grafyny gursak, onda onuň kömegi bilen ulgamda bolup geçýän tötän prosesi suratlandyrýan differensial deňlemeleriň ýokardaky ulgamyny gös-göni tapyp bolýar. Garalýan ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafy aşakdaky ýaly bolar.



Differensial deňlemeleriň (7) ulgamynyň gurluşyna üns bereliň. Olaryň ählisi aşakda beýan ediljek kesgitli düzgüniň esasynda gurlandyrlar.

(7) ulgamyň her bir deňlemesiniň çep tarapynda ulgamyň ýagdaý ähtimallyklarynyň önümi bar, olaryň çep tarapynda bolsa degişli ýagdaý bilen baglanyşykly näçe sany ok bar bolsa, şonça-da goşuljy bar.Eger-de ok şol ýagdaýdan çykýan bolsa, onda şol oka degişli bolan goşuljy „minus” alamatly, egerde ok şol ýagdaýa gelýän bolsa, onda oňa degişli goşuljy „plus” alamatlydyr.Her bir goşuljy özüne degişli bolan okuň geçiş ähtimallygynyň dykyzlygynyň şol okuň çykýan ýagdaýynyň ýagdaý ähtimallygyna köpeldilmegine deňdir.

Ulgamyň ýagdaý ähtimally üçin differensial deňlemeleri bu düzgüni umumy hasap edilýär we ol islendik üznüksiz markow zynjyrlary üçin ulanylýar.Onuň kömegi bilen ýagdaý ähtimallyklar üçin differensial deňlemeleri ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafyna seredip, hiç hili kynçylyklar çekmän, gös-göni gurup bolýar.

$t \to \infty$ bolanda (7) ulgamyň deňlemeleriniň sag tarapynyň kesgitli predeli bardyr, diýmek, olary çep taraplarynyň hem predelleri hökman bolaýmaly.Ol predel hem nula deňdir.Eger-de şeýle bolmasa, onda $t \to \infty$ predelde $P_k'(t)$ önümler nuldan tapawutly haýsy hem bolsa bir hemişelik sana ymtylarlar, diýmek, degişli $P_k(t)$ ähtimallyklar hem absalýut ululyklary boýunça tükeniksiz artalar, beýle ýagdaý bolsa asla mümkin däldir.Şeýlelikde, biz aşakdaky netijä gelýäris:

$$\lim_{t\to\infty} P_k'(t) = 0 \qquad (0 \le k \le n).$$

Differensial deňlemeleriň (7) ulgamynda hem $t \to \infty$ predele geçip, algebraik deňlemeleriň aşakdaky ulgamyny alarys:

$$-\lambda P_0 + \upsilon P_1 = 0,$$
$$\lambda P_{k-1} - (\lambda + k\upsilon)P_k + (k+1)\upsilon P_{k+1} = 0 \qquad (0 < k < n),$$
$$\lambda P_{n-1} - n\upsilon P_n = 0. \qquad (8)$$

Eger-de

$$\lambda P_{k-1} - k\upsilon P_n = z_k \qquad (1 \le k \le n)$$

belgilemäni girizsek, onda (8) ulgamy

$$z_1 = 0,$$
$$z_k - z_{k+1} = 0 \qquad (0 < k < n),$$
$$z_n = 0$$

görnüşde ýazmak bolar.Bu ýerden hem $z_k = 0 \quad (1 \le k \le n)$ netijäni alarys.Şeýlelikde,

$$P_k = \frac{\lambda}{\upsilon k} P_{k-1} \qquad (1 \le k \le n)$$

ýa-da

$$P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\upsilon}\right)^k}{n!} P_0 \qquad (1 \leq k \leq n) \qquad (9)$$

gelip çykjakdygy düşnüklidir.Normirleýji

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$$

Şerden hem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{\lambda}{\upsilon}\right)^k}{k!}} = \left(\sum_{k=0}^{0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\upsilon}\right)^k}{k!}\right)^{-1}$$

ähtimallygy taparys.

$\frac{\lambda}{\upsilon} = \rho$ belgilemäni girizeliň.Bu gatnaşygyň şeýle manysy bardyr:

ρ —bu bir talaba hyzmat etmek üçin sarp edilýän ortaça wagtyň dowamynda bu köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamyna gelýän talaplaryň ortaça sanydyr.Bu belgilemäni göz öňünde tutup, (9) formulalary

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^s}{s!}} \qquad (k = 0,1,2,\dots,n) \quad (10)$$

görnüşde ýazyp bileris.

(10) formulalar başgaça Erlangyň formulalary diýip atlandyrylýar.

$P_0, P_1, \dots, P_n$ stasionar ähtimallyklar belli bolsa, onda bu ulgamyň stasionar häsiýetlendirijilerini kesgitläp bileris:

* A-ulgamyň absalýut hyzmat ediş mümkinçiligi (wagt birliginde ulgamyň doly hyzmat edip biljek talaplarynyň ortaça sany);

* q-otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi (ulgama gelen talaplaryň hyzmat edilenleriniň ortaça paýy, ýagny, ulgamyň wagt birliginde doly hyzmat edip bilýän talaplarynyň ortaça sanynyň şol wagtyň dowamynda ulgama gelýän talaplaryň ortaça sanyna bolan gatnaşygy);

* doly hyzmat ediji enjamlaryň ortaça sany.

Bize mälim bolşy ýaly, ulgamyň hyzmat ediji enjamlarynyň ählisiniň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilýär.

Onda ýitginiň ähtimallygy

$$P_{ýit} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} \qquad (11)$$

deň bolar.

Ulgama gelen talabyň hyzmata kabul edilmekliginiň ähtimallygy (ýagny otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi.) bolsa ýitginiň ähtimallygyny 1- çenli doldurýar:

$$q = 1 - P_{ýit} = 1 - P_n \,. \qquad (12)$$

Eger-de ulgamyň q otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi belli bolsa, onuň A absalýut hyzmat ediş mümkinçiligini aňsatlyk bilen taparys.Olar aşakdaky görnüşde bir-birleri bilen baglanyşyklydyr:

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_n) \,. \qquad (13)$$

Ýitgili köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynyň möhüm häsiýetlendirjileriniň biri hem ondaky doly enjamlaryň ortaça sanydyr (biziň garaýan ulgamymyzda ol ululyk ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyna deňdir).Ol ortaça bahany $\overline{k}$ bilen belgiläliň.

$\bar{k}$ ululygy $0,1,\dots,n$ bahalary degişlilikde $P_0, P_1, \dots, P_n$ ähtimallyklar bilen alýan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy hökmünde hasaplap bolar:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{k} P_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{k}\frac{\rho^k}{k!} P_0 = \rho \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^{k-1}}{k!} P_0 = \rho(1 - P_n). \qquad (14$$

Mysal 1.

Üç sany liniýadan ybarat bolan awtomatlandyrylan telefon stansiýasyna talaplaryň ýönekeý akymy gelýär.Egerde talabyň gelen momentinde liniýalaryň ählisi hem doly bolsa, onda ol talap ýitirilýär.Bir minudyň dowamynda stansiýa ortaça bir talap gelýär.Her bir talaba hem ortaça iki minutlap hyzmat edilýär.

Ulgamyň stansionar häsiýetlendirjilerini kesgitlemeli.

Çözlüşi.Şerte görä, talaplaryň gelýän akymynyň intensiwligi $\lambda = 1$ deňdir.Hyzmatdan çykýan talaplaryň akymyyň υ intensiwligi bolsa

$$\upsilon = \frac{1}{\bar{t}_{hyz}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

deň bolar.

(11) formula görä,

$$P_{\acute{y}it} = P_3 = \frac{\frac{\rho^3}{3!}}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\frac{2^3}{3!}}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = \frac{14}{19} \approx 0,21.$$

taparys.Bu ähtimallyk hem ulgama gelýän talaplaryň takmynan 21%-niň ýitirilýändigini aňladýar.

Stansiýanyň otnositel we absalýut hyzmat ediş mümkinçilikleri hem

$$q = 1 - P_{\acute{y}it} = 1 - \frac{14}{19} = \frac{15}{19} ,$$

$$A = \lambda q = \frac{15}{19}$$

deň bolar.

Doly liniýalaryň ortaça sanyny bolsa (14) formula görä hasaplarys:

$$\bar{k} = \rho(1 - P_n) = 2 \cdot (1 - P_3) \approx 2(1 - 0.21) = 1,58 \ .$$

Gönükmeler.

1. Awtomatlaşdyrylan telefon stansiýasy (ATS) bir wagtda özüniňde 5 sany abonente hyzmat etmeklige niýetlenendir.Bu ATS-e ortaça her 30 sekuntda bir talap gelýär.Her bir abonente ortaça 2 minutlap hyzmat edilýär.ATS-iň ähli liniýalarynyň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilýär.Bu ATS-iň stansionar häsiýetlendirijilerini kesgitlemeli.
2. 20 sany ulagyň durmaklary üçin niýetlenen ulag duralgasyna duralga dolýança ulaglaryň ýönekeý akymy gelýär.Her sagatda duralga ortaça 4 ulag gelýär.Her bir ulagyň duralgada saklanýan wagty hem orta bahasy 15 minuda deň bolan görkezijili kanun boýunça paýlanandyr.Bu köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň stasinar häsiýetlendirjilerini tapmaly.

4.2.Nobatly köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirjileriniň hasaplanyşy.

Köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamy bir-birleri bilen ekwiwalent bolan n sany hyzmat ediji enjamdan ybarat bolup, bu ulgama talaplaryň λ intensiwlikli ýönekeý akymy gelýär.Eger-de talabyň bu ulgama gelen pursatynda iň bolmanda bir sany baş enjam bar bolsa, onda ol talaba hyzmat başlanýar, eger-de şol pursatdan boş bolan hyzmat ediji enjam ýok bolsa, onda ol talap özünden öňki gelen talaplaryň (eger-de bar bolsa) yzynda nobata durýar.Boşan hyzmat ediji enjamlar hem wagt ýitirmän, nobatda garaşyp duran indiki talaba (eger bar bolsa) hyzmat etmäge başlanýar.

Her bir talaba edilýän hyzmatyň dowamlylygy aşakdaky görkezijili kanun boýunça paýlanan T_{hyz} tötän ululykdyr:

$$F(t) = 1 - e^{-\upsilon t} \quad (\upsilon > 0) \ .$$

Goý, ilki bilen nobatdaky garaşma orunlarynyň m san bilen çäklendirilen ýagdaýyna garalyň, ýagny, talabyň ulgama gelen pursatynda eýýäm m sany talap nobatda hyzmata garaşyp duran bolsa, onda ol talap ýitirilýär.Soňunda ol m sany tükeniksizlige ymtyldyryp nobatdaky garaşma orny çäksiz ulgama gararys.

Bu garalýan ulgamda nobatda duran talap nobaty terk etmeýär diýip kabul edilýär.Bu ýagdaýda nobatdaky ähli talaplara irde-giçde hyzmat edilýär.

Ulgamyň ýagdaýy diýip ondaky talaplaryň sanyna düşünsek (hem hyzmat edilýän, hjem-de nobatda hyzmata garaşýan talaplaryň sany), onda wagtyň islendik momentinde ulgam özüniň aşakdaky n+m-1 sany yagdaýlarynyň haýsy hem bolsa birinde bolup biler:

S_0 – ulgamda 0 talap bar;
S_1 – ulgamda 1 talap bar;
. . . .
S_n – ulgamda n talap bar;
S_{n+1} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, biri hem nobatda);
S_{n+1} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, ikisi hem nobatda);
. . . .
S_{n+m} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, m-si hem nobatda);
Garalýan ulgamyň belgilenen grafy aşakdaky ýaly bolar:

Ulgamyň ýagdaýlarynyň stasionar ähtimallyklary üçin algebraik deňlemeleriň ulgamyny ýokardaky belgilenen grafyň kömegi bilen gös-göni gurarys:

$$-\lambda P_0 + \upsilon P_1 = 0$$

$$\lambda P_{k-1} + (\lambda + \upsilon) P_k + (k+1)\upsilon P_{k+1} = 0, \quad 1 \le k < n \qquad (1)$$

$$\lambda P_{k-1} + (\lambda + n\upsilon) P_k + n\upsilon P_{k+1} = 0, \quad n \le k < n+m$$

$$\lambda P_{kn+m} - n\upsilon P_{n+m} = 0$$

Algebraik deňlemeleriň ýokardaky ulgamyny çözmek üçin aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$Z_k = \lambda P_{k-1} - k\upsilon P_k\,, \quad 1 \le k \le n$

$Z_k = \lambda P_{k-1} - n\upsilon P_k\,, \quad n \le k \le n+m$

Bu belgilemeleri ulanyp, deňlemeleriň (1) ulgamyny

$Z_1 = 0$

$$Z_k - Z_{k+1} = 0\,, \quad 1 < k < n < m \qquad (2)$$

$Z_{n+m} = 0$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden hem

$$Z_k = 0\,, \quad (1 \le k \le n+m)$$

Deňleme, ýagny,

$$\lambda P_{k-1} - k\upsilon P_k = 0, \qquad (1 \le k \le n) \qquad (3)$$

$$\lambda P_{k-1} - n\upsilon P_k = 0, \qquad (1 \le k \le n) \qquad (4)$$

deňlemeler gelip çykýarlar. $1 \le k \le n$ bolanda (3) deňlemeden

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \qquad (5)$$

alarys, bu ýerde $\rho = \lambda/\upsilon$ deňdir.

n$< k \le n+m$ bolanda hem (4) deňlemeden

$$P_k = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} P_n \qquad (6)$$

formulany alarys. (5) formuladan P_n-yň bahasyny (6) formula ornuna goýsak

$$P_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{k-n}} P_0 \qquad (7)$$

formula gelip çykýar.

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k = 0$$

Normirleýji şert hem P_0 ähtimallygy kesgitlemäge mümkinçilik berýär:

$$P_0 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right] = 1$$

Maýdalawjysy ρ/n -e deň bolan geometrik progressiýany

jemlqnimizden soňra P_0 ähtimallygyň anyk bahasyny taparys. Netijede biz aöakdaky formulalary tapdyk:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0\,, \quad (1 \le k \le n)$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{k-n}} P_0\,, \quad (n < k \le n + m)$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1 - \left(\rho/n \right)^m}{n - \rho} \right]^{-1} \qquad (8)$$

Indi bolsa bu köpçülikleýin hyzmat ediö ulgamynyň esasy häsýetlendirijilerini kesgitläliň.

Hyzmat ediji enjamlaryň ählisiniň we garaşma orunlarynyň hem ählisiniň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilýär. Onda ýitginiň ähtimallygy

$$P_{\acute{y}it} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n!\,n^m} P_0\,, \qquad (9)$$

deň bolar.

Ulgamyň otnositel hyzmat ediş mümkinçiligini hem

$$q = 1 - P_{\acute{y}it} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!\,n^m} P_0 \qquad (10)$$

formula bilen hasaplarys.

(10) formulanyň ýardamy bilen ulgamyň absolýut hyzmat ediş mümkinçiligini kesgitläris:

$$A = \lambda q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!\,n^m} P_0\right) \qquad (11)$$

Ulgamyň doly bolan hyzmat ediji enjamlarynyň ortaça sanyny hem 1,2,...,n bitin bahalary degişlilikde $P_1 + P_2 + \ldots + (P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{n+m})$ ähtimallyklar bilen alýan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasyny hasaplamak arkaly kesgitläp bileris:

$$\bar{k} = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \cdots + (n-1)P_{n-1} + n \cdot (P_n + P_{n+1} + \cdots + P_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} nP_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\rho^k}{k!} P_0 + \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{\rho}{k}\right)^k P_n =$$

$$= \rho P_0 \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \cdots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}\right] + n\frac{\rho}{n}\left[P_n + \frac{\rho}{n} P_n + \cdots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1} P\right.$$

$$\rho[P_0 + P_1 + \cdots + P_n] + \rho[P_n + P_{n+1} + \cdots + P_{n+m-1}] =$$

$$= \rho - \rho P_{n+m} = \rho(1 - P_{n+m}) = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n!\,n^m} P_0\right).$$

Nobatdaky talaplaryň ortaça sanyny bolsa 1,2,...,m bahalary degişlilikde $P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots + P_{n+m}$ ähtimallyklar bilen alýan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy hökmünde hasaplarys:

$$\bar{r} = 1 \cdot P_{n+1} + 2 \cdot P_{n+2} + \cdots + m \cdot P_{n+m} = \sum_{k=1}^{m} k \left(\frac{\rho}{k}\right)^{k} P_n = P_n \cdot \frac{\rho}{n}$$

Ýokardaky aňlatmanyň soňky jemini

$$\sum = \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^m$$

geometrik progressiýanyň $\frac{\rho}{n}$ görä önümi hökmünde göz öňüne getirip bileris. Ol geometrik progressiýany jemläp:

$$\sum = \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}$$

Onuň $\frac{\rho}{n}$ -e görä ömümini alsak,

$$\sum = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

netijäni alarys.

Şeýlelikde, nobatdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n!\, n^m} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

formulany alarys.

Hyzmatdaky we nobatdaky talaplaryň ortaça sanyny jemläp, tutuş ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyny kesgitläris:

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}$$

Indi bolsa talabyň nobatdaky ortaça garaşma wagtyny kesgitläliň. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasyna görä, t wagtyň dowamynda doly bolan n sany hyzmatediji enjamlaryň hiç biriniň hem boşamazlygynyň ähtimallygy $e^{-n\upsilon t}$ deň bolar.

$$\int_0^\infty t e^{-n\upsilon t} dt = \frac{1}{n\upsilon}$$

Matematiki garaşma hem talabyň ulgama gelen pursatynda n sany hyzmat ediji enjamlaryň ählisiniň hem doly bolup, nobatda hem hiň hili talabyň ýok bolan ýagdaýyndaky ortaça garaşma wagtyna eňdir. Eger-de talabyň ulgama gelen pursatynda k sany talap nobatda bolsa, onda soňky gelen talap ortaça $\frac{k}{n\upsilon}$ wagtlap nobatda garaşýar. Eger-de talabyň ulgama gelen pursatynda hyzmat ediji enjamlaryň iň bolmanda biri boş bolsa ýa-da garaşma orunlarynyň ählisi hem doly bolsa,onda ol talabyň garaşma wagty nula deň bolar.Ýokardaky aýdylanlardan ugur alyp, talabyň ortaça garaşma wagty aşakdaky görnüşde hasaplanýar:

$$\bar{t}_{gar} = \frac{1}{n\upsilon}P_n + \frac{2}{n\upsilon}P_{n+1} + \cdots + \frac{m}{n\upsilon}P_{n+m-1} = \frac{1}{n\upsilon}\left[\frac{\rho^n}{n!}P_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n!\,n}P_0\right.$$

$$= \frac{\rho^n P_0}{n!\,n\upsilon}\left(1 + \frac{2\rho}{n} + \cdots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}}\right)$$

Talabyň ortaça garaçma wagty bilen nobatdaky talaplaryň ortaça sanynyň arasynda açakdaky ýaly baglanşyk bardyr:

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$$

Talabyň tutuş užgamda sarp etjek ortaça wagtyny (hem nobatda, hem-de hyzmatda) aşakdaky usulda hasaplarys:

$$\bar{t}_{ulg} = \left(\frac{1}{n\upsilon} + \frac{1}{\upsilon}\right)P_n + \left(\frac{2}{n\upsilon} + \frac{1}{\upsilon}\right)P_{n+1} + \cdots + \left(\frac{m}{n\upsilon} + \frac{1}{\upsilon}\right)P_{n+m-1} +$$

$$+\frac{1}{v}P_0+\frac{1}{v}P_1+\cdots+\frac{1}{v}P_{n-1}=\bar{t}_{gar}+\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{n+m-1}P_k=\bar{t}_{gar}+\frac{1}{v}(1-$$

Mysal 1.

Dellekhanada iki sany dellek işleýär. Olaryň hyzmatyna mätäç müşderileriň ortaça sany sagatda 18-e ýetýär. Dellekler her bir müşderä hyzmat etmek üçin ortaça 10 minut sarp edýärler. Dellekhanada müşderileriň garaşmagy üçin 4 sany oturguç niýetlenendir. Ol garaşma orunlarynyň ählisiniň hem doly bolan pursatynda gelen müşderi eglenmän dellekhanadan çykyp gidýär. Bu KHEU-nyň stasionar häsýetlendirjilerini kesgitlemeli.

Çözülişi.

Meseläniň şertine görä,

$n=2,\quad m=4,\quad \lambda=18,$

$$\bar{t}_{hyz}=10min,\ \ \nu=\frac{1}{\bar{t}_{hyz}}=\frac{1}{1/6}=6,\rho=\frac{18}{6}=3.$$

(8) formula görä,

$$P_0^{-1}=\sum_{k=0}^{2}\frac{3^k}{k!}+\frac{3^3}{2!}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2-3}=\frac{2027}{32},$$

bu-ýerdende

$$P_0=0{,}0158$$

taparys. Bu bolsa tutuş iş wagtynyň takmynan 1,58%-ni dellekhananyň müşderisiz geçirjekligini aňladýar.

Ýitginiň ähtimallygy bolsa

$$P_{ýit}=P_{n+m}=P_6=\frac{3^6}{2^4\cdot 2!}\cdot 0{,}0158=0{,}36$$

deň bolar. Bu bolsa müşderileriň takmynan 36%-niň ýitiriljekdigini görkezýär.

Dellekhananyň otnasitel hyzmat ediş mümkünçiliginiň hem

$$p=1,\qquad P_{ýit}=0{,}64$$

deň boljakdygy we gelen müşderileriň takmynan 64%-ne hyzmat ediljekdigini aňladýar.

Ulgamyň obsalýut hyzmat ediş mümkinçiligi bolsa

$$A=\lambda q=0,64\cdot 18=11,52,$$

Deň bolar, ýagny bir sagadyň dowamynda ortaça 11,52 sany müşderä hyzmat ediler.

Doly dellekleriň ortaça sany

$$\bar{k}=\frac{A}{\nu}=\frac{11,52}{6}=1,92,$$

deň bolar, ýagny dellekler öz wagtlarynyň hemmesina golaýyny doly geçirýärler.

Nobatdaky müşderileriň ortaça sany

$$\bar{r}=\frac{3^3\cdot 0,0158}{2\cdot 2!}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^4(5-6)}{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=0,4266\left(1+\frac{81}{16}\right)\approx 2,58$$

bolar.

Müşderiniň nobatdaky ortaça garaşma wagtyhem

$$\bar{t}_{tak}=\frac{\bar{r}}{\lambda}=\frac{2,58}{18}\cdot 60_{min}=8,6_{min},$$

Onuň tutuş ulgamda sarp edýän wagty hem

$$\bar{t}_{ulg}=\bar{t}_{gar}+q\cdot\bar{t}_{hyz}=8,6+0,64\cdot 10=8,6+6,4=15_{min}$$

Gönükmeler

1. Awtoulag ýangyç stansiýasynda üç sany ýangyç guýujy kolonka bar. Bu stansiýa bir minuduň dowamynda ortaça bir ulag gelýär. Her bir ulaga ortaça 4 minutlap hyzmat edilýär. Bu ýangyç stansiýasynyň meýdamçasy diňe üç sany ulagyň garaşmagy üçin niýetlenendir. Stansiýanyň stasionar häsýetlendirjilerini kesgitlemel.

4.3. Nobatdaky garaşma orny çäklendirilmedik köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň esasy häsýetlendirjileri.

Indi bolsa ulgamda garaşmak üçin niýetlenen orunlaryň sanynyň çäklendirilmedik ýagdaýyna garalyň. Bu ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafy aşakdaky ýaly bolar;

$$\boxed{S_0}\underset{\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\boxed{S_1}\underset{2\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\boxed{S_2}\underset{3\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots\boxed{S_{n-1}}\underset{n\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\boxed{S_n}\underset{n\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots\boxed{S_{n+m}}\underset{n\nu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}}\cdots$$

Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerini goşma orny çäklendirlen ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerinden $m \to \infty$ predele geçmek bilen alynýar.

Ulgamyň predel ýagdaý ähtimallyklaryny hasaplamak üçin (5), (7), (8) formulalarda $m \to \infty$ predele geçemizde $\rho/n < 1$ bolýar diýip kabul etmeli. Beýle bolanda progresiýa ýygnanýar we ulgamda stasionar režim öz güýjüni saklaýar. Şeýlelikde, bu ulgamyň predel ýagdaý ähtimallyklary üçin

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!}P_0, \quad 1 \le k \le n,$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{n!\,n^{k-n}}P_0, \quad k \ge n,$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{k}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-q)}\right]^{-1}$$

formulalary alarys.

Bu ulgama gelen islendik talaba haçan hem bolsa hyzmatedilýär (çünki nobat çäksiz), şonuň üçin hem

$$P_{ýit}=0, \ q=1, \ A=\lambda q=\lambda$$

Boljakdygy düşnüklidir.

Ulgamyň doly bolan enjamlarynyň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}\cdot P_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

Bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir. Soňky toplum formylalary jemlemek arkaly ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyny taparys;

$$\bar{ž} = \bar{k} + \bar{r}.$$

Talabyň nobatdaky ortaça garaşma wagtyny we onuň ulgamda sarp edýän ortaça wagtyny aşakdaky formulalaryň kömegi bilen hasaplarys;

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \qquad \bar{t}_{ulg} = \bar{t}_{gar} + \frac{1}{\nu}.$$

<u>Mysal1.</u>

Awtoulag ýangyç stansiýasy üç sany sany ýangyç guýujy enjamdan (kolonkalar) ybarat bolup, bu stansiýa ýangyja mätäç bolan ulaglaryň λ=0,2 intensiwlikli (minutda ortaça 0,2 ulag) ýönekeý akymy gelýär. Her bir ulaga ortaça 5 minutlap hyzmat edilýär. Ýangyç guýdurmak üçin garaşma orunlaryň sany (nobatyň uzynlygy) çäklendirilmedikdir. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerini hasaplamaly.

<u>Çözlüşi.</u>

Meseläniň şertine görä

$$n = 3, \qquad \lambda = 0{,}4, \qquad \nu = \frac{1}{\bar{t}_{hyz}} = \frac{1}{5} = 0{,}2, \qquad \rho = 2, \qquad \frac{\rho}{n} =$$

bolar. Bu ýerden hem

$$P_0 = \left[1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right]^{-1} = \frac{1}{9}$$

alarys. Diýmek bu ulgam iş wagtynyň $\frac{1}{9}$ bölegini boş geçirer (ýagny bir sutkanyň dowamynda ortaça 160 minutlap stansiýada hiç hili ulag bolmaz).

Doly kolonkalaryň ortaça sany

$$\bar{k} = \rho = 2,$$

nobatdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{2^4}{2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

ulgamdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{\check{z}} = \bar{k} + \bar{r} = 2 + 1\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3},$$

talabyň ortaça garaşma wagty

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 3_{min}20_{sek}$$

talabyň ulgamda sarp edýän ortaça wagty hem

$$\bar{t}_{ulg} = \bar{t}_{gar} + \bar{t}_{hyz} = 3_{min}20_{sek} + 5_{min} = 8_{min}20_{sek}$$

deň bolar.

Gönükmeler.

1. Teatryň bilet kassasynda bir sany kassir işleýär. Bu kassa bilet satyn almak üçin her minutda iki sany tomaşaçy gelýär. Her bir müşderä bilet satmak üçin kassair ortaça 20 sekuntlap hyzmat edýär. Bu kassada nobatyň uzynlygy çäklendirilmedikdir. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerini tapmaly.
2. Öz-özüňe hyzmat edilýän dükanda 2 sany kassir işleýär. Olar müşderileriň alan harytlaryny barlaýarlar we ol harytlaryň tölegini kabul edýärler. Kassalardan her sagadyň dowamynda ortaça 48 sany müsderi geçýär we her bir kassir her bir müşderä ortaça 2 minutlap hyzmat edýär. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerini kegitlemeli.

Edebiýat

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Учебник.–М.: Наука.–1977г. 495с.

2.Курош А.Г. Курс высшей алгебра. Учебник.–II-е изд. стереотип.-М.: Наука.-1975г.

3.Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. Учебник.–М.: Наука.–1984г.

4.Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.-М.:Наука.-1982г.

5.Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры ОНТИ-НКТП-СССР.-1937.

6.Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие.-М.:Наука-1984.-336с.

Mazmuny