

TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRRLIGI
MAGTYMGULY ADYNDAKY TÜRKMEN DÖWLET
UNIWERSITETI

Annaorazow O., Kömekow B., Kerimow T., Geldiýew
H., Öwezow A.

OÝUNLAR NAZARYÝETI WE OPERASIÝALARY
DERŇEMEK

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat – 2010

O. Annaorazow, B. Kömekow, T. Kerimow, H. Geldiýew, A. Öwezow

Oýunlar nazaryeti we operasiýalary derňemek. – Aşgabat, 2010

Okuw kitabynda oýunlar nazaryeti we operasiýalary derňemek dersiniň esasy düşüňjeleri beýan edilýär. Köpsanly mysallar işlenip görkezilýär. Bu kitapdan talyplar we matematika mugallymlary peýdalanyp bilerler.

© O. Annaorazow we başg., 2010 ý.

Giriş

Mälim bolşy ýaly ylmy-tehniki progresiň häzirki pajarlap ösýän döw-
ründe matematikany çuňňur öwrenmekligiň zerurlygy öňkä garanyňda has
artdy. Bu okuw kitbynda Oýunlar nazaryýeti we operasiýalary derňemegiň
esasy düşüňjeleri beýan edilýär. Okuw kitaby Oýunlar nazaryýeti we
operasiýalary derňemek dersi boýunça okuw maksatnamalaryna doly gabat
gelýär. Getirilýän nazary maglumatlary berkitmek üçin köp sanly anyk
mysallar işlenip görkezilýär. Okuw kitaby matematika hünärini ele alýan
talyplara niýetlenendir.

$$\max(\min) C(x) = \sum_{j=1}^n c_j * x_j \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j * b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (1.6)$$

Ýokardaky (1.1) funksiýasyna (1.1)-(1.3) meseläniň maksat funksiuýasy, (1.2) we (1.3) şertlere bolsa ol meseläniň çäklendirijileri diýilýär.

Eger-de çyzykly programmirlemegiň (1.1) - (1.3) meselesindäki çäklendirijileriň (1.2) ulgamy deňlik görnüşinde berlen bolsa, onda ol mesele kanonik görnüşinde berlendir diýilýär.

Käbir ýagdaýlarda bolsa (1.2) çäklendirijiler “ \leq ” ýa-da “ \geq ” ýaly deňsizlikler görnüşinde berilýär.

Bu ýagdaýda (1.1)-(1.3) meselä çyzykly programmirlemegiň standart (ýa-da simmetrik) meselesi diýilýär.

Eger-de meseläniň çäklendirijileriniň (1.2) ulgamy hem deňlikleri, hem-de deňsizlikleriözünde saklaýan bolsa, onda (1.1)-(1.3) meselä çyzykly programmirlemegiň umumy meselesi diýilýär.

Üýtgeýän ululyklaryň (1.2)-(1.3) çäklendirmeleri kanagatlandyryýan islendik $X = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ çözüwi bolsa meseläniň optimal çözüwi diýilýär.

Çyzykly programmirlenmegiň meseleleriniň umumy häsiýetlerini we onuň usullaryny öwrenmäge girişmezden öň olar bilen käbir anyk mysallaryň üstünde tanyşalyň.

Mysal 1. Tikiňçilik sehinde 840m, bir penjegi tikmeklik üçin bolsa 3m mata sarp edilýär. Bu she satylan her bir halatdan 6 manat, satylan her bir penjekden bolsa 3 manat girdeýji gazanýar. Eger-de taýýarlanan halatlaryň sanynyň 150-den, taýýarlanan penjekleriň sanynyň hem 200-den köp bolmazlyk şerti berlen bolsa, onda sehiň maksimum girdeýjini almagy üçin taýýarlanan halatlaryň we penjekleriň sanyny kesgitlemeli.

Çözülişi:

Bu meseläni analizläliň. Ilki bilen haýsy ululyklary bu meseledäki näbelli (üýtgeýän) ululyk hökmünde kabul etmelidirini kesgitlemeli. Meseläniň şertine görä, gözlenýän näbelli ululyklarymyz taýýarlanyljak halatlaryň we penjekleriň sanydyr. Onda aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

x_1 - halatlaryň sany;

x_2 - penjekleriň sany;

Şeýlelikde, gözlenýän çözüw $X=(x_1, x_2)$ görnüşinde bolar. Indi bolsa ol ululyklaryň özara baglanyşygyny, ýagny esasy çäklendirijileri kesgitlemek zerurdyr.

Bu maksat bilen biz ýokarda berlen meseläni täzeden jikme-jik öwrenmeli bolýarys. Meseläniň şertinden belli bolşy ýaly, taýýarlanjak halatlar we penjekler üçin sarp ediljek matanyň umumy möçberi (bu mukdar halatlar üçin $4x_1$ m, penjekler üçin hem $3x_2$ m) bar bolan 840m-den uly bolup bilmeýär. Diýmek meseläniň şertleriniň biri

$$4x_1 + 3x_2 \leq 840$$

deňsizlik bolar. Mundan başga-da ,

$$x_1 \leq 150$$

$$x_2 \leq 200$$

deňsizlikleriň hem çäklendirijileriň biri boljakdygy meseläniň şertinden äşgärdir. Bizniň maksadymyz bolsa ýokardaky deňsizlikleri kanagatlandyryan mümkin bolan x_1 we x_2 bahalaryň köplügiňiň içinden girdejiniň jemini, ýagny

$$C = 6x_1 + 3x_2$$

funksiýany maksimum baha alyp barýanlaryny tapmaktan ybaratdyr.

Umuman, ýokarda berlen meseläniň matematiki formulirowkasy (matematiki modeli) aşakdaky ýaly bolar:

$$\max C = 6x_1 + 3x_2 ,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 840; \\ x_1 \leq 150; \\ x_2 \leq 200; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Gönükmeler.

Aşakdaky meseleleriň matematiki modelini gurmaly:

1. Konditer sehi söwda kärhanalaryň buýurmalary esasynda iki görnüşli önüm öndürýär we olary öndürmek üçin dört görnüşli çig mal ulanýar. Her bir önümi öndürmek üçin sarp edilyän çig malyň mukdary aşakdaky tablisada berlendir.

Çig malyň görnüşü	1 kg önüm üçin sarp edilyän çig mal		B ₂ önüm
	B ₁ önüm	B ₂ önüm	

A_2	0,3	0,2	
A_2	0,9	1,1	
A_3	0,4	0	
A_4	0	0,3	
Girdeýji,man			

Sehiň netijede aljak girdeýjisiň maksimum bolmaklygy üçin öndüriljek önümiň matematiki modelini gurmaly.

2. A we B önümi öndürmekli üçin 100 kg demir bar. Bir sany A önümi öndürmekli üçin 2 kg, bir sany B önümi öndürmeklik üçin hem 4 kg demir harçlanýar. Eger-de bir sany A önüm 3 manatdan, bir sany B önüm hem 2 manatdan satylyan bolsa şeýlede ýasalan A önümiň umumy sany 40-dan, ýasalan B önümiň umumy sany hem 20-den uly bolmazlyk şerti belli bolsa, onda ol önümleri satylanda alynjak puluň maksimum bolmaklygy üçin önümçilik meýilnamasynyň matematiki modelini gurmaly.

3. Ýygnaýjy sehiň öndürijilik kuwwaty bir günde A görnüşli önümiň 120 sanysyny, B görnüşli önümiň hem 360 sanysyny ýygnamaklyga mümkinçilik berýär. Tehniki barlag bölümi bir günün dowamynda şol ýada beýleki önümden (tapawudy ýok) jemi 200 sanysyny öz üstünden geçirýär. Eger-de A görnüşli önümiň B görnüşli önümden dört esse gymmatdygy belli bolsa, onda önümleri satylanda alynjak peýdanyň maksimum bolmaklyk şerti bilen taýýar önümi goýbermekligiň matematiki modelini gurun.

4. Üç sany daýhan birleşiginden bazara getirilýän soganyň 1 kilogramynyň bahasy her daýhan birleşigi üçin deňişlilikde 12,10 we 8 teňňä barabardyr. Ol daýhan birleşikleriniň her birinde 1 tonna sogany ulaga ýüklemeklik üçin deňişlilikde 1, 6 we 5 minut wagt sarp edilýär. Sogany häzirki döwrüň talaplaryna laýyklykda bellenen ýerine daşamaklyk üçin 12 tonna sogany ýüklemeklik üçin sarp-edilýän wagt 20 minutdan köp bolmaly däldir.

Eger-de her bir daýhan birleşigi satmaklyk üçin deňişlilikde 10,8 we 6 tonna sogany bölüp

Bolsa onda bahasy minumym bahany almanlygy öçin haýsy daýhan birleşiginden näçe mukdardaky sogany bazara getirmeli? Meseläniň modelini gurmaly.

1.2 Çyzykly programmirlenmegiň esasy meselesi.

Biz bu bölümde çäklendirijileri deňlikler bolan çyzykly
 programmirlemegiň meselesine garays. Beýle meselelere çyzykly
 programmirlemegiň meselesiniň kanonik görnüşi ýa-da çyzykly
 programmirlemegiň esasy meselesi (CPEM) diýip at berilýär.

Çyzykly programmirlemegiň esasy meselesi aşakdaky görnüşde berilýär:

üýtgeýän ululuklaryň

x_1, x_2, \dots, x_n köplüğü berilendir.

Bu üýtgeýän ululuklaryň deňlemeleriň

[illegible]

Ulgamyny kanagatlandyrýan we mundan başga-da

$$C = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \quad (2.2)$$

Funksiýany minimuma getirýän otrisatel bolmadyk bahalaryny tapmaly.

ÇPEM-niň ýol bererli çözüwi

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

üýtgeýän ululuklaryň (2.1) deňlemeleri kanagatlandyran islendik köplügi bar. Onuň optimal çözüwi bolsa ýol bererli çözüwleriniň arasyndan (2.2) funksiýany öz minimum bahasyna getirýän çözüwi bolar.

görnüşe geler. $r=n$ bolandygy üçin

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Bolar we ÇPEM-iň ýeke-täk x_1, x_2, \dots, x_n çözüwi bolar. Eger-de x_1, x_2, \dots, x_n ululuklaryň iň bolmanda biri otrisatel bolsa, onda ol çözüw ýol bererli däl, netijede ÇPEM-iň çözüwi ýokdur.

Eger-de x_1, x_2, \dots, x_n ululuklaryň ählisi hem otrisatel däl bolsa, onda ol çözüw ýol bererlidir we optimaldyr (çünki başga çözüw ýok).

Görşümüz ýaly, bu triwial ýagdaý bizi gyzyklandyрмаýar. Şonuň üçin hem gelejekde biz diňe $r < n$ bolan ýagdaýa garajakdrys. Bu ýagdaýda çyzykly bagly bolmadyk çäklendirijileriň sany x_1, x_2, \dots, x_n näbellileriň sanyndan kiçi bolýar. Onda, eger ulgamyň çözüwi bar bolsa, ol çözüwleriň sany tükeniksizdir we $n-r$ sany näbellä islendik bahany bereris (erkin üýtgeýän ululyklar), galan r näbelli bolsa (bазis üýtgeýän ululuklar) beýlekileriň üsti bilen aňladylar.

1.3. Çyzykly programmirlmegiň umumy meselesini grafiki usulda çözmek.

Goý, çyzykly programmirlmegiň meselesiniň çäklendirijileriniň ulgamy n sany näbelliden ybarat bolsun. Eger-de

$$n - m = 2$$

şert ýerine ýetýän bolsa, onda bu meseläni grafiki usulda çözmek mümkindir.

Bu ýagdaýda n sany näbelliniň iki sanysyny, aýdalyň

$x_1, \text{ we } x_2$ näbellileri erkin, galan m sany näbellini bolsa базis hökmünde alyp bilýäris. Netijede, m sany базis näbellileri erkin (azat) näbellileriň üsti bilen aşakdaky görnüşde aňladyp bolýar:

$$(3.1)$$

Sekil 3.1

Şekil 3.1

Beyleki x_3, x_4, \dots, x_n näbellilerin hem otrisatel bolup bilmeýärler, ýagny aşakdaky şertlerin ýerine ýetmekleri zerurdyr:

(3.2)

Bu şertleriň geometriki şekillendirilişine garalyň. Şokardaky şertleriň birini, mysal üçin, birinjisini alalyň:

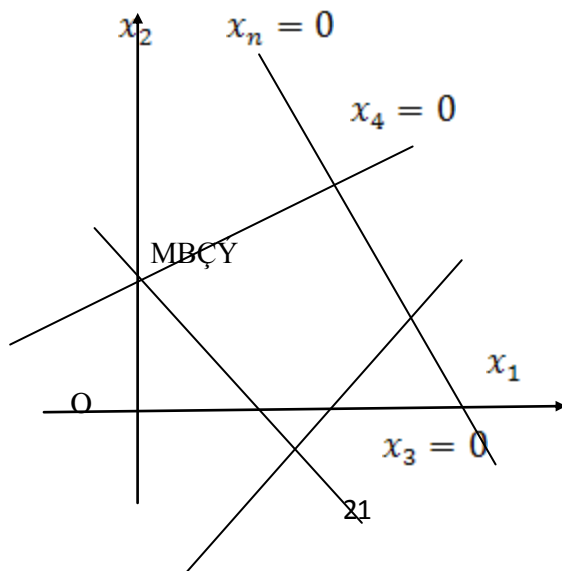
$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0$$

x_3 ululyga özüniň iň gyraky bahasy bolan nul bahany bersek

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$$

göni çyzygyň deňlemesini alarys. Bu göni çyzygyň üstünde $x_3 = 0$ boljakdygy düşnüklidir. Onuň bir tarapynda $x_3 \geq 0$, beýleki tarapynda bolsa $x_3 < 0$ deňsizlikler ýerine ýetýärler. $x_3 = 0$ göni çyzygyň $x_3 > 0$ şerti kanagatlandyryýan tarapyňy ştrih çyzyklar bilen belgiläliň (şekil 3.1).

Ýokardaky usulda beýleki $x_4 = 0, x_5 = 0, \dots, x_n = 0$ çäklendiriji göni çyzyklary gurarys we olaryň $x_i > 0$ ($i = \overline{4, n}$) şerti kanagatlandyryýan taraplaryny ştrihläräs. (şekil 3.2).



$$x_5 = 0$$

Şekil 3.2.

Şeýlelikde, biz n sany göni çyzyklary: iki sany koordinatalar okuny we $n-2$ sany göniçyzyklary gurdyk. Olaryň her biriniň haýsy hem bolsa bir tarapy mümkin bolan çözüwleriň ýarymtekizligini kesgitleýär. $x_3 = 0$ x_1 x_2 tekizligiň ol ýarymtekizlikleriň ählisine hem degişli bolan bölegini hem mümkin bolan çözüwleriň ýaýlasyny (MBÇÝ) emele getirýär (Şekil 3.2.).

Mysal.

Goý, meseläniň çäklendiriji şertleri üç sany çyzykly deňsizlikden we baş sany näbelliden ybarat bolan ulgamdan ybarat bolsun:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + 5x_2 - x_5 = 15 \end{cases}$$

Bu ulgamyň otrisatel bolmadyk çözüwleriniň içinden

$$C = x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 10$$

çyzykly funksiýanyň maksimum bahasyny berýän çözüwini tapmaklyk talap edilýär.

Çözüşi:

Azat näbelliler hökmünde, goý, x_1 , x_2 näbellileri alalyň we galan x_3 , x_4 x_5 näbellileri ol ikisiniň üsti bilen aňladalyň:

$$\begin{cases} x_3 = -5 + x_1 + x_2 \\ x_4 = 10 - x_1 - 2x_2 \\ x_5 = -15 + x_1 + 5x_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bu bahalary maksat funksiýasynda ornuna goýup we çäklendirijileriň ulgamynda x_3, x_4 we x_5 bazis näbellileri taşlap diňe x_1 , we x_2 azat näbellileriň üsti bilen aňladylan aşakdaky meseläni alarys:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 5x_2 \geq 15, \end{cases}$$

$$\max C = 2x_1 + x_2$$

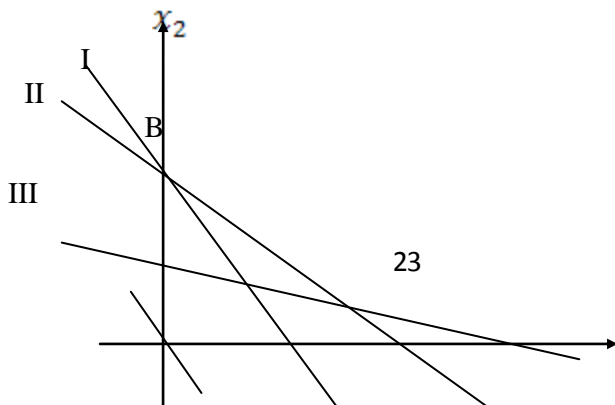
çözüwleriň köpburçlugyny gurmak üçin x_1 o x_2 tekizlikde

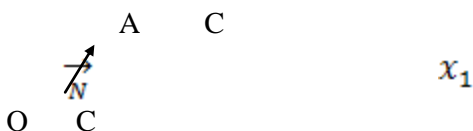
$$x_1 + x_2 = 5 \quad (\text{I})$$

$$x_1 + 2x_2 = 10 \quad (\text{II})$$

$$x_1 + 5x_2 = 15 \quad (\text{III})$$

çäk göni çyzyklaryny guralyň (şekil 3.3.).





Şekil 3.3.

Netijede, meseläniň mümkin bolan çözüwleriniň ýaýlasyny kesgitledik. Ol ýaýla depeleri A,B,C nokatlary bolan üçburçluga deňdir. Ol üçburçlugyň içindäki islendik nokat (A) ulgamyň çäklendirijilerini kanagatlandyrýar. Ol çözüwleriň içinden optimal bolanyňy saýlamak üçin hem C funksiýany we \vec{N} (2;1) wektory gurýarys. C göni çyzygyny \vec{N} wektoryň ugrunda öz-özüne parallel edip hereketlendirýäris. Şekil 3.3.-den mälim bolşy ýaly, bu göni çyzyk ABC üçburçlukdan iň soňunda C nokatda çykyp gidýär. Bu nokat hem C funksiýanyň özüniň maksimum bahasyny alyan nokadydyr. C nokady (II) we (III) göni çyzygyň kesişme nokadydyr. Onuň koordinatalaryny tapmak üçin hem deňlemeleriň

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 + 5x_2 = 15 \end{cases}$$

ulgamyny çözüýäris. Netijede

$$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = \frac{5}{3} \text{ taparys. } C(x) \text{ funksiýasynyň maksimum bahasy hem}$$

$$\max C = \frac{40}{3} + \frac{5}{3} = 15 \text{ deň bolar.}$$

Başdaky meseläniň optimal çözüwini tapmak üçin hem kesgitlenen x_1, x_2 bahalary (*) ulgamda ornuna goýsak:

$$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = \frac{10}{3}, x_4 = 0, x_5 = 0 \text{ çözüwi alarys.}$$

1.4. Çyzykly programmirlmegiň umumy meselesini çözmekligiň simpleks usuly.

Simpleks usuly bir-birleri bilen baglanşykly çyzykly deňlemeleriň we deňsizlikleriň optimal çözüwini tapmaklyga mümkinçilik berýär. Bu usulyň kömegi bilen mümkin bolan çözüwleriň içinden maksat funksiýanyň maksimum ýa-da minimum bahasyny berýän optimal çözüwini aňsatlyk bilen tapyp bolýar.

Simpleks usulyň algoritmini anyk mysalda görkezeliň.

Mysal.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 840 \\ x_1 \leq 150 \\ x_2 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$

Şertlerde max $C = 6x_1 + 3x_2$

Çözülişi:

Meseläni simpleks usul bilen çözmeklik üçin deňsizlikleriň ulgamyny deňlemeleriň ulgamyna öwürmek zerurdyr. Bu bolsa her bir deňsizlige položitel bahany alýan täze näbellileri goşmak arkaly amala aşyrylýar.

Çäklendirijileriň çep tarapyna x_3, x_4, x_5 näbellileri goşanymyzdan soňra täze

$$\text{Max } C = 6x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 840 \\ x_1 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 200 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1..5)$$

Meseläni alarys.

Meseläniň başlangyç simpleks tablisasyny gurmak üçin ilkinji nobatda deňlemeler ulgamyny goşmaça näbellilere görä çözelň:

$$x_3 = 840 - (4x_1 + 3x_2)$$

$$x_4 = 150 - x_1$$

$$x_5 = 200 - x_2$$

$$C = 0 - (-6x_1 - 3x_2)$$

Indi bolsa Tablissa 1-i guralyň

Tablissa 1.

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	840	4	3	1	0	0
x_4	150	1	0	0	1	0
x_5	200	0	1	0	0	1
C	0	-6	-3	0	0	0

Tablissanyň soňky setirinde otresatel koefisientleriň bardygyny aýdyňlaşdyrmak zerur. Beýle sanlar ol setirde iki sany: -6 we -3. $-6 > -3$ bolýandygy üçin x_1 näbelliniň ýerleşen sütünindäki 4 we 1 položitel sanlara üns berýäris. Bu sanlara degişli bolan azat goşuljylary şol sanlara bölýäris: $\frac{840}{4}$; $\frac{150}{1}$. Alnan droblaryň iň kiçisi 150-ä deňdir. Şeýlelikde ýol

beriji element 1-e deň boldy. Bu element x_4 -iň ñerleşýän setiriniň we x_1 -iň ýerleşýän sütüniniň kesişýän öýjüginde ýerleşýär. Ol setiri we sütüni oklar bilen belgileýäris. Diýmek biz täze tablissany gurmaly bolýarys. Bu täze tablissada bazis äýygeýän ululyklar x_3, x_1, x_5 bolar.

Ilkinji nobatda x_1 -iň setirindäki element leri tablisa 1-iň degişli setiriniň elementlerini ýol beriji elemente (ýagny 1-e) bölmek arkaly alynýar.

Täze guruljak tablissanyň beýleki elementlerini kesgitlemek üçin bolsa x_1 näbelliniň soňky alnan setiriniň elementlerini x_3 we x_5 näbellileriň setirleriniň elementleri bilen jemlänimizde x_1 näbelliniň sütüniniň elementleri nula bolar ýaly sana köpeltmeli we beýleki setirleriň üstüne goşup ýazmaly. Netijede, biz aşakdaky Tablissa 2-ni alarys:

Tablissa 2.

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	240	0	3	1	-4	0
x_1	150	1	0	0	1	0
x_5	200	0	1	0	0	1
C	900	0	-3	0	6	0

Tablissa 2-niň soňky setirinde -3 otresatel element bar, şonuň üçin hem ýokarda ýerine ýetirilen amallary ýene bir gezek gaýtalaň (bu gezek ýol beriji element 3-e deň), ñene-de bir erasyýany amala aşyrarsyň we netijede, Tablissa 3-i alarys.

Tablissa 3.

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
---------------------	--------------------	-------	-------	-------	-------	-------

X_2	80	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0
X_1	150	1	0	0	1	0
X_5	120	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
C	1140	0	0	1	2	0

Soňky tablisanyň setirinde otresatel elementleriň elementleriň ýokdugy sebäpli, bu tablisa garalyan meseläniň optimal çözüwini berýär:

Max $C=1140$, $x_1=150$, $x_2=80$, $x_3=x_4=0$, $x_5=120$.

Şeýlelikde, meseläni simpleks usulynda çözmekligiň algoritmi birnäçe etapdan ybaratdyr:

1. Deňsizlikleriň ulgamyny her bir deňsizlige bir položitel näbellini goşmak arkaly ony deňlemeler ulgamyna öwürmeli.
2. Başlangyç simpleks tablisany gurmaly:

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	...	X_{n+m}
X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0
X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...
X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	...	1
C	0	$-c_1$	$-c_2$...	$-c_n$	0	...	0

3. Daýanç çözüwiniň optimal bolup bolmalydygyny barlamaly. Egerde simpleks tablisanyň soňky setirinde otresatel element ýok bolsa, onda

bu çözüz optimaldyr. Eger-de bu şert ýerine ýetmeýän bolsa , onda çözüw optimal däldir we indiki etebe geçýäris.

4. Ýol beriji sütünü saýlamaly, ýagny

$$C_e = \min_j \{C_j\} \text{ Место для формулы.}$$

Prinsip boýunça täzedden bazis diýilip kesgitlenjek näbellini anyklamaly.

5. Bazis näbellileriň hataryndan çykaryljak näbellini saýlamaly, ýagny

$$\frac{b_k}{a_{kl}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \right\}, \quad a_{il} > 0$$

Prisip boýunça ýol beriji sütünü kesgitlemeli eger-de ähli a_{il} elementler üçin $a_{il} \leq 0$ bolsa, onda maksat funksiýasy çäklendirilmedikdir we bu ýagdaýda çözüwi tapmak mümkin däldir.

Täze simpleks tablisanyň elementlerini aşakdaky formulalar boýunça täzedden hasaplamaly:

$$b_k = \frac{b_k}{a_{kl}}; \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}; \quad (j=1, n+m, k\text{- ýol beriji setir}).$$

$$b_i = b_i - \frac{b_k}{a_{kl}} a_{il}; \quad (j=1, n+m); \quad a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il}; \quad (i=1, m; j=1, n+m);$$

$$C_0 = C_0 - \frac{b_k}{a_{kl}} C_e; \quad C_j = C_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} C_e; \quad (i=1, n+m);$$

6. 3-nji etaba geçmeli.

-20-

1.5. Çyzykly programmirlemegiň meselesini emeli bazis usuly bilen çözmek.

Çyzykly programmirlemegiň aşakdaky umumy meselesine garalyň:

$$C = \sum_j c_j x_j \quad (1)$$

funksiýanyň

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_j \quad (i=1, m) \quad (2) \quad \text{---}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, n) \quad \text{---}$$

şertlerdäki minimum bahasyny tapmaly, bu ýerde $b_j \geq 0$ we çäklendiriji-leriň (2) ulgamy birlik matrisany özünde saklamaýar. Birlik matrisany almak üçin (2) ulgamyň her bir deňligine emeli bazis diýlip atlandyryl-ýan y_i ($i=1, m$) näbellini goşýars we aşakdaky meselä garaýars:

$$\sum_j a_{ij} x_j + y_i = b_i$$

$$x_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad (j=1, n, i=1, m) \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Şertlerde

$$\min F = \sum_i y_i,$$

$$\min C = \sum_j c_j x_j$$

tapmaly. Bu meseläni çözmek üçin başlangyç simpleks tablisa gurulýar:

Bazis näbelliler	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	...	xn
y1	b1	a11	a12	a13	...	a1n

y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
...
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}
F	$\sum b_j$	$\sum a_{i1}$	$\sum a_{i2}$	$\sum a_{i3}$...	$\sum a_{im}$
C	0	-C ₁	-C ₂	-C ₃	...	-C _n

Hasaplamalar (F) setiriň položitel elementine ýol beriji sütüni saýlamaklyk bilen başlanýar. Ýol beriji setiri saýlamaklyk we simpleks tabli-sany täzededen hasaplamaklyk hem adaty simpleks usuly arkaly amala aşyrylýar.

Zterasiýa prosesi başlangyç meseläniň daýanç çözüwi tapylýança amala aşyrylýar: bu ýagdaýda (F) setiriň ähli elementleri nula deň bolýar. Mundan soňra meseläniň optimal çözüwini tapmak üçin (C) setiriň elementlerine görä ýol beriji sütüni kesgitlemek arkaly adaty simpleks usuly ulanylýar.

Mysal.

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 + 5,3x_4 \geq 0,2 \\ 9x_1 + 5x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 \geq 1,3 \\ x_1 \geq 0,08 \end{cases} \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4)$$

Şertlerinde

$$\min C = 5,2x_1 + 1,4x_2 + 0,5x_3 + 0,6x_4$$

tapmaly.

Çözülüşi:

(3) ulgamyň deňsizliklerini deňliklere öwirenimizden soňra deňlemele-riň

(4) ulgamyny alarys.

$$\begin{cases} x_1+0,5x_2+0,2x_3-0,3x_4-x_5=0,2 \\ 9x_1+5x_2+2,1x_3+0,9x_4-x_6=1,3 \\ x_1-x_7=0,08 \end{cases} \quad (4)$$

$$C = 5,2x_1+1,4x_2+0,5x_3+0,6x_4 \rightarrow \min.$$

Kömekçi y_1, y_2, y_3 näbellileri girizeliň:

$$\begin{cases} x_1+0,5x_2+0,2x_3-0,3x_4-x_5+y_1=0,2 \\ 9x_1+5x_2+2,1x_3+0,9x_4-x_6+y_2=1,3 \\ x_1-x_7+y_3=0,08 \end{cases} \quad (5)$$

$$C = 5,2x_1+1,4x_2+0,5x_3+0,6x_4 \rightarrow \min.$$

Deňlemeleriň (5) ulgamyny y_1, y_2, y_3 näbellilerine görä çözüliň we şol bir wagtyň özünde kömekçi $F = y_1, y_2, y_3$ funksiýany girizeliň. Soňky F funksiýa özüniň minimum bahasyna ymtylmalydyr.

Käbir hasaplamalardan soňra

$$\begin{cases} y_1 = 0,2 - (x_1+0,5x_2+0,2x_3+0,3x_4-x_5) \\ y_2 = 1,3 - (9x_1+5x_2+2,1x_3+0,9x_4-x_6) \\ y_3 = 0,08 - (x_1-x_7) \end{cases}$$

$$F=1,58-(11x_1+5,5x_2+2,3x_3+1,2x_4-x_5-x_6-x_7)$$

$$C=0-(-5,2x_1-1,4x_2-0,5x_3-0,6x_4)$$

Tablisa 1

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,2	1	0,5	0,2	0,3	-1	0	0
y2	1,3	9	5	2,1	0,9	0	-1	0
y3	0,08	1	0	0	0	0	0	-1
F	1,58	11	5,5	2,3	1,2	-1	-1	-1
C	0	-5,2	-1,4	-0,5	-0,6	0	0	0

(F) setiriň iň uly elementine görä ilki ýol beriji sütüni, soňra bolsa ýol beriji setiri kesgitleýäris. Ýol beriji element 1-e deň bolar.

Tablisa 2

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,1	0	0,5	0,2	0,3	-1	0	0

y2	0,6	0	5	2,1	0,9	0	-1	9
y3	0,08	1	0	0	0	0	0	-1
F	0,7	0	5,5	2,3	1,2	-1	-1	10
C	0,4	0	-1,4	-0,5	-0,6	0	0	-5,2

Ýene-de (F) setiriň iň uly položitel koefisientinden ugur alyp, x7 ýol beriji sütüni, (y2) ýol beriji setiri we 9 ýol beriji elementi kesgitleýäris. Netijede üçünji simpleks tablisany gurarys.

Tablisa 3

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0,03	0	-0,06	-0,03	0,2	-1	0,1	0
x7	0,067	0	0,56	0,23	0,1	0	- 0,1	1
x1	0,15	1	0,56	0,23	0,1	0	- 0,1	0
F	0,03	0	-0,06	-0,03	0,2	-1	0,1	0

C	0,55	0	15	0,7	- 0,1	0	- 5,2	0
---	------	---	----	-----	----------	---	----------	---

Soňky tablisada ýol beriji sütün x_4 , ýol beriji setir y_1 , ýol beriji element hem 0,2 bolar. **Indiki** simpleks tablisany gurarys.

Tablisa 4

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0,15	0	-0,3	0,15	1	-5	0,5	0
x_7	0,08	0	0,59	0,23	0	0,5	-0,15	1
x_1	0,17	1	0,59	0,23	0	0,5	0,15	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0,57	0	1,47	0,6	0	0,5	-4,7	0

Soňky simpleks tablisanyň (F) setiriniň ähli koefisientleri nula deňdir. Bu bolsa bize F funksiýa minimuma getirmek başardandygyny aňladýar, onuň bahasy hem nula deňdir. (C) setiriň iň uly položitel koefisientinden ugur alyp ýol beriji x_2 sütüni ýol beriji x_7 setiri we 0,59 elementini kesgitläris. Şeýlelik-de, indiki simpleks tablisa aşakdaky ýaly bolar:

Tablisa 5

Bazis näbellileri	Azat goşuljylar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0,2	0	0	0,27	1	-	0,4	
x_2	0,13	0	1	0,4	0	5,2	-0,3	0,5
x_1	0,09	1	0	0	0	0,8	3	1,6
						0		-1
C	0,37	0	0	0	0	-1,7	-	-2,4
							4,4	

Tablisa 5-iň iň soňky setirinde položitel koefisient ýokdur. Bu bolsa biziň optimal çözüwimiz

$$x_1=0,009, \quad x_2=0,13, \quad x_3=0, \quad C=0,37$$

bolar.

Gönükmeler.

Sahypa 25-26-daky mysallar.

1.6 Ikitaraply meseleler? (Двойственные задачи)

Çzykly programmirlemegiň iki sany meselesine garalyň.

$$\begin{aligned} & n \\ \max F = & \sum_{j=1}^n c_j x_j \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & n \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq & b_i \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, n, i=1, m)$$

we

$$\begin{aligned} & m \\ \min Z = & \sum_{i=1}^m b_i y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & m \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq & c_j \end{aligned} \quad (2)$$

$$y_i \geq 0 \quad (j=1, n, i=1, m).$$

Bu meseleleriň aşakdaky häsiýetleri bardyr:

1. Eger-de birinji meselede çyzykly funksiýanyň maksimum bahasyny tapmaly bolsa, onda ikinji meselede çyzykly funksiýanyň minimum baha
2. syny tapmaly;
3. 2.Birinji meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisientleri ikinji meseläniň çäklendirijileriniň ulgamynyň azat goşuljylaryna deňdir;
4. 3.Birinji meseläniň çäklendirijileriniň azat goşuljylary ikinji meseläniň maksat funksiýasynyň koeffisientlerine deňdir.;
5. 4. Çäklendirijileriň ulgamlaryndaky käbellileriň koeffisientleri bir-birlerine görä transpanirlenen matrisalar görnüşinde berilýär;
6. 5. Bir meseläniň çäklendirijileriniň ulgamyndaky deňsizlikleriň sany beýleki meseledäki käbellileriň sanyna deňdir;
7. 6.Käbellileriň otrisatel dällik şerti meseleleriň ikisinde hem bardyr.
8. Şu görnüşdäki meseleleri özara ikitaraply meseleler diýilýär.
9. Göni we ikitaraplaýyn çözüwleriniň arasyndaky baglanyşyk aşakdaky lemmanyň we teoremalaryň üsti bilen görkezilýär.
10. Lemma: (1) we (2) meseleleriň käbir X^* we Y^* çözüwleri üçin $F(x^*)=Z(y^*)$ şert ýerine ýetýän bolsa, onda X^* - bu başlangyç meseläniň, Y^* bolsa ikitaraplaýyn meseläniň optimal çözüleridir.
11. Teorema1: Düşnüksiz
12. Teorema2: (1) meseläniň $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ çözüwi we (2) meseläniň $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ çözüleri tapyylan bolsun. Onda diňe
13. $(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0 \quad (j = \overline{1, n})$

14. Bolan ýagdaýynda ol çözüwler optimaldyr.
15. Goý, B-bu (1) meseläniň optemal çözüwiniň bazisiniň wektorlarynyň matrisasy, \bar{C} - bazis näbellileriň bahalarynyň wektory bolsun. Onda ikitaraplaýyn meseläniň optimal çözüwi

$$16. \bar{Y} = \bar{C} \cdot B^{-1}$$

17. deňdir.

Ikitaraplaýyn meseleleriň jübütleri aşakdaky birnde bolup biler:

I.	Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele
	$\min F = CX$	$\max Z = YB$
	$AX = B$	$YA \leq C$
	$X \geq 0$	
II.	Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele
	$\max F = CX$	$\max Z = YB$
	$AX = B$	$YA \geq C$
	$X \geq 0$	
III.	Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele
	$\min F = CX$	$\max Z = YB$
	$AX \geq B$	$YA \leq 0$
	$X \geq 0$	$Y \geq 0$
IV.	Başlangyç mesele	Ikitaraplaýyn mesele

$$\min F = CX$$

$$AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

$$\min Z = YB$$

$$YA \geq 0$$

$$Y \geq 0$$

Mysal. Başlangyç mesele

$$\begin{cases} 13x_1 + 12x_2 \leq 260 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 124 \\ 3x_1 + 14x_2 \leq 280 \end{cases}$$

şertlerde $F = 12x_1 + 10x_2$ funksiýanyň maksimum bahasyny tapmaly.

Ikitaraplaýyn mesele:

$$\begin{cases} 13y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 12 \\ 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

18. Şertlerde

19. $Z = 260y_1 + 124y_2 + 280y_3$

20. Funksiýanyň minimum bahasyny tapmaly.

21. Çözülüş: Başlangyç meseläniň çözüwini simpleksa usuly bilen taparys:

22. (tablissa 1-3)

Tabl

Bazis	Bazisiň O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

x_3	0	260	13	2	1	0	0
x_4	0	124	4	4	0	1	0
x_5	0	280	3	14	0	0	1
F	-	0	-12	-10	0	0	0

23.

Tablissa2

Bazis	Bazisiñ O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	12	20	1	0.15	0.08	0	0
x_4	0	44	0	3.4	-0.3	1	0
x_5	0	20	0	13.5	-0.23	0	1
F	-	240	0	-82	0.0	0	0

24.

Tablissa3

Bazis	Bazisiñ O	B	12	10	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	12	18	1	0	0.09	-0.04	0
x_2	10	13	0	1	-0.09	0.3	0
x_5	0	47	0	0	0.22	-4	1
F	-	346	0	0	0.22	2.4	0

25.

26. Başlangıç meseläniñ optimal çözüwiniñ $x^*=(18;13;0;0;47)$ we $\max F=34.6$ bolýandygyny iki taraplaýyn meseläniñ hem optimal çözüwiniñ Tablissa 3-iñ x_3, x_4, x_5 sütünleriniñ soňky setirinden $y^*=(0.22;2.4;0)$ we $\min Z=346$ bolýandygyna göz ýetirdik.

27. Gönükmeler
28. Sah.31-däki meseleler
- 29.
30. 1.6 Ikitaraplaýyn simpleks usuly.
31. Eger-de çyzykly programirlemegiň meselesinde bazisler poležitel bolup, çäklendirijileriň ulgamyndaky azat goşuljylar islendik alamatly bolanda ol meseläni ikitaraplaýyn simpleks usuly bilen aňsatlyk bilen çözülýär. Bu usul çäklendirijileriň ulgamynda amala aşyrylýan öwürmeleriň sanyny azaltmaga, şeýle hem sipmleks tablissanyň ölçegini kiçeltmäge mümkinçilik berýär. Ikitaraplaýyn simpleks usulynyň algoritmine anyk mysalyň üstünde garalyň
32. Mysal:
33. $F=2x_1 - x_2 + x_3$
34. Funksiýanyň
35.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \end{cases}$$
36. $x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3)$
37. Şertlerdäki maksimum bahasyny tapmaly
38. Çözülişi:
39. Ýokardaky deňsizlikleriň birinjisini -1-e köpeldenimizden soňra meseläni kanonik görnüşde ýazarys:
40.
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$
41. $x_j \geq 0, (j = 1,2,3),$
- 42.
- 43.
- 44.
- 45.
46. -29-
47. Max $F=2x_1-x_2+x_3$
48. Indi bu meseläni adaty simpleks usuly bilen çözüäris(Tablisa 1-2)

49.

Tablisa-1

Bazis	Bazism C	Mat goş B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	-6	-1	-1	-1
x_5	0	2	2	-1	1
F		-2	1	-1	0

Tablisa-2

Bazis	C	B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	0	-5	0	-3/2	-1/2
x_5	2	1	1	-1/2	1/2
		2	0	0	0

50.

51. Tablisa 2-niň soňky setirinde otrisatel elementleriň bolmazlygy çözüwiň optimaldygyny,emma B sütüniň elementlerinde otrisatel elementleriň bolmagy hem ol çözüwiň ýol bererli dälidigini aňlad-ýar.Ikitaraplaýyn simpleks usulyny ulanyp bu çözüwi ýol bererli çözüwe öwüreris.

52. Ýol beriji setiri B sütüniň otrisatel elementleriniň absolýut ululuklarynyň iň ulusuna görä saýla-rys. Biziň mysalymyzda ol birinji setirdir.
- 53.
- 54.
55. Ýol beriji sütüni bolsa iň soňky setiriň elementleriniň ýol beriji setiriň otrisatel elementlerine bolan gatnaşygynyň absolýut ululyklarynyň iň kiçisine görä saýlanýar. Egerde ýol beriji setirde hiç hili atresatel element ýok bolsa, onda meseläniň çözüwi ýokdyr. Biziň garaýan mysalymyzda ýol beriji sütün ikinji, ýol beriji element hem $a = -3/2$ bolar. Täze simpleks tablisany gurmak üçin hem adaty simpleks usuly ulanýarys (Tablisa-3). Eger-de soňky alynan çözüwi ýene-de ýol bererlik däl bolýa, onda yokardaky proses ýene-de gaýtalanýar.

Tablisa-3

Bazis	C	B	2	-1	1
			x_1	x_2	x_3
x_4	-1	10/3	0	1	-1/3
x_5	2	8/3	1	0	2/3
		2	0	0	0

- 56.
57. Tablisa 3-iň soňky setirinde otrisatel elementleriň ýokdygy alnan daýanç çözüwiň optimaldygyny aňladýar. Optimal çözüwe görä

58. $\text{Max} F=2$

$x_2=10/3$

59.

$x_1=8/3$

$x_3=0$

60. Gönükmeler:Sah-34-däki gönükmeler.

1.7. Çyzykly programmirlmegiň ulag meselesi.

Ulag meselesi- bu bir jynsly önümi üpjün edijilerden sarp ediljere daşamandaky sarp edilýän çykdaýjynyň minimum bahasyny tapmak we şol meýilnamany düzmekden ybaratdyr.

Ulag meseläniň şertleri tablisa görnüşinde beriyär.

Sarp edijiler Üpjün edijiler		1	2	...	j	...	N
		B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
1	A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}		C_{1j} X_{1j}		C_{1n} X_{1n}
2	A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2j} X_{2j}		C_{2n} X_{2n}
...	...						
i	A_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}		C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}
...	...						
m	A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mj} X_{mj}		C_{mn} X_{mn}

Tablisadaky C_{ij} koeffisientler i-nji üpjün edijiden j-nji sarp edijä önümiň bir bölegini daşamak üçin sarp edilýän çykdaýjy A_i —bu i- nji üpjün edijiniň kuwwaty (gory), B_j bolsa j-nji sarp edijiniň talabydyr. Tablisadaky X_{ij} hem i-nji üpjün edijiden j-nji sarp edijä daşamaly ömümiň gözlenýän mukdary.

Ulag meseläniň matematiki modeli aşakdaky ýalydyr:

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

çyzykly funksiýanyň

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = A_i \quad (i=1,2,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = B_j \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

Şertleri kanagatlandyryan iň kiçi bahasyny tapmaly.

Eger-de ulag meselesi

$\sum_i A_i = \sum_j B_j$ deňligi kanagatlandyryan bolsa, onda oňa ýapyk (ýa-da dogry bolanşly)

Ulag meselasi diýilýär. Eger-de ol mesele ýokardaky deňligi

kanagatlandyрмаýan bolsa, ýagny $\sum_i A_i \neq \sum_j B_j$ onda oňa açyk (ýa-da nädogry bolanşly) ulag meselesi diýilýär.

Nädogry balansly ulag meselsini çözmeklik üçin oňa fiksiw (emeli) üpjün edijini (sarp edijini) goşmak arkaly ony dogry balansla öwrülýär we ondan soňra çözülýär.

Eger-de $\sum_i A_i < \sum_j B_j$ bolýan bolsa, onda bu meselä umumy gory

$$A_{m+1} = \sum_j B_j - \sum_i A_i$$

deň bolan we daşamaklygyň bahasy $C_{m+1, j} = 0$ ($j = \overline{1, n}$) bolan emeli üpjün ediji goşulýar (girizilýär). Eger $\sum_j B_j > \sum_i A_i$ bolýan bolsa onda ol meselä umumy talaby

$$A_{m+1} = \sum_i A_i - \sum_j B_j$$

Daşamaklygyň bahasy bolsa $C_{i, n+1} = 0$ ($i = \overline{1, m}$) deň bolan emeli sarp ediji girizilýär.

Ulag meselsiniň optimal çözüwini tapmaklyk prosesi onuň daýanç çözüwini tapmakdan başlanýar. Ulag meselesiniň başlangyç

Daýanç çözüwini tapmaklygyň birnäçe usullary bardyr. Olary mysallarda görkezeliň.

Demirgazyk-günbatar burçy usuly.

Goý ulag meselesiniň şertleri Tablisa 1-däki ýaly berlen bolsun.

$B_j \backslash A_i$	75	80	60	85
100	75^6	25^7	3	5
150	1	55^2	60^5	35^6

50	18	10	20	50 ¹
----	----	----	----	-----------------

Demirgäyk-güngatar burçy 4 uauly bilen ilkinji daýanç çözüwi tapalyň
 Tablisa 1-iň öýjükleri demirgäyk-günbatar burçundan doldurylyp başlanýar.

$$X_{11}=\min \{A_1, B_1\}=\min \{100, 75\}=75; X_{i1}=0(i=2,3)$$

Bolar we indi

$$X_{22}=\{150, 80-25\}=55; x_{32}=0;$$

$$X_{23}=\min \{150-55, 60\}=60; X_{33}=0;$$

$$X_{24}=\min \{150-55-60, 85\}=35;$$

$$X_{34}=\min \{50, 85-35\}=50$$

Şunluk bilen berlen meseläniň ilkinji daýanç çözüwini gurdyk. Tablisa 1-den belli bolşy ýaly , bu çözüw hiç hili tikli özünde saklamaýar we alty sany $(m+n-1=3+4-1=6)$ položitel daşamaldanybaratdyr, diýmek, bu çözüw daýanç çözüwidir. Onuň bahasy bolýa

$$C=6$$

$$\cdot 75 + 7 \cdot 25 + 2 \cdot 55 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 35 + 1 \cdot 50 = 1295$$

Deň bolar.

Iň kiçi bahalar usuly.

Bu usulyň kömegi bilen ýokarda garalan mysalyň daýanç çözüwini tapalyň. Onuň tapylşyny tablisa 2-de görkezeliň

$B_j \backslash A_i$	75	80	60	85
100	6 5	7 5	3 60	5 35
150	1 75	2 75	5	6
50	8	10	20	1 50

Tablisadaky iň kiçi bahany saýlalyň . Ol baha bire deňdir we A_2B_1 we A_3B_4 öýjüklerde ýerleşendir. Ol öýjükleri aşakdaky görnüşde dolduralyňl:

$$X_{21}=\min\{150,75\}=75 \text{ we } x_{34}=\min\{50,85\}=50 .$$

Tablisanyň iň kiçi bahany A_2B_2 öýjüde ýerleşär, ony hem dolduralyň:

$$X_{22}=\min\{150-75,80\}=75.$$

Bu prosesi tä gordaky önümler gutarýança we ähli srp edijiler kanagatlanýança dowam etdirilýär we netijede Tablisa-2-ni alarys.

Alnan çözüw hiç hili sikli saklamaýar we alty sany polozitel daşamadan ybaratdyr , diýmek , budaýanç çözüwdür. Onuň bahasy bolsa

$$C=5*7+3*60+5*35+1*75+2*75+1*50=665$$

deň bolar.

Meseläniň daýanç çözüwi tapylandan soňra onuň optimal bolup-bolmalydygy barlanýar. Eger-de çözüw optimal bolmasa, onda üpjün etme tãzeden paýlanýar. Optimal çözüwi almaklyk üçin hem paýlanýş we potensiallar usullary ulanylýar.

Mysal 1.

Meseläni paýlanýş usuly bilen çözmeli.

Tablisa 3

$B_j \backslash A_i$	70	120	105	105
90	14	8	17	5
180	21	10	7	11
130	3	5	8	4

Çözülişi:

Başlangyç daýanç çözüwi iň kiçi bahalar usuly bilen çözüp, aşakdaky tablisany gurarys:

Tablisa 4

$B_j \backslash A_i$	70	120	105	105
90	14	$45^8 -$	17	$45^5 +$
180	4	75^{10}	105^7	11
130	70^3	$+^5$	8	-60^4

Bu çözüwiň bahasy

$$C = 8 \cdot 45 + 5 \cdot 45 + 10 \cdot 75 + 7 \cdot 105 + 4 \cdot 60 = 2520$$

bolar.

Alnan daýanç çözüwiň optimallygyny barlaýarlar. Onuň üçin bolsa her bir boş öýjük üçin Δ_{ij} häsiýetlen-diriji hasaplaýarlar:

$$\Delta_{11}=14-5+4-3=10;$$

$$\Delta_{13}=17-8+10-7=12;$$

$$\Delta_{21}=21-3+4-5+8-10=15;$$

$$\Delta_{24}=11-5+8-10=4;$$

$$\Delta_{32}=5-8+5-4=-2<0;$$

$$\Delta_{33}=8-7+10-8+5-4=4.$$

Bu ýerde $\Delta_{32}<0$ bolýandygy üçin çözüw optimal däldir. Täze daýanç çözüwe Δ_{32} -ä deňişli bolar. Zynjyr arkaly amala aşyrylýar.

Zynjyryň depeleri boş bolan öýjükden başlap, (+,-,+,-,...) alamatlar gezekleşip gelýärler.

Otrisetel ýarymzynjyrdaky daşajak ýükleriň göwrüminden minimumy saýlanylýp alynýar we daşajak ýükleriň mukdary täzeden paýlanýar:

$$\Lambda = \min_{\{ \}} 45,60 = 45.$$

we tablisa doldurylýar.

Tablisa 5

$B_j \backslash A_i$	70	120	105	105
90	¹⁴	⁸	¹⁷	⁵ 90
180	²¹	¹⁰ 75	⁷ 105	¹¹
130	³ 70	⁵ 45	⁸	⁴ 15

Bu meýilnama ediljek çykdaýjy

gazanar. Ol nokatlary hem göni çyzyklaryň üstünde ýerleşdirip, B_2B_2 gönisi bilen birleşdireris.

Edil şu usuly ulanyp B_3B_3 gönisini hem guranymyzdan soňra, çyzga görä utuşyň aşaky çägin kesgitläris we onda ordinatasy oýunyň bahasyna deň bolan iň uly ordinataly M nokadyny taparys. Birinji oýunçy üçin M nokatda kesişýän oňaly strategýalary kesgitläris. Ol B_2 we B_3 strategýalardyr:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = v \\ 0x_1 + 9x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

bolýandygyny göz önünde tutup, birinji oýunçynyň optimal strategýasyny taparys.

$$x_1 = \frac{7}{12}, x_2 = \frac{5}{12}, v = \frac{45}{12} = \frac{15}{4},$$

Edil şuna meňzeşlikde, ikinji oýunçynyň hem optimal strategýasyny kesgitläris.

$$\begin{cases} 5y_2 + 0y_3 = v \\ 2y_2 + 9y_3 = v \\ y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{3}{4}, y_3 = \frac{1}{4}, v = \frac{15}{4}.$$

Şeýlelikde, bu oýunyň çözüwi

$$x = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right), y = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ we } v = \frac{15}{4}$$

Şeýlelikde, bu oýunyň çözüwi

$$x = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right), y = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ we } v = \frac{15}{4}$$

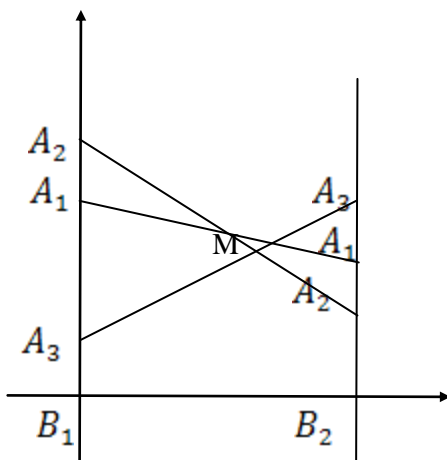
bolar.

II) oýunyň matrisasynyň ölçeginiň (3x2) bolandygy sebäpli, oýunyň çözüwini ikinji oýunçy üçin taparys.

Oýunyň grafiki şekilini geçen mysaldaka görä gurarys. (Şekil 2). Bu ýerde kesimiň başlangyç nokadyny B_2 strategiýa hökmünde kabul ederis.

B_1 we B_2 nokatlaryň üstünden ikin sany perpendikulýar geçireris we onuň üstünde birinji oýunçynyň utuşlaryny ýerleşdireris.

Birinji oýunçynyň strategiýalaryna degişli bolan göni çyzyklary guranymyzdan soňra, utuşyň ýokarky çägin kesgitläris we onuň üstündäki iň kiçi ordinatany M nokadyny taparys. Ol nokadyň ordinatasy hem oýunyň bahasyna deňdir.



Şekil 2.

Birinji oýunçynyň aktiw strategiýalary A_1 we A_3 bolar

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

we

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 = v \\ y_1 + 3y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

bolýandygyny göz önünde tutup, ikinji oýunçynyň optimal strategiýasyny kesgitleýis:

$$y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, v = \frac{7}{3}.$$

Edil şuna meňzeşlikde

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = \frac{7}{3} \\ 2x_1 + 3x_2 = \frac{7}{3} \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

ulgamdan

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{1}{3} \text{ taparys}$$

Şeýlelikde bu oýunyň çözüwi

$$x = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ we } v = \frac{7}{3} \text{ deň bolar.}$$

2.3. Matrisa oýunlary simpleks usuly bilen çözmek.

Aşakdaky matrisa bilen berlen oýuna garalyň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu oýunyň $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ optimal strategiýalaryny çyzykly programmirlenmegiň ikitaraplaýyn meseleleriniň çözüliş usulynda taparys.

Başlangyç mesele (birinji oýunçy üçin)

$$\max F = v;$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq v; (j = \overline{1, n}) \quad (1)$$

$$\sum_i x_i = 1;$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$$

görnüşde, ikitaraplaýyn mesele bolýar (ikinci oýunçy üçin)

$$\min F' = v$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v (\varepsilon = \overline{1, m})$$

$$\sum_i x_i = 1;$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$$

görnüşde, ikitaraplaýyn mesele bolýar (ikinci oýunçy üçin)

$$\min F' = 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v (\varepsilon = \overline{1, m})$$

$$\sum_j y_j = 1;$$

$$y_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

görnüşinde bolar.

Oýunyň bahasy bolan v ululyk belli däl, emma $v > 0$ bolýandygy kabul edilip bileris. Bu şert $x_{ij} \geq 0 (\varepsilon = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ bolan ýagdaýynda ýerine ýetýändir, ony bolsa matrisanyň ähli elementleriniň üstüne käbir

položitel M sany goşmak arkaly amala aşyryp bolar. Bu ýagdaýda oýunyň çözüwi üýtgemeyär we oýunyň bahasy M san artýar.

(1) we (2) meseleleriň çäklendirijilerindäki deňsizlikleriň ähli goşulyjylaryny v sana bölüp we $x'_i = \frac{x_i}{v}$, $y'_j = \frac{y_j}{v}$ belgilemeleri girizip, başlangyç çäklendirijileri üýtgederis.
 $\sum_i x_i = 1$ we $\sum_j y_j = 1$ şertlerden hem

$\sum_i x'_i = \frac{1}{v}$ we $\sum_j y'_j = \frac{1}{v}$ şertleri alarys. Netijede bolsa aşakdaky iki taraplaýyn meseläni alarys:
başlangyç mesele (birinji oýunçy üçin)

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x'_i \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$x'_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \text{ şertlerde}$$

$F = \sum_{i=1}^m x'_i$ funksiýanyň minimum bahasyny berýän

x'_1, x'_2, \dots, x'_m bahalary tapmaly;

ikitaraplaýyn mesele (ikinji oýunçy üçin)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq 1 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \text{ şertlerde}$$

$$F' = \sum_j y'_j$$

Funksiýanyň maksimum bahasyny berýän y'_1, y'_2, \dots, y'_n bahalary tapmaly.

Şeýlelikde, berlen oýuny çözmek üçin çyüykly programirlemegiň ikitaraplaýyn simmetrik meseleleriňjübütini aldyk. Meseläniň simmetrik häsýetinden peýdalanyň ilki bilen olaryň hasaplamany talap edýänini çözüp

bolýar, alnan çözüwiň netijesinde-de beýleki meseläniň çözüwini tapmak aňsat bolýar.

Mysal:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisa bilen berlen oýunyň çözüwini tapmaly.

Çözülişi: Oýun matrisasy atrusatel elementi özünde saklaýar

$(a_{11} = -1)$. Matrisanyň ähli elementine 1 sany goşup täze oýun alarys:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Meseläni çözmäge girişmezden öň onuň eýer nokadyny barlaýarys

$$\alpha = \max \min a_{ij} = 1, \beta = \min \max a_{ij} = 3$$

$\alpha \neq \beta$ bolýandygy üçin bu oýunyň çözüwigaeýsyk strategiýada bolar we onuň $v = \alpha$ bahasy $1 \leq v \leq 3$ aralykda ýatar.

Optimal $x = (x_1, x_2)$ we $y = (y_1, y_2, y_3)$ strategiýaly tapmaklyk çyzykly programmirlmegiň ikitaraplaýyn meselesini çöümek bilen meňzeşdir.

Başlangyç mesele (birinji oýunçy üçin)

$$\begin{cases} 7x'_2 \geq 1 \\ 6x'_1 + 6x'_2 \geq 1 \\ 3x'_1 + 2x'_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$x'_1 \geq 0, x'_2 \geq 0$$

Şertlerde

$$\text{Min } F' = x'_1 + x'_2$$

Tapmaly:

Ikitaraplaýyn mesele(ikinci oýunçy üçin)

$$\begin{cases} 6y'_2 + 3y'_3 \leq 1 \\ 7y'_1 + y'_2 + 2y'_3 \leq 1 \\ y'_1 \geq 0, y'_2 \geq 0, y'_3 \geq 0 \end{cases}$$

Şertlerde

$$\text{Max } F = y'_1 + y'_2 + y'_3$$

Tapmaly, bu ýerde $x'_i = \frac{x_i}{v}, y'_j = \frac{y_j}{v}, \min F' = \max F = \frac{1}{v}$.

Ikitaraplaýyn neseleleriň birini çözenimizden soňra olaryň beýlekisini aňsatlyk bilen çözeris.

Aşakdaky tablisa 1-4-de ikinci oýunçy üçin goýulan meseläniň çözüşi görkeüilendir.

Yablisa 1

Bazis	c	Azat goşuljy	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_4	0	1	0	6	3	1	0
y'_5	1	1	7	1	2	0	1
F'	-	0	-1	-1	-1	0	0

Tablisa 2

Bazis	c	Azat goşuljy	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_4 y'_5	0 1	$1/7$	0 1	6 $1/7$	3 $2/7$	1 0	0 $1/7$
F'	-	$1/7$	0	$-6/7$	$-6/7$	0	$1/7$

Tablisa 3

Bazis	C	Azat goşuljylar	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_2 y'_1	1 1	$1/6$ $5/12$	0 1	1 0	$1/2$ $3/4$	$1/6$ - $1/42$	0 $1/7$
F'	-	$2/7$	0	0	- $2/7$	$1/7$	$1/7$

Tablisa 4

Bazis	C	Azat goşuljylar	1	1	1	0	0
			y'_1	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5
y'_3 y'_1	1 1	$1/3$ $1/21$	0 1	2 -	1 0	$1/3$	0

				3/7		- 2/21	1/7
F'	-	8/21	0	4/7	0	5/21	1/7

Tablisa 4-de $y'_1=1/21$, $y'_2=0$, $y'_3=1/3$, $\max=F'8/21$ optimal çözüw alyndy. Bu ýerden hem

$$\partial = \frac{1}{\max F'} = \frac{21}{8}, \quad y_1 = y'_1 \partial = \frac{1}{8}, \quad y_2 = y'_2 \partial = 0, \quad y_3 = y'_3 \partial = \frac{7}{8}$$

alarys. Şeýlelikde ikinji oýunçynyň optimal strategiýasy $Y = \left(\frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}\right)$

bolar.

Iň soňky Tablisa 4-iň iň soňky setiriniň goşmaça y'_4 we y'_5 üýtgeýänleriniň garşysyndaky elementler hem birinji oýunçynyň optimal strategiýalarydyr:

$$X = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right).$$

Gönükmeler

Sahypa 64-däki meseleler.

2.4 Oýunlary çözmekligiň ýakynlaşan usuly (Braunyň usuly.)

Töleg matrisasy

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bolan oýuna garalyň. Bu oýuny Braunyň usuly bilen çözmek üçin aşakdaky zygyder iterasiýalar ýerine ýetirilýär:

- 1) A oýunçy haýsy hem bolsa bir A_1 strategiýasyny saýlaýar.(erkin);
- 2) B oýunçy hem A oýunçynyň utuşyny minimuma getirer ýaly özüniň B_j strategiýasyny saýlaýar;
- 3) A oýunçy B oýunçynyň utulyşyny maksimuma getirýän A_n strategiýasyny saýlaýar(a_{ij} – sütüniň i-njy elementi şertinden) we öňki ädimlerdäki umumy utuşyny hasaplaýar;
- 4) A oýunçynyň umumy utuşyny minimuma getirer ýaly B oýunçy özüniň B_o strategiýasyny saýlaýar we öňki ädimlerden gelyän umumy utulyşyny hasaplaýar;
- 5) Eger iterasiýalaryň sany n bolsa ,onda optimal strategiýalary kesgitlenýäris:

A oýunçy üçin $X = \left(\frac{t_1}{n}, \frac{t_2}{n}, \dots, \frac{t_m}{n} \right)$,

B oýunçy üçin $X = \left(\frac{s_1}{n}, \frac{s_2}{n}, \dots, \frac{s_n}{n} \right)$,

bu ýerde t_i we s_j degişlilikde i-nji setirdäki we j-nji sütünäki ýyldyzjyklaryň sany.

Ya-da bolmasa 3-nji ädime gaýdyp gelyäris.

Mysal.

Oýunyň töleg matrisasy berlipdir:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ony Braunyň usuly bilen çözmeli.

Çözülişi.

Braunýň usulyňy ulynyp bu oýunyň ýakynlaşan çözüwini taparys. Goý, A oýunçy A_1 strategiýasyny saýlasyn.

Töleg matrisasynyň aşagynda bu setiriň elementleri ýazylyar. B oýunçy bolsa B_2 strategiýasyny saýlaýar, çünki $a_{12} = 1$ element bu setiriň iň kiçi bahasydyr. a_{12} elementi (*) ýyldyzjyk bilen belgileýäris we matrisanyň sag tarapynda onuň ikinji sütüniň elementleri ýazylyar.

A oýunçy hem öz gezeginde A_2 strategiýasyny ulanýar, çünki a_{22}^{-3} element ol sütüniň iň ulusydyr. a_{22} elementi ýyldyzjyk bilen belgileýäris we A oýunçynyň geçen iki ädimdäki umumy utuşyny hasaplaýarys. (Utuşly strategiýalaryň deňişli elementlerini goşmak arkaly) We ony hem matrisanyň aşagynda ýazýarys. B oýunçy hem A oýunçynyň summar utuşyny minumyma getirer ýaly B_1 strategiýasyny saýlaýar. B oýunçynyň geçen iki ädimdäki summar utulyşyny kesgitleýäris we ony matrisanyň sag tarapynda ýazýarys we şç.m.

Aşakdaky Braunýň usuly bilen iterasion prosesiniň ilkinji 10 ädimi görkezilendir.

Tablisa 1.

2 1 9 1 3 4 5 6 7 8 10 11 13

1 3 7 3^* 4 7 10 13 16^* 19^* 20^* 23^* 24^*

4 2 4 2 6^* 8^* 10^* 12 14 16 20^* 22^* 26^*

2 1^* 9

3^* 4 16

7 6^* 20

$$11 \quad 8^* \quad 24$$

$$15 \quad 8^* \quad 24$$

Meseläniň çözüwine ýakynlaşma derejesi başlangyç strategiýasynyň saýlanyşyna we ädimleriň sanyna baglydyr.

$n=1$ bolanda

$$\frac{23}{10} \leq \vartheta \leq \frac{26}{10}, X = \left(\varphi \frac{5}{10}, \frac{5}{10} \right),$$

$$Y = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 0 \right)$$

IV Bölüm. Köpçülikleýin hyzmat ediş nazaryýetiniň modelleri.

4.1. Ýitgili hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirjileriniň hasaplanýşy.

Goý, köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamy biri-birleri bilen ekwiwalent bolan n sany hyzmat ediji enjamdan ybarat bolup, bu ulgama talaplaryň λ intensiwlikli ýönekeý akymy gelýän bolsun. Eger-de talabyň ulgama gelen pursatynda boş duran hyzmat ediji enjam bar bolsa, onda ol talap boş duran enjamlaryň haýsy hem bolsa birini eýeleýän we ol talaba hyzmat edilip başlaýar. Eger-de talabyň ulgama gelen momentinde hyzmat ediji enjamlaryň ählisi doly bolsa, onda ol talap ýitirilýär (ulgamy terk edýär).

Her bir talaba edilýän hyzmatyň T_{HYZ} dowamlylygy v parametrli

$$F(t) = P(T_{HYZ} < t) = 1 - e^{-\nu t} \quad (\nu > 0)$$

görkeziji kanun boýunça paýlanan üznüksiz tötän ululykdyr.

Ulgamyň ýagdaýlary diýip ondaky talaplaryň sanyna düşünjekdiris. Onda wagtyň islendik momentinde garalýan ulgam aşakdaky ýagdaýlaryň haýsy hem bolsa birinde bolup biler:

S_0 – ulgamda 0 talap bar;

S_1 – ulgamda 1 talap bar;

.....

S_n – ulgamda n talap bar.

Wagtyň t momentinde ulgamda k sany talabyň bardygyny

aňladýan wakany $S_k^{(t)}$ bilen belgilesek, onda bu wakanyň

ähtimallygyny $P_k(t) = P(S_k^{(t)})$ bilen belgiläris. Bu ulgamda bolup geçýän tötän proses üçin $t \rightarrow \infty$ bolanda $P_k(t)$ ýagdaý ähtimallyklary başlangyç şertlere bagly bolmadyk käbir P_k hemişelik sanlara ymtylýarlar (bu ýerde $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k$ predeliň bardygynyň subudyny görkezjek däldiris).

Biziň maksadymyz ulgamyň P_0, P_1, \dots, P_n stasionar ähtimallyklaryny we onuň häsiýetlendirijilerini tapmaktır.

Bu ulgama gelyän talaplaryň akymynyň ýönekeý akymdygy üçin h wagt aralygynda ulgama bir talabyň gelmekliginiň ähtimallygy $\lambda h + o(h)$, birden köp talabyň gelmekliginiň ähtimallygy bolsa $o(h)$ deň boljakdygy düşnüklidir.

Bize mälim bolşy ýaly, egerde talaba edilýän hyzmatyň dowamlylygy görkezijili kanun boýunça paýlanan bolsa, onda

hyzmatyň galan böleginiň dowamlylygynyň paýlanyş kanuny onuň haçan başlandygyna bagly däldir. Şuňa görä-de, eger-de haýsy hem bolsa bir hyzmat ediji enjam bir talaba hyzmat edip duran bolsa, onda ol hyzmatyň galan böleginiň dowamlylygynyň h wagtdan kiçi bolmazlygynyň ähtimallygy e^{-h} ; eger-de hyzmat ediji enjamlaryň haýsy hem bolsa k sanyso doly bolsa, onda olaryň ählisiniň ýene-de h wagtlap doly bolmaklarynyň ähtimallygy e^{-kh} ; h wagtyň dowamynda olaryň iň bolmanda biriniň boşamaklygynyň ähtimallygy hem

$$1 - e^{-kh} = kh - O(h)$$

deň bolar.

Bu ulgama talabyň gelmekliginiň we bir talaba edilýän hyzmatyň tamamlanmagynyň (hyzmat ediji enjamyň boşamaklygynyň) her biri ýönekeý wakadyr.

Wagtyň t momentinde ulgam S_i ýagdaýynda bolup, h wagt interwalyň dowamynda S_k ýagdaýyna geçmekliginiň şertli ähtimallygyny $P_{ik}(h)$ bilen belgiläliň, ýagny

$$P_{ik}(h) = P\left\{\frac{S_k^{(t+h)}}{S_i^{(t)}}\right\} \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq n)$$

Onda

$$P_{ik}(h) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n P_{ik}(h) = 1 \quad (1)$$

bojakdygy mälimdir.

Ýokardaky aýdylanlardan ugur alyp $h \rightarrow 0$ bolanda $P_{ik}(h)$ geçiş ähtimallyklaryny tapmak çylşyrymly däldir. Eger $|i - k| > 1$ şert ýerine ýetse, onda ulgamyň S_i ýagdaýyndan S_k ýagdaýyna geçmekligi üçin iň

bolmanda iki sany ýönekeý wakanyň ýüze çykmaklygy zerurdyr. Şonuň üçin hem ýokarda belläp geçişimiz ýaly,

$$\lim_{h \rightarrow 0} P_{ik}(h) = 0(h) \quad (|i - k| > 1)$$

(2)

bolýandyr.

h wagtyň dowamynda ulgamyň S_k ýagdaýyndan S_{k+1} ýagdaýyna geçmekligi üçin hem şol wagt interwalynda ulgama bir ýa-da ondan-da köp talap gelmelidir. Şeýlelikde,

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + O(h)$$

(3)

h wagtyň dowamynda ulgamyň S_k ýagdaýyndan S_{k+1} ýagdaýyna geçmekligi üçin hem şol wagtyň dowamynda bir ýa-da ondan-da köp talaba edilýän hyzmat tamamlanmalydyr, bu ýerden hem

$$P_{k,k-1}(h) = kh + O(h)$$

(4)

gelip çykýar.

Onda (2)-(4) aňlatmalardan we (1) deňlikden

$$P_{k,k}(h) = 1 - P_{k,k+1}(h) - P_{k,k-1}(h) + O(h) = 1 - \lambda h - kh + O(h)$$

boljakdygy äşgärdir.

$k=0$ we $k=n$ bolan ýagdaýynda hem

$$P_{0,0}(h) = 1 - \lambda h + O(h),$$

$$P_{n,n}(h) = 1 - n\lambda h + o(h)$$

alarys. Egerde $t > 0$, $h > 0$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq n$ bolsa, onda

$$P_{ik}(t+h) = \sum_{r=0}^n P_{ir}(t) \cdot P_{rk}(h) \quad (5)$$

bolýandyr. Bu baglylyk doly ähtimallygyň formulasynyň ýänekeýje ulanylyşynyň netijesidir.

Goý, $P_i(0)$ – bu wagtyň başlangyç momentinde ($t=0$) ulgamyň S_i ýagdaýynda bolmaklygynyň ähtimallygy bolsun ($0 \leq i \leq n$). Onda wagtyň t momentinde ($t \neq 0$) ulgamyň S_k ýagdaýynda ($0 \leq k \leq n$) bolmaklygynyň ähtimallygy doly ähtimallygyň formulasyna görä

$$P_k(t) = \sum_{i=0}^n P_i(0) P_{ik}(t)$$

deň bolar .

Eger-de (5) deňlemäniň iki tarapyny hem $P_i(0)$ ähtimallyga köpeldenimizden soňra ony i -e görä 0-dan n -e çenli jemlesek

$$P_k(t+h) = \sum_{r=0}^n P_r(t) \cdot P_{rk}(h) \quad (6)$$

deňlemäni alarys we oňa Çepman – Kolmogorowyň diýilip atlandyrylýar.

Geçiş ähtimallyklar üçin alnan aňlatmalary ulanyp, Çepman – Kolmogorowyň deňlemesinden

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - \lambda h) + P_1(t)\lambda h + o(h),$$

$$P_k(t+h) = P_{k-1}(t)\lambda h + P_k(t)(1-\lambda h - k\nu h) + P_{k+1}(t)(k+1)\nu h + o(h)$$

$$P_n(t+h) = P_{n-1}(t)\lambda h + P_n(t)(1-n\nu h) + o(h)$$

alarys. Bu ýerden hem ýönekeý amallardan soňra

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \nu P_1(t) + o(1),$$

$$\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -\lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + (k+1)\nu P_{k+1}(t) + o(1)$$

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_{n-1}(t) + n\nu P_n(t) + o(1)$$

aňlatmalary almak kyn dälär. $h \rightarrow 0$ bolanda ýokarky aňlatmalaryň sag tarapynyň predelleri bardyr, diýmek, $P_k(t)$ ýagdaý ähtimallyklarynyň önümleri hem bardyr. Şeýlelikde,

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + P_1(t),$$

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)P_k(t) + (k+1)\nu P_{k+1}(t) \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

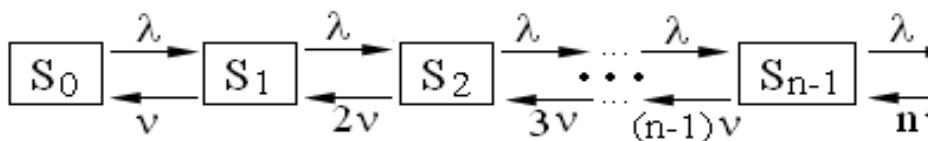
$$(7) \quad P'_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - n\nu P_n(t)$$

gelip çykar.

Ýokarda alnan bijynsly differensial deňlemeleriň ulgamy Erlangyň ulgamy diýilip atlandyrylýar. Eger-de ulgamyň ýagdaýlarynyň başlangyç ähtimallyklary $(P_k(0), 0 \leq k \leq n)$ berlen bolsa, onda ol ulgamy çözmeklik kyn dälär.

Eger-de ulgamyň ýagdaýlarynyň belgileneň grafyny gursak, onda onuň kömegi bilen ulgamda bolup geçýän tötän prosesi suratlandyran

differentensial deňlemeleriň ýokardaky ulgamyny gös-göni tapyp bolýar. Garaýan ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafy aşadaky ýaly bolar.



Differentensial deňlemeleriň (7) ulgamynyň gurluşyna üns bereliň. Olaryň ählisi aşakda beýan ediljek kesgitli düzgüniň esasynda gurlandyrlar.

(7) ulgamyň her bir deňlemesiniň çep tarapynda ulgamyň ýagdaý ähtimallyklarynyň önümi bar, olaryň çep tarapynda bolsa degişli ýagdaý bilen baglanyşykly näçe sany ok bar bolsa, şonça-da goşuljy bar. Eger-de ok şol ýagdaýdan çykýan bolsa, onda şol oka degişli bolan goşuljy „minus” alamatly, egerde ok şol ýagdaýa gelýän bolsa, onda oňa degişli goşuljy „plus” alamatlydyr. Her bir goşuljy özüne degişli bolan okuň geçiş ähtimallygynyň dykzylygynyň şol okuň çykýan ýagdaýynyň ýagdaý ähtimallygyna köpeldilmegine deňdir.

Ulgamyň ýagdaý ähtimally üçin differentensial deňlemeleri bu düzgüni umumy hasap edilyär we ol islendik üznüksiz markow zynjyrlary üçin ulanylyar. Onuň kömegi bilen ýagdaý ähtimallyklar üçin differentensial deňlemeleri ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafyna seredip, hiç hili kynçylyklar çekmän, gös-göni gurup bolýar.

$t \rightarrow \infty$ bolanda (7) ulgamyň deňlemeleriniň sag tarapyynyň kesgitli predeli bardyr, diýmek, olary çep taraplarynyň hem predelleri hökman bolaýmaly. Ol predel hem nula deňdir. Eger-de şeýle bolmasa, onda $t \rightarrow \infty$

predele $P'_k(t)$ önümler nuldən tapawutly haýsy hem bolsa bir hemişelik sana ymtyllarlar, diýmek, degişli $P_k(t)$ ähtimallyklar hem absalýut ululyklary boýunça tükeniksiz artalar, beýle ýagdaý bolsa asla mümkin däldir. Şeýlelikde, biz aşakdaky netijä gelýäris:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_k(t) = 0 \quad (0 \leq k \leq n).$$

Differensial deňlemeleriň (7) ulgamynda hem $t \rightarrow \infty$ predele geçip, algebraik deňlemeleriň aşakdaky ulgamyny alarys:

$$-\lambda P_0 + \nu P_1 = 0,$$

$$\lambda P_{k-1} - (\lambda + k\nu)P_k + (k+1)\nu P_{k+1} = 0 \quad (0 < k < n),$$

$$\lambda P_{n-1} - \nu P_n = 0. \quad (8)$$

Eger-de

$$\lambda P_{k-1} - k\nu P_n = z_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

belgilemäni girizsek, onda (8) ulgamy

$$z_1 = 0,$$

$$z_k - z_{k+1} = 0 \quad (0 < k < n),$$

$$z_n = 0$$

görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerden hem $z_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$ netijäni alarys. Şeýlelikde,

$$P_k = \frac{\lambda}{\nu k} P_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

ýa-da

$$P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k}{n!} P_0 \quad (1 \leq k \leq n) \quad (9)$$

geliş çykjakdygy düşnükliidir. Normirleýji

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1$$

Şerden hem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k}{k!}} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k}{k!} \right)^{-1}$$

ähtimallygy taparys.

$\frac{\lambda}{\nu} = \rho$ belgilemäni girizeliň. Bu gatnaşygyň şeýle manysy bardyr:

ρ — bu bir talaba hyzmat etmek üçin sarp edilýän ortaça wagtyň dowamynda bu köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamyna gelýän talaplaryň ortaça sanydyr. Bu belgilemäni göz önünde tutup, (9) formulalary

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

görnüşde ýazyp bileris.

(10) formulalar başgaça Erlangyň formulalary diýip atlandyrylýar.

P_0, P_1, \dots, P_n stasionar ähtimallyklar belli bolsa, onda bu ulgamyň stasionar häsiýetlendirijilerini kesgitläp bileris:

- * A-ulgamyň absalýut hyzmat ediş mümkinçiligi (wagt birliginde ulgamyň doly hyzmat edip biljek talaplarynyň ortaça sany);
- * q-otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi (ulgama gelen talaplaryň hyzmat edilenleriniň ortaça paýy, ýagny, ulgamyň wagt birliginde doly hyzmat edip bilýän talaplarynyň ortaça sanynyň şol wagtyň dowamynda ulgama gelýän talaplaryň ortaça sanyna bolan gatnaşygy);
- * doly hyzmat ediji enjamlaryň ortaça sany.

Bize mälim bolşy ýaly, ulgamyň hyzmat ediji enjamlarynyň ählisiniň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilýär.

Onda ýitginiň ähtimallygy

$$P_{\text{ýit}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0 = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} \quad (11)$$

deň bolar.

Ulgama gelen talabyň hyzmata kabul edilmekliginiň ähtimallygy (ýagny otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi.) bolsa ýitginiň ähtimallygyny 1- çenli doldurýar:

$$q = 1 - P_{\text{ýt}} = 1 - P_n . \quad (12)$$

Eger-de ulgamyň q otnositel hyzmat ediş mümkinçiligi belli bolsa, onuň A absalyut hyzmat ediş mümkinçiligini aňsatlyk bilen taparys. Olar aşakdaky görnüşde bir-birleri bilen baglanyşyklydyr:

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_n) . \quad (13)$$

Ýitgili köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynyň möhüm häsiýetlendirijileriniň biri hem ondaky doly enjamlaryň ortaça sanydyr (biziň garaýan ulgamymyza ol ululyk ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyna deňdir). Ol ortaça bahany \bar{k} bilen belgiläliň.

\bar{k} ululygy $0, 1, \dots, n$ bahalary deňişlilikde P_0, P_1, \dots, P_n ähtimallyklar bilen alyan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy hökmünde hasaplap bolar:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^n k P_k = \sum_{k=0}^n k \frac{\rho^k}{k!} P_0 = \rho \sum_{k=1}^n \frac{\rho^{k-1}}{k!} P_0 = \rho(1 - P_n). \quad (14)$$

Mysal 1.

Üç sany liniýadan ybarat bolan awtomatlandyrylan telefon stansiýasyna talaplaryň ýönekeý akymy gelýär. Egerde talabyň gelen momentinde liniýalaryň ählisi hem doly bolsa, onda ol talap ýitirilýär. Bir minudyň dowamynda stansiýa ortaça bir talap gelýär. Her bir talaba hem ortaça iki minutlap hyzmat edilýär.

Ulgamyň stansionar häsiýetlendirijilerini kesgitlemeli.

Çözüşi. Şerte görä, talaplaryň gelýän akymynyň intensiwligi $\lambda = 1$ deňdir. Hyzmatdan çykýan talaplaryň akymynyň ν intensiwligi bolsa

$$v = \frac{1}{\bar{t}_{h_{yz}}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

deň bolar.

(11) formula görä,

$$P_{\dot{y}it} = P_3 = \frac{\frac{\rho^3}{3!}}{\sum_{k=0}^3 \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\frac{2^3}{3!}}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = \frac{14}{19} \approx 0,21.$$

taparys. Bu ähtimallyk hem ulgama gelyän talaplaryň takmynan 21%-niň ýitirilýändigini aňladýar.

Stansiýanyň otnositel we absalýut hyzmat ediş mümkinçilikleri hem

$$q = 1 - P_{\dot{y}it} = 1 - \frac{14}{19} = \frac{15}{19} ,$$

$$A = \lambda q = \frac{15}{19}$$

deň bolar.

Doly liniýalaryň ortaça sanyny bolsa (14) formula görä hasaplaýs:

$$\bar{k} = \rho(1 - P_n) = 2 \cdot (1 - P_3) \approx 2(1 - 0.21) = 1,58 .$$

Gönükmeler.

1. Awtomatlaşdyrylan telefon stansiýasy (ATS) bir wagtda özüniňde 5 sany abonente hyzmat etmeglige niýetlenendir. Bu ATS-e ortaça her 30 sekuntda bir talap gelyär. Her bir abonente ortaça 2 minutlap hyzmat edilyär. ATS-ň ähli liniýalarynyň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilyär. Bu ATS-ň stansionar häsiýetlendirijilerini kesgitlemeli.

2. 20 sany ulagyň durmaklary üçin niýetlenen ulag duralgasyna duralga dolýança ulaglaryň ýönekeý akymy gelýär. Her sagatda duralga ortaça 4 ulag gelýär. Her bir ulagyň duralgada saklanýan wagty hem orta bahasy 15 minuda deň bolan görkezijili kanun boýunça paýlanandyr. Bu köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň stasinar häsiýetlendirijilerini tapmaly.

4.2. Nobatly köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirijileriniň hasaplanşy.

Köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamy bir-birleri bilen ekwiwalent bolan n sany hyzmat ediji enjamdan ybarat bolup, bu ulgama talaplaryň λ intensiwlikli ýönekeý akymy gelýär. Eger-de talabyň bu ulgama gelen pursatynda iň bolmanda bir sany baş enjam bar bolsa, onda ol talaba hyzmat başlanýar, eger-de şol pursatdan boş bolan hyzmat ediji enjam ýok bolsa, onda ol talap özünden öňki gelen talaplaryň (eger-de bar bolsa) yzynda nobata durýar. Boşan hyzmat ediji enjamlar hem wagt ýitirmän, nobatda garaşyp duran indiki talaba (eger bar bolsa) hyzmat etmäge başlanýar.

Her bir talaba edilýän hyzmatyň dowamlylygy aşakdaky görkezijili kanun boýunça paýlanan T_{hyz} tötän ululykdyr:

$$F(t) = 1 - e^{-vt} \quad (v > 0) .$$

Goý, ilki bilen nobatdaky garaşma orunlarynyň m san bilen çäklendirilen ýagdaýyna garalyň, ýagny, talabyň ulgama gelen pursatynda eýýäm m sany talap nobatda hyzmata garaşyp duran bolsa, onda ol talap ýitirilýär. Soňunda ol m sany tükeniksizlige ymytyldyryp nobatdaky garaşma orny çäksiz ulgama gararys.

Bu garalýan ulgamda nobatda duran talap nobaty terk etmeýär diýip kabul edilýär. Bu ýagdaýda nobatdaky ähli talaplara irde-giçde hyzmat edilýär.

Ulgamyň ýagdaýy diýip ondaky talaplaryň sanyna düşünsek (hem hyzmat edilýän, hem-de nobatda hyzmata garaşýan talaplaryň sany), onda wagtyň islendik momentinde ulgam özüniň aşakdaky $n+m-1$ sany yagdaýlarynyň haýsy hem bolsa birinde bolup biler:

S_0 – ulgamda 0 talap bar;

S_1 – ulgamda 1 talap bar;

.....

S_n – ulgamda n talap bar;

S_{n+1} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, biri hem nobatda);

S_{n+1} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, ikisi hem nobatda);

.....

S_{n+m} – ulgamda 0 talap bar (n sany hyzmatda, m -si hem nobatda);

Garalyan ulgamyň belgilenen grafy aşakdaky ýaly bolar:

Ulgamyň ýagdaýlarynyň stasionar ähtimallyklary üçin algebraik deňlemeleriň ulgamyny ýokardaky belgilenen grafyň kömegi bilen gös-göni gurarys:

$$-\lambda P_0 + \nu P_1 = 0$$

$$\lambda P_{k-1} + (\lambda + \nu)P_k + (k + 1)\nu P_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k < n \quad (1)$$

$$\lambda P_{k-1} + (\lambda + n\nu)P_k + n\nu P_{k+1} = 0, \quad n \leq k < n + m$$

$$\lambda P_{kn+m} - n\nu P_{n+m} = 0$$

Algebraik deňlemeleriň ýokardaky ulgamyny çözmek üçin aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$Z_k = \lambda P_{k-1} - k\nu P_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$Z_k = \lambda P_{k-1} - n\nu P_k, \quad n \leq k \leq n + m$$

Bu belgilemeleri ulanyp, deňlemeleriň (1) ulgamyny

$$Z_1 = 0$$

$$Z_k - Z_{k+1} = 0, \quad 1 < k < n < m \quad (2)$$

$$Z_{n+m} = 0$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden hem

$$Z_k = 0, \quad (1 \leq k \leq n + m)$$

Deňleme, ýagny,

$$\lambda P_{k-1} - kvP_k = 0, \quad (1 \leq k \leq n) \quad (3)$$

$$\lambda P_{k-1} - nvP_k = 0, \quad (1 \leq k \leq n) \quad (4)$$

deňlemeler gelip çykýarlar. $1 \leq k \leq n$ bolanda (3) deňlemeden

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \quad (5)$$

alarys, bu ýerde $\rho = \lambda/v$ deňdir.

$n < k \leq n + m$ bolanda hem (4) deňlemeden

$$P_k = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} P_n \quad (6)$$

formulany alarys. (5) formuladan P_n -yň bahasyny (6) formula ornuna goýsak

$$P_k = \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0 \quad (7)$$

formula gelip çykýar.

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k = 0$$

Normirleýji şert hem P_0 ähtimallygy kesgitlemäge mümkinçilik berýär:

$$P_0 \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k \right] = 1$$

Maýdalawjysy ρ/n -e deň bolan geometrik progressiýany

jemlänimizden soňra P_0 ähtimallygyň anyk bahasyny taparys. Netijede biz aňakdaky formulalary tapdyk:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0, \quad (n < k \leq n + m)$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1 - \left(\rho/n\right)^m}{n - \rho} \right]^{-1} \quad (8)$$

İndi bolsa bu köpçülikleýin hyzmat ediö ulgamynyň esasy häsýetlendirijilerini kesgitläliň.

Hyzmat ediji enjamlaryň ählisiniň we garaşma orunlarynyň hem ählisiniň doly bolan pursatynda gelen talap ýitirilýär. Onda ýitginiň ähtimallygy

$$P_{\dot{y}it} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0, \quad (9)$$

deň bolar.

Ulgamyň otnositel hyzmat ediş mümkinçiligini hem

$$q = 1 - P_{\dot{y}it} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0 \quad (10)$$

formula bilen hasaplarys.

(10) formulanyň ýardamy bilen ulgamyň absolýut hyzmat ediş mümkinçiligini kesgitläris:

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0 \right) \quad (11)$$

Ulgamyň doly bolan hyzmat ediji enjamlarynyň ortaça sanyny hem 1,2,...,n bitin bahalary degişlilikde

$P_1 + P_2 + \dots + (P_n + P_{n+1} + \dots + P_{n+m})$ ähtimallyklar bilen

alýan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasyny hasaplamak arkaly kesgitläp bileris:

$$\begin{aligned}
 \bar{k} &= 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + (n-1)P_{n-1} + n \cdot (P_n + P_{n+1} + \dots + P_{n+m}) \\
 &= \sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} nP_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\rho^k}{k!} P_0 + \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{\rho}{k}\right)^k P_n = \\
 &= \rho P_0 \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \right] + n \frac{\rho}{n} \left[P_n + \frac{\rho}{n} P_n + \dots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1} P_n \right] \\
 &= \rho [P_0 + P_1 + \dots + P_n] + \rho [P_n + P_{n+1} + \dots + P_{n+m-1}] = \\
 &= \rho - \rho P_{n+m} = \rho (1 - P_{n+m}) = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} P_0 \right).
 \end{aligned}$$

Nobatdaky talaplaryň ortaça sanyny bolsa $1, 2, \dots, m$ bahalary deňişlilikde $P_{n+1} + P_{n+2} + \dots + P_{n+m}$ ähtimallyklar bilen alýan diskret tötän ululygyň matematiki garaşmasy hökmünde hasaplarys:

$$\bar{r} = 1 \cdot P_{n+1} + 2 \cdot P_{n+2} + \dots + m \cdot P_{n+m} = \sum_{k=1}^m k \left(\frac{\rho}{k}\right)^k P_n = P_n \cdot \frac{\rho}{n}$$

Ýokardaky aňlatmanyň soňky jemini

$$\sum = \frac{\rho}{n} + \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\rho}{n}\right)^m$$

geometrik progressiýanyň $\frac{\rho}{n}$ görä önümi hökmünde göz önüne getirip bileris. Ol geometrik progressiýany jemläp:

$$\sum = \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}}$$

Onuň $\frac{\rho}{n}$ -e görä ömümini alsak,

$$\sum = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

netijäni alarys.

Şeýlelikde, nobatdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} P_0}{n! n^m} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m \frac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

formulany alarys.

Hyzmatdaky we nobatdaky talaplaryň ortaça sanyny jemläp, tutuş ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyny kesgitläris:

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}$$

Indi bolsa talabyň nobatdaky ortaça garaşma wagtyny kesgitläliň. Ähtimallyklary köpeltmek teoremasyna görä, t wagtyň dowamynda doly bolan n sany hyzmatediji enjamlaryň hiç biriniň hem boşamazlygynyň ähtimallygy e^{-nvt} deň bolar.

$$\int_0^{\infty} t e^{-nvt} dt = \frac{1}{nv}$$

Matematiki garaşma hem talabyň ulgama gelen pursatynda n sany hyzmat ediji enjamlaryň ählisiniň hem doly bolup, nobatda hem hiň hili talabyň ýok bolan ýagdaýyndaky ortaça garaşma wagtyna eňdir. Eger-de talabyň ulgama gelen pursatynda k sany talap nobatda bolsa, onda soňky gelen talap

ortaça $\frac{k}{nv}$ wagtlap nobatda garaşýar. Eger-de talabyň ulgama gelen

pursatynda hyzmat ediji enjamlaryň iň bolmanda biri boş bolsa ýa-da garaşma orunlarynyň ählisi hem doly bolsa, onda ol talabyň garaşma wagty nula deň bolar. Ýokardaky aýdylanlardan ugur alyp, talabyň ortaça garaşma wagty aşakdaky görnüşde hasaplanýar:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{gar} &= \frac{1}{nv} P_n + \frac{2}{nv} P_{n+1} + \dots + \frac{m}{nv} P_{n+m-1} = \frac{1}{nv} \left[\frac{\rho^n}{n!} P_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n!n} P_0 \right. \\ &= \frac{\rho^n P_0}{n! nv} \left(1 + \frac{2\rho}{n} + \dots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

Talabyň ortaça garaşma wagty bilen nobatdaky talaplaryň ortaça sanynyň arasynda aşakdaky ýaly baglanşyk bardyr:

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$$

Talabyň tutuş užgamda sarp etjek ortaça wagty (hem nobatda, hem-de hyzmatda) aşakdaky usulda hasaplarýs:

$$\bar{t}_{ulg} = \left(\frac{1}{nv} + \frac{1}{v} \right) P_n + \left(\frac{2}{nv} + \frac{1}{v} \right) P_{n+1} + \dots + \left(\frac{m}{nv} + \frac{1}{v} \right) P_{n+m-1} +$$

$$+\frac{1}{v}P_0 + \frac{1}{v}P_1 + \dots + \frac{1}{v}P_{n-1} = \bar{t}_{gar} + \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{n+m-1} P_k = \bar{t}_{gar} + \frac{1}{v}(1 -$$

Mysal 1.

Dellekhanada iki sany dellek işleýär. Olaryň hyzmatyna mätäç müşderileriň ortaça sany sagatda 18-e ýetýär. Dellekler her bir müşderä hyzmat etmek üçin ortaça 10 minut sarp edýärler. Dellekhanada müşderileriň garaşmagy üçin 4 sany oturguç niýetlenendir. Ol garaşma orunlarynyň ählisiniň hem doly bolan pursatynda gelen müşderi eglenmän dellekhanadan çykyp gidýär. Bu KHEU-nyň stasionar häsýetlendirijilerini kesgitlemeli.

Çözülişi.

Meseläniň şertine görä,

$$n=2, \quad m=4, \quad \lambda=18,$$

$$\bar{t}_{hyz} = 10 \text{ min}, \quad v = \frac{1}{\bar{t}_{hyz}} = \frac{1}{1/6} = 6, \quad \rho = \frac{18}{6} = 3.$$

(8) formula görä,

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^2 \frac{3^k}{k!} + \frac{3^3}{2!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^4}{2-3} = \frac{2027}{32},$$

bu-ýerdende

$$P_0 = 0,0158$$

taparys. Bu bolsa tutuş iş wagtynyň takmynan 1,58%-ni dellekhananyň müşderisiz geçirjekligini aňladýar.

Ýitginiň ähtimallygy bolsa

$$P_{\dot{y}it} = P_{n+m} = P_6 = \frac{3^6}{2^4 \cdot 2!} \cdot 0,0158 = 0,36$$

deň bolar. Bu bolsa müşderileriň takmynan 36%-niň ýitiriljekdigini görkezýär.

Dellekhananyň otnasitel hyzmat ediş mümkinçiliginiň hem

$$p = 1, \quad P_{\dot{y}it} = 0,64$$

deň boljakdygy we gelen müşderileriň takmynan 64%-ne hyzmat ediljekdigini aňladýar.

Ulgamyň obsaýut hyzmat ediş mümkinçiligi bolsa

$$A = \lambda q = 0,64 \cdot 18 = 11,52,$$

Deň bolar, ýagny bir sagadyň dowamynda ortaça 11,52 sany müşderä hyzmat ediler.

Doly dellekleriň ortaça sany

$$\bar{k} = \frac{A}{v} = \frac{11,52}{6} = 1,92,$$

deň bolar, ýagny dellekler öz wagtlarynyň hemmesine golaýyny doly geçirýärler.

Nobatdaky müşderileriň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{3^3 \cdot 0,0158}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 (5-6)}{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = 0,4266 \left(1 + \frac{81}{16}\right) \approx 2,58$$

bolar.

Müşderiniň nobatdaky ortaça garaşma wagtyhem

$$\bar{t}_{tak} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2,58}{18} \cdot 60_{min} = 8,6_{min},$$

Onuň tutuş ulgamda sarp edýän wagty hem

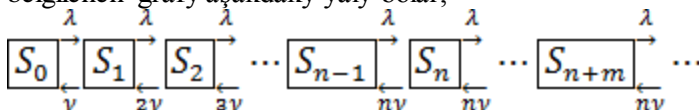
$$\bar{t}_{ulg} = \bar{t}_{gar} + q \cdot \bar{t}_{hyz} = 8,6 + 0,64 \cdot 10 = 8,6 + 6,4 = 15_{min}$$

Gönükmeler

1. Awtoulag ýangyç stansiýasynda üç sany ýangyç guýujy kolonka bar. Bu stansiýa bir minuduň dowamynda ortaça bir ulag gelýär. Her bir ulaga ortaça 4 minutlap hyzmat edilýär. Bu ýangyç stansiýasynyň meýdamçasý diňe üç sany ulagyň garaşmagy üçin niýetlenendir. Stansiýanyň stasionar häsýetlendirijilerini kesgitlemel.

4.3. Nobatdaky garaşma orny çäklendirilmedik köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň esasy häsýetlendirijileri.

Indi bolsa ulgamda garaşmak üçin niýetlenen orunlaryň sanynyň çäklendirilmedik ýagdaýyna garalyň. Bu ulgamyň ýagdaýlarynyň belgilenen grafy aşadaky ýaly bolar;



Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirijilerini goşma orny çäklendirlen ulgamyň stasionar häsýetlendirijilerinden $m \rightarrow \infty$ predele geçmek bilen alynýar.

Ulgamyň predel ýagdaý ähtimallyklaryny hasaplamak üçin (5), (7), (8) formulalarda $m \rightarrow \infty$ predele geçemizde $\rho/n < 1$ bolýar diýip kabul etmeli. Beýle bolanda progresiýa ýygnanýar we ulgamda stasionar režim öz güýjünü saklaýar. Şeýlelikde, bu ulgamyň predel ýagdaý ähtimallyklary üçin

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{n! n^{k-n}} P_0, \quad k \geq n,$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^k \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! (n - q)} \right]^{-1}$$

formulalary alarys.

Bu ulgama gelen islendik talaba haçan hem bolsa hyzmat edilýär (çünki nobat çäksiz), şonuň üçin hem

$$P_{jit}=0, \quad q=1, \quad A=\lambda q=\lambda$$

Boljakdygy düşnükliidir.

Ulgamyň doly bolan enjamlarynyň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} \cdot P_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}$$

Bolýandygyna göz ýetirmek kyn däldir. Soňky toplum formylalary jemlemek arkaly ulgamdaky talaplaryň ortaça sanyny taparys;

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}.$$

Talabyň nobatdaky ortaça garaşma wagtyny we onuň ulgamda sarp edýän ortaça wagtyny aşakdaky formulalaryň kömegi bilen hasaplarys;

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda}, \quad \bar{t}_{ulg} = \bar{t}_{gar} + \frac{1}{\nu}.$$

Mysal1.

Awtoulag ýangyç stansiýasy üç sany sany ýangyç guýujy enjamdan (kolonkalar) ybarat bolup, bu stansiýa ýangyja mätäç bolan ulaglaryň $\lambda=0,2$ intensiwlikli (minutda ortaça 0,2 ulag) ýönekeý akymy gelýär. Her bir ulaga ortaça 5 minutlap hyzmat edilýär. Ýangyç guýdurmak üçin garaşma orunlaryň sany (nobatyň uzynlygy) çäklendirilmedikdir. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirjilerini hasaplamaly.

Çözlüşi.

Meseläniň şertine görä

$$n = 3, \quad \lambda = 0,4, \quad v = \frac{1}{\bar{t}_{hyz}} = \frac{1}{5} = 0,2, \quad \rho = 2, \quad \frac{\rho}{n} = \frac{2}{3}$$

bolar. Bu ýerden hem

$$P_0 = \left[1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right]^{-1} = \frac{1}{9}$$

alarys. Diýmek bu ulgam iş wagtynyň $\frac{1}{9}$ bölegini boş geçirer (ýagny bir sutkanyň dowamynda ortaça 160 minutlap stansiýada hiç hili ulag bolmaz).

Doly kolonkalaryň ortaça sany

$$\bar{k} = \rho = 2,$$

nobatdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{r} = \frac{2^4}{2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

ulgamdaky talaplaryň ortaça sany

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r} = 2 + 1\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3},$$

talabyň ortaça garaşma wagty

$$\bar{t}_{gar} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 3_{min} 20_{sek}$$

talabyň ulgamda sarp edýän ortaça wagty hem

$$\bar{t}_{ulg} = \bar{t}_{gar} + \bar{t}_{hyz} = 3_{min} 20_{sek} + 5_{min} = 8_{min} 20_{sek}$$

deň bolar.

Gönükmeler.

1. Teatryň bilet kassasynda bir sany kassir işleýär. Bu kassa bilet satyn almak üçin her minutda iki sany tomaşaçy gelyär. Her bir müşderä bilet satmak üçin kassair ortaça 20 sekuntlap hyzmat edýär. Bu kassada nobatyň uzynlygy çäklendirilmedikdir. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirijilerini tapmaly.
2. Öz-özüne hyzmat edilýän dükanda 2 sany kassir işleýär. Olar müşderileriň alan harytlaryny barlaýarlar we ol harytlaryň tölegini kabul edýärler. Kassalardan her sagadyň dowamynda ortaça 48 sany müşderi geçýär we her bir kassir her bir müşderä ortaça 2 minutlap hyzmat edýär. Bu ulgamyň stasionar häsýetlendirijilerini kegitlemeli.

Edebiyat

- 1.** Кострикин А.И. Введение в алгебру. Учебник.—М.: Наука.—1977г. 495с.
- 2.** Курош А.Г. Курс высшей алгебра. Учебник.—II-е изд. стереотип.—М.: Наука.—1975г.
- 3.** Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. Учебник.—М.: Наука.—1984г.
- 4.** Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп.—М.: Наука.—1982г.
- 5.** Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры ОНТИ-НКТП-СССР.—1937.
- 6.** Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие.—М.: Наука—1984.—336с.

Mazmuny

Giriş.....	11
I bölüm . Çzykly programmirleme we onuň ulanylyşy	
1.1 Çzykly programmirleme meselesi.....	12
1.2 Çzykly programmirlemegiň esasy meselesi.....	17
1.3. Çzykly programmirlemegiň umumy meselesini grafiki usulda çözmek.....	19
1.4. Çzykly programmirlemegiň umumy meselesini çözmekligiň simpleks usuly.....	25
1.5 Çzykly programmirlemegiň meselesini emeli bazis usuly bilen çözmek.....	29
1.6 Ikitaraply meseleler? (Двойственные задачи) Çzykly programmirlemegiň iki sany meselesine garalyň.....	37
1.7. Çzykly programmirlemegiň ulag meselesi.....	45
2.3. Matrisa oýunlary simpleks usuly bilen çözmek.....	54
2.4 Oýunlary çözmekligiň ýakynlaşan usuly (Braunyň usuly).....	60

IV Bölüm. Köpçülikleýin hyzmat ediş nazaryýetiniň modelleri.

4.1. Ýitgili hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirijileriniň hasaplanyşy.	63
4.2.Nobatly köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamlarynyň esasy häsiýetlendirijileriniň hasaplanyşy.....	75
4.3. Nobatdaky garaşma orny çäklendirilmedik köpçülikleýin hyzmat ediş ulgamynyň esasy häsiýetlendirijileri.....	85
Edebiýat.....	89