TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY
GEODEZIÝA KAFEDRASY

B.A. AŞYROW

Ç Y Z U W L Y G E O M E T R I Ý A N Y Ň E S A S L A R Y

Tehniki ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw gollanmasy

Täzeden işlenen neşir

Redaktor: t.y.d., professor $\boxed{\text{E. ANNABERDIÝEW}}$
A.SÜLEÝMANGULYÝEW

AŞGABAT – 2009

S Ö Z B A Ş Y.

Garaşsyz, baky Bitarap Türkmenistan özüniň ösüşinde täze basgançaga-Beýik Galkynyş eýýamyna gadam basdy. Ol Türkmenistanyň hormatly Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň parasatly we öňdengörüjilikli syýasatynyň netijesinde ösüşiň ähli ugurlary boýunça düýpli özgertmeleri başdan geçirýär. Bu işler ýurdumyzy dünýäniň iň ösen döwletleriniň hataryna goşmak, olar bilen deň gadam urmak, olaryň öňdebaryjy tejribesini öwrenip, aýakdaş gitmek üçin edilýär. Bu düýpli özgertmeleriň özenini ylym, bilim tutýar.

Hormatly Prezidentimiz döwlet baştutanlygyna saýlanan ilkinji günlerinden: **“Güýçli döwletde ylym esasy orny eýeleýär, diýmek, biz ylmyň iň täze gazananlary bilen aýakdaş gitmelidiris”** – diýen beýik şygary öňe sürmek bilen Türkmen ylymyny-bilimini özgertmekligiň dogry ýoluna düşdi.

Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedow 2007-nji ýylyň Mart aýynyň 4-ne “Bilim-terbiýeçilik edaralarynyň işini kämilleşdirmek hakynda” taryhy karara gol çekdi. Bu taryhy resminamada Milli bilim ulgamyny özgertmegiň anyk çärelerini bellemek bilen bilim reformasyny yglan etdi.

Hormatly Prezidentimiz Bilim syýasatyny öňe sürmek bilen, şu köp ugurly Maksatnamasynda ýaş neslimiziň giň dünýägaraýyşly, akyl we beden taýdan sagdyn adamkärçilikli bolmaklygyny ündäp hem-de Bilim ulgamynyň esasy ugruny kesgitläp: **“Bilim syýasatymyzyň baş maksady-Türkmenistan döwletimizi dünýäniň ösen ýurtlarynyň derejesine ýetirmekdir”** – diýip belledi.

Hormatly Prezidentimiz Bilim reformasyny yglan etmek bilen ýurdumyzyň bilim we ylym ulgamlaryny dünýä derejesine çykarmak, ýaşlarymyzyň sazlaşykly ösmegi, dünýägaraýşynyň giňelmegi üçin ähli şertleri döredýär hem hemişe üns merkezinde saklaýar.

Bu bolsa ähli pudaklarda ýokary taýýarlykly hünärmenleriň taýýarlanmagyna uly badalga berdi.

Häzirki wagtda Milli bilim ulgamyny mundan beýläkde ösdürmek we dünýäniň ösen döwletleriniň derejesine çykarmak üçin ygtybarly binýat döredilýär. Şondan ugur alynyp ýokary mekdepleriň injener tehniki hünärleri üçin "Çyzmaly geometriýa" dersi boýunça okuw maksatnamasy täzeden döwrebap işlenildi. Çünki ýokary mekdepleriň öňünde ýokary düşünjeli, hemmetaraplaýyn, esasanam tehniki tarapdan başarjaň hünärmen, injener – tehniki babatda ylymly-bilimli ýaşlary ýetişdirmelidir. Olar öz bilimlerini we başarnyklaryny durmuşa geçirmek bilen Türkmenistanyň ykdysadyýetini, halkyň agzybirligini, Watanymyzyň Garaşsyzlygyny we baky Bitaraplygyny has hem berkitmelidirler.

Hakykatdan hem biziň döwletimiz Hormatly Prezidentimiziň parasatly we öňden görüjilikli pikirleriň netijesinde ösen ýurtlaryň hataryna goşuldy. Mundan beýläkde biziň ýurdumyzyň öňe gidişlikleri halkymyzyň aň-düşünjesine, ylym-bilim taýdan kämilligine, tehniki dünýägaraýşyň düýpli emele gelmegine gös-göni baglydyr. Şoňa görä-de biziň her bir ýaş hünärmenlerimiz talyp döwründen başlap bilimleri çuňňur, tutanýerli ele almalydyr.

Çyzmaly geometriýa proýektirlemegiň dürli usullarynyň nazary esasydyr. **"Çyzgy–tehnikanyň dilidir"** diýip çyzmaly geometriýany esaslandyryjylaryň ilkinjileriniň biri fransuz inženeri, alymy, döwlet işgäri Gaspar Monž (1746-1818) aýdypdyr. Bu aýdylan sözlemiň asyl manysy çyzgy dünýädäki ähli halklar üçin düşnükli internasional dil diýildigidir, bu aýdylan sözler dürli dillerde gepleýän halklar üçin deň düşnüklidir, şonuň üçinem Gaspar Mouž ýaňy 22-ýaşyndaka matematikanyň professory adyna mynasyp bolýar.

Rus alymy proffesor W.Kurdymow (1855-1904) bu ylymy kämilleşdirmekde öz goşandyny goşmak bilen: **"Eger çyzgy tehnikanyň dili bolýan bolsa, onda çyzmaly geometriýa ol diliň gramatikasydyr"** diýip gysgadan, aýdyň we düşnükli tassyklaýar.

Çyzgy biziň bilşimiz ýaly giňişlikdäki islendik ýagdaýdaky geometrik figuralaryň şekilini dogry we takyk gurmak ýa-da şol figurany – predmeti dogry ýasamak hem-de gözegçilik etmek üçin zerur bolan başga-da gerekli maglumatlary özünde jemleýän esasy gural bolup hyzmat edýän resminamadyr.

Biziň Garaşsyz, Bitarap Diýarymyzda, Mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedowyň taýsyz tagallasy bilen biziň bu Diýarymyzda Täze binalarda, Gara ýollarda, zawot fabriklerde, Beýik asyryň uly desgalary bolan Türkmen kölünde, Türkmen Hytaý gaz geçirijisinde ýene-de asyryň dürli gurluşyklaryny amala aşmakda “Çyzmaly geometriýa” dersiniň zerurlygy aýdyňdyr.

“Biz häzirki zaman bilimlerine we has çylşyrymly tehnika bilen iş alypbarmak başarnyklaryna eýe bolan, täze döwrüň talaplaryna laýyk hünärli kadrlary, hünärmenleri taýýarlamak barada aýratyn alada edýäris.”

“Güýçli döwletde ylym esasy orny eýeleýär, diýmek ,biz ylmyň iň täze gazananlary bilen aýakdaşgitmelidiris.”

Gurbanguly Berdimuhamedow
Türkmenistanyň Prezidenti

A W T O R D A N

Çyzmaly geometriýanyň özleşdirmesi kyn bolan birinji esasy bölümini **nokady, göni çyzygy we tekizligi** we ikinji esasy bölümini **proýeksiýalary özgertmegiň** usullary **“aýlamak** usulyny**, proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak** usulyny we **utgaşdyrmak** usulyny” öz içine alýan eliňizdäki şu okuw gollanmasy ýokary okuw mekdepleriniň inžener-tehniki bölüminde okaýan talyplar üçin niýetlenip, türkmen dilinde, täze elipbiýde ilkinji gezek neşir edilýär.

Bu okuw gollanmasynyň çap edilmegi diňe bir talyplar üçin ähmiýetli bolman, orta mekdepleriň surat – çyzuw mugallymlary üçin hem nazary we amaly taýdan peýda berip biler.

Şonuň ýaly-da, bu gollanmadan talyplar özleriniň çyzmaly geometriýadan düşünmeýän köp sanly soraglaryna jogap tapyp bilerler.

Bu iş awtoryň köp ýyllaryň dowamynda Türkmen politehniki institutynda okan umumy okuwynyň esasynda ýazyldy.

Gollanmanyň her babynyň soňunda geçilen temalary çuňňur özleşdirmek - berkitmek maksady bilen öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler ýerleşdirildi.

Gollanmany ýazmakda awtor çyzmaly geometriýany ylmy tarapdan ösdürmek we kämilleşdirmek meselesini göz öňünde tutman, bu hakda öň bar bolan işler peýdalanyldy. Bu işi ýazmakda köp sanly okuw kitaplaryň we usuly gollanmalaryň peýdalanylandygy sebäpli , olaryň hemmesiniň awtorlarynyň atlaryny görkezip durmagy makul bilmedim.

Eliňizdäki iş çyzmaly geometriýanyň esasy kurslaryny okamak we özleşdirmek maksady bilen institutyň täzeçe döwrebap maksatnamasy esasynda ýazylan okuw gollanmasy hökmünde hödürlenilýär.

Okuw gollanmanyň täze elipbiýinde ilkinji gezek çykýanlygy üçin, onda käbir kemçilikleriň - säwlikleriň bolmagy tebigydyr. Şonuň üçin bu gollanma hakda öz hoşniýetli tankydy belliklerini, arzuwlaryny doly ýazyp, Türkmen politehniki institutynyň Geodeziýa kafedrasynyň adyna iberen ýoldaşlara öňünden ak ýürekden minnetdarlyk bildirýärin. Çünki, işiň bähbidi üçin edilen peýdaly bellikler bu okuw gollanmanyň indiki neşiriniň hilini has-da gowylandyrmaga ep-esli derejede ýardam eder. Bu gollanmany okap, özleriniň gymmatly we degerli belliklerini aýdan Türkmen politehniki institutynyň Geodeziýa kafedrasynyň müdiri **g. m. y. k. dosent D.Nurmämmedowa**, mugallymlary **R. G. Huddyýewa, t.y.k.Ç.Taganowa**, esasan-da redaktorlara **t.y.d., professor E.Annaberdiýewe we A.Süleýmangulyýewe** çuňňur hormatlamak bilen awtor hoşallyk bildirýär.

KITAPDA KABUL EDILEN BELGILER.

T/B	Atlary	Belgilenşi
1.	Giňişlikde ýerleşen nokatlar – latyn elipbiýiniň setir harplary bilen ýa-da arap sanlar bilen:	A,B,C ... 1,2,3 ...
2.	Proýeksiýalar tekizlikleri: 2.1 gorizontal (kese) proýeksiýalar tekizligi, 2.2 frontal (maňlaý) proýeksiýalar tekizligi, 2.3 profil (gapdal) proýeksiýalar tekizligi,	H V W
3.	Proýeksiýalar oky: 3.1 obsissa oky. 3.2 ordinata oky. 3.3 aplikata oky.	OX OY OZ
4.	Kordinata oklaryň başlangyjy.	O
5.	Proýektirlemegiň merkezi.	S
6.	Proýeksiýalar tekizliklerinde nokatlaryň proýeksiýalary: 6.1 Nokadyň gorizontal proýeksiýasy, 6.2 Nokadyň frontal proýeksiýasy, 6.3 Nokadyň profil proýeksiýasy,	a,b,c, ... a^{I},b^{I},c^{I}, ... a^{II}.b^{II},c^{II}, ...
7.	Naturada–giňişlikde tekizligiň ýagdaýyny näme kesgitleýär: 7.1 Bir gönüde ýatmaýan üç nokat. 7.2 Nokat we göni çyzyk. 7.3 Iki sany özara parallel çyzyk. 7.4 Iki sany özara kesişýän çyzyk. 7.5 Ýazgyn figuralar.	P(A,B,C) P(A,B,C) P(ABIICD) P(AB CD) P(Δ ABC)
8.	Tekizlikler .	P, Q, ...
9.	Çyzgyda tekizlikleriň proýeksiýalary. 9.1 tekizligiň gorizontal proýeksiýasy.	P (a,b,c) P

	9.2 tekizligiň frontal proýeksiýasy. 9.3 tekizligiň profil proýeksiýasy.	(a^{I},b^{I},c^{I}) P $(a^{II}.b^{II},c^{II})$
10.	Tekizlikleriň yzlary. 10.1 tekizligiň gorizontal yzy. 10.2 tekizligiň frontal yzy. 10.3 tekizligiň profil yzy.	P_H Q_H P_v Q_v P_w Q_w
11.	Tekizligiň yzlarynyň duşuşýan nokatlary.	P_x, P_y, P_z
12.	Göni çyzygyň yzlary. 12.1 göni çyzygyň gorizontal yzy. 12.2 göni çyzygyň frontal yzy. 12.3 göni çyzygyň profil yzy.	M (m,m^{I},m^{II}) N (n,n^{I},n^{II}) P (p,p^{I},p^{II})
13.	Ýazgyn burçlar.	α, β, γ,...
14.	Tekizligiň esasy çyzyklary. 14.1 tekizligiň gorizontaly. 14.2 tekizligiň frontaly.	h f
15.	Göni çyzygyň proýeksiýalar tekizligine ýapgytlygy. 15.1 gorizontal proýeksiýalar tekizligine. 15.2 frontal proýeksiýalar tekizligine. 15.3 profil proýeksiýalar tekizligine.	α β γ
16.	Geometriki figuralaryň aýlama oky.	I
17.	Nokatlaryň aýlama merkezi.	O
18.	Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak.	$\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V}{H_1}$; $\frac{V}{H} \rightarrow \frac{V_1}{H}$
19.	Nokatlaryň aýlanma radiusy.	R,r
20.	Geometriki meseleler işlenende ulanylýan belgiler. 20.1 kesişýän çyzyklar. 20.2 geometriki operasiýanyň netijeleri.	$AB \cap CD = k$ AB=CD ABIICD

	20.3 parallel çyzyklar.	$AB \dot{-} CD$
		$AB \perp CD$
	20.4 atanak çyzyklar.	$K \in AB$
	20.5 perpendikulýar çyzyklar .	$A \equiv B$
	20.6 degişlilik.	
	20.7 gabat gelmek, gelip çykýar.	

I - B Ö L Ü M

1. ÇYZUWLY GEOMETRIÝA DERSINIŇ USULLARY WE MESELELERI.

ÇYZUWLY GEOMETRIÝA - geometriyanyň bir bölümi bolmak bilen daş töweregimizdäki geometriki figuralaryň - jisimleriň giňişlikdäki formalaryny hem-de olara degişli kanunalaýyklykda tekizlikde şekillendirmek usuly bilen meşgullanýar.

Çyzuwly geometriýa çyzuwyň nazary esasydyr, ýagny grammatikasydyr. Çyzuwly geometriýada **çyzgy** predmetleriň, geometriki figuralaryň- jisimleriň gurluşlaryny öwredýän esasy gural bolup hyzmat edýär. Her bir çyzgy dürli şekillendirilmegiň usullarynyň kömegi blen çyzylýar. Şonuň üçin-de çyzmaly geometriýanyň esasy meseleleri şu aşakdakylardan ybaratdyr:

Ozal bar bolan, şeýle hem täzeden döredilýän şaýlaryň - gurallaryň şekillerini dogry we takyk çyzmagyň usullaryny öwrenmek.

Çyzgynyň kömegi bilen predmetiň formalaryny hem-de ölçeglerini kesgitlemegiň usullaryny öwrenmek / çyzgyny okamak /.

Giňişlikdäki geometrik formalara degişli meseleleri tekizlikde şekillendirip çözmegiň usullaryny öwrenmek.

Diňe bir tehnikada ulanylýandygyndan başga-da, giňişlikdäki jisimleriň gurluşyny-formalaryny öwrenmekdäki iň bir gymmatly serişdeleriň biri hökmünde çyzuwly geometriýanyň ylmy hem-de umumy bilim ähmiýeti örän uludyr.Täzeligiň döredijilikli gözlenilýän ýerinde, täze tehniki çözgütler barada erjel pikir edilýän hem-de kabul edilýän mahalda, konstruktirlenilýän hem-de proýeksion çyzgyny we onuň nazary esasyny - çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik talyplara örän zerurdyr.

2. GYSGAÇA TARYHY MAGLUMAT.

Çyzuwly geometriýanyň ýüze çykmagy kanunalaýyk hökmanylyk bolmak bilen, ol adamzadyň asyrlar dowamynda gündeki amaly işiniň netijesinde emele gelendir.

Daş töwerekdäki predmetleri şekillendirmeklige bolan islegiň adamzat taryhynyň irki döwürlerinde ýüze çykanlygy bellidir.

Predmetleri söz bilen suratlandyrmagy öwrenmezden ozal, adamlar olaryň suratlaryny - şekillerini çekipdirler.

Köşkleriň, ýaşaýyş jaýlarynyň, köprüleriň we beýleki gurluşygy baryp gadymy Müsürde şekillendirmegiň elementar usullaryny döretmeklige getiripdir. Häzirki zaman ylymynyň nukdaý nazarynda seredeniňde olar örän ýönekeýje bolupdyrlar. Şeýle-de bolsa, geometriýanyň ýüze çykmagynyň ilkinji köklerini gadym eýýamyň ösen medeniýetli halklarynyň şol sanda türkmen halkynyň taryhyndan gözlemek gerek.

Biziň döwrümize gelip ýeten rus ýadigärlikleriniň proeksion çyzgylary XVII-nji asyra degişlidir. Bular Petr 1-niň görkezmesi boýunça Remizowyň çeken Nowgorod we Pskow şäherleriniň planydyr, Moskwanyň 1619 - njy ýyla degişli çyzgysydyr, Sibir şäherleriniň we ýerleriniň çyzgy kitabydyr. Ýokarda atlary tutulan çyzgylarda jaýyň plany hem-de fasady frontal we gorizontal proýeksiýalaryň geljekdäki nusgasy /proobrazy/ bolup durýar.

XVIII - nji asyrda **proýektirlemek - şekillendirmek** sungaty we konstruktiw çyzgylary ýerine ýetirmegiň tehnikasy örän kämilleşipdir. Heniz şol döwre çenli çyzuwly geometriýa ylym hökmünde formirlenmändir.

Şeýle-de bolsa, öz-özünden öwrenen oýlap tapyjy N. I. Kulibiniň /1735-1818ý.ý./, I.I.Polzunowyň /1726ý./, binagärler B.I.Baženowyň, M.F.Kazakowyň çyzgylary çyzuwly geometriýanyň nukdaý nazarynda seredeniňde örän **dogry** we ussatlyk bilen **takyk** ýerine ýetirilipdir.

Şeýlelik bilen, çyzgylary çyzmakda XVIII - nji asyryň aýagyna çenli uly tejribe toplanypdyr, şekillendirmegiň metodyna - usullaryna degişli aýry-aýry nazary işler edilipdir. Çyzuwly geometriýa özbaşdak ylmy ders hökmünde geometriýanyň has ýaş pudaklarna degişlidir.

1798-nji ýylda fransuz alymy Gaspar Monž / 1746-1818ý.ý./ **“Çyzuwly geometriýa” kursyny çap etdiripdir. G. Monžyň işiniň esasy çyzgynyň tekizligi bilen utgaşdyrlan iki sany özara perpendikulýar bolan şekiller tekizliklere göniburçly şekillendirmekdir.**

Russiýada çyzuwly geometriýanyň okuw dersi hökmünde Peterburgyň ýol inženerleri korpusy institutynda /häzir Leningradyň demir ýol transporty inženerçilik instituty/ düýbi tutulandyr we 1810-njy ýylda özbaşdak ders hökmünde okadylyp başlanypdyr.

1816-njy ýylda institutyň mugallymy Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow /1796-1849/ ilkinji çyzuwly geometriýa kursuny rus dilinde çap etdiripdir, şunuň bilen ol şu ders boýynça watançylyk edebiýatyň başlangyjjyny goýupdyr.

1821-nji ýylda ol “Çyzuwly geometriýanyň esasy’’ kursuny düzüpdir we çap etdiripdir, munuň özi şu ugurdan çap edilen daşar ýurt kitaplaryndan özüniň möçberi, hili we mazmuny boýunça has giň bolupdyr.

1824-nji ýylda Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanowa Russiýada çyzuwly geometriýanyň ilkinji professor diýen at dakylypdyr. Çyzuwly geometriýada rus terminologiýalaryny işläp düzmeklik onuň bu ugurda bitiren uly hyzmatydyr.

Geçen asyryň otuzynjy ýyllarynyň başlarynda Rusýanyň tehniki okuw jaýlarynyň ählisinde diýen ýaly çyzmaly geometriýa okadylyp başlanypdyr. Muňa Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow hem-de beýleki rus alymlarynyň çyzmaly geometriýadan çap edilen ilkinji işleri ýardam edipdir.

Akademik I.I.Somow, professorlar P.P.Durow, A.H.Reder we başgalar Russiýada çyzmaly geometriýanyň ösmeginde uly goşant goşan alymlardyr.

Russiýada çyzuwly geometriýany okatmak usulynyň ösmegini Peterburgly professorlar N.A.Makarow /1844-1904/ bilen W.I.Kurdýumowyň /1858-1904/ pedagogik we ylmy işleri uly täsir edipdir.

W.I.Kurdýumowyň işleri özüniň nazary çuňlygy, ylmy durnuklylygy we mazmunynyň dolylygy bilen aýratyn tapawutlanýar, bu bolsa şekillendirmek usuly oblastynda şol işleri klassiki işler hökmünde hasap etmäge doly esas döredýar. Onuň esasy hyzmaty aýry-aýry meseleleriň çözülişini derňemegiň, ozal kabul edilen usulyndan ýüz öwürüp, inžinerçilik tejribesinden mysallar getirmek bilen, nazary meseleleri giňden beýan edilenliginden ybaratdyr.

Öz işlerinde çyzuwly geometriýanyň ägirt uly **praktiki - amaly** ähmiýetiniň bardygyny görkezen N.A.Rynin /1877-1942ý.ý./ mugallymy - professor W.I.Kurdýumowyň işlerini dowam etdirijidir.

Professorlar M.L.Deşewoý, D.G.Ananow, Ý.S.Fedorow rewolýusiýadan önki hem-de soňky döwürlerde şekillendirmegiň usuly boýunça işlediler. Bu ugurda zähmetine sarpa goýmaly alymlaryň sany sowet döwründe has-da artdy. Professorlar N.A.Glagolew /1888-1945ý.ý./ A.I.Dobrýakow /1895-1948ý.ý./, D.I.Kargin /1880-1949ý.ý./ , N.F.Çetweruhin /1891-1974ý.ý./, S.M.Kolotow /1880-1965/, W.O.Gordon /1892-1970ý.ý./ we N.Ý.Gromow /1884-1963ý.ý./ ýaly görnükli alymlaryň atlarny tutmak hem-de olaryň bitiren uly ylmy – usuly işlerini aýratyn belläp geçmek bolar.

3. TEKIZLIGE MERKEZI WE PARALLEL PROÝEKTIRLEMEK

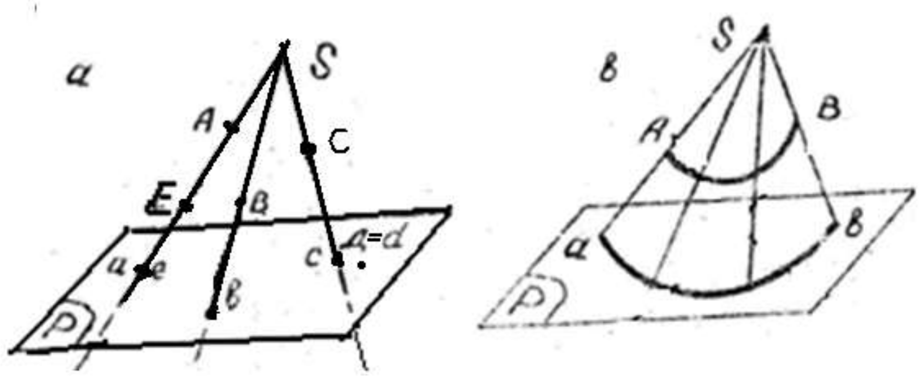
Proýektirlemek - şekillendirmek usuly şekili çyzmagyñ - çekmegiň esasy edilip goýulandyr.

Tekizlikde predmetleriñ şekilini gurmagyñ düzgüni proýektirlemek usulyny ulanmaklygyna esaslanandyr. Proýektirleýji göni çyzyklaryñ / proýektirleýji şöhleleriñ/ kömegi bilen proýeksiýa tekizligine predmetleriñ şekilini gurmaklyk prosessine **p r o ý e k t i r l e m e k– -ş e k i l l e n d i r m e k** diýilýär. **Merkezi** hem-de **parallel** proýektirlemeklik bolmak bilen, olara degişlilikde merkezi we parallel proýeksiýalar bardyr. Häzir bu usullaryň her haýsysyna aýratynlykda seredeeris.

3.1. Merkezi proýektirlemek.

Giñişlikde erkin proýeksiýa - şekillendirme merkezi bolan S nokady /I-nji a – surat/ we **P** proýeksiýalar - şekiller tekizligini alýarys. Şeýlede giňişlikde ýerleşen - berlen **A, B, C, E** we **D** nokatlary **P** tekizligine proýektirlemek üçin **P** proýeksiýalar tekizligi bilen **a, b, c, d** we **e** nokatlarda kesişýänçä **S** proýeksiýa merkeziniň üstünden **SA, SB, SC** we **SD** göni çyzyklary geçirmek gerek. **a, b, c, d** we **e** nokatlar **A, B, C, E** hem-de **D** nokatlaryñ merkezi proýeksiýalarydyr. **SA, SB, SC, SD** we **SE** göni çyzyklar bolsa **proýektirleýji göni çyzyklar ýa-da proýektirleýji şöhlelerdirler.**

AB egri çyzyga degişli birnäçe nokady merkezi proýektirlemek bilen, onuñ **P** tekizligindäki **ab** merkezi proýeksiýasyny almak bolar /I-nji b – surat/.



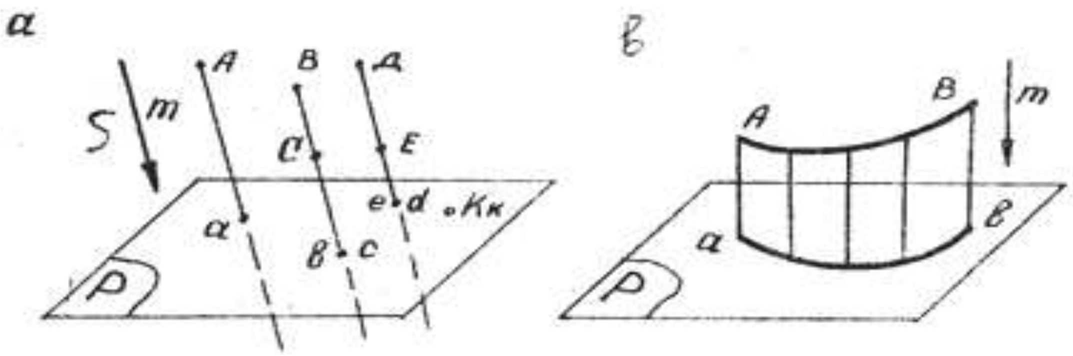
1-nji surat

AB egri çyzygyñ ähli nokatlarynyñ proýektirleýji göni çyzyklary konus şekilli käbir üsti emele getirerler. Şonuñ üçin merkezi proýektirlemeklige kä ýagdaýlarda **koniki** ýa-da **polýar** proýektirlemeklik hem diýilýär.

Merkezi proýeksiýalar has aýdyñ - düşnükli bolýarlar, emma olary gurmaklyk çylşyrymlydyr hem-de ölçeg geçirmeklikde çylşyrymly - oňaýsyz bolýarlar, şonuñ üçinde **maşyn gurlyşygy** çyzuwynda bu usul seýrek ulanylýar.

3.2. Parallel proýektirlemek.

Eger **S** proýeksiýa merkezi **P** proýeksiýalar tekizliginden tükeniksiz uzakda ýerleşen bolsa, onda proýektirleýji şöhleleri özara parallel diýip kabul edýäris. Şeýle proýektirlemege parallel proýektirlemek diýilýär /2-nji a-surat/.

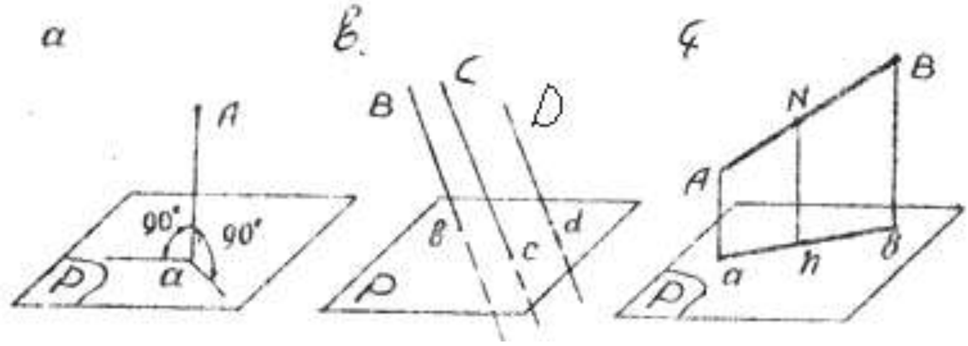


2-nji surat

Parallel proýektirlemekde tükeniksizlikde ýatan **S** nokada ugrukdyrylan proýektirlemegiñ **m** ugry hökman görkezilmelidir.

AB egri çyzygyñ /2-nji b-surat/ nokatlarynyñ üstünden geçirilen proýektirleýji göni çyzyklar **silindrik** üsti emele getirýärler. Şonuñ üçin şeýle proýektirlemeklige **silindrik** proýektirlemek hem diýilýär.

Parallel proýeksiýalar **göniburçly** /3-nji a,ç-surat/ we **ýapgytburçly – ýitiburçly** /3-nji b-surat/ proýeksiýalara bölünýär.



3-nji surat

Birinji ýagdaýda proýektirleýji şöhleler proýeksiýalar tekizligine perpendiku-lýardyrlar, ikinji ýagdaýda bolsa proýektirleýji şöhleleriň proýeksiýalar tekizligi bilen emele getirýän burçy gönüburçdan tapawutlydyr.

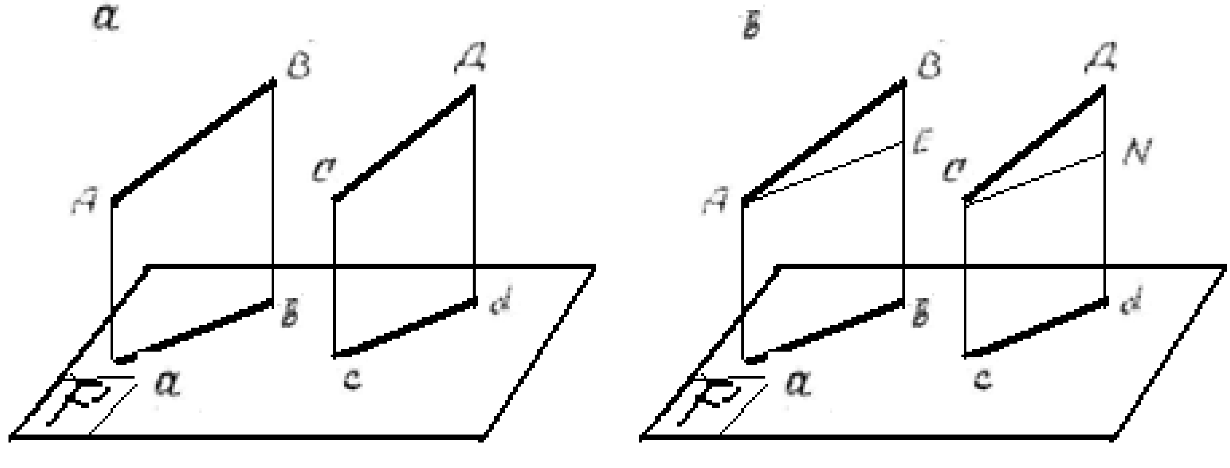
3.3. Parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetleri:

1. Giňişlikdäki her bir nokadyň we islendik çyzygyň ýagny islendik geometriki figuranyň proýeksiýalar tekizliginiň üstünde diňe bir proýeksiýasy bardyr /1-nji we 2-nji surat/.

2. Göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy olaryň proýeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir, ýagny $\frac{AN}{BN} = \frac{an}{nb}$ /3-nji ç surat/.

Munuň özi **Aa || Nn || Bb** göni çyzyklaryň kesimi proporsional böleklere bölünýändiklerinden hem görünýär.

3. Parallel göni çyzyklaryň biratly proýeksiýalary özara paralleldirler. Eger **AB || CD** bolsa, onda ab || cd /4-nji a surat/.



4-nji surat

Munuň özi **ABba** we **CDdc** iki parallel proýektirleýji tekizlikleriň üçünji tekizligi parallel göni çyzyklar boýunça kesýänliginden gelip çykar.

4. Iki parallel göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy kesimleriň proýeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir. Goý **AB || CD** diýeliň. Bu ýerden $\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}$ bolýandygy aşakdaky ýaly subut edilýar /4-nji b surat/.

A nokadyň üstünden **ab || AE** göni çyzygy we **C** nokadyň üstünden **cd || CN** göni çyzygy geçirilýär. **ABE** we **CDN** göniburçly üçburçlyklar meňzeşdirler. Üçburçlyklaryň meňzeşliginden $\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CN}$

ýa-da $\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}$ gelip çykýar. Subut etmelisi hem şundan ybaratdyr.

Parallel proýeksiýalaryň görkezilen şu häsiýetleri proýektirlemegiň ähli ugurlary boýunça hem saklanýar.

Iki ýa-da üç sany özara perpendikulýar bolan proýeksiýalar - şekiller tekizliklerine **göniburçly proýektirlemeklige ortogonal proýektirlemek** ýa-da **G.Monžyñ usuly** diýilýär. **Ortogonal proýektirlemek predmetiñ şekilini takyk gurmagy, oñaýly ölçegler geçirmekligi üpjün edýär we şonyñ üçin ol tehniki çyzgylary çyzmagyñ esasy usulydyr we durmuşda giňden ulanylýandyr.**

“Göniburçly” sözüni köplenç gadymy grek diliniñ **“göni”** we **“burç”** diýen sözlerinden düzülen **“ortogonal”** cözi bilen hem çalşyrýarlar.

I BAP
NOKADYŇ PROÝEKSIÝASY

NOKADYŇ PROÝEKSIALAR TEKIZLIKLERINIŇ IKISINE WE ÜÇÜSINE PROÝEKSIALARY

4. Nokadyň proýeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine proýeksiýasy.

Ortogonal proýeksiýalar tekizlikleriniň birini adatça **gorizontal** ýerleşdirýärler we **gorizontal /kese/ proýeksiýalar tekizligi** diýip atlandyrýarlar, özüni hem **H** bilen belleýärler. Ikinjisi **wertikal – dik** ýerleşdirýärler, oňa **V** – **frontal /maňlaý - öňümizdäki/ proýeksiýalar tekizligi** diýilýär; üçünji hem dik wertikal ýerleşendir, oňa **W** – **profil /gapdal/** proýeksiýalar tekizligi diýilýär. Proýeksiýalar tekizlikleriniň kesişme çyzyklaryna **OX, OY, OZ proýeksiýalar oklary** diýilýär /5-nji a – surat/. Proýeksiýalar oklarynyň üçüsiniň hem kesişýän **O** nokada bolsa koordinata oklarynyň başlangyjy diýilýär.

Goý giňişlikde **A** nokat berlen bolsun. **A** nokatdan proýeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine hem perpendikulýar çyzyklary geçirip, olaryň proeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän ýerinde **A** nokadyň ortogonal proeksiýalaryny alarys, olary $\mathbf{a}$, $\mathbf{a^{1}}$, $\mathbf{a^{11}}$, /nokadyň gorizontal – plan , frontal-fasad, profil proeksiýalary/ diýip belleýärler. Şeýlelik bilen, nokady haýsy hem bolsa bir şekiller tekizlige proektirlemek diýmek, şol nokatdan proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar indermek we onuň esasyny tapmak diýmekdir.

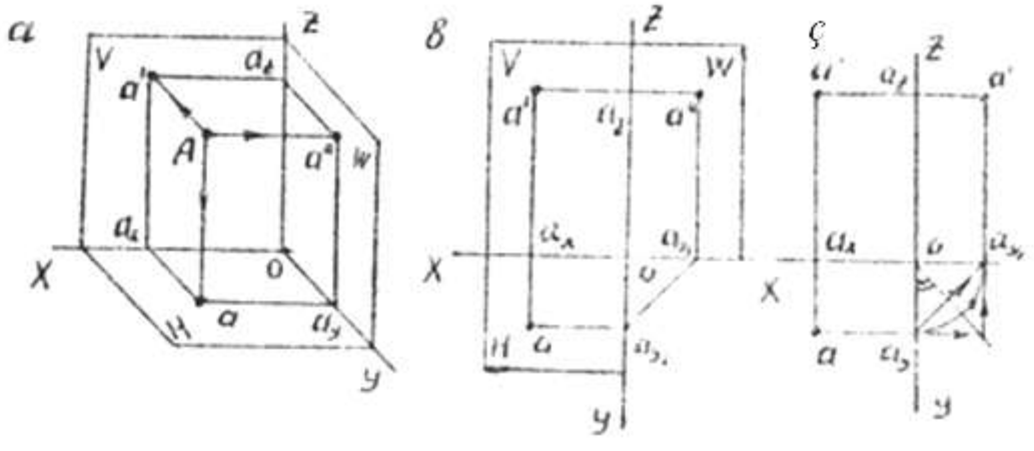
Gurlan parallelepipede **A** nokadyň parallepipedi diýilýär.

Ýokarda görkezilen proýeksiýalaryň bir tekizlikdäki çyzgysyny almak üçin **H** we **W** tekizliklere degişlilikde **OX** we **OZ** oklarynyň daşynda görkezilen ugur boýunça **V** tekizlik bilen utgaşýança aýlaýarlar /5-nji b surat/.

Proýeksiýalar tekizlikleriniň gyralaryny çäklendirýän çyzyklar ortogonal çyzgyda adatça görkezilmeýär
/5-nji ç surat/.

Şekiller tekizliklikleri utgaşdyrlandan soň alynýan şekile **kompleks çyzgy, ortogonal çyzgy** ýada **epýur** diýilýär.

Proýeksiýalar tekizlikleri şeýle utgaşdyrylanda, **a** gorizotal we $\mathbf{a^1}$ frontal proeksiýalar **OX** okyna geçirilen şol bir perpendikulýaryň üstüne ýatýandygy düşnüklidir, şeýle hem $\mathbf{aa_x}$ aralyk **A** nokatdan **V** frontal proýeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar, $\mathbf{a^1\ a_x}$ aralyk bolsa **A** nokatdan **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar. Edil şunuñ ýaly $\mathbf{a^1}$ frontal we $\mathbf{a^{11}}$ profil proýeksiýalar hem **OZ** okuna geçirilen şol bir perpendikulýaryñ üstünde ýatarlar.



5-nji surat

Nokadyñ proýeksiýalarny birleşdirýän $\mathbf{aa^1}$, $\mathbf{a^1a^{11}}$ göni çyzyklara proýeksiýalaryň **baglanşyk çyzyklary** diýilýär.

Nokadyñ berlen epýury boýunça, ýagny iki ýa-da üç proýeksiýasy boýunça nokadyñ giñişlikdäki ýagdaýyny kesgitlemek kyn däldir. Iki proýeksiýa boýunça üçünji proýeksiýany gurmak üçin töweregiñ dugasyndan ýa-da **OY** okuna 45 ^{0} burç bilen göçürlen ýapgyt göni çyzykdan peýdalanmak bolar /5-nji b - surat/.

Ortogonal proýeksiýalaryñ üsti bilen nokadyñ giñişlikde berilmegi nokadyñ göniburçly koordinatalarynyñ üsti bilen berildigi diýildigidir.

A nokadyñ ýagdaýyny kesgitlemek üçin /5-nji a – surat/ berlen **A** nokatdan **XOY**, **XOZ** we **ZOY** ýç koordinatalar tekizliklerine çenli aralyklary ölçeýärler:

X – san berlen nokatdan **ZOY** koordinatalar tekizligine /**W** profil proýeksiýalar tekizligine – çenli bolan $\mathbf{Aa^{11}}$ aralygy,

Y – berlen nokatdan **XOZ** koordinatalar tekizligine /**V** frontal proýeksiýalar tekizligine / çenli bolan $\mathbf{Aa^{1}}$ aralygy,

Z – berlen nokatdan **XOY** koordinatalar tekizligine **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine çenli bolan **Aa** aralygy añladar.

Görşümiz ýaly koordinata tekizliginiñ ornuna **H, V** we **W** proýeksiýalar tekizlikleri kabul edilendir, şonda olaryñ kesişme çyzyklary koordinata oklary bilen gabat gelýär. Adatça ýazgy şeýle alynyp barylýar. **A /15, 10, 25/.** Koordinatalaryñ şeýle ýazgylaryna **analitik usul** diýilýär. Şol, koordinatalar boýunça **A** nokadyñ proýeksiýalarny tapmak bolar, bu ýerde:

$$\mathbf{Aa = Z_A = 25 = a^1\, a_x = Oa_z = a^1\, a_y}$$

$$\mathbf{Aa^1 = Y_A = 10 = aa_x = Oa_y = a^{11}a_z}$$

$$\mathbf{Aa^{11} = X_A = 15 = aa_y = Oa_x = a^1a_z}$$

Nokadyñ üç sany göniburçly koordinatasy koordinata oklaryň san bahasy nokatlaryň onuñ giñişlikdäki ýagdaýyny mydama doly kesgitleýär.

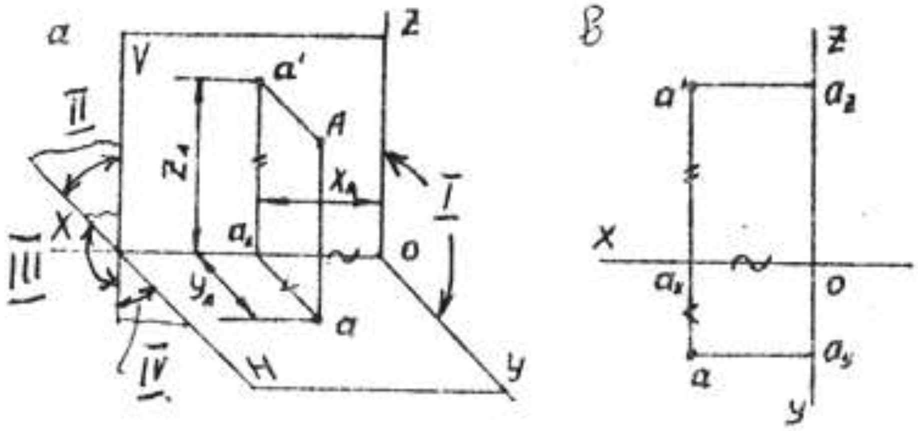
Nokadyñ her bir ortogonal proýeksiýasy koordinatalaryñ ikisi bilen kesgitlenýär, şeýlelikde, nokadyñ ortogonal proýeksiýalarnyñ ikisi bilelikde nokadyñ koordinatalaryñ üçüsini kesgitleýär.

Ortogonal çyzygynyñ tekizliginde nokadyñ ortogonal proýeksiýalarnyñ ikisi degişlikde bu nokadyñ giñişlikdäki ornuny-ýagdaýyny doly kesgitleýär. Şeýle proýeksiýalaryñ ikisi 5-nji b, ç suratlardan görnüşi ýaly, proýeksiýalar okuna perpendikulýar göni çyzygyñ **/proýeksion baglanşyk çyzygyñ/** üsti bilen biri-birine baglydyr.

5. Nokadyñ proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine proýeksiýasy.

Köp meseleleri çözmek üçin **predmetiñ** diñe gorizontal **/H /** we frontal **/V/** özara perpendikulýar proýeksiýalar tekizliklerindäki proýeksiýalarna garap geçmeklik ýeterlikdir. Şonuñ üçin proýeksiýalar tekizliklerniñ ikisiniñ sistemasy çyzmaly geometriýa dersinde giñden ulanylýar. **H** we **V** tekizlikleri özara kesişenlerinde giñişligi dört bölege /çärýege/ bölýär /6-njy a - surat/.

6-njy a – suratda **H** we **V** tekizliklerne ikisine **A /20, 15, 30/** nokadyñ proýeksiýalarnyñ şekili görkezilendir. Bu ýerde **A** nokadyñ **a** gorizontal proýeksiýasy, frontal proýeksiýasy hem $\mathbf{a^1}$ nokatdyr



6-njy surat

Ortogonal çyzygyny almak üçin **H** tekizligi **V** tekizlik bilen utgaşýança **OX** okuñ daşynda 90^0 aşaklygyna aýlaýarlar. Ortogonal çyzygynda /6-nji b - surat/ nokadyñ **a we** $\mathbf{a^1}$ proýeksiýalary **OX** oka geçirilen perpendikulýar, ýagny $\mathbf{aa^1}$ proýeksion baglanşyk çyzygynyñ üstünde ýatýarlar.

6. Iki proýeksiýalar tekizliklerne garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryñ proýeksiýalary.

H we **V** şekiller tekizlikleri özara perpendikulýar bolup kesişmek bilen giňişligi çärýekler diýilip atlandyrylýan dört sany iki granly burça bölýärler. Olar **I, II, III, IV** sifrler bilen belgilenendirler. Epýurda nokadyñ proýeksiýalarnyñ ýagdaýy nokadyñ haýsy çärýekde ýerleşendigine baglydyr.

Giňişligiň dört çärýeginde ýerleşen **A, B, C** we **D** nokatlaryñ proýektirlenşine mysallar 7-nji a suratda aýdyñ görkezilendir. **A** nokat **I** çärýekde, **B** nokat **II** çärýekde, **C** nokat **III** çärýekde, **D** nokat bolsa **IV** çärýekde ýerleşendir.

7-nji b suratda berlen nokatlaryñ ortogonal proýeksiýalary gurulandyr. Birinji çärýekde ýerleşen **A** nokadyñ **a** gorizontal proýeksiýasy tekizlikler utgaşdyrylandan soñ **OX** okdan aşakda, $\mathbf{a^1}$ frontal proýeksiýasy bolsa **OX** okdan ýokarda ýerleşendir.

Ikinji çärýekde ýerleşen **B** nokadyñ proýeksiýasynyñ ikisi hem **b** we $\mathbf{b^1}$ tekizlikler utgaşdyrylandan soñ OX okdan ýokarda ýerleşendir.

Üçünji çärýekde ýerleşen **C** nokadyñ gorizontal proýeksiýasy **/c/** **OX** okdan ýokarda, frontal proýeksiýasy **/**$\mathbf{c^1}$**/** bolsa **OX** okdan aşakda ýerleşýär.

Dördünji çärýekde ýerleşen **D** nokadyñ proýeksiýasynyñ ikisi hem **d** we $\mathbf{d^1}$ tekizlikler utgaşdyrylandan soñ **OX** okdan aşakda ýerleşendir.

7-nji a, b suratdan görnüşi ýaly, nokatlar giñişlikde ýerleşende olaryñ **X, Y** we **Z** koordinatalarynyñ belli bir san bahasy bolmalydyr.

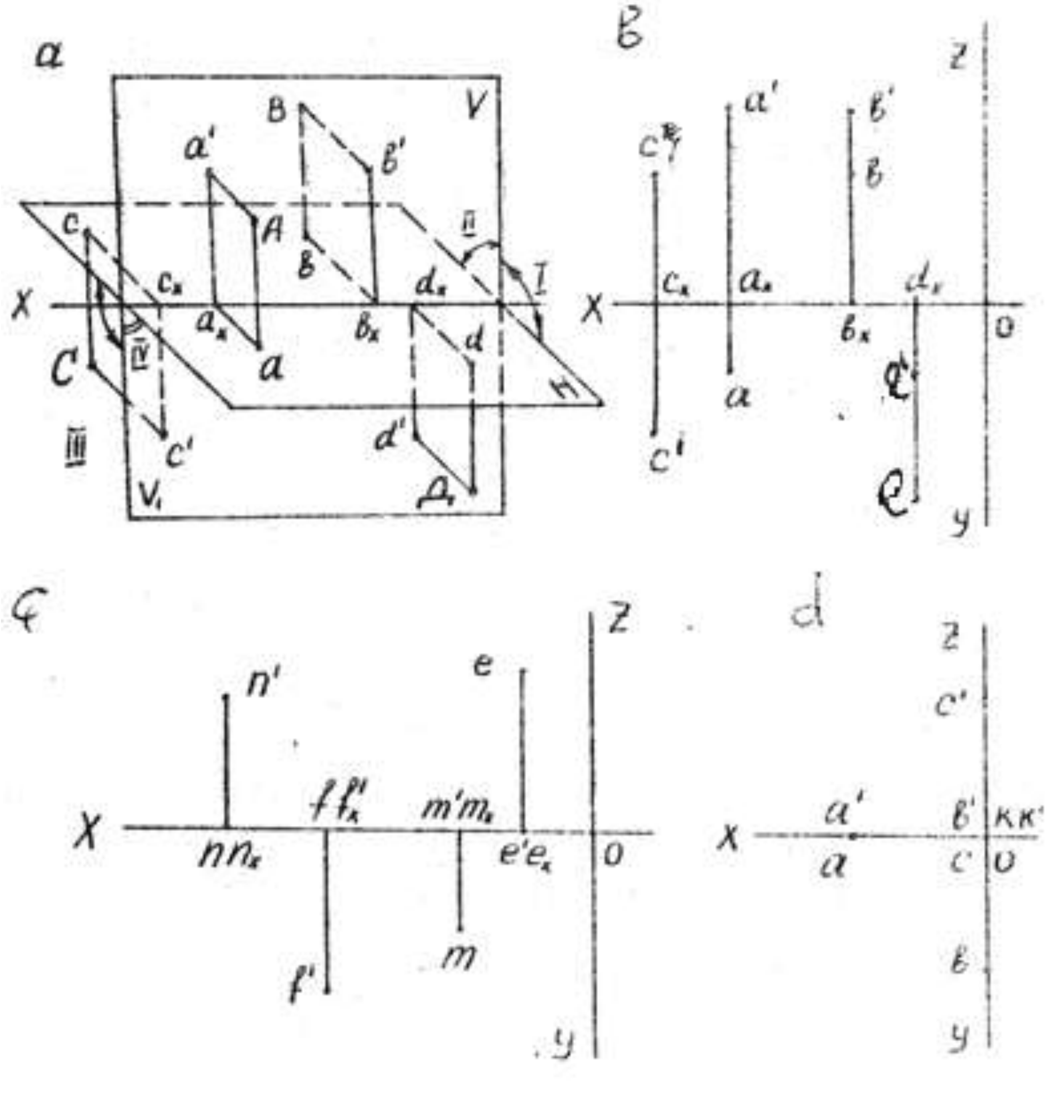
A/40, 10, 30/, B /20, 30, 20/, C/50, 20, 20/, D /10, 30, 15/ .

7-nji ç suratda proýeksiýalar tekizliklerinde ýerleşen nokatlaryñ epýuralary berlendir. Ýagny $\mathbf{N \subset V, F \subset V_1, M \subset H}$ **we** $\mathbf{E \subset H_1}$**.**

Eger nokatlar haýsy – da bolsa bir proýeksiýalar tekizliginde ýerleşen bolsalar, onda olaryñ şol şekiller tekizligine çenli bolan aralygy haýsy – da bolsa bir koordinatasynyñ san bahasy **0** – nola deñdir, ýagny ýokdyr

N /55, 0, 20/, F /40, 0, - 25/, M /20,15, 0/, E /10, -25, 0/.

7-nji d – suratda nokadyñ iki koordinatasynyň san bahasy 0 - nola deñ bolanda ol nokatlaryñ koordinata oklaryñ biriniñ üstünde ýerleşendiklerini görkezilendir. **A /20, 0, 0/, B /0, 20, 0 /, C /0, 0, 20/.**



7-nji surat

Şu suratdan görnüşi ýaly, haýsy hem bolsa bir nokadyñ üç koordinatasynyñ hem san bahasy ýok bolsa, ýagny 0 - nola deñ bolsa, onda ol nokat koordinata oklarynyñ başlangyjynda, **0** nokatda ýerleşýändir. Meselem, **K /0, 0, 0/** - nokady.

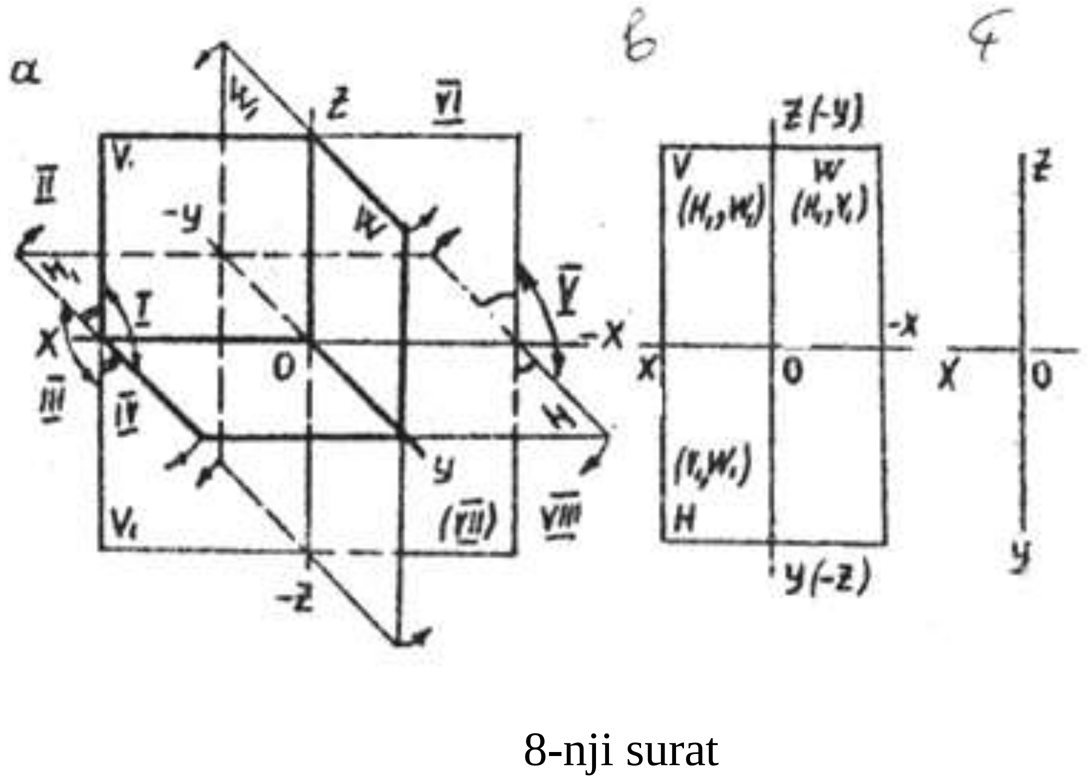
7. Üç proýeksiýalar tekizliklerine garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryñ proýeksiýalary.

Giňişlikde özara perpendikulýar bolan üç sany: gorizontal **H**, frontal **V**, we profil **W** proýeksiýalar tekizlikleri özara kesişmek bilen giñişligi oktantlar diýilip atlandyrylýan sekiz sany üç granly burça bölýärler /8-nji a - surat/. Oktantlar hem çärýekler ýaly nomerlenýär:

I, II, III, IV, V, VI, VII we VIII. Oktantlaryñ tertibi çyzgyda görkezilendir.

1-nji tablisada dürli oktantalar üçin nokadyñ koordinata oklarynyň alamatlary berilendir.

Nokadyñ haýsy oktantada ýerleşenligi kesgitlenende, **W** tekizligiň ozalky çärýeklere garanda giñişligi iki topara bölýändigni göz öňünde tutmak gerek : birinji topar **OZ** okdan çepde I – IV oktantalar, sagda bolsa ikinji topar V – VIII oktantalar ýerleşýär. Nokadyñ gorizontal we frontal proýeksiýalarynyñ ýerleşişi boýunça onuñ haýsy topardadygyny we oktantadadygyny kesgitleýärler. Mysal üçin, nokadyñ gorizontal we frontal proýeksiýalary **OZ** oktan çepde ýerleşen diýeliñ, bu ýagdaýda nokat oktanlaryñ birinji toparyna degişlidir. Şol proýeksiýalaryñ **OX** oka görä ýagdaýy boýunça bolsa nokadyñ haýsy çärýekde, diýmek, haýsy oktantda ýerleşendigi kesgitlenýär.



8-nji surat

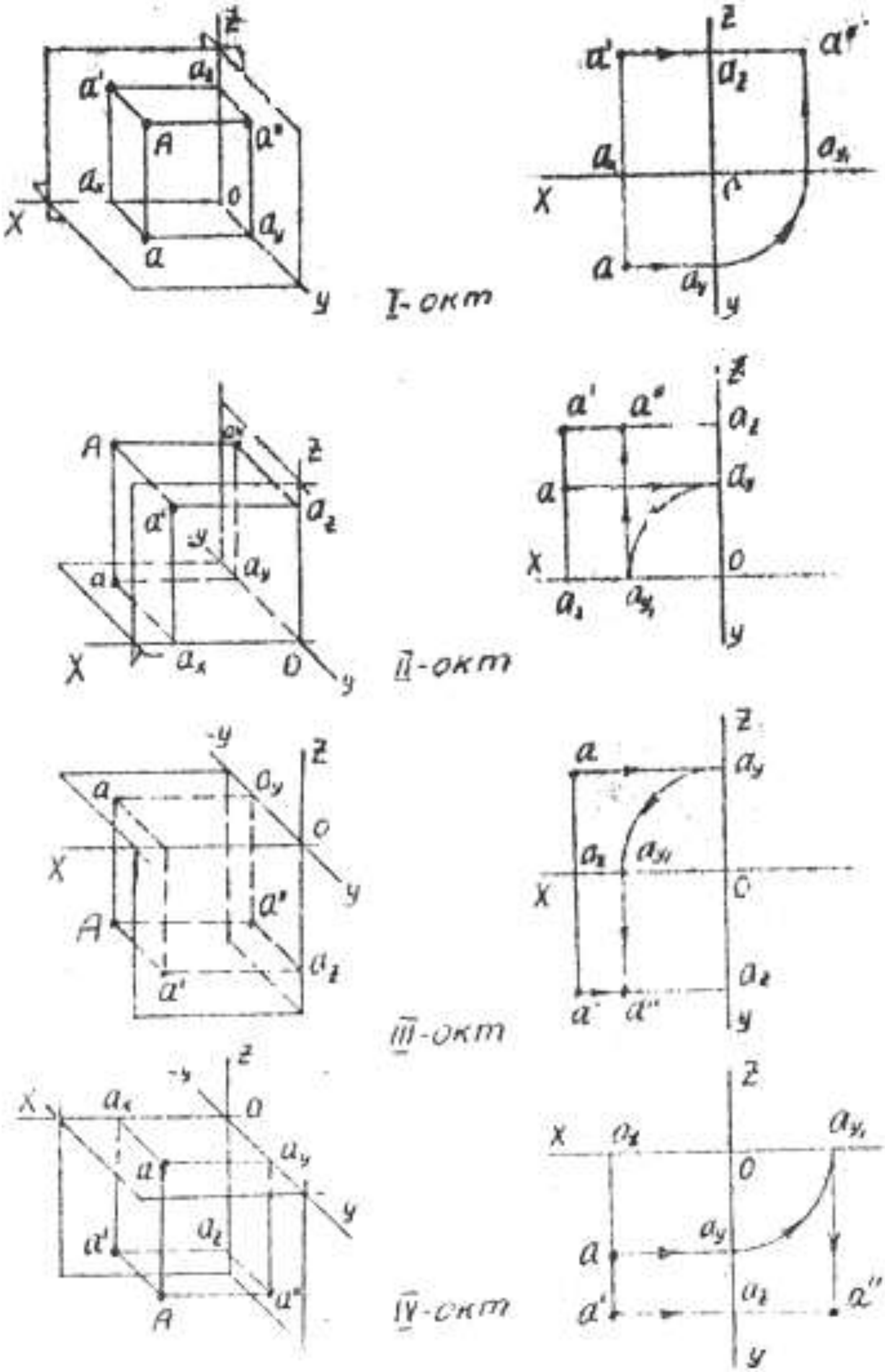
Nokadyñ giñişlikdäki ýagdaýyny diñe onuñ proýeksiýalary boýunça dälde, **X, Y, Z** üç koordinatalaryñ alamatlary boýunça hem kesgitlemek bolar. Nokadyñ koordinatalary belli bolsa, şol koordinatalar boýunça nokadyñ proýeksiýalarny gurmak bolar we tersine, kompleks çyzygy boýunça nokadyñ koordinatalaryny kesgitlemek bolar.

1-nji tablisa.

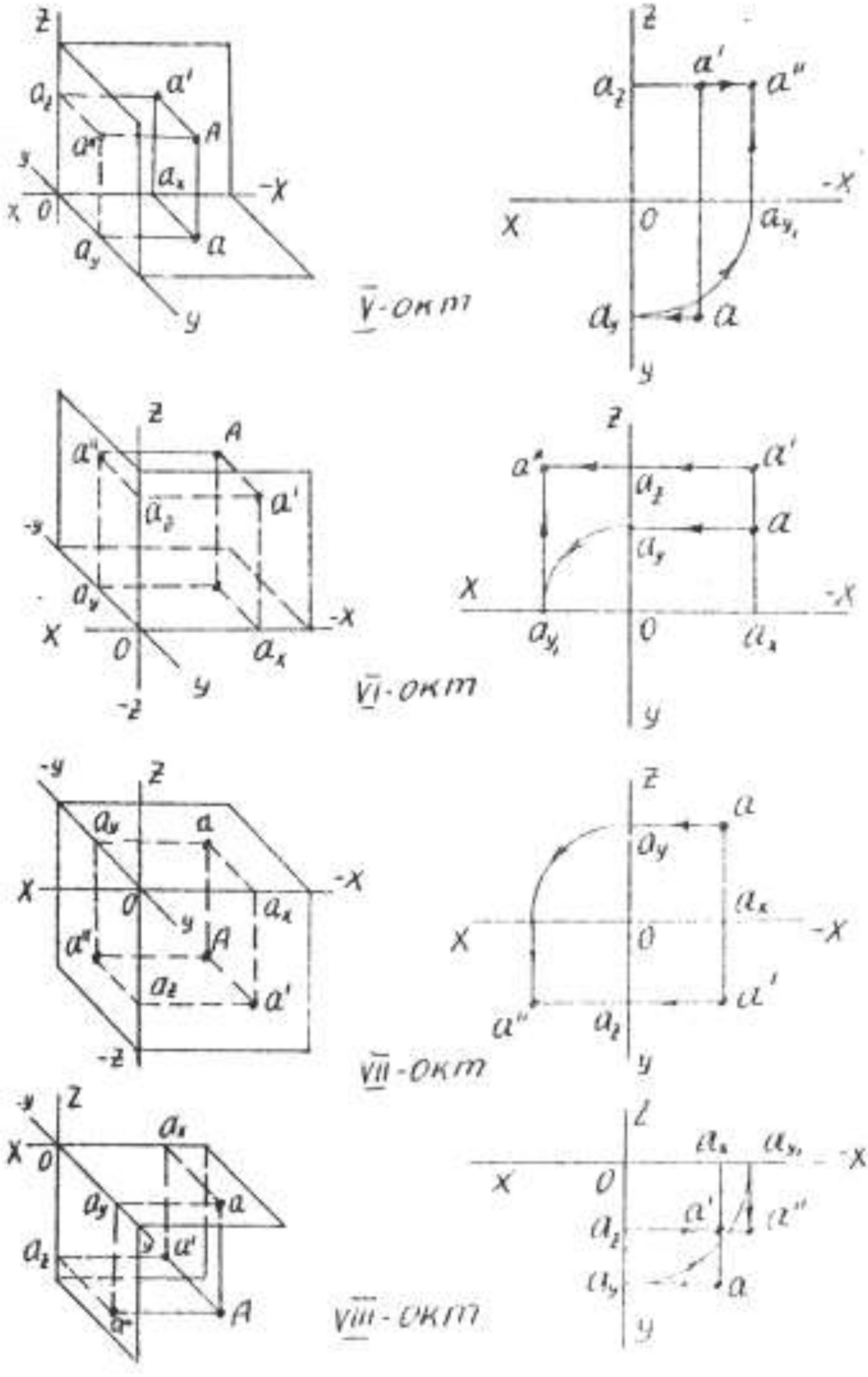
Oktantlar			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Koordinata oklary	X	alamatlar	+	+	+	+	-	-	-	-
	Y		+	-	-	+	+	-	-	+
	Z		+	+	-	+	+	+	-	-

Ortogonal çyzga geçmek üçin gorizontal **H** we profil **W** tekizlikleri 8-nji a- suratda görkezilişi ýaly aýlap, frontal **V** tekizligi bilen utgaşdyrylýar. Şeýle utgaşdyrmaklygyñ netijesinde **ortogonal çyzgy, kompleks çyzgy, /epýur/** alynýar /8-nji b, ç surat/. Şol çyzgyda hem giñişligiñ sekiz burçynyñ /oktantlarynyñ/ islendiginde ýerleşen nokadyñ proýeksiýasy görkezilmäge doly mümkinçilik bardyr.

Dürli oktantlarda ýerleşen nokadyñ proýektirlenişiniñ aýdyñ görnüşinde hem-de ortogonal çyzgyda berlişine mysallar 9-nji suratda görkezilendir. Öñki belleýşimiz ýaly, şunda hem oktantalaryñ nomerleri **rim sifrler** bilen bellenendir.



9-njy (a) surat

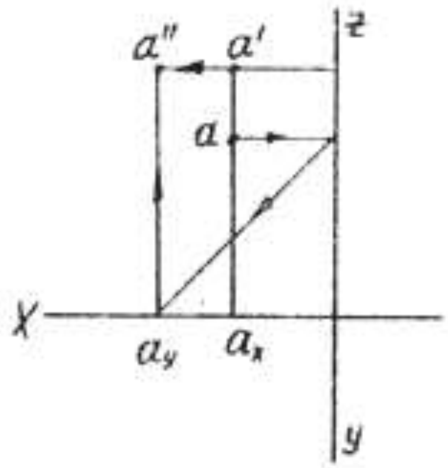


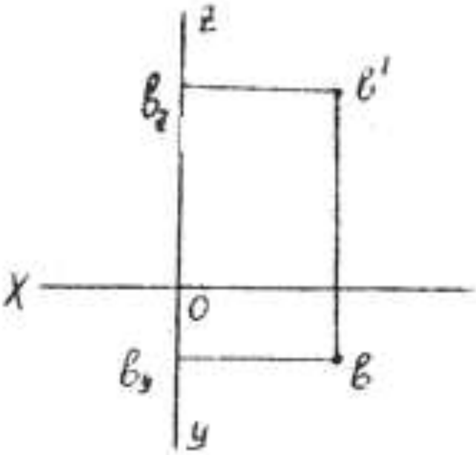
9-njy (b) surat

1-nji mesele. Berlen koordinatalary boýunça A /15, - 25, 35/ nokadyñ /10-njy surat/ proýeksiýalaryny gurmaly.

$$X_A = 15,\ Y_A = -25,\ Z_A = 35.$$

2-nji mesele. B nokat b gorizontal we b^1 frontal proýeksiýalary bilen berlen. Bu nokadyñ üç koordinata oklarynyň san bahasyny kesgitlemeli /11-nji surat/. B .





10-njy surat 11-nji surat

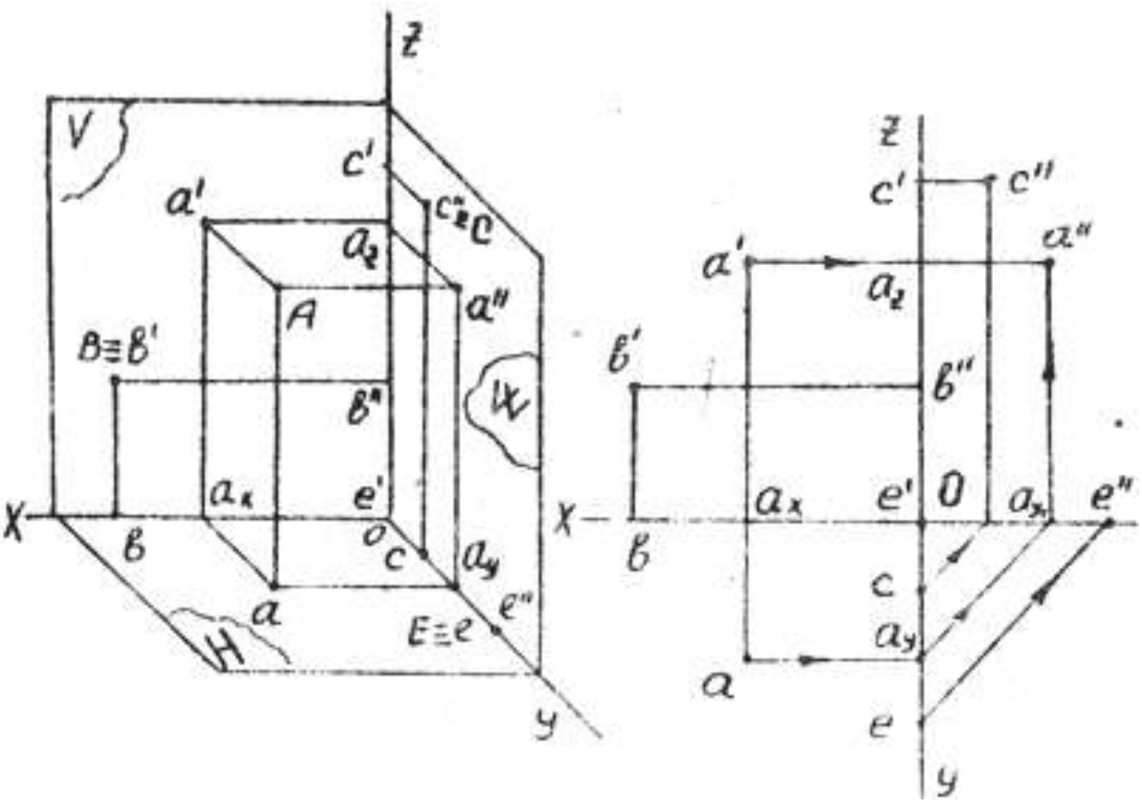
Öz-özüñi barlamak üçin soraglar we meseleler.

1. Nokadyñ göniburçly koordinata oklary diýip nämä aýdylýär ?
2. Nokadyñ giñişlikdäki ornuny göniburçly koordinatalaryñ näçesi kesgitleýär ?
3. Nokadyñ gorizontal, frontal hem-de profil proýeksiýalarynyñ ýagdaýyny aýratynlykda haýsy koordinatalar kesgitleýär ?
4. Nokadyñ giñişlikdäki ornuny ortogonal proýeksiýalarynyñ näçesi kesgitleýär we näme üçin ?
5. Nokadyñ ortogonal proýeksiýalary epýurda özara nähili baglanyşandyr ?
6. Aşakdaky nokatlaryñ giñişlikdäki ornuny kesgitlemeli we ortogonal proýeksiýalaryny gurmaly : A /20, 30, -40/,

B /- 30, - 40, 50/, C /- 30, 50, 0/, D /0, - 40, 0/, E /0, 0, 0/.

7. Berlen çyzgyny analizläñ - derňäň /12-nji surat/.
8. Çyzmaly geometriýada proýektirlemegiñ nähili usullary kabul edildi we her bir usulyň manysy - tapawudy nämeden ybarat ?

9. Proýeksiýalaryñ koordinata oklary diýilip nämä aýdylýär ?
10. Baglanyşyk çyzygy diýip nähili çyzyga aýdylýar ?
11. Çärýekler hem-de oktantalar nähili emele gelýär ?
12. Epýura geçilende proýeksiýalar tekizlikleri nähili aýlandyrylýar we epýur näme ?



12-nji surat

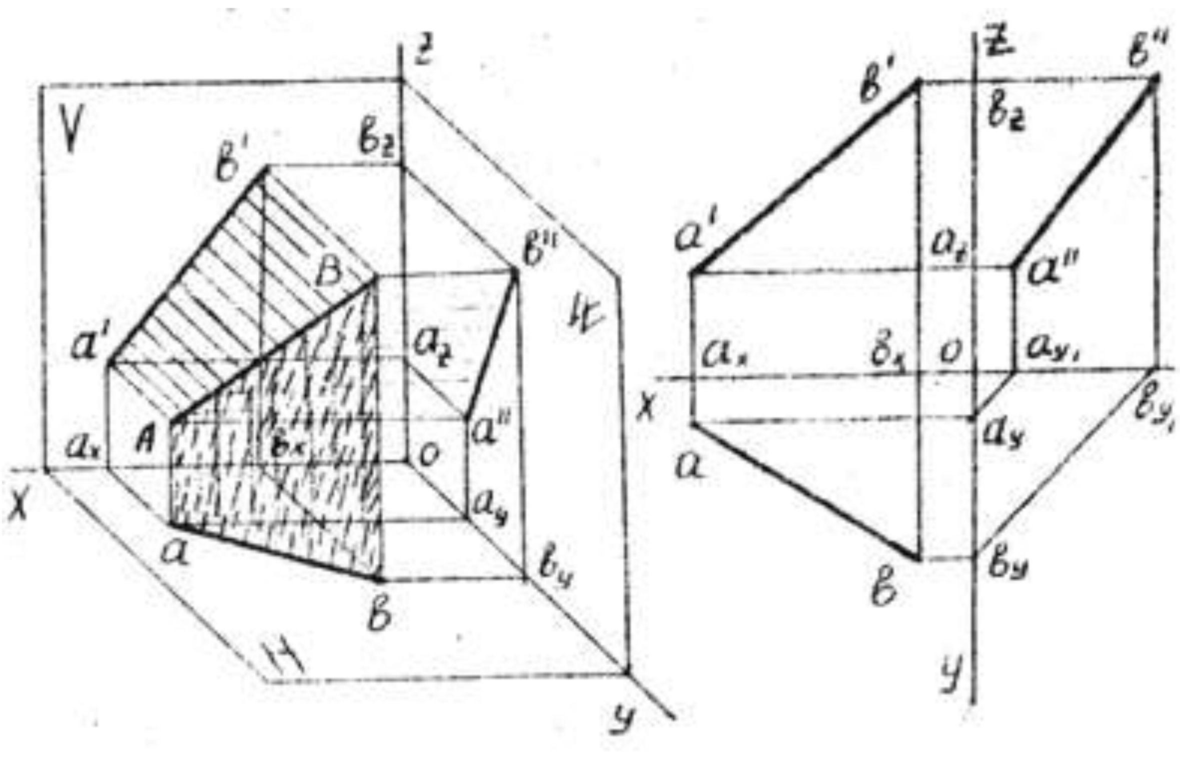
II BAP

GÖNI ÇYZYGYÑ PROÝEKSIÝASY.

8. Göni çyzygyñ kesimini proýektirlemek.

Göni çyzygyñ giñişlikdäki ýagdaýy onuñ iki nokady bilen kesgitlenýär. Şonuñ üçin hem şol iki nokady **H, V we W** şekiller tekizliklerne proýektirläp we nokatlaryñ bir atly proýeksiýalaryny göni çyzyk bilen birleşdirip, **AB** kesimiñ **ab** gorizontal, $\mathbf{a^1\ b^1}$ frontal $\mathbf{a^{11}\ b^{11}}$ profil proýeksiýalary alynýar /13-nji surat/.

Göni çyzygyñ proýeksiýasy şol göni çyzygyñ üstünden geçýän proýektirleýji tekizlikleriñ proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişme çyzygy hökümde hem kesgitlenilip biliner. Göni çyzygyñ şekiller tekizligindäki proýeksiýasy - göni çyzykdyr. Proýeksiýalar tekizliklerine garanda göni çyzyk özüniñ giňişlikdäki ýagdaýyna görä iki hili, ýagny **umumy** we **hususy** halda bolup biler.



13-nji surat

1. Umumy haldaky göni çyzyk.

Proýeksiýalar tekizlikleriniñ hiç birine hem parallel bolmadyk göni çyzyga **u m u m y** haldaky göni çyzyk diýilýär . Şeýle göni çyzygyñ şekili kesiminiñ uzynlygynyň her bir proýeksiýasy kesimiñ özünden kiçidir we onuñ proýeksiýalar tekizliklerine bolan **ýapgytlyk burçy** näçe uly bolsa, proýeksiýasy şonça-da kiçidir. **AB** göni çyzyk bilen **H, V** we **W** tekizlikleriñ arasyndaky burçlary degişlilikde **α, β** we **λ** bilen belläp, şeýle ýazyp bileris:

$$ab = AB \cdot \cos \alpha \,; \quad a^1 b^1 = AB \cdot \cos \beta \,; \quad a^{11} b^{11} = AB \cdot \cos \lambda \,.$$

Umumy haldaky **AB** göni çyzygyñ proýeksiýalary ortogonal çyzgyda proýeksiýalar okunyñ ähilisine ýapgyt bolup ýerleşýändir
/13-nji we 26-njy surat /.

Umumy haldaky göni çyzygyñ proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasy – mydama göni çyzykdyr we mydama öz uzynlygyndan gysgadyr – kiçidir ýagny :

$$ab < AB, \quad a^1 b^1 < AB, \quad a^{11} b^{11} < AB$$

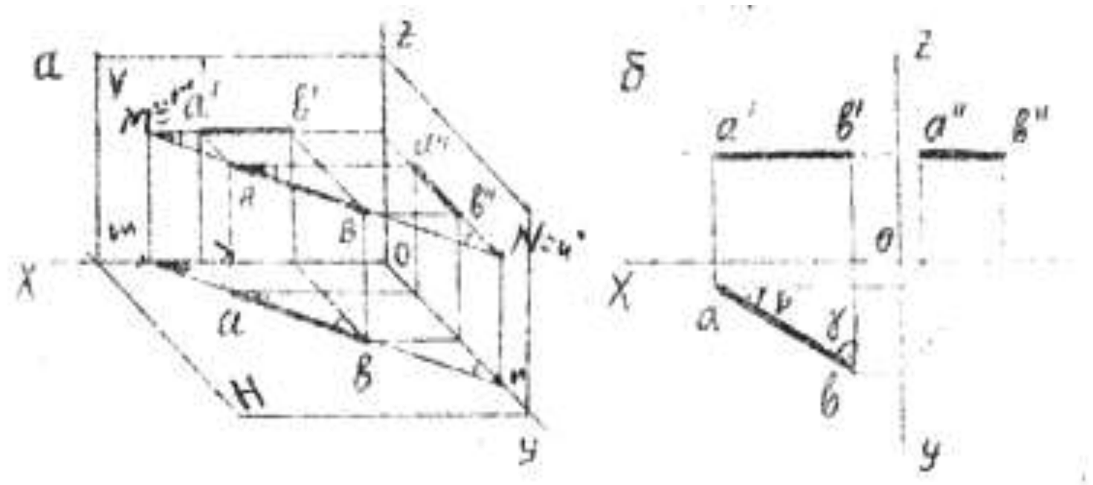
2. Hususy haldaky göni çyzyk.

Giňişlikde berlen göni çyzygyñ proýeksiýalar tekizliklerine görä şu aşakdaky ýagdaýlary mümkin:

1. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel göni çyzyk.
2. Proýeksiýalar tekizliginiñ birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzyk.
3. Proýeksiýalar tekizligine degişli göni çyzyk.
4. Proýeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk.

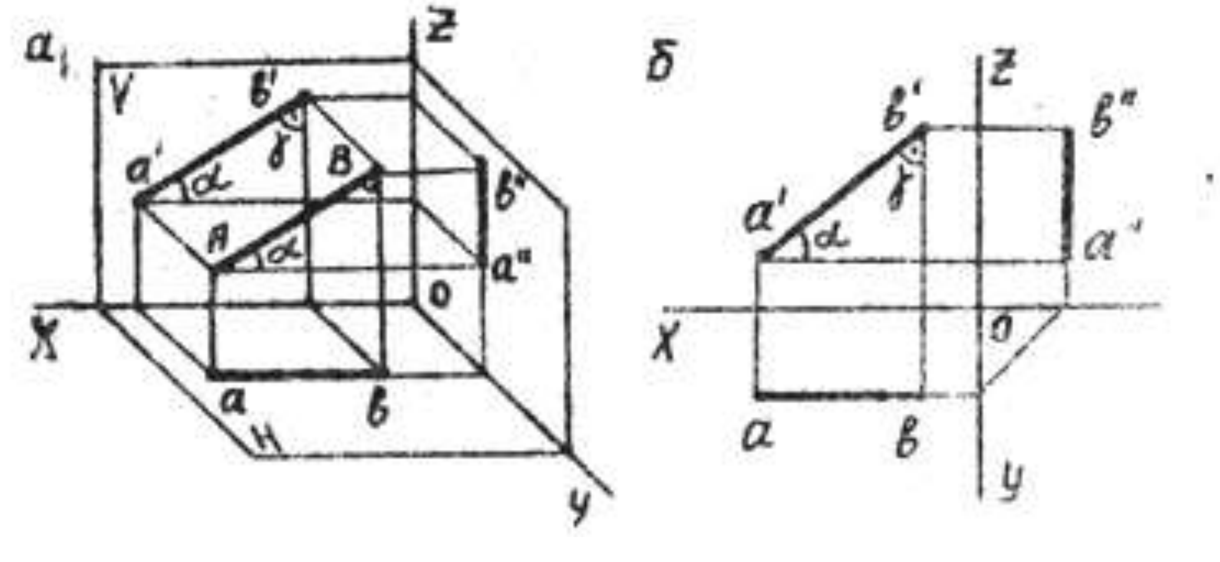
2.1. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel göni çyzyk.

Gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga
g o r i z o n t a l göni çyzyk diýilýär. **AB** göni çyzygyñ **a^1 b^1** frontal proýeksiýasy **OX** oka parallel bolar. Emma **ab** gorizontal proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **H** tekizlige **AB**-deň bolan hakyky uzynlygynda proýektirlenýär **/ab = AB/.** /14-nji surat/. Gorizontal **ab** proýeksiýa bilen **OX** okunyñ arasyndaky **β** burçy **AB** göni çyzygyñ **V** tekizligine, **λ** burçy bolsa **W** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



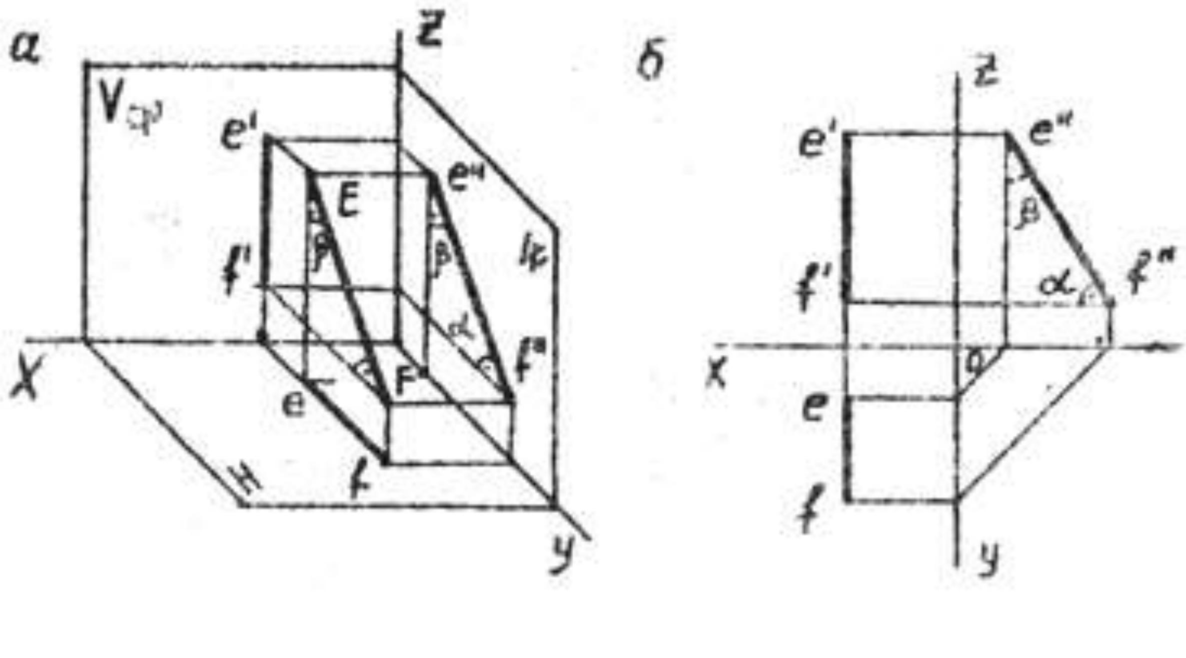
14-nji surat

Frontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga **f r o n t a l** göni çyzyk diýilýär. **AB** göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasy **OX** oka paralleldir, **a^1 b^1** frontal proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **V** tekizligine hakyky uzynlygynda proýektirlenýar **/a^1 b^{11} = AB/.** /15-nji surat/. Frontal proýeksiýa bilen **OX** okuñ arasyndaky **α** burçy **AB** göni çyzygyñ **H** tekizligine, **λ** burçy bolsa **W** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



15-nji surat

Profil proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga **p r o f i l** göni çyzyk diýilýär /16-nji surat/. **EF** göni çyzygyñ **ef** gorizontal we $\mathbf{e^1f^1}$ frontal proýeksiýalary **OX** oka perpendilulýardyrlar. Profil $\mathbf{e^{11}}$ $\mathbf{f^{11}}$ proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **W** tekizligine hakyky uzynlygynda **/**$\mathbf{e^{11}}$ $\mathbf{f^{11}}$ **= EF/** proýektirlenýar. Profil proýeksiýa bilen **OY** okunyñ arasyndaky **α** burçy **EF** göni çyzygyñ **H** tekizligine, **β** burçy bolsa **V** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



16-njy surat

2.2. Proýeksiýalar tekizliginiñ birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzyk.

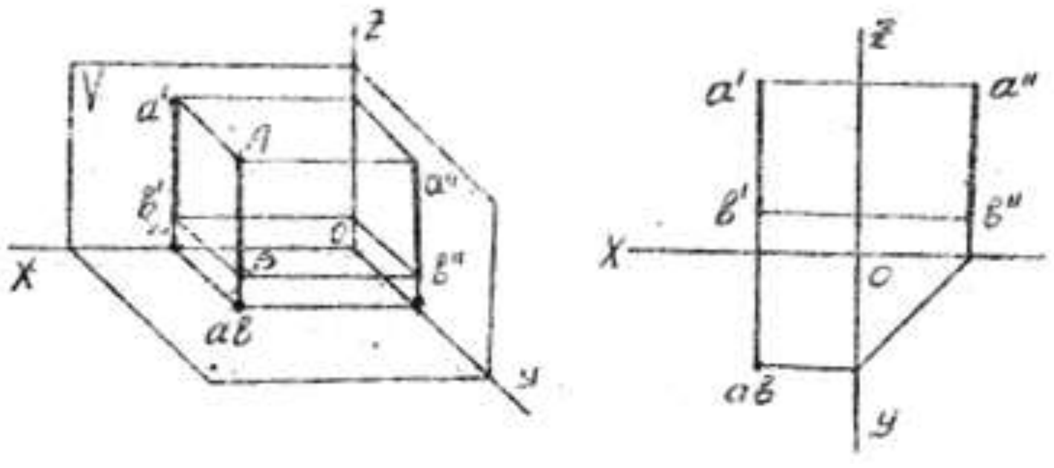
Proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine parallel bolan göni çyzyk üçünji tekizlige perpendikulýardyr.

Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar göni çyzyklar **proýektirleýji** göni çyzyklardyr we degişlilikde **gorizontal proýektirleýji, frontal proýektirleýji** we **profil proýektirleýji** göni çyzyklar diýilýär.

Olaryñ her biriniñ perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasy nokatdyr. Beýleki iki proýeksiýasy bolsa bu proýeksiýalar tekizligini çäklendirýän oklara perpendikulýardyrlar we hakyky uzynlygyna deňdirler.

1. **AB** göni çyzyk **H** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **AB ⊥ H**, **AB IIV,AB II W** şonuñ üçin hem **AB** kesime **gorizontal proýektirleýji göni çyzyk** diýilýär. /17-nji surat/. **ab** – nokatdyr,

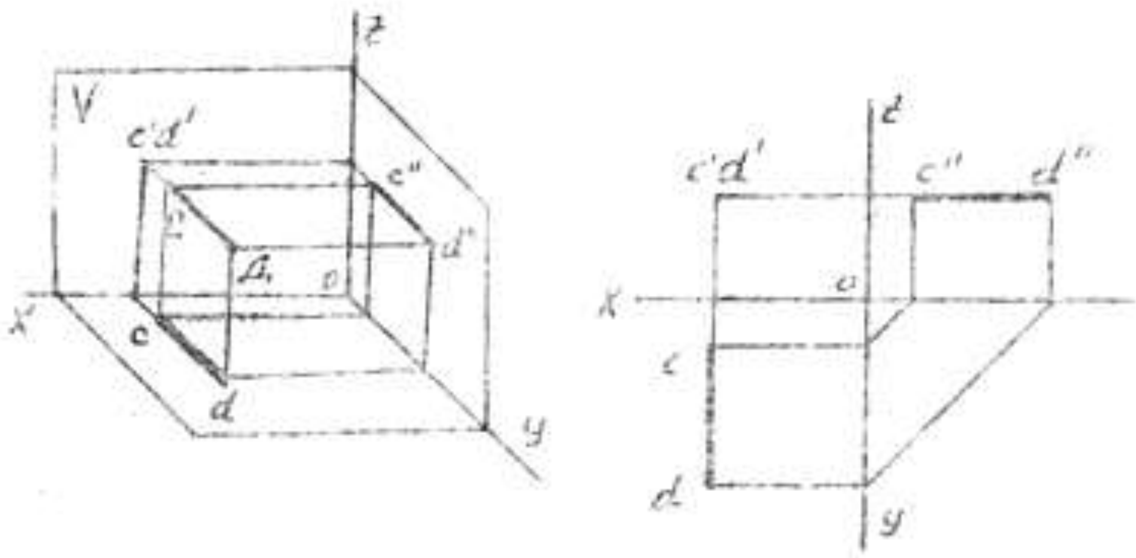
$$\mathbf{a^1\,b^1 = a^{11}\,b^{11} = AB,\quad a^1b^1 \perp OX,\ a^{11}\,b^{11} \perp oy,}$$
$$\mathbf{a^1\,b^1\ II\ OZ,\ a^{11}\,b^{11}\ II\ OZ.}$$



17-nji surat

2. **CD** göni çyzyk **V** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **CD ⊥V , CD II H**, **CD II W** /18-nji surat/. **CD** kesime **frontal proýektirleýji** göni çyzyk diýilýär.**cd** – nokatdyr,

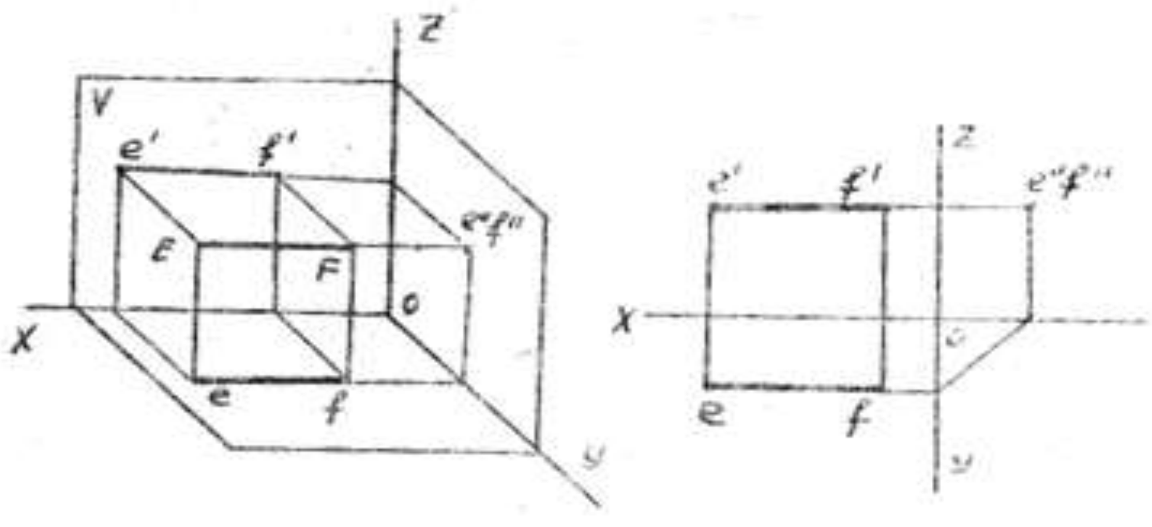
$$\mathbf{cd = c^{11}\,d^{11} = CD,\ cd \perp OX,\ c^{11}\,d^{11} \perp OZ,\ cd\ II\ OY,}$$
$$\mathbf{c^{11}\,d^{11}\ II\ OX.}$$



18-nji surat

3. **EF** göni çyzyk **W** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **EF ⊥ W, EF II H, EFIIV** /19-nji surat/. **EF profil proýektirleýji** göni çyzykdyr**.** $\mathbf{e^{11}f^{11}}$ – nokatdyr,

$$\mathbf{ef = e^1 f^1 = EF, \quad ef\ II\ OX, \quad e^1 f^1\ II\ OX.}$$



19-njy surat

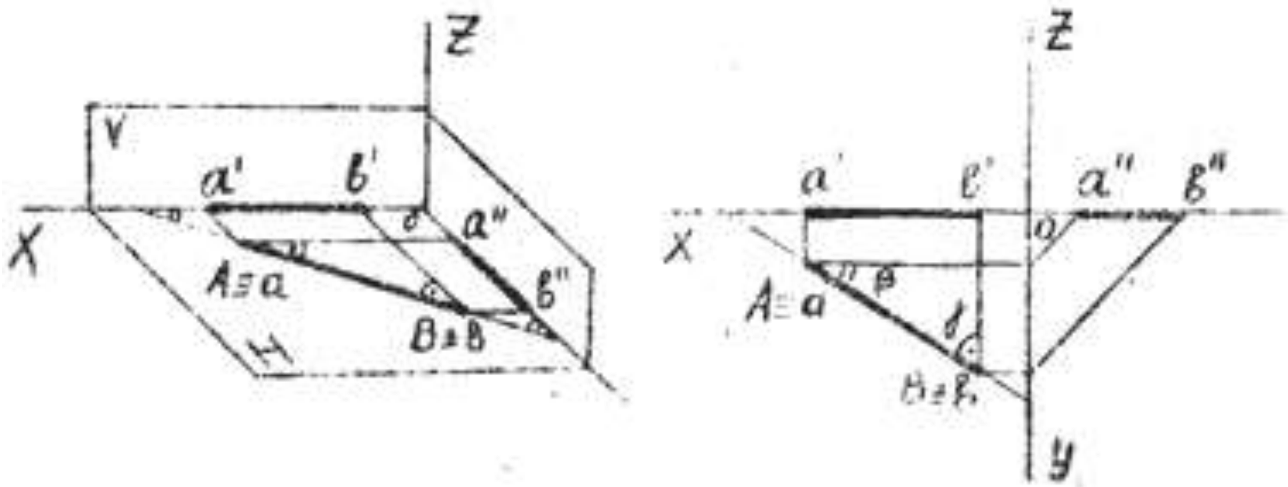
2.3. Proýeksiýalar tekizligine degişli göni çyzyk.

Eger göni çyzyk proýeksiýalar tekizliginde ýatan bolsa, onda onuñ proýeksiýalarynyñ biri berlen göni çyzyk bilen gabat gelýändir we oña deñdir, beýleki ikisi bolsa şol tekizligi çäklendirýän koordinata oklaryñ üstünde ýatýandyr.

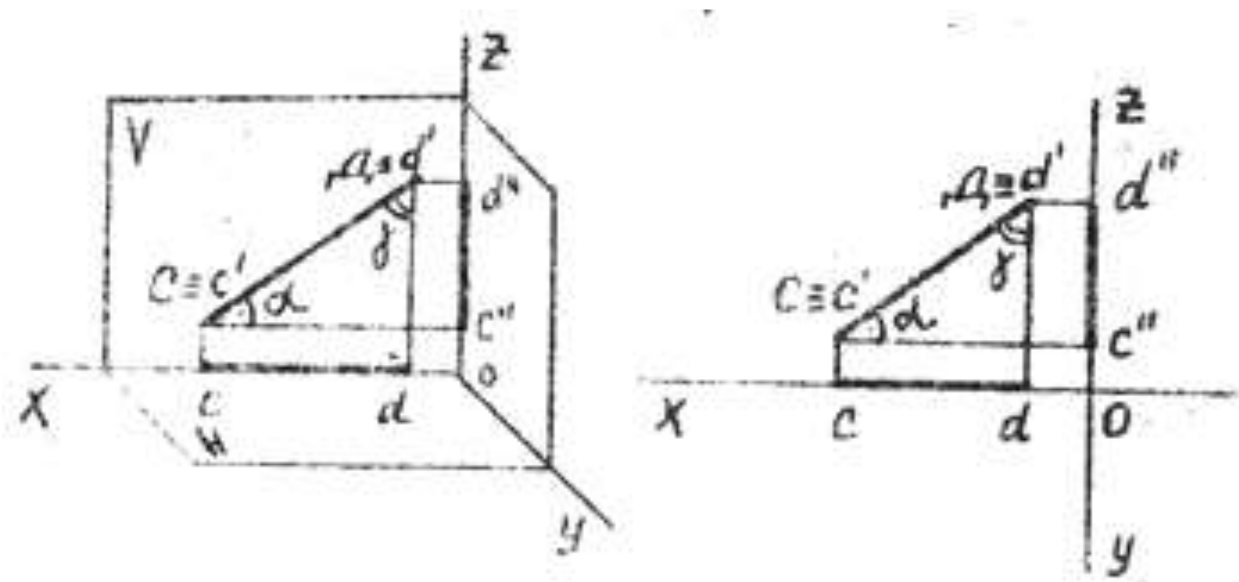
1. **AB** göni çyzyk **H** gorizontal şekiller tekizliginde ýatyr /20-nji surat/. **AB = ab**

2. **CD** göni çyzyk **V** frontal şekiller tekizliginde ýatyr /21-nji surat/. **CD =** $\mathbf{c^1d^1}$

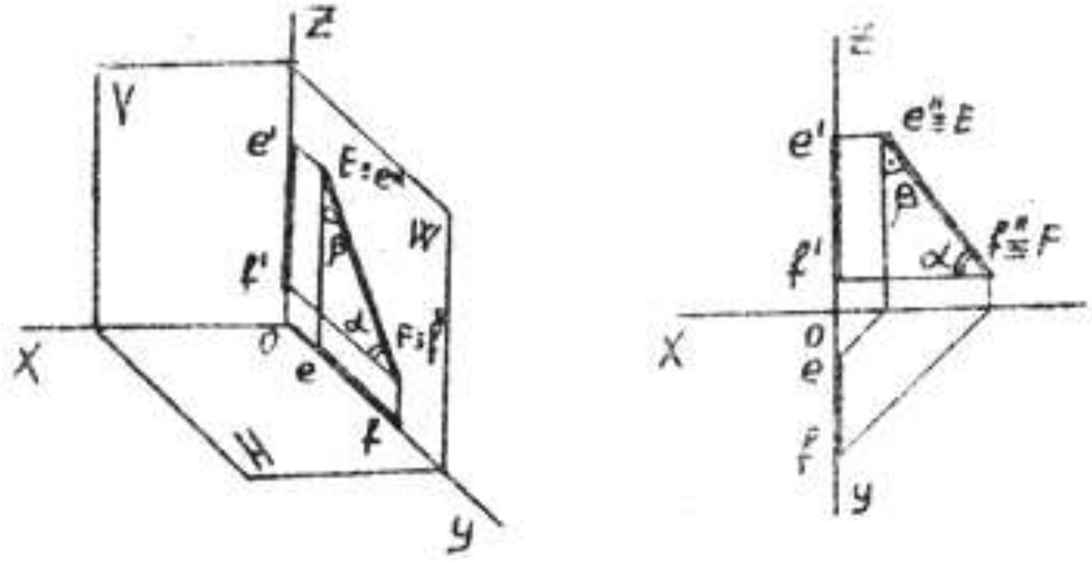
3. **EF** göni çyzyk **W** profil şekiller tekizliginde ýatyr /22-nji surat/. **EF =** $\mathbf{e^{11}f^{11}}$



20-nji surat



21-nji surat



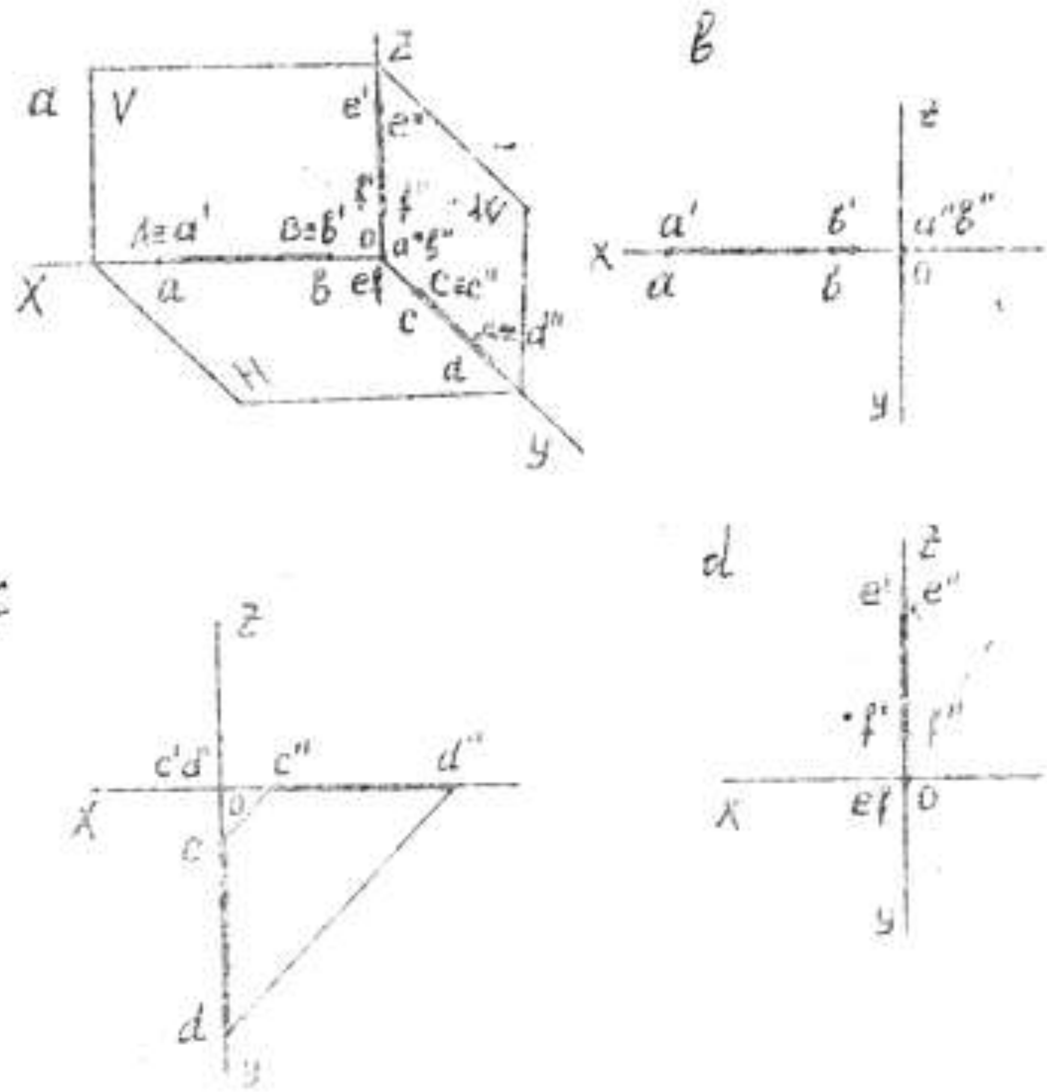
22-nji surat

2.4. Proýeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk.

1. Eger-de berlen **AB** göni çyzyk **OX** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we gorizontal proýeksiýalar tekizliklerine – degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji a, b suratda görkezilendir $\mathbf{AB = ab = a^1 b^1}$, $\mathbf{a^{11}b^{11}}$ – nokatdyr.

2. **CD** göni çyzyk **OY** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol gorizontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine-de degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji/a,ç / suratda görkezilendir $\mathbf{CD = cd = c^{11}d^{11}}$, $\mathbf{c^1d^1}$ - nokatdyr

3. **EF** göni çyzyk **OZ** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine-de degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji a, d suratda görkezilendir $\mathbf{EF = e^1f^1 = e^{11}f^{11}}$, $\mathbf{ef}$ – nokatdyr.

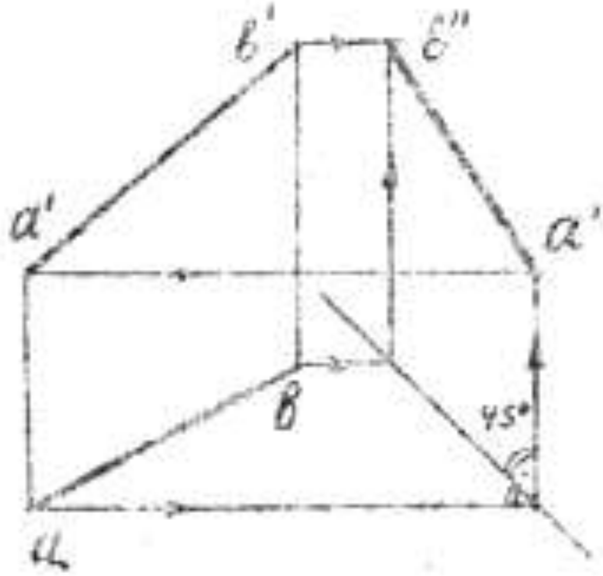


23-nji surat

9. Oksuz proýektirlemek.

Köp halatlarda nokatlaryň giňişlikdäki ýagdaýyny proýeksiýalar tekizliklerine görä däl- de proýektirlenýän figuranyň nokatlaryna görä , olaryň özara ýagdaýlary bilen kesgitlenýärler. Şonuň üçin tehniki çyzgylarda kä halatlarda proýeksiýalar oklaryny geçirmeýärler. Proýeksiýalaryň arasyndaky aralyklary bolsa erkin alýarlar. Şol bir ýagdaýda **H** we **V** proýeksiýalar tekizlikleri üçin hem- de **V** we **W** proeksiýalar tekizlikleri üçin baglanşyk çyzyklarynyň **wertikallygy - dikligi** we **gorizontallygy – keseligi** saklanylýar.

24-nji suratda oksuz proýektirlemekde umumy halda **AB** göni çyzyk gurlandyr. Bu ýagdaýda nokatlaryň şekiller tekizliklerine çenli aralygy kesgitlenilmeýär.



24-nji surat

Göni çyzygyň **profil** proýeksiýasyny gurmak üçün baglanyşyk çyzyklaryň ugry bilen **45^0** burçy emele getirýän kömekçi göni çyzygy geçirmek ýeterlikdir. Şondan soňky gurluş ýokarky suratda **ugur görkeziji strelkalar** bilen görkezilendir we çyzgydan düşnüklidir.

10. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek.

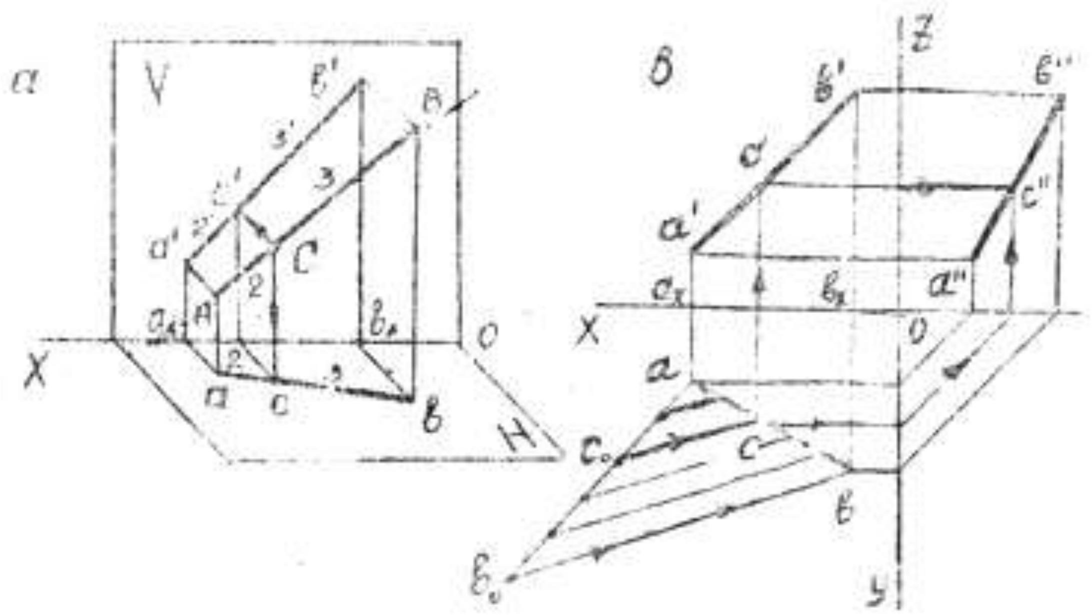
Mesele : **AB** kesimi **n /m = 2/3** bolan gatnaşygynda bölmeli. Berilen meseläni işlemek üçin parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetlerini ulanarys.

Nokat göni çyzyga degişli bolsa, onda ol nokadyň biratly proýeksiýalary-da şol gönüniň bir atly proýeksiýalaryna degişlidir.

Eger **C** nokat **AB** göni çyzygy berlen gatnaşykda bölýän bolsa, onda bu nokadyň **c** , **c^1 we c^{11}** proýeksiýalary-da (25-nji suratda) berlen göni çyzygyň bir atly proeksiýalaryny şol gatnaşykda bölýändir, ýagny:

$$\mathbf{AC/BC = ac/bc = a^1\, c^1/b^1c^1 = a^{11}\, c^{11}/b^{11}\, c^{11} = n/m = 2/3}$$

Şoña görä-de ortogonal çyzgyda kesimi berlen gatnaşykda bölmegi ýerine ýetirmek üçin proýeksiýalaryñ haýsy hem bolsa birini şol gatnaşykda bölmek ýeterlikdir. Şonuň üçin kesimiň **ab** – gorizontal şekiliniň **a** – nokadyndan islendik göni çyzygy geçirip, şol çyzyga bäş deň aralygy goýup $\mathbf{b_0}$ – nokady alýarys we **b** – nokat bilen birleşdirip, $\mathbf{c_0c}$ **II** $\mathbf{b_0b}$ geçirip **c** – nokady gurarys, soňra adaty usul bilen $\mathbf{c^I}$ we $\mathbf{c^{II}}$ taparys. **C** – nokat **AB** kesimi berlen gatnaşykda bölýändir. Bilşimiz ýaly gözlenýan nokadyñ galan proýeksiýalary, şol nokadyñ **AB** göni çyzyga degişlidiginden gelip çykyar.



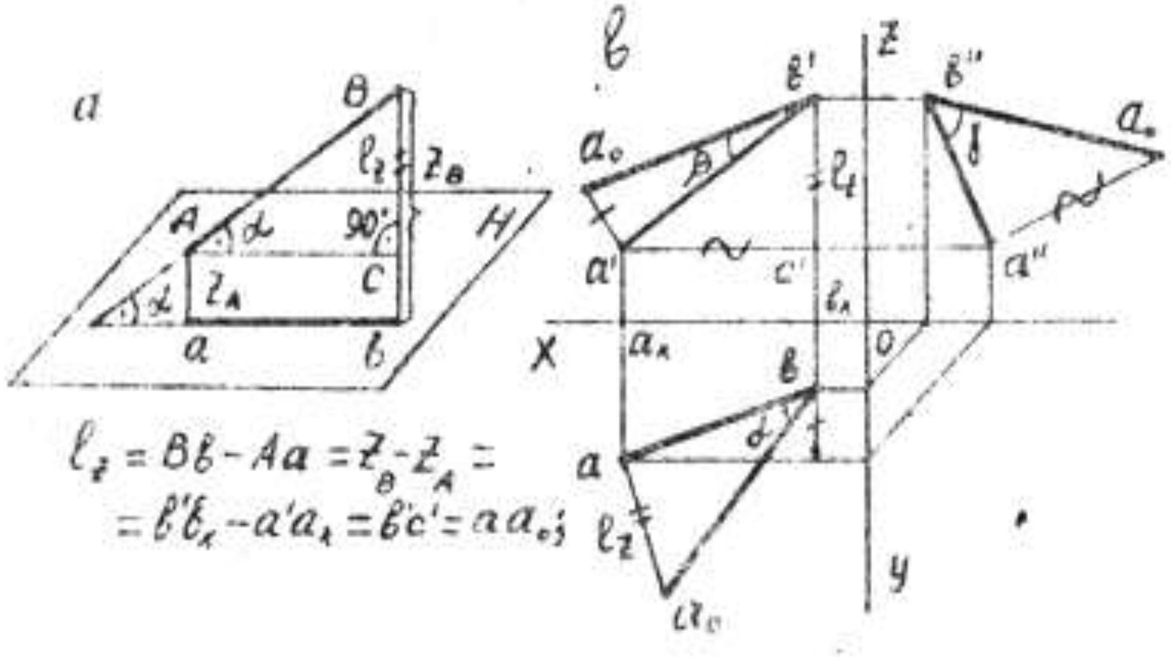
25-nji surat

11.Umumy ýagdaýdaky göni çyzygyñ kesiminiñ natural uzynlygyny we onuñ proýeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçlarynykesgitlemek.

Bize belli bolşy ýaly, umumy haldaky göni çyzygyñ preýksiýalary şol kesimiñ hakyky uzynlygyndan mydama kiçidir, ýagny gysgadyr.

Ortogonal çyzgyda şol kesimiñ hakyky uzynlygyny kesgitlemek üçin dürli-dürli usullar ulanylýar. Häzirlikçe aşakda **gönibu rçly üçburçluk usulyna** garap geçeliñ.

Umumy haldaky göni çyzygyñ **AB** kesiminiñ hakyky uzynlygy, dogrudan hem 26-njy a suratdan görnüşi ýaly, **göniburçly üçburçlugyñ gipetenuzasyna /aa_0 = AB/ deñdir, şol göniburçly üçburçlugyñ bir kateti kesimiñ /ab = AC/ gorizontal proýeksiýasydyr,beýleki kateti bolsa /BC=Zb-Za=Lz/ kesimiñ uçlarynd H tekizligine çenli aralyklaryñ algebraik tapawudydyr.** Göni çyzygyñ **H** tekizligine **α** ýapgyt burçy şol göniburçly üçburçlukdan kesgitlenýăr , ýagny ol burç **aa_0** - gipetenuza bilen berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ arasyndaky burçudyr.



26-njy surat

Göniburçly üçburçluk gurmak usuly bilen ortogonal çyzygyda umumy ýagdaýdaky kesimiñ hakyky uzynlygynyñ we **H, V, W** proýeksiyalar tekizliklerine bolan ýapgytlyk burçlaryñ kesgitlenilişi 26-njy b suratda görkezilendir. Bu suratda gőniburçly üçburçluk gorizontal, frontal we profil proýeksiyalarynyň üstünde gurlandyr.

12. Göni çyzygyñ yzlary.

Göni çyzygyñ proýeksiyalar tekizlikleri bilen kesişýăn nokatlaryna göni çyzygyñ y z l a r y diyilyăr. Göni çyzygyñ yzlary hem proýeksiyalar tekizlikleri ýaly gorizontal, frontal we profil yzy diýilip atlandyrylýar.

Proýeksiyalar tekizlikleriniñ üçüsiniñ sistemasynda berlen umumy haldaky göni çyzygyñ üç sany yzy bardyr. Göni çyzygyñ her bir yzy, şol göni çyzyga we proýeksiyalar tekizlikleriniñ birine degişli bolmalydyr.

Proýeksiyalar tekizlikleriniñ birine parallel bolan göni çyzygyñ iki sany yzy bardyr, olar hem oña parallel bolmadyk beýleki iki şekiller tekizliginde ýerleşýändirler.

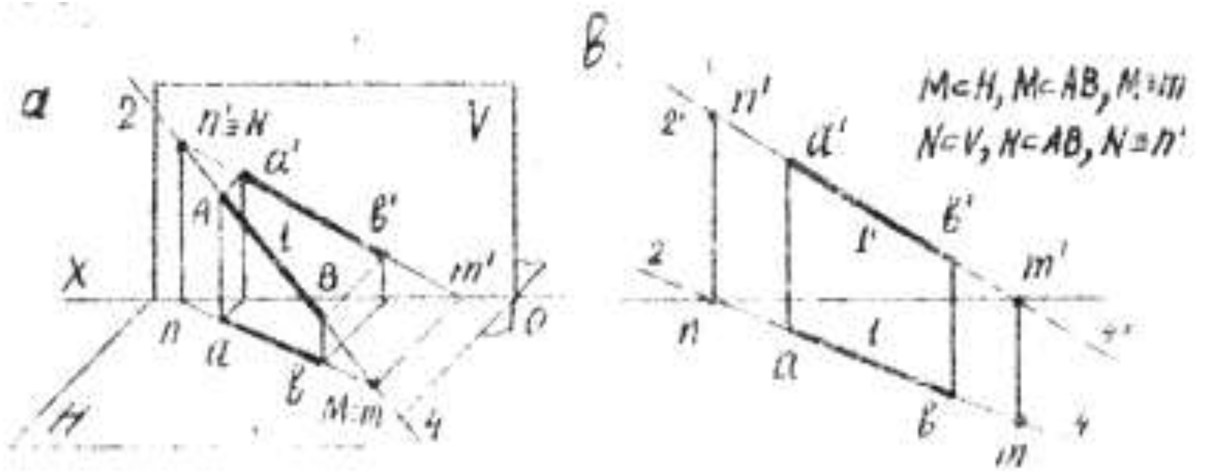
Proýeksiyalar tekizligine perpendikulýar bolan göni çyzygyñ diñe bir yzy bardyr, ol hem onuñ perpendikulýar bolan şekiller tekizliginde ýerleşýändir.

Göni çyzygyñ yzlarynyñ her biri proýeksiyalar tekizliginiñ birine degişli bolýandygy üçin, onuñ proýeksiyalarynyñ biri mydama şonuñ bilen gabat gelýändir, beýleki ikisi bolsa degişlilikde gurruñi edilýän tekizligi çäklendirýän oklaryñ üstünde ýatýandyr.

Giñişlikdäki aýdyñ çýzgydan /27-nji a surat/ görnüşi ýaly **AB** göni çyzygyñ **M** gorizontal yzyny tapmak üçin **AB** göni çyzygyñ $\mathbf{a^1b^1}$ frontal proýeksiyasyny **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, $\mathbf{m^1}$ **gorizontal yzyñ frontal proýeksiyasyny** tapýarys we bu nokadyñ üstünden göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiyasynyñ dowamy bilen kesişýänçä **OX** oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji - baglanşyk çyzyk geçirip, m nokady tapýarys. Bu tapylan m nokat gorizontal yzyñ gorizontal proýeksiyasydyr /27-nji surat/ **m = M.**

$$\mathbf{M \subset H,\ M \subset AB,\ M = m.\quad N \subset V,\ N \subset AB,\ N = n^1}$$

M /m, m^1 / nokat **AB** göni çyzygyñ **gorizontal yzydyr.**



27-nji surat

AB göni çyzygyñ **N** frontal yzyny tapmak üçin berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiyasyny **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, **n** – **nokady frontal yzyñ gorizontal proýeksiyasyny** tapýarys we **n** nokadyñ üstünden **AB** göni çyzygyñ **a^1b^1** frontal proýeksiyasynyñ dowamy bilen kesişýänçä **OX** oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji çyzyk geçirip, **n^1** frontal yzyñ frontal proýeksiyasyny tapýarys. **N /n, n^1 /** nokat **AB** göni çyzygyñ frontal yzydyr **n^1 = N.**

Göni çyzygyñ yzlarynyñ ýagdaýy boýunça göni çyzygyñ haýsy çärýekleriñ üstünden geçýändigini göz öñünde tutup, onuñ görünýän – görünmeýän ýerlerini kesgitlemek añsatdyr. **AB** göni çyzyk IV, I we II çärýekleriñ üstünden geçýär. Berlen göni çyzygyñ **MN** bölegi tutuşlygyna görünýär, şol sebäpli onuñ **AB** kesimi hem görünýär, sebäbi ol kesim **M** we **N** nokatlaryñ arasynda ýatýar.

Ýokarky suratdan görşümiz ýaly, göni çyzyklar özleriniň proýeksiýalary bilen añladylan bolsa, olaryñ yzlaryny tapyp bolşy ýaly, göni çyzyklar yzlary bilen berlen wagtynda-da olaryñ proýeksiýalaryny we haýsy çärýeklerden geçýändigini kesgitlemek bolar.

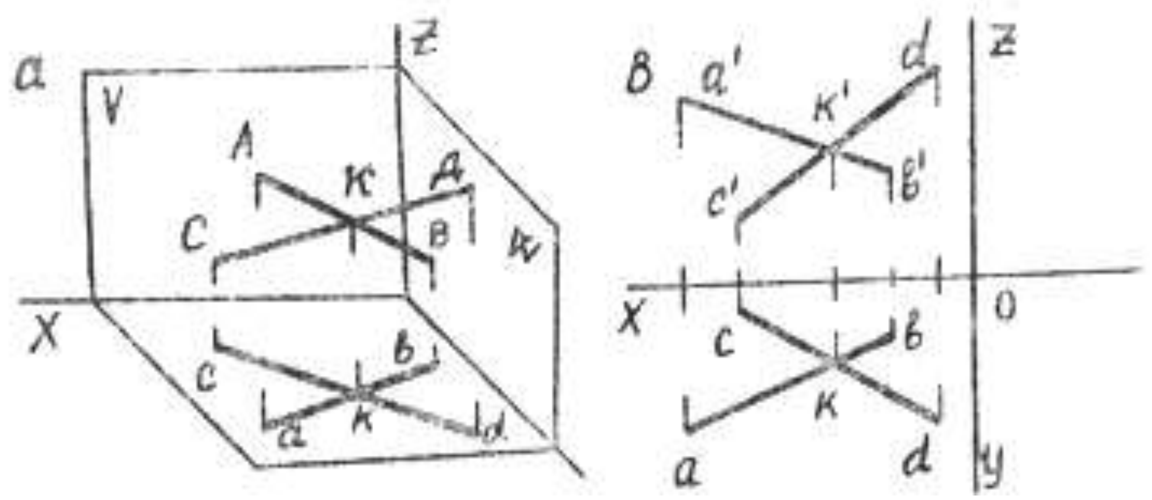
13. Iki göni çyzyklaryň özara ýagdaýlary.

Iki göni çyzyk giňişlikde biri-birine görä dürli ýagdaýlary eýeläp bilerler.

1. Göni çyzyklar giňişlikde **kesişip** bilerler, ýagny bir tekizlikde ýatýarlar we olaryñ bir umumy nokady bolar.
2. Göni çyzyklar giňişlikde **parallel** bolup bilerler we bir tekizlikde ýatýarlar.
3. Göni çyzyklar giňişlikde **atanak** ýatyp bilerler. Kesişýän hem-de parallel göni çyzyklardan tapawutlykda - üýtgeşiklikde **atanak ýatan göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýarlar**. Bu ýagdaýda olaryň bir umumy nokady bolmaýar.

13.1. Kesişýän göni çyzyklar.

Eger giňişlikde iki sany göni çyzyk özara kesişýän bolsa, onda epýurda olaryň biratly proýeksiýalary umumy ýagdaýda kesişýärler we bu proýeksiýalaryň kesişme nokatlary şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar. Hakykatdan-da, eger **K** nokat **AB** we **CD** iki çyzyga hem degişli bolsa, onda bu göni çyzyklaryň biratly proeýksiýalarynyň kesişme nokatlary bolan **K** we **K'** hökman şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar / 28-nji surat /.

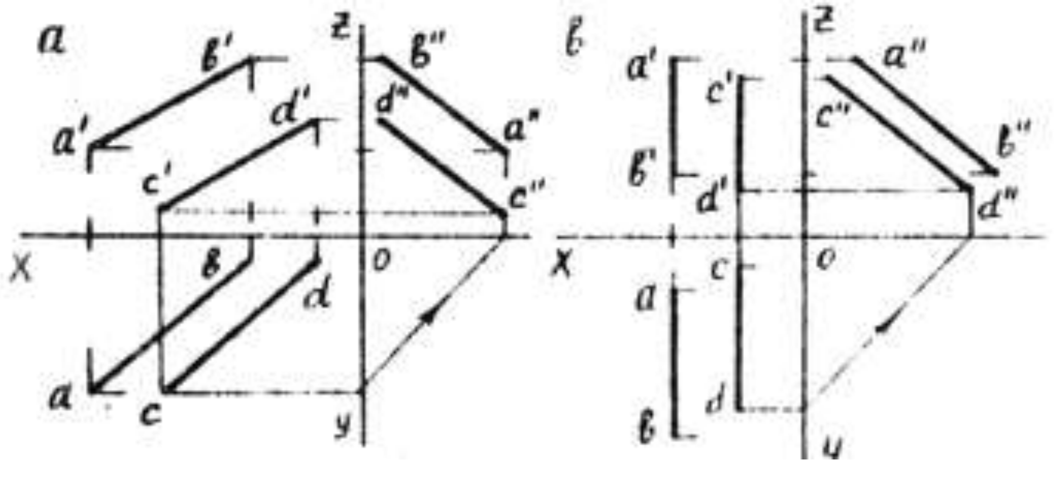


28-nji surat

AB ∩ CD = K, ab ∩ cd = k, $a^1 b^1 \cap c^1 d^1 = k^1$, $kk^1 \perp$ OX

13.2. Parallel göni çyzyklar.

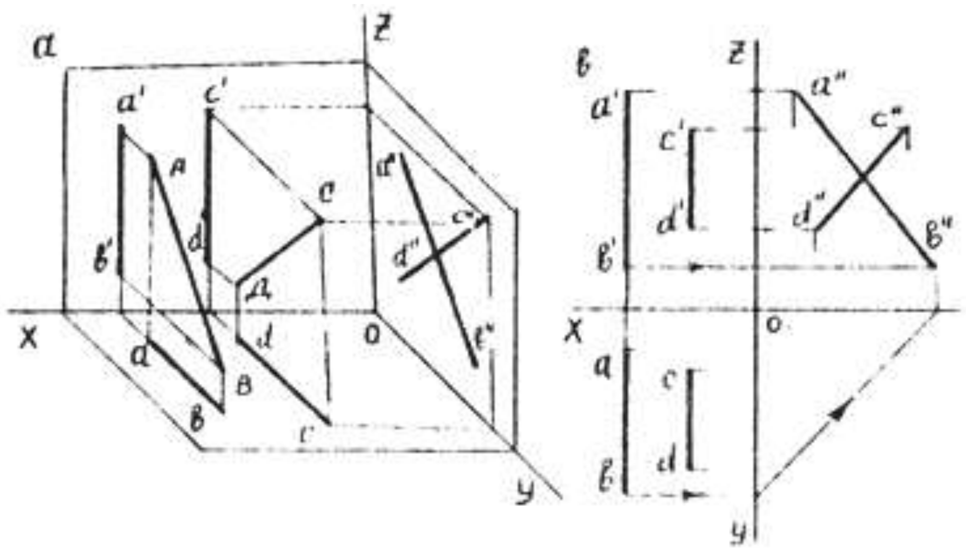
Parallel proýektirlemegiň häsiýetlerine görä, iki sany göni çyzyk giňişlikde **özara parallel** bolsalar **/AB//CD/,** onda **olaryň biratly proýeksiýalary hem degişlilikde proýeksiýalar tekizliginde özara paralleldirler**, ýagny gorizontal proýeksiýalary **ab//cd**, frontal proýeksiýalary **a'b'//c'd'** we profil proýeksiýalary **a''b''//c''d''** özara paralleldirler /29-njy surat/.



29-njy surat

Umumy ýagdaýda bu aýdylanlary tersine tassyklamak hem bolar. Eger **epýurda göni çyzyklaryň bir atly proýeksiýalary parallel bolsalar, onda bu göni çyzyklar giňişlikde-de özara paralleldirler**.

Göni çyzyklaryň iki proýeksiýasy göni çyzyklaryň paralleldiklerini kesgitlemek üçin ýeterlik bolmadyk halatda bu düzgün ulanarlyk däldir; mysal edip profil proýeksiýalar tekizligine parallel bolan **AB** we **CD** göni çyzyklary getirmek bolar /29-njy b we 30-njy suratlar/.



30-njy surat

13.3. A t a n a k ý a t a n g ö n i ç y z y k l a r.

Proýeksiýalaryń ortogonal çyzgysynda **atanak ýatan** çyzyklar dürli ýagdaýlarda şekillendirip bilner. Aýratyn ýagdaýlarda tekizlikleriń birinde bu çyzyklaryň proýeksiýalary parallel ýada kesişýan görnüşde bolup bilerler.

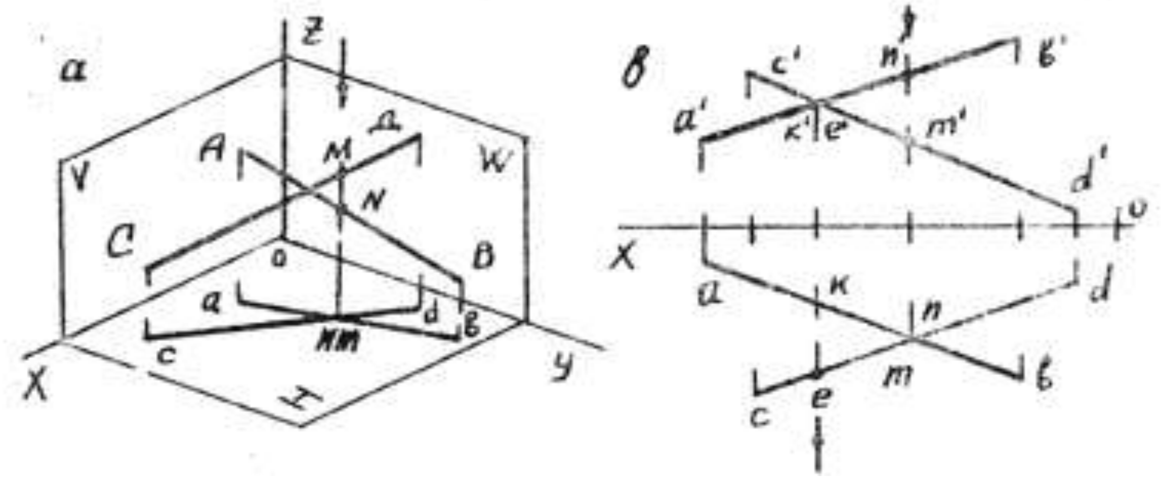
Eger göni çyzyklar özara kesişmeýan we parallel bolmaýan bolsalar, onda olaryń biratly proýeksiýalaryń kesişme nokatlary şol bir baglanşyk çyzygynyń üstünde ýatmazlar.

Eger atanak ýatyan iki göni çyzygyń biratly proýeksiyalary kesişýan bolsa, onda bu proýeksiýalaryń kesişme nokatlary proýeksion baglanşygyń bir gönüsinde, ýagny proýeksiýalar okuna inderilen bir perpendikulýaryń üstünde ýatmaýarlar /31-nji surat/.

Atanak ýatan iki göni çyzygyń üstünde hem-de proýeksiýalar tekizligine geçirilen bir perpendikulýarlaryń üstünde yatan iki nokada şol proýeksiýalar tekizligine görä **konkurirleýji - bäsleşýan** nokatlar diyilyär. Konkurirleýji nokatlaryń özara ýerleşişini kesgitlemeklik şekillendirilýan obýektiń elementleriniň ol ya-da beýleki proýeksiýalar tekizligine görä haýsy biriniń görünýandigini takyklamak üçin giňden ulanylýar.

31-nji suratda atanak ýatan **AB** we **CD** iki göni çyzygyń proýeksiýalary hem-de olaryń kesişme nokatlary görkezilendir. Bu ýerde **K** we **M** nokatlaryń üstünden şol bir baglanşyk çyzygyny geçirmek mümkin däldir, sebäbi bu göni çyzyklar gińişlikde kesişmeýärler.

Göni çyzyklaryń frontal proýeksiýalarynyń kesişme nokady haýsy hem bolsa **K** we **E** iki nokadyń frontal proýeksiýalarydyr. Bu ýerde **K** nokat **AB** göni çyzyga degişlidir, **E** nokat bolsa **CD** göni çyzyga degişlidir.



31-nji surat

Edil şunuń ýaly, göni çyzyklaryň gorizontal proýeksiýalarynyń kesişme nokady hem **M** we **N** iki göni çyzygyń gorizontal proýeksiýalarydyr. **N** nokat **AB** çyzyga, **M** nokat bolsa **CD** göni çyzyga degişlidir.

Iki sany atanak ýatan göni çyzygyń kömegi bilen olaryń proýeksiýalarynyň kesişme nokadyndaky nokatlaryń haýsy biriniń görünip beýlekisiniń bolsa görünmeýandigini kesgitlemek ańsatdyr. Munuń özi aşakdaky ýagdaýlardan bellidir, ýagny gorizontal proýeksiýalar tekizlikde has uzakda ýatan **N** nokat gözegçi üçin has ýakyndyr, şonuń üçin **AB** göni çyzygyń **N** nokady görünýändir. Frontal proýeksiýalaryń kesişme nokadynda hem **CD** göni çyzyk görünýändir sebäbi **K** nokada garanyńda **E** nokat frontal proýeksiýalar tekizlikden uzakda ýerleşendir.

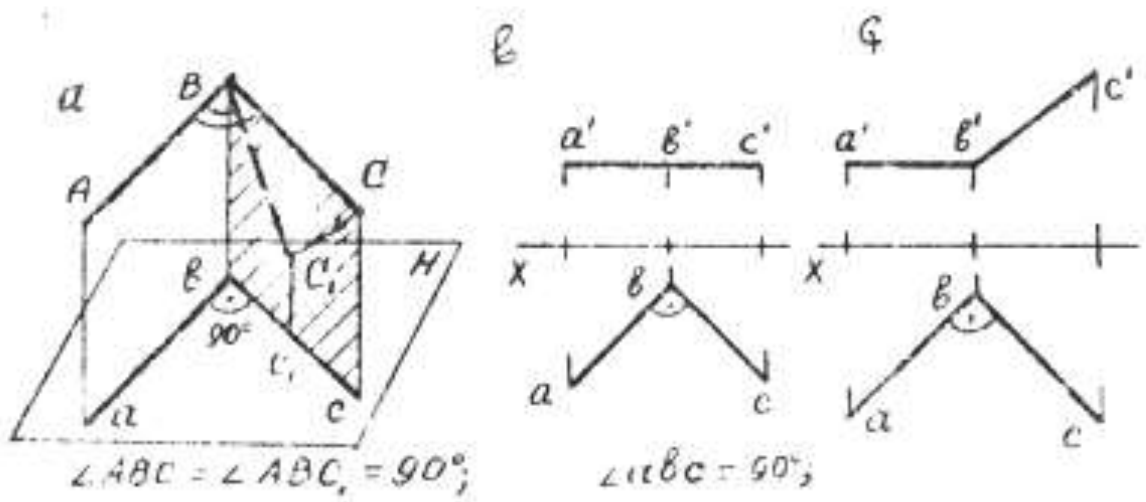
Oksuz proýektirlemekde görnüp-görünmezlik $\mathbf{ee^1}$ we $\mathbf{kk^1}$ aralyklar boýunça kesgitlenýär, eger $\mathbf{ee^1} > \mathbf{kk^1}$ bolsa, onda **E** nokat görünýändir: Eger $\mathbf{nn^1} > \mathbf{mm^1}$ bolsa, onda **AB** göni çyzygyń **N** nokady görünýän nokady bolar.

14.Tekiz burçlary proýektirlemek.

Islendik tekiz burçyñ proýeksiýasy proýeksiýalar tekizligi bilen özara ýerleşişine görä islendik /Ýiti, göni ýa-da kütek/ burç bolup şekillendirilip biliner. **Eger tekiz burçyñ taraplary /AB||H we BC||H/ proýeksiýalar tekizligine parallel bolsa, onda ol burç şol tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýär** /32-nji a, b surat/.

Eger **göni burçuñ haýsy hem bolsa bir tarapy /AB || H/ tekizlige parallel bolsa, onda ol göni burç / < ABC = $\mathbf{90^0}$ = < abc /**
şol tekizlige özüniñ hakyky ululygynda proýektirlenýär
/32-nji a, ç surat/.

Goý, **ABC** burç 90^0 deñ bolsun we onuñ **AB** tarapy gorizontal proýeksiýalar tekizligine paralleldir diýeliñ. Burçyñ **abc**, gorizontal proýeksiýasynyñ 90^0 – a deñligini subut etmek gerek bolsun
/32-nji a, b surat/.



32-nji surat

AB göni çyzyk **BC_1, c_1b** tekizlige perpendikulýardyr, sebäbi
AB ⊥BC we **AB⊥Bb**, **AB || ab**. Bu ýerden **ab ⊥BCcb** tekizlige perpendikulýardyr. Diýmek, **ab⊥bc**, ýagny ∠ abc = 90^0.

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler.

1. Nähili göni çyzyga **umumy** haldaky göni çyzyk diýilýär ? Ortogonal çyzgyda onuñ proýeksiýasy proýeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýärler ?

2. Iki proýeksiýasy boýunça **umumy** haldaky göni çyzygyñ kesiminiñ hakyky uzynlygy nähili gurluşlaryñ üsti bilen kesgitlenýär ?

3. **Gorizontal, frontal** we **profil** göni çyzyklar diýilip nähili göni çyzyklara aýdylýar ? Olaryñ proýeksiýalary ortogonal çyzgyda proýeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýärler ?

4. Degişlilikde **OX, OY, OZ** oklaryna parallel göni çyzyklaryñ proýeksiýalary ortogonal çyzgyda nähili ýerleşýärler ?

5. **Göni çyzygyñ yzy** diýilip näme aýdylýar ? Ortogonal çyzgyda göni çyzygyñ her bir yzynyñ her bir proýeksiýasynyñ ýagdaýyny häsiýetlendiriñ ?

6. Göni çyzyklaryñ proýeksiýalary boýunça olaryñ özara ýerleşişini nähili kesgitlemeli ?

7. **Konkurirleýji - bäsleşýan** nokatlar diyilip nähili ýerleşen nokatlara aýdylýar ?

8. Umumy ýagdaýda ýerleşen üç granly piramidanyñ berlen şekilleri boýunça görünýän we görünmeýän gapyrgalaryny kesgitläñ ?

9. **A** nokatdan **BC** göni çyzyga çenli bolan ýakyn aralygy kesgitläñ /33-nji surat/ ?

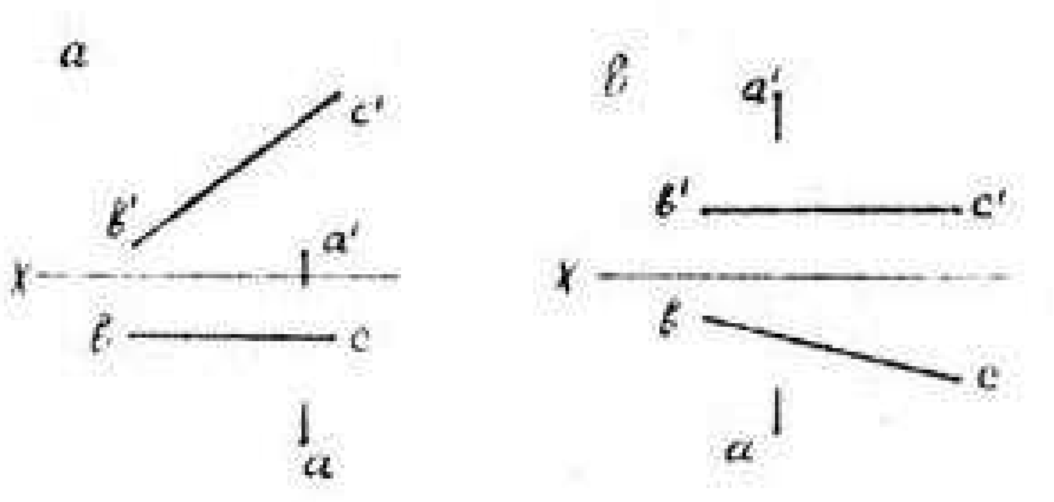
10. **AB** we **CD** göni çyzyklaryñ ýakyn aralyklaryny kesgitläñ /34-nji surat/ ?

11. Göni çyzygyñ kesiminiñ proýeksiýasyny nähili gurmaly ?

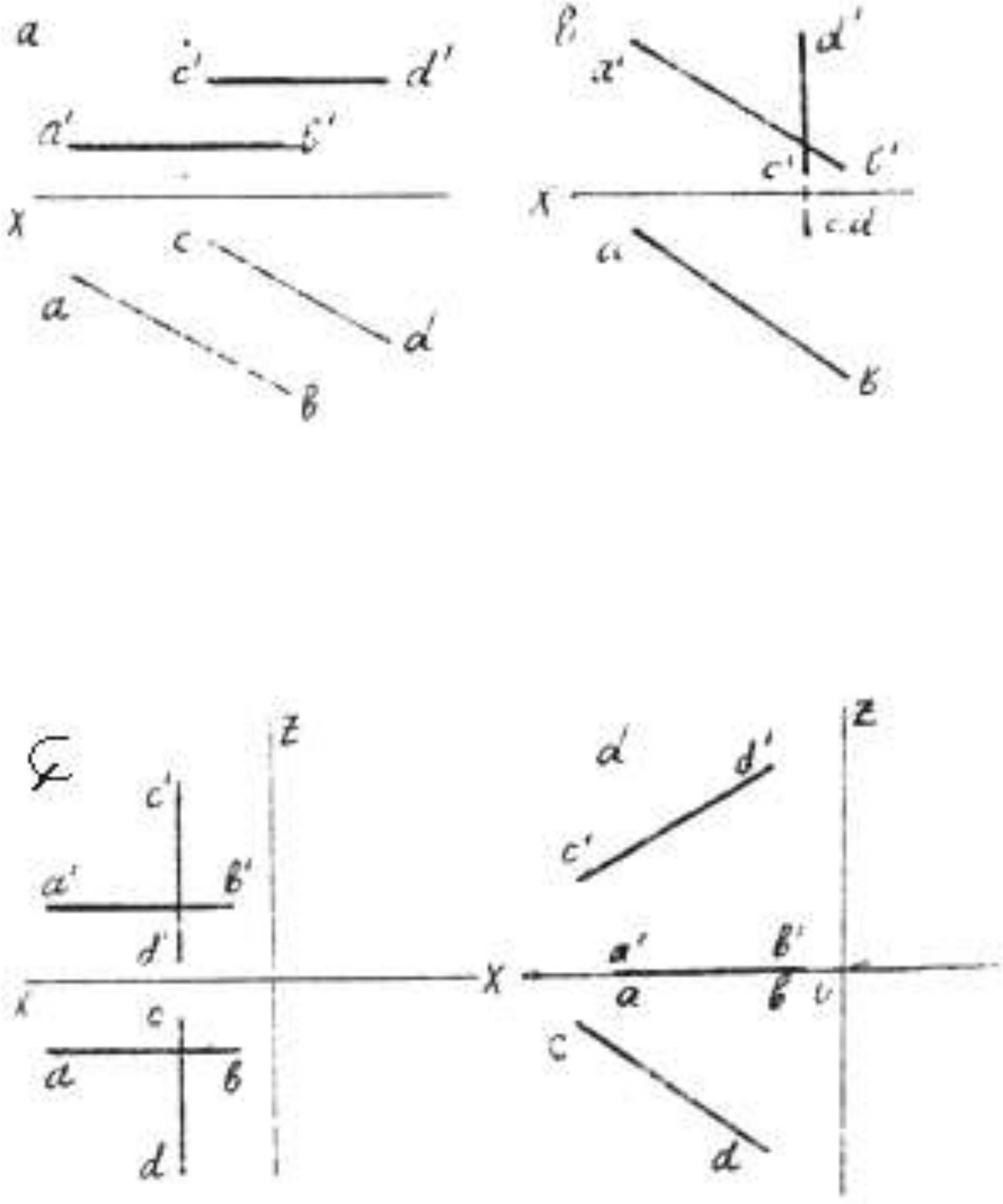
12. **Göni çyzyk** hem-de **nokat** özara nähili ýerleşip biler ?

13. Haýsy ýagdaýlarda göni çyzygyñ bir, iki we üç yzlary bolýar ?

14. **Göniburçuñ proýeksiýasy hakyndaky teoremany** düşündiriñ.



33-nji surat



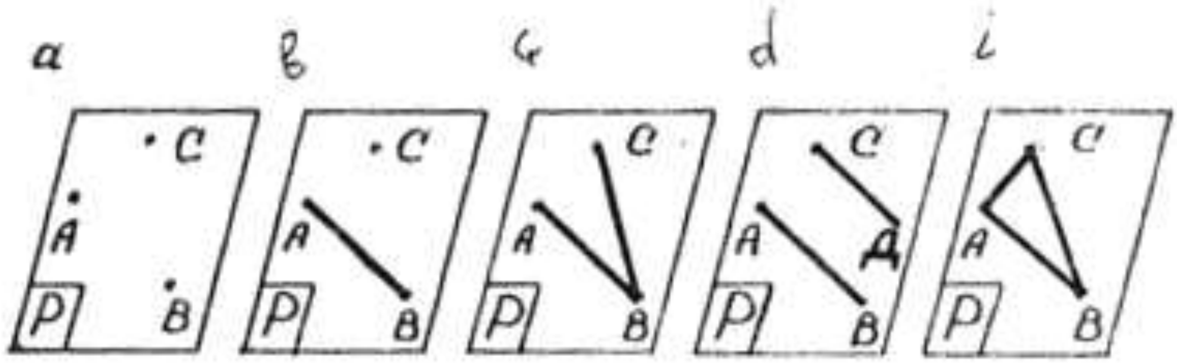
34-nji surat

III BAP
T E K I Z L I K

15. Giňişlikde tekizligiň kesgitlenilişi
/Umumy maglumat/

Bize elementar geometirýadan mälim bolşy ýaly, giňişlikde tekizligiň ýagdaýy şu aşakdakylar ýaly kesgitlenilýär:

1. **Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat** bilen /35-nij a surat/. **P (A,B,C)**
2. **Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzyk** bilen /35-nij b surat/. **P (AB, C)**
3. **Iki kesişýän göni çyzy**k bilen /35-nij ç surat/. **P (AB ∩ BC)**
4. **Iki parallel göni çyzyk** bilen /35-nij d surat/. **P (AB II CD)**
5. **Ýazgyn şekiller bilen** /töwerek, üçburçluk, dörtburçluk we ş.m. /35-nij i surat/.**P (Δ ABC)**



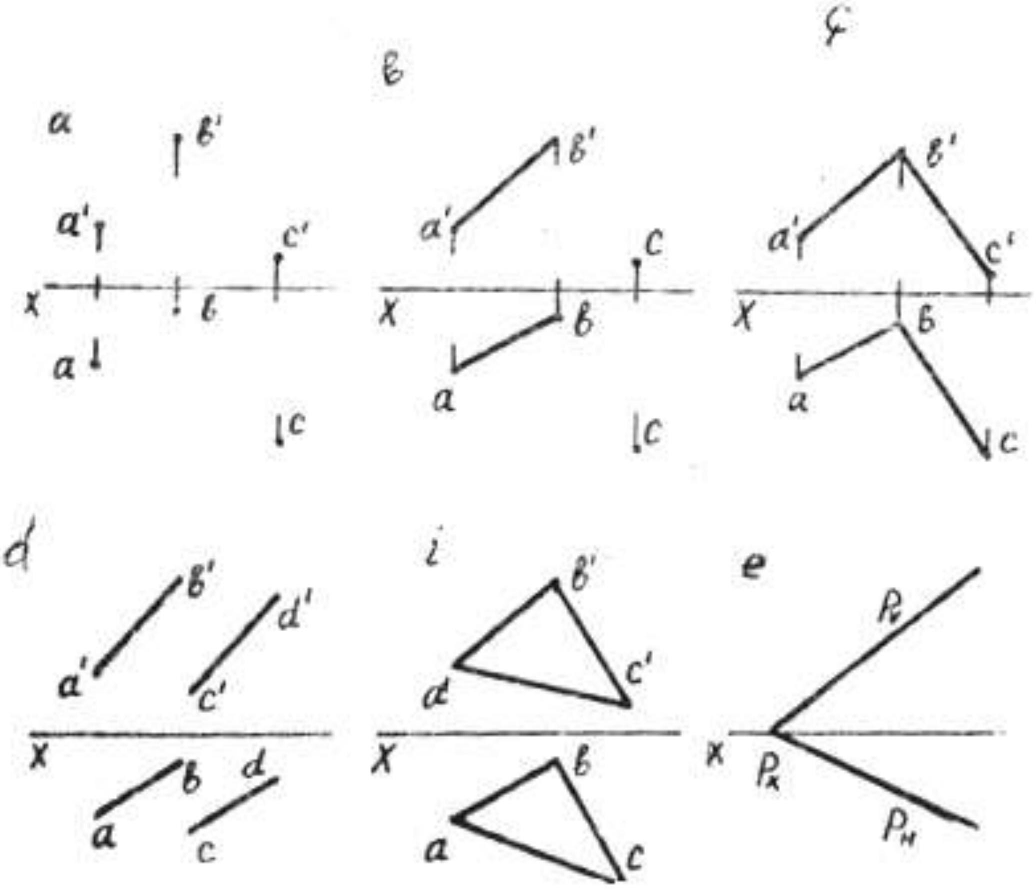
35-nji surat

16. Ortogonal çyzgyda tekizligi şekillendirmek

Ortogonal çyzygyda tekizligi şekillendirmek üçin esasan **bir gönüde ýatmaýan üç nokadyň proýeksiýalaryny gurmak ýeterlikdir**. Mysal üçin : **P (A, B, C)** onda, şu nokatlaryň üçüsiniňem şekillerini gurmalydyr

A /a ,a″ /, **B /b ,b″ /** we **C /c ,c″ /** /36-njy a surat/.

Eger islendik iki nokady, mysal üçin **A /a,a^1/ we B /b,b^1/** nokatlaryň biratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirsek, şonda **AB /ab, a^{1}b^1/** göni çyzyk we şu göni çyzygyň üstünde ýatmaýan **C /c,c^1/** nokat tekizligi kesgitleýär /36-njy b surat/.
P (AB, C)



36-njy surat

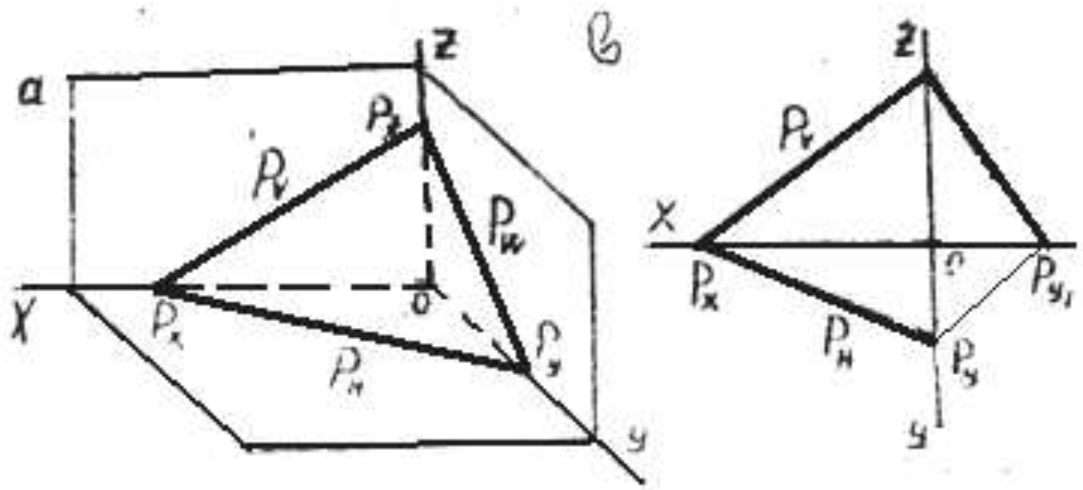
Eger **C /c,c^1/** we **B /b,b^1/ ýa-da C/c,c^1/** we **A/a,a^1/** nokatlaryň biratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirseň , onda **B /b,b^1/** nokatda kesişýär **AB** we **BC** /ýada **AC** / göni çyzyklar hem şol tekizligi kesgitlär /36-njy ç surat/. **P (AB $\cap$ BC)**

Eger **A /a,a^1/** we **B /b,b^1/** iki nokady **AB /ab, a^{1}b^1/** göni çyzyk bilen birleşdirseň we **C** nokadyň üstünden **AB** göni çyzyga parallel **CD** göni çyzygy geçirseň, onda ol iki parallel **AB** we **CD** göni çyzyklar hem şol tekizligi kesgitlär – **P /AB || CD/** /36-njy d surat/.

Eger **A /a,a¹/, B /b,b¹/** we **C /c,c¹/** üç nokady göni çyzyk bilen birleşdirsek emele gelen ýazgyn şekil /üçburçluk/ tekizligi kesgitlär
P /△ABC/ /36-njy i surat/.

Şeýlelikde, ortogonal çyzykda tekizlik aşakdakylar ýaly şekillendirlip bilner:

1. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokadyň proýeksiýasy bilen.
   P (A,B,C)
2. Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzygyň proýeksiýasy bilen. **P (AB,C)**
3. Kesişýän iki göni çyzygyň proýeksiýasy bilen.
   P (AB ∩ BC)
4. Iki parallel göni çyzygyň proýeksiýasy bilen.
   P (AB || CD)
5. Ýazgyn şekilleriň proýeksiýasy bilen /töwerek, üçburçlyk, we ş.m./.
6. Yzlary bilen **P/P_H,P_V,P_W /** 36-njy e surat we 37-nji 1,2 surat/



37-nji surat

Çyzuwly geometriýada **tekizligiň proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän göni çyzyklaryna tekizligiň y z l a r y diýilýär**. Ortogonal çyzgyda berlen tekizligi yzlary bilen şekillendirmek giňden ulanylýar.

Tekizligiň degişlilikde iki sany kesişýän yzlaryna iki sany kesişýän göni çyzyk hökmünde garamak hem mümkindir.

Berlen **P** tekizligiň **H** gorizontal şekiller (kese) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň g o r i z o n t a l yzy** diýilýär we **P_H** diýilip bellenilýär /37-njy a surat/.

P tekizligiň **V** frontal şekiller (maňlaý-dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň f r o n t a l yzy** diýilýär we **Pv** diýilip bellenilýär.

P tekizligiň **W** profil şekiller (gapdal - dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna bolsa **tekizligiň p r o f i l yzy** diýilýär we **Pw** diýilip bellenilýär.

Tekizligiň yzlarynyñ üç proýeksiýasy bardyr. Mysal üçin, **P_H** yz özüniñ gorizontal proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyñ beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OX** we **OY** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler ýöne ol şekilleri çyzgyda görkezilmeýär we bellenilmeýär.

Şonuñ ýaly hem **Pv** yz özüniñ frontal proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyñ beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OX** we **OZ** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeýärler.

Pw yz bolsa özüniñ profil proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyñ beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OZ** we **OY** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeýärler - bellenilmeýärler.

Eger tekizlige proýeksiýa tekizlikleriniñ üçüsiniñ sistemasynda garasak, onda umumy haldaky tekizlik proýeksiýa oklarynyñ her birini keser. Iki yzyñ **OX, OY** we **OZ** proýeksiýa oklarynyñ üstündäki kesişme nokatlaryna tekizligiñ yzlarynyñ **duşuşýän /birleşme/** nokatlary diýilýär we degişlilikde **Px, Py, Pz** diýilip bellenilýär. Yzlarynyñ duşuşyk nokatlaryndan koordinatalaryñ başlangyjyna çenli bolan aralygyna **OPx, OPy** we **OPz** tekizligiñ **p a r a m e t r i** diýilýär. **Giñişlikde tekizligiñ ýagdaýy onuñ üç parametri bilen kesgitlenilýär.**

Tekizligiñ epýuryny gurmak üçin **OPx, OPy** we **OPz** kesimleriñ - tekizligiñ parametrleriniñ berlen bolmagy ýeterlikdir /37-nji b surat/.

Tekizligiñ her bir yzynyñ ýagdaýy iki parametr bilen kesgitlenilýär, şeýlelikde, tekizligiñ iki yzy $\mathbf{P_H}$ we **Pv** bilelikde onuñ üç parametrini, ýagny onuñ giñişlikdäki ornuny doly kesgitleýär. Şeýle hem tekizligiň iki yzy iki sany kesişýän göni çyzyk bolup tekizligi kesgitleýändir.

17. Proýeksiýalar tekizliklerine görä giňişlikdäki tekizligiñ dürli ýagdaýlary.

Tekizlik giñişlikde proýeksiýalar tekizliklerine garanynda şu aşakdaky ýagdaýlarda bolýar:

1.Umumy ýagdaýdaky tekizlik.

2.Hususy ýagdaýdaky tekizlik.

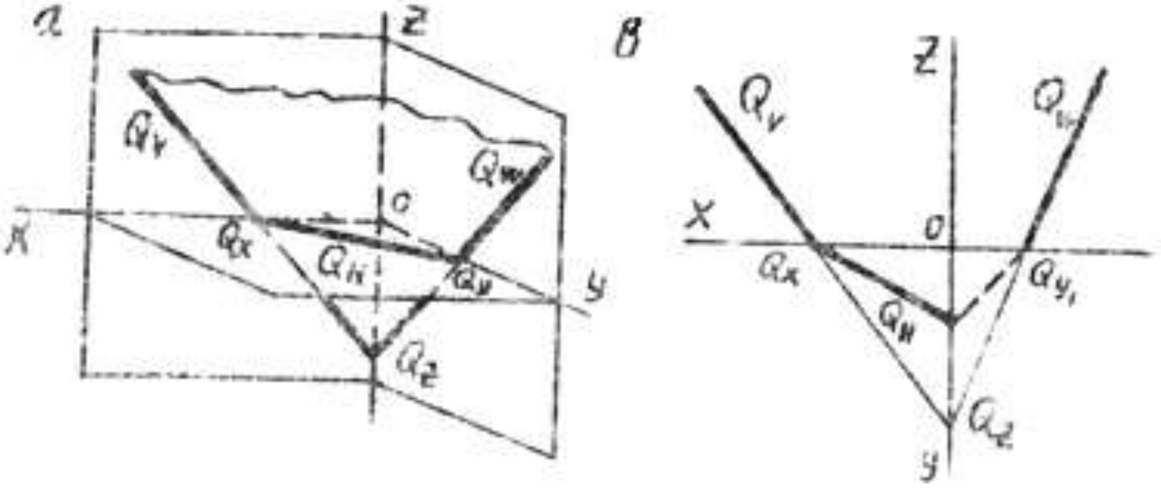
1. Umumy ýagdaýdaky tekizlik. proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine-de perpendikulýar bolmadyk tekizlige umumy ýagdaýdaky /haldaky/ tekizlik diýilýär.

Umumy haldaky tekizlikleriñ ýazgyn şekilde we her - hili ýagdaýlardaky berlişi 36-njy suratda görkezilendir. Şeýle tekizlikler proýeksiýalar tekizlikleriniñ üçüsine-de islendik ýapgytlykda bolup biler. Eger umumy haldaky tekizlik ýazgyn şekilde /üçburçluk/ bilen berlen bolsa, onda şol ýazgyn şekilleriñ /üçburçlugyñ/ gorizontal **/Δabc/,** frontal **/$\Delta a^1 b^1 c^1$ /,** we profil **/$\Delta a^{11} b^{11} c^{11}$ /,** proýeksiýalary ýazgyn şekildir /üçburçlukdyr/, ýöne hakyky ululygyndan mydama kiçidir : /seret 36-nji d syrata/.

$$/\Delta abc/ < \Delta ABC/, \quad /\Delta a^1 b^1 c^1 < \Delta ABC / \quad \text{we} \quad /\Delta a^{11} b^{11} c^{11} \; \Delta ABC /$$

Umumy haldaky **P** tekizligiñ üç yzy bardyr: gorizontal $\mathbf{P_H}$, frontal – **Pv**, profil – **Pw**. Şeýle tekizligiñ yzlary proýeksiýalar oklaryna parallel däldirler we olary kesýändirler.

37-nji suratdan görnüşi ýaly, yzlaryñ üçüsi bir oktantyñ çäginde /1-nji oktant/ ýapyk kontury – yzlaryñ üçburçlugyny emele getirýärler.



38-nji surat

38-nji suratda umumy ýagdaýdaky tekizligiñ giñişlikde aýdyñ şekildäki we epýurdaky **Qw** profil yzyñ gurluşy görkezilendir.
Qz nokat **O** nokatdan aşakda ýatandyr, **Qy** nokady tapýarys, şondan soñ **Qy₁** we **Qz** nokatlary birleşdirip, **Qw** profil yzyñ ugruny anyklaýarys hem-de gurýarys.

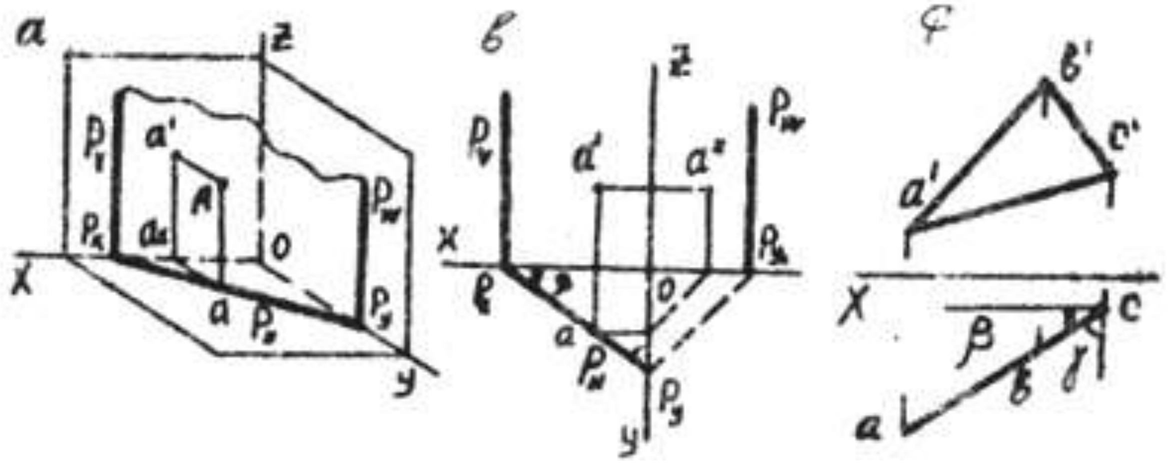
2. Hususy ýagdaýdaky tekizlik. proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine (A – topar) ýa-da ikisine (B - topar) perpendikulýar ýerleşdirilen tekizlige hususy ýagdaýdaky /haldaky/ tekizlik diýilýär.

A. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine perpendikulýar tekizlik.

1. G o r i z o n t a l poýektirleýji tekizlik.

Gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **P / Δ ABC/** tekizlige **gorizontal proýektirleýji** tekizlik diýilýär
/39-njy surat/.
Proýektirleýji tekizlikler öz üstlerinde ýatan nokatlaryñ özboluşlylygy bilen baglylygyndaky meseleleri çözmekde häli-şindi ulanylýar. Mysal üçin, gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatan her bir nokat şol nokady **H** tekizligine proýektirlenýän

göni çyzyk gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatandyr **H** tekizligi tekizligiñ gorizontal yzynyñ üstünde ýatan nokatda kesýar. Şeýlelikde, gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatan ähli nokatlaryñ, göni çyzyklaryñ, tekiz egri çyzyklaryñ we geometrik ýazgyn figuralaryñ gorizontal proýeksiýalary mydama $\mathbf{P_H}$ gorizontal yz bilen gabat gelýär, ýagny utgaşýar.



39-njy surat

Görnüşi ýaly gorizontal yzyñ **OX** we **OY** oklary bilen kesişende emele getirýän **β** we **λ** burçlary **P** tekizligiñ **V** hem-de W tekizlikleri bilen emele getirýän ikigranly burçlaryñ çyzyk burçlarydyr. Mundan başga-da **Pv⊥OX** , sebäbi iki **V** hem **P** tekizlik üçünji **H** tekizlige perpendikulýar bolsa , onda şol tekizlikleriñ kesişme **Pv** çyzyga hem **H** tekizligene perpendikulýardyr.

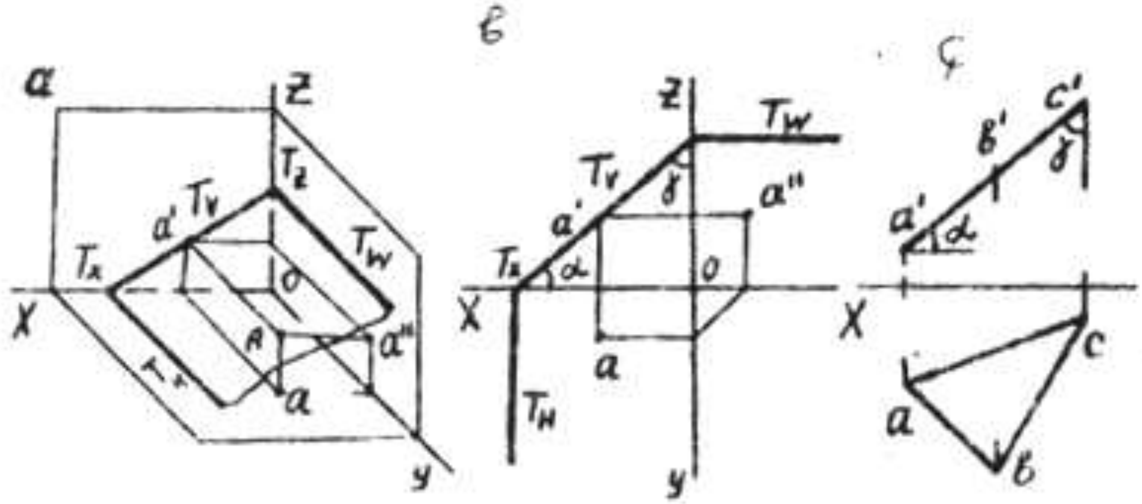
Şeýle hem **Pv** göni çyzyk şol tekizlikdäki ýatan her bir göni çyzyga, ýagny **OX** okuna-da perpendikulýardyr.

Pw-nyñ **OY** okuna perpendikulýarlygy hem şu ýokardaky ýaly düşündirilýär.

2. F r o n t a l poýektirleýji tekizlik.

Frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **T /ΔABC/** tekizlige **frontal proýektirleýji** tekizlik diýilýär /40-njy surat/.

T$_H$ gorizontal yz **OX** okuna, **Tw** bolsa **OZ** okuna perpendikulýardyr. Bu tekizlikde ýatan nokatlaryñ, göni çyzyklaryñ, tekiz egri çyzyklaryñ we geometrik ýazgyn figuralaryñ frontal proýeksiýalary mydama **Tv** frontal yz bilen gabat gelýär. **α** we **λ** burçlar **T** tekizligiñ **H** we **W** tekizlikleri bilen emele gelen çyzyk burçlarydyr.



40-njy surat

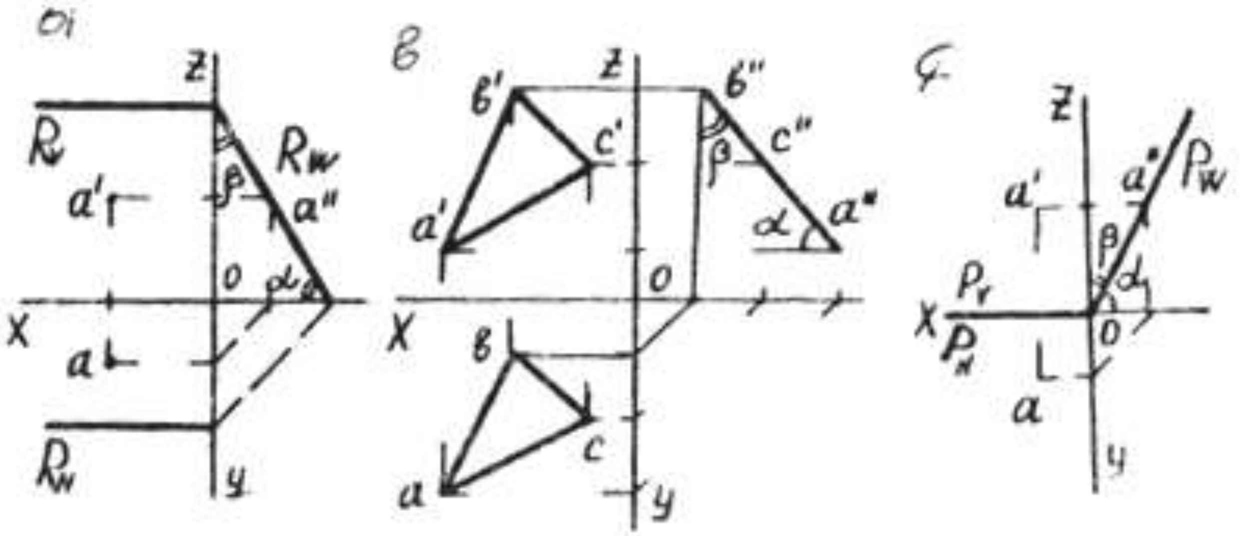
3 . P r o f i l poýektirleýji tekizlik.

Profil proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **R /ΔABC/** tekizlige **profil proýektirleýji** tekizlik diýilýär /41-nji surat/.

α we **λ** burçlar özleriniñ hakyky ululyklarynda proýektirlenýär. Beýlekilerde bolşy ýaly, **Pw** yzyñ hem ýygnaýjy häsiýeti bardyr.

OX okuñ üstünden geçýän **P** tekizlige **<u>ok tekizligi</u>** <u>/ profil proýektirleýji/</u> diýilýär /41-nji ç surat/.

Eger-de **< α = < β** bolsalar, bu **P** tekizlige **<u>bissektrik</u> ok tekizligi** diýilýär.



41-nji surat

B. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine perpendikulýar tekizlik.

Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel, ýagny şol bir wagtyñ özünde-de proýeksiýalar tekizlikleriniñ beýleki ikisine perpendikulýar bolan tekizlikler hem h u s u s y haldaky tekizliklerdir. Olara-da proýektirleýji tekizlikleriñ häsiýetleri mahsusdyr. Bu ýagdaýdaky tekizliklere kä halatlarda **dereje** tekizligide diýilýär.

1. G o r i z o n t a l t e k i z l i k .

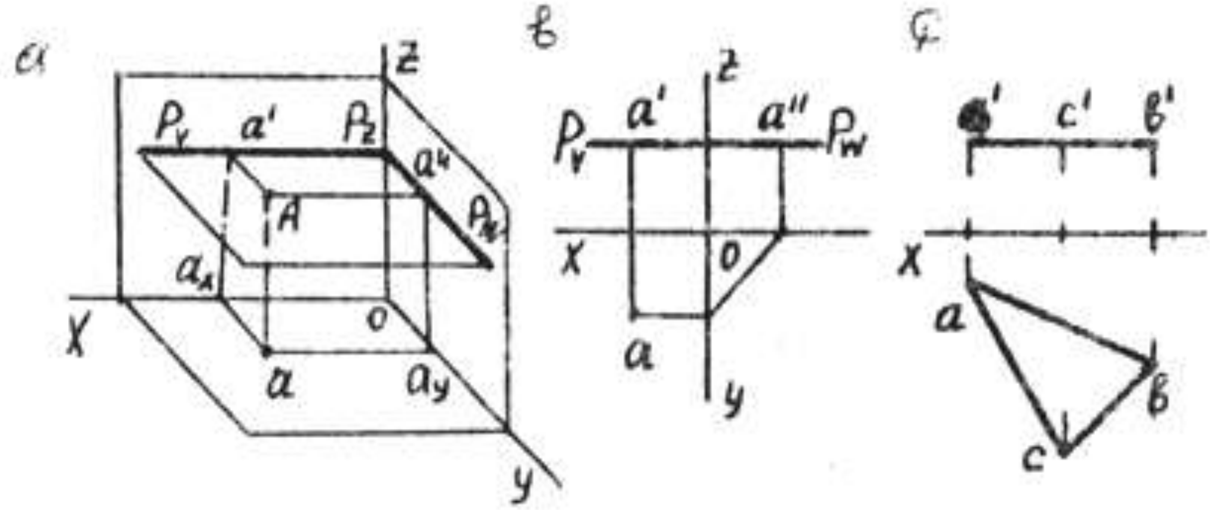
Gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel **/ P || H /**, frontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar **/ P ⊥ V, P⊥ W /** bolan tekizlige **g o r i z o n t a l** tekizlik diýilýär.

Eger-de gorizontal tekizlik epýurda yzlary bilen berlen bolsa, onda ol tekizligiñ **P_H** gorizontal yzy ýokdur. Emma **Pv** frontal we **Pw** profil yzlary /bir gönüde/ **OX** proýeksiýalar okuna paralleldirler /42-nji **a, b** surat/. Iki parallel tekizlikleriñ üçünji tekizlik bilen kesişmegi/.

Eger-de gorizontal tekizlik ýazgyn şekil bilen añladylanda, ýagny **ABC** üçburçluk bilen añladylanda, onda ol üçburçlugyñ gorizontal proýeksiýasy onuñ hakyky ululygyna deñdir. **$\Delta abc = \Delta ABC$,** onda beýleki iki şekilleri :

$\Delta a^1b^1c^1$ frontal we **$\Delta a^{11}b^{11}c^{11}$** profil proýeksiýalary bolsa **OX** proýeksiýalar okuna paralleldirler we göni çyzyk bolup proýektirlenýändirler.

$P(\Delta ABC) \parallel H$; $P \perp V$; $P \perp W$; onda **$\Delta abc = \Delta ABC$**



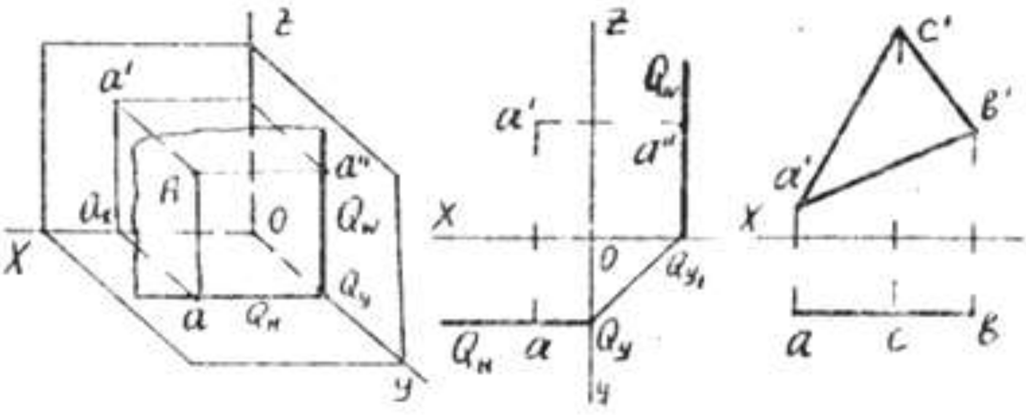
42-nji surat

2. F r o n t a l t e k i z l i k .

Frontal proýeksiýalar tekizligine parallel **/Q (Δ ABC) $\parallel$ V/,** ýa-da **H we W** tekizliklere perpendikulýar tekizlige **f r o n t a l** tekizlik diýilýär /43-nji surat/.

$Q_H \parallel OX; Q_W \parallel OZ$; $Q(\Delta ABC) \parallel V$;

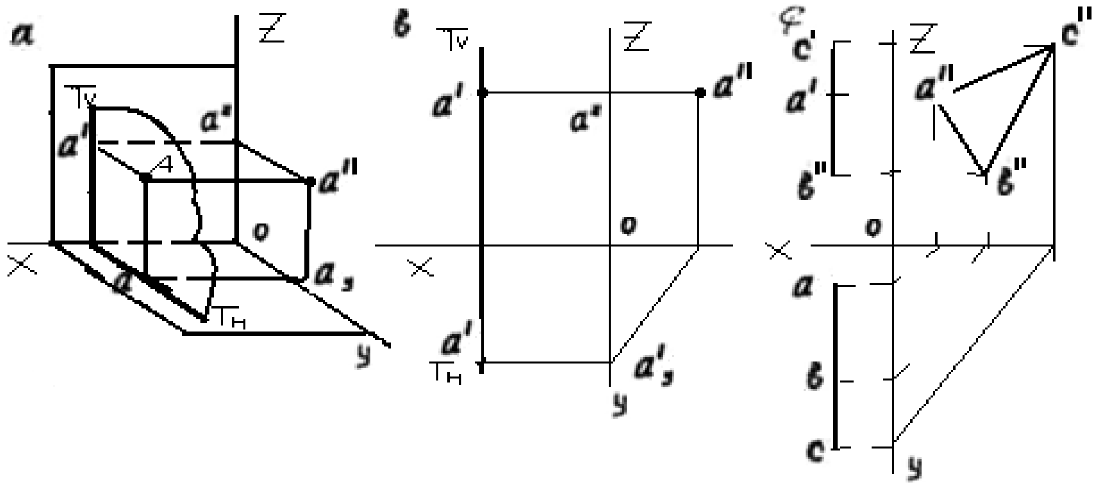
$Q_H = \Delta abc$; $\Delta a^1b^1c^1 = \Delta ABC$.



43-nji surat

3. Profil tekizlik.

Profil proýeksiýalar tekizligine parallel **/T (Δ ABC) || W/, H we W** proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar tekizlige **p r o f i l** tekizlik diýilýär. (44-nji surat)



44-nji surat

$T_V \perp OX$, $T_H \perp OX$ ýa-da $T_V \parallel OZ$, $T_H \parallel OY$, onda **$\Delta a^{11}b^{11}c^{11} = \Delta ABC$.**

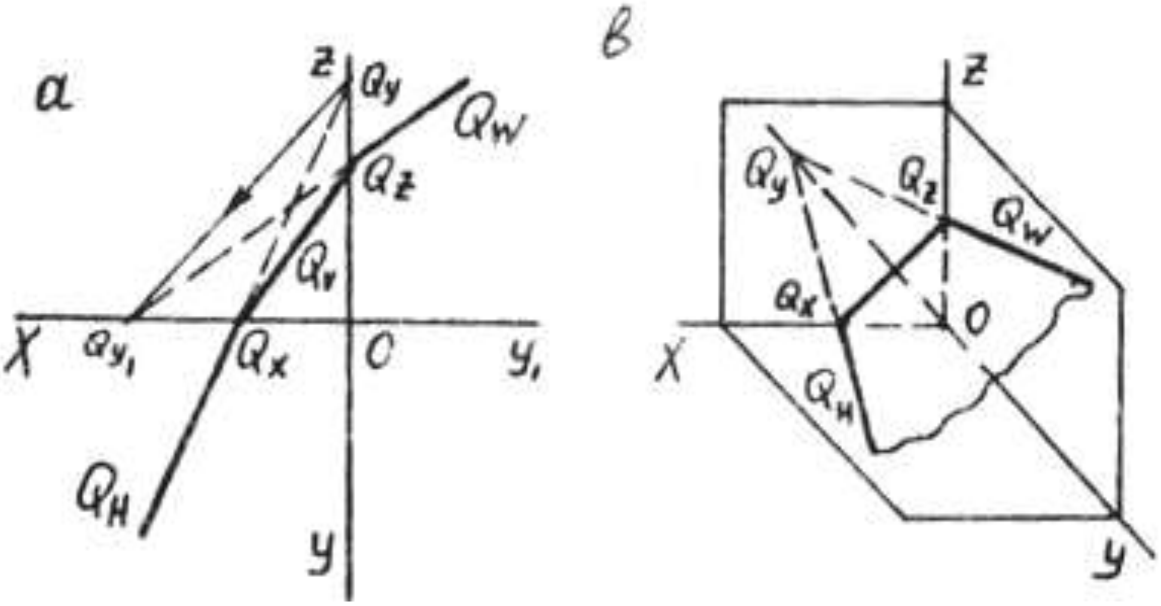
Meseleleriñ çözgütlerine garap geçeliñ:

Mesele. Berlen **Q /3, - 6, 4/** tekizligiň parametrleri boýunça tekizligiñ yzlaryny gurmaly /45-nji a, b surat/. Kompleks çyzgysy – epýury we aýdyň şekili çyzylandyr.

1. Degişlilikde **OX** we **OY** oklaryñ üstünde ölçäp goýlan **OQx = 3** we **QyO = - 6** parametrler boýunça **Qx** we **Qy** – iñ duşuşyk nokatlaryny kesgitleýäris we **Q_H** gorizontal yzy gurýarys.

2. **OZ** okuñ üstünde ölçäp goýlan **OQz = 4** parametrler boýunça **Qz** – iñ duşuşyk nokatlaryny kesgitleýäris, ol hem **Qx** duşuşyk nokady bilen bilelikde **Qv** frontal yzy kesgitleýär.

3. **OY** – iñ otrisatel böleginde ölçenip goýlan **OQy = - 6** parametri boýunça **OQy_1** radius bilen duga geçirip, **OX**, okuñ üstünde **Qy_1**, nokady tapýarys, ol hem **Qz** nokat bilen bilelikde **Qw** profil yzy kesgitleýär.

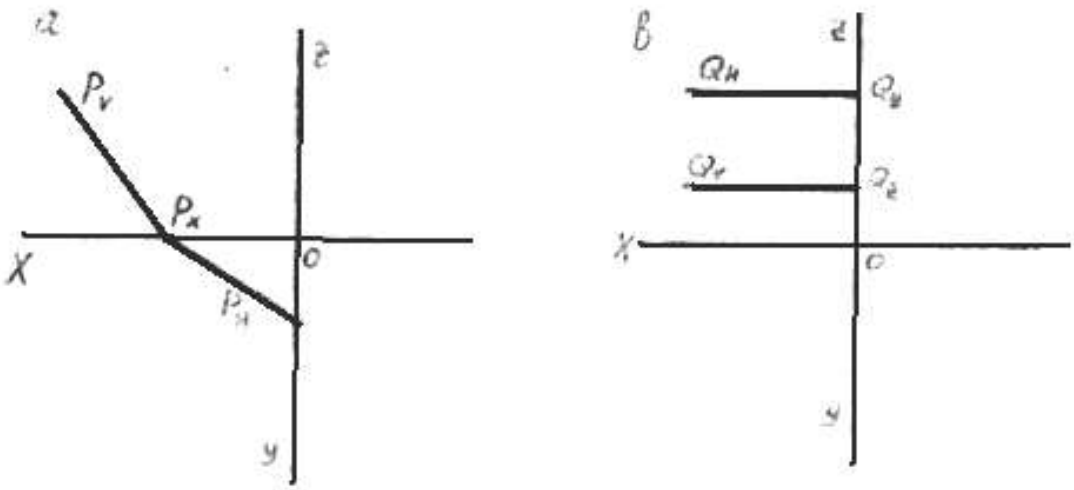


45-nji surat

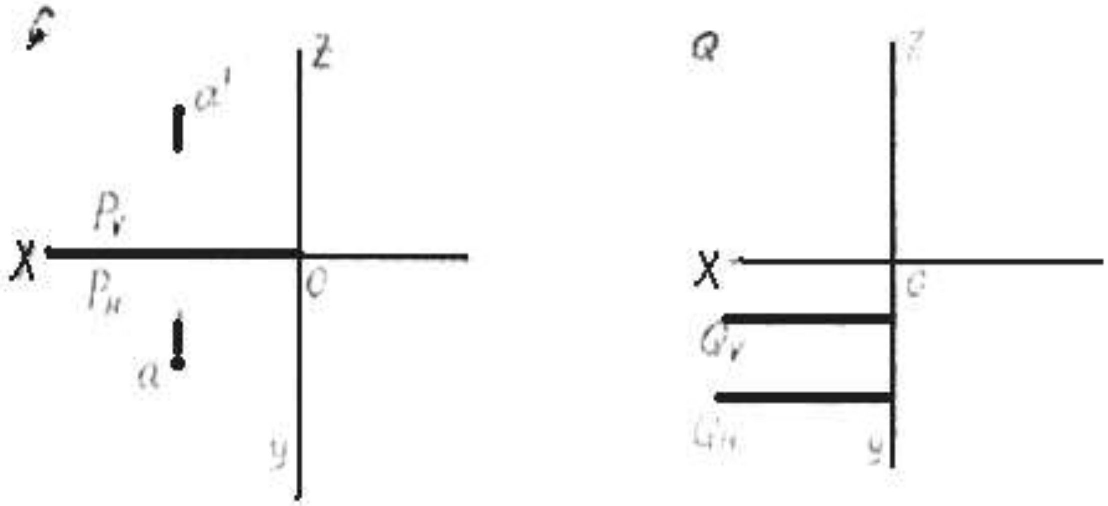
Şuña meñzeşlikde parametrleri boýunça **Q** tekizligiñ aýdyñ şekilini gurýarys /45-nji b surat/.

Öz-özüni barlamak üçin soraglar we meseleler.

1. Ortogonal çyzgyda tekizlik nähili şekillendirilip bilner ?
2. Tekizligiñ yzy diýilip näme aýdylýar ? Tekizligiñ parametrleri diýilip näme aýdylýar?
3. Tekizligiñ giñişlikdäki ýagdaýyny parametrleriñ näçesi kesgitleýär ?
4. Tekizligiñ giñişlikdäki ýagdaýyny yzlaryñ näçesi kesgitleýär ?
5. Umumy haldaky tekizlik diýip nähili tekizlige aýdylýar, şeýle tekizligiñ yzlary proýeksiýalar oklaryna görä nähili ýerleşýärler ?
6. Gorizontal proýektirleýji / frontal proýektirleýji / tekizlik näme, şeýle tekizlikde ýatan nokatlaryñ proýeksiýalarynyñ ýerleşişleriniñ özboluşlylygy nämeden ybarat ?
7. Parametrleri bilen berlen **P / - 3, 4, 5/** we **Q /3, 2, - 4/** tekizlikleriñ yzlaryny gurmaly.
8. **P** tekizligiñ we **Q** tekizligiñ profil yzlaryny gurmaly /46-njy surat/



46-njy surat



46-njy surat

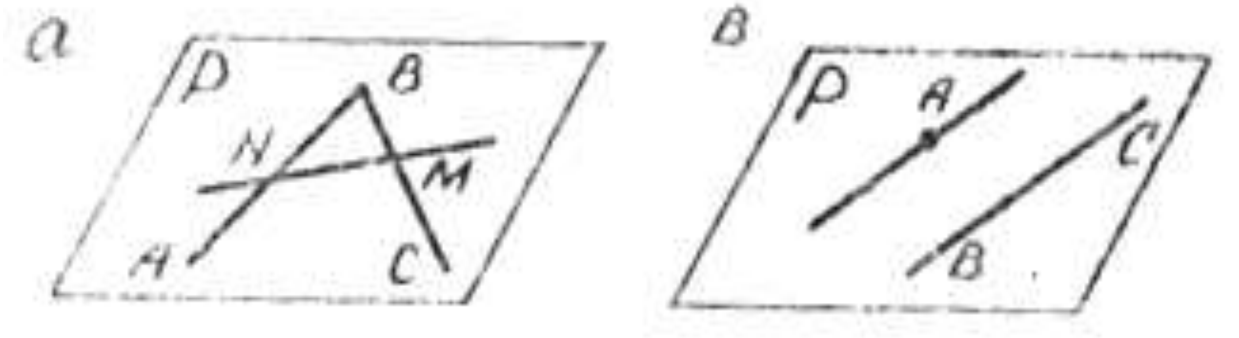
18. Giňişlikdäki tekizligiň we göni çyzygyň özara ýagdaýlary.

Geometriýadan belli bolşy ýaly, giňişlikde göni çyzyk şekiller tekizlige görä şu aşakdaky ýagdaýlarda bolup biler :

1. Tekizlikde ýatan göni çyzyk.
2. Tekizlige parallel göni çyzyk.
3. Tekizligi kesýän göni çyzyk.
4. Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.

19. Tekizlikde ýatan göni çyzyk we nokat.

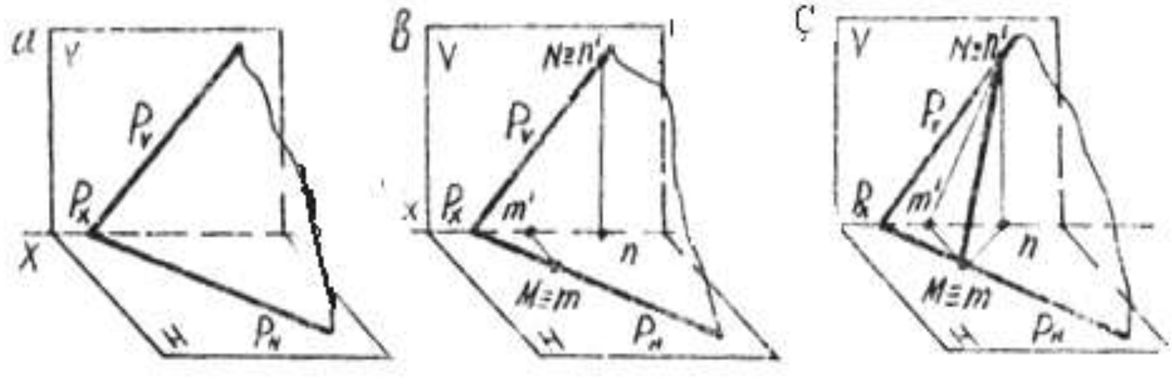
Eger göni çyzygyñ tekizlik bilen iki sany umumy nokady bar bolsa ýa-da bir umumy nokady bolup, hem-de şol tekizligiñ üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir göni çyzyga parallel bolsa, onda şol göni çyzygyñ tekizlige degişli bolýanlygy geometriýadan bize bellidir /47-nji surat/.



47-nji surat

Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizlige degişli göni çyzyk geçirmeklige garap geçeliñ /48-nji surat/.

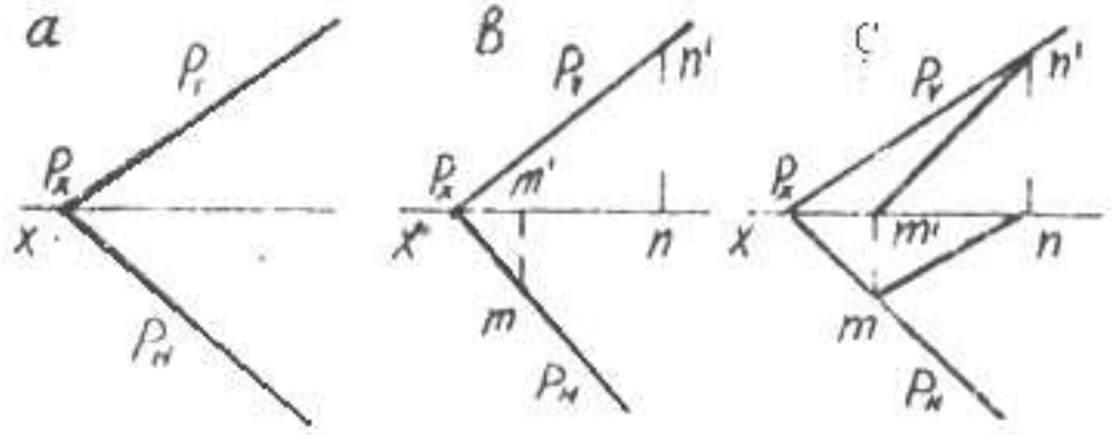
Eger nokat tekizlige degişli göni çyzygyñ üstünde ýatan bolsa, onda nokadyň tekizligiñ üstünde ýatanlygy hem geometriýadan mälimdir. Şonuñ üçin **P** tekizliginde käbir göni çyzyga gurmak üçin bu göni çyzygyñ islendik **M** we **N** nokatlaryny alýarys, ýagny şeýlelikde **M** nokady tekizligiñ **P_H** gorizontal yzynyñ, **N** nokady bolsa tekizligiñ **Pv** frontal yzynyñ üstünde alýarys.



48-nji surat

Ortogonal çyzgyda **M** we **N** nokatlaryñ proýeksiýalaryny **/m, m^1 we n, n^1/** gurýarys /49-njy surat/. **M = m, N = n^1**

M we **N** nokatlary, şeýle hem olaryñ biratly **m** we **n** hem-de **m^1** we **n^1** proýeksiýalaryny göni çyzyklar bilen birleşdirip, **P** tekizligiñ üstünde ýatan **MN /mn, m^1 n^1 /** göni çyzygy we onuñ degişli **mn** gorizontal hem-de **m^1 n^1** frontal proýeksiýalaryny alarys /48 – 49- njy suratlar/.



49-njy surat

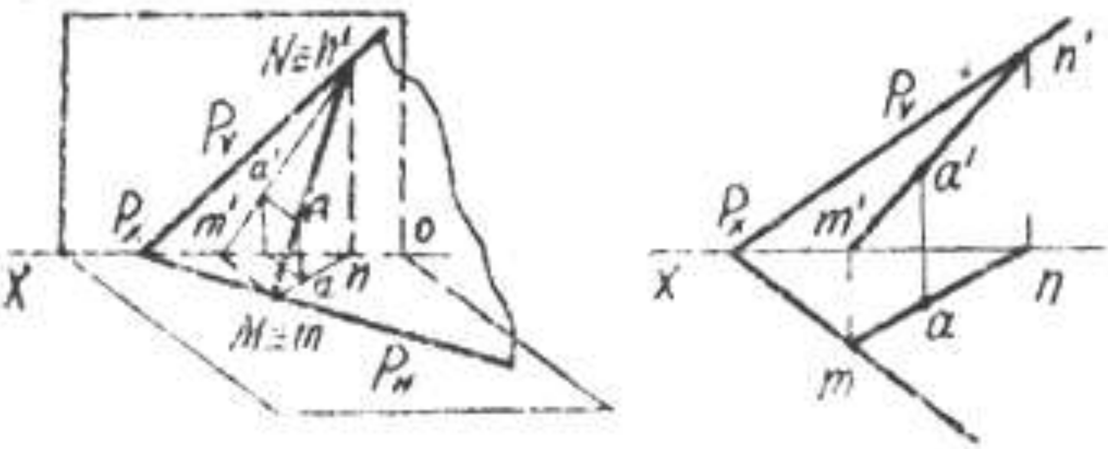
M /m, m^1/ nokat gurlan göni çyzygyñ gorizontal yzydyr. **N /n, n^1/** nokat bolsa onuñ frontal yzydyr, şeýle hem **M** nokadyñ gorizontal yzy tekizligiñ **P_H** gorizontal yzynyñ üstünde, göni çyzygyñ **N** frontal yzy bolsa tekizligiñ Pv frontal yzynyñ üstünde ýatýandyr. **$M \subset P_H$,**

$N \subset P_V$

Şeýlelikde, eger umumy haldaky **MN** göni çyzyk tekizligiñ üstünde ýatan bolsa, onda onuñ yzlary bu tekizligiñ biratly yzlarynyñ üstünde ýatýandyr.

P tekizliginde haýsy hem bolsa bir islendik **A (a, a^1)** nokady gurmak üçin bu tekizligiň üstünden **MN** göni çyzygyny gurmaly we bu göni çyzygyň **($a \subset mn$, $a^1 \subset m^1n^1$, $A \subset P$)** biratly şekilleriniň üstünde hem islendik A nokady gurmak gerek /50-nji surat/.

$A \subset MN$, $MN \subset P$

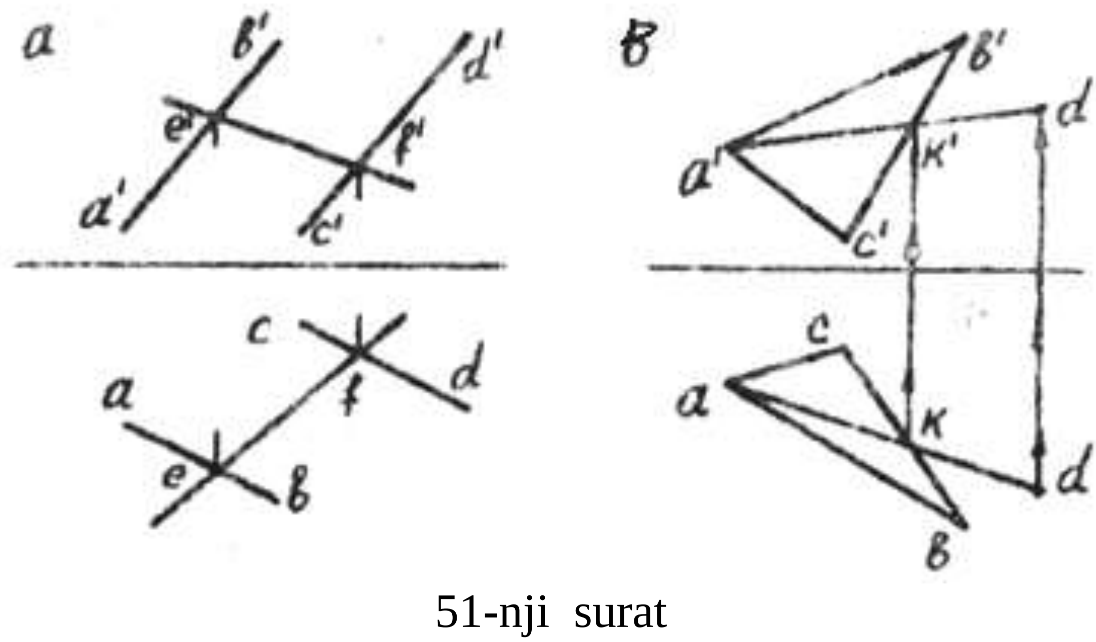


50-nji surat

Käbir meseleleri çözeliň:

1. **AB** we **CD** parallel iki göni çyzyklaryň şekilleri bilen berlen **P** tekizlige degişli göni çyzygy geçirmeli /51-nji a surat/ .**AB** we **CD** göni çyzyklaryň üstünde islendik **E /e,e^1/** we **F /f,f^1/** nokatlary alýarys we olaryň üstünden **EF** göni çyzygy geçirýäris. **E $\subset$ AB, F $\subset$ CD**

Bu **EF** göni çyzyk **P** tekizligiň üstünde ýatandyr, sebäbi onuň bilen umumy iki **E** we **F** nokady bardyr.



51-nji surat

2. **ABC** üçburçlugyň tekizliginde ýatan **D** nokadyň berlen **d** gorizontal proýeksiýasy boýunça $\mathbf{d^1}$ frontal proýeksiýasyny tapmaly /51-nji b surat/.

D nokadyň **d** gorizontal proýeksiýanyň we **a** nokadyň üstünden **ABC** üçburçlugyň tekizliginiň üstünde ýatan göni çyzygyň **ad** gorizontal proýeksiýasyny geçirýäris. **K** nokat **AD** we **BC** göni çyzyklaryň hakyky kesişme nokadydyr. **a** we **k** nokatlary boýunça $\mathbf{a^1k^1}$ frontal proýeksiýasyny gurýarys. $\mathbf{a^1}$ $\mathbf{k^1}$ proýeksiýany **d** nokatdan çykýan baglanyşyk çyzygy bilen kesişýänçä dowam etdiriň, **D** nokadyň gözlenýän $\mathbf{d^1}$ frontal proýeksiýasyny taparys.

20. Tekizligiň esasy çyzyklary.

Tekizligiň esasy çyzyklaryna şu aşakdaky çyzyklar degişlidir :

1.Tekizligiň **gorizontallary**.

2.Tekizligiň **frontallary**.

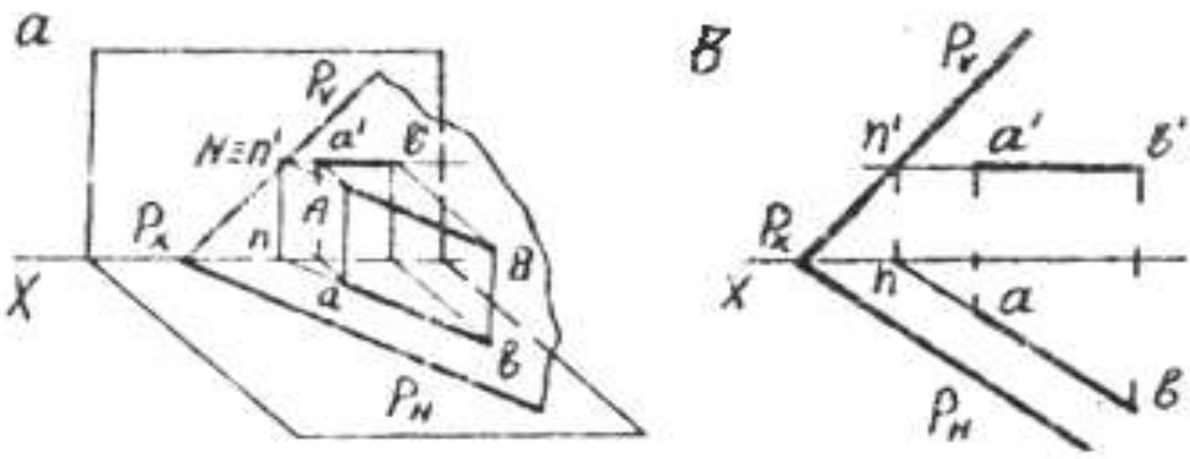
3.Tekizligiň **profil** göni çyzyklary.

4.Tekizligiň proeksiýalar tekizliklerine bolan **iň uly ýapgytlyk** çyzyklary.

20.I. Tekizligiň gorizontaly Berlen tekizlikde ýatan we **H** gorizontal şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiň gorizontallary** diýilýär.

Tekizlik yzlary bilen berlen ýagdaýynda, tekizligiň gorizontalyny gurmaklyk şol tekizligiň üstünden gorizontal yza parallel bolan göni çyzygy göçirmeklige syrygýar /52-nij a,b surat/.

Tekizligiň $\mathbf{P_H}$ gorizontal yzy gorizontalyň **H** tekizliginde ýatan hususy halydyr /onuň gorizontallarynyň biridir/



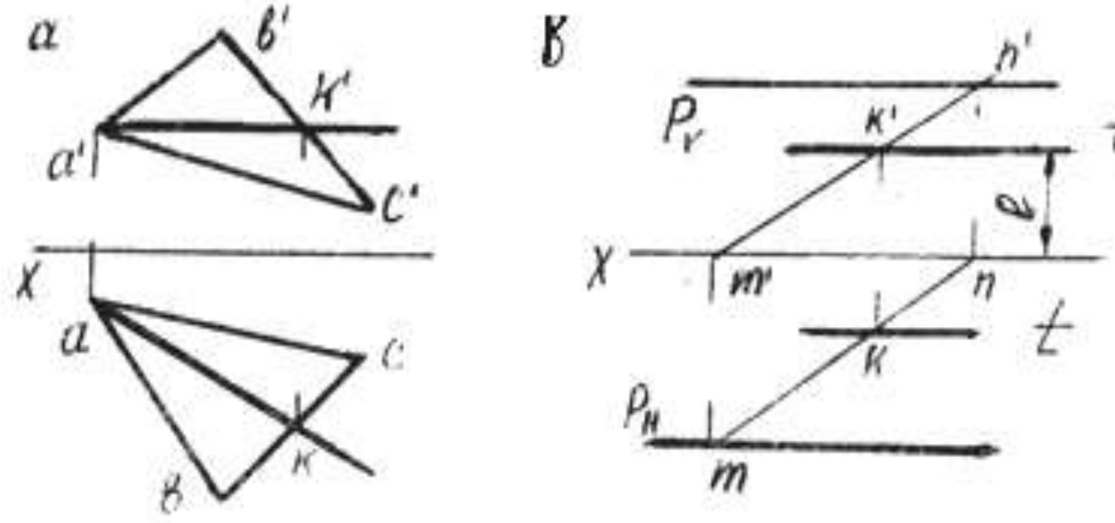
52-nji surat

Goý, **P** tekizligiň üstünde onuň haýsy hem bolsa bir yzyna, mysal üçin, **P_H** yza parallel **AB** göni çyzyk geçirmeli bolsun. Şeýle **AB** göni çyzyk frontal proýeksiýalar tekizligi bilen **Pv** frontal yzyñ üstünde ýatan **N /n, n^1/** nokatda duşuşar. **AB** göni çyzygyñ gorizontal yzy ýokdyr , sebäbi ol **P_H** yza paralleldir, şeýlelikde, ol **H** tekizligine-de paraleldir. **AB** we **P_H** parallel göni çyzyklaryň epýurda biratly parallel proeksiýalary bardyr, ýagny gorizontalyň **ab** gorizontal proýeksiyasy tekizligiň **P_H** yzyna paraleldir **/ab || P_H /; a^1b^1** frontal proýeksiýasy bolsa **OX** oka paraleldir. Ýagny **a^1b^1 II OX.**

Bu ýerden şeýle düzgün gelip çykýar**: eger göni çyzyk tekizligiň bir yzyna paralel, beýleki ýzy bilen bolsa umumy bir nokady bar bolsa, onda ol göni çyzyk tekizlige degişlidir** /47-nji surat we 52-nji surat/.

Goý tekizlik **ABC** üçburçlyk bilen berlen bolsun. Üçburçlugyň **A** depesinden tekizligiň gorizontalyny geçireliň /53-nji a surat/.

Tekizlik yzlar bilen berilmedik halda tekizligiň esasy çyzyklaryny gurmakda bu çyzyklaryň proýeksiýalarnyň proýeksiýalar oklaryna görä ýerleşişleriniň aýratynlyklaryndan peýdalanýarys. Gorizontalyň **H** gorizontal tekizlige parallel bolany üçin, onuň frontal proýeksiýasyny gurmakda ilki **OX** oka parallel bolan göni çyzygy geçirýäris, soňra baglanşyk çyzygy boýunça onuň gorizontal proýeksiýasynyň ýagdaýyny kesgitleýäris.



53-nji surat

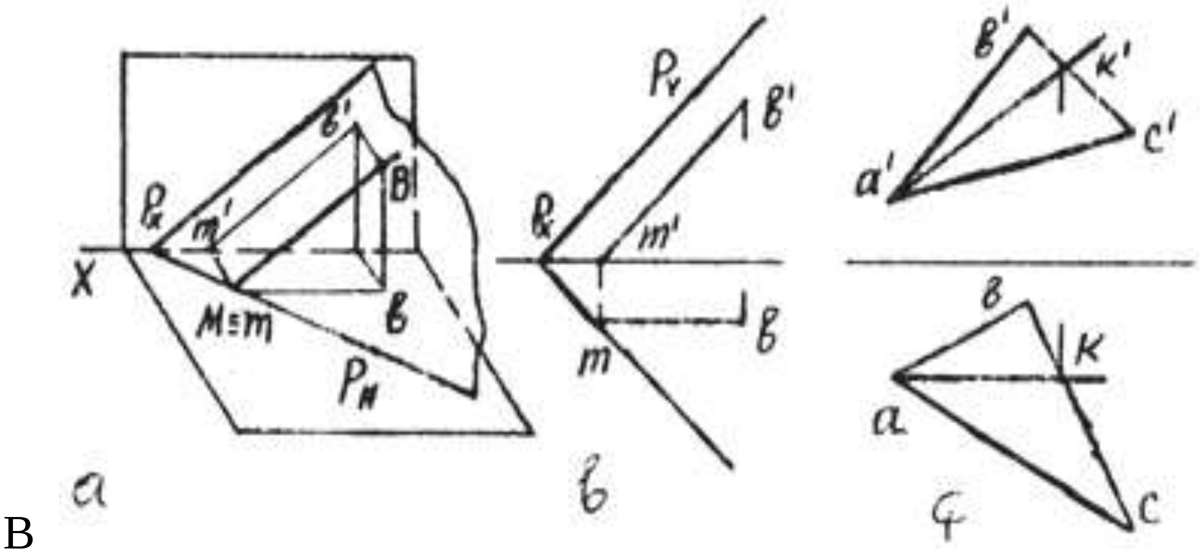
Gorizontalyň frontal proýeksiýasy baglanşyk çyzygyna perpendikulýar bolmalydyr **/a^1 $k^1 \perp aa^1$ /,** şonuň üçin **a^1** nokadyň üstünden **b^1c^1** bilen **k^1** nokada kesişýänçä gorizontalyň frontal proýeksiýasyny **/a^1k^1/ OX** oka parallel edip geçirýäris. Nokadyň **k** gorizontal proýeksiýasyny gurup, **AK** gorizontalyň **ak** gorizontal proýeksiýasyny taparys.

AK göni çyzyk **ABC** üçburçlugyň tekizligine degişlidir, sebäbi ol tekizlige degişli iki **/ A we K/** nokadyñ üstünden geçýär we **H** tekizlige paralleldir, diýimek ol berlen **ABC** üçburçlugyñ gorizontalydyr.

53-nji b suratda **H** tekizlikden berlen **L** uzaklykda ýerleşen **P** profil proýektirleýji tekizligiñ gorizontalyny çünki **$o^I k^I$ II ox** gurlyşy görkezilendir. **$KT \subset P$, $MN \subset P$, $K \subset MN$, $K \subset P$, K^1t^1 II Kt II OX**

<u>20.2.Tekizligiñ frontaly.</u> Berlen tekizlikde ýatan we **V** şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **<u>tekizligiñ frontallary</u>** diýilýär .

Tekizligiñ frontaly MB we onuñ **m^1b^1** frontal proýeksiyasy **Pv** frontal yza paralleldir. Frontalyñ gorizontal proýeksiýasy **mb** bolsa, **OX** oka paralleldir /54-nji surat/



54-nji surat

frontalyñ proýeksiýasyny gurmak üçin ilki onuñ **OX** oka parallel bolan gorizontal proýeksiýasyny geçirýäris, şol esasda hem onuñ frontal proýeksiýasynyñ ýagdaýyny kesgitleýäris.

MB ⊂ P, mb II OX, m^1b^1 II P_V

Tekizlik **ABC** üçburçluk bilen şekillendirilende tekizligiñ frontalynyñ gurluşy 54-nji b suratda ýerine ýetirilendir. **AK ⊂ ∆ ABC, AK II V, ak II OX**, ak frontalyň gorizontal proýeksiýasy,

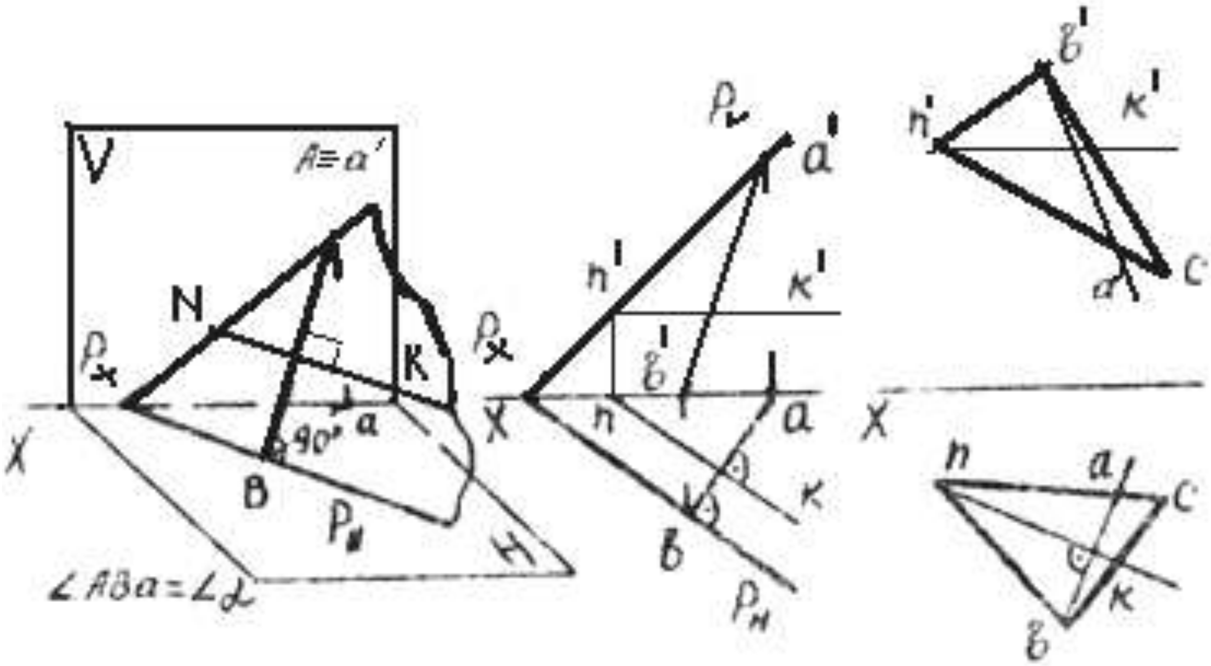
a^1 k^1 – frontalyň frontal proýeksiýasydyr.

<u>20.3.Tekizligiñ profil göni çyzygy</u>. Berlen tekizlikde ýatan we **W** şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **<u>tekizligiñ profil göni çyzyklary</u>** diýilýär.

Tekizligiñ profil göni çyzygy we onuñ profil proýeksiýasy profil yza paralleldirler, gorizontal we frontal proýeksiýalary bolsa degişlilikde **OY** we **OZ** oklara paralleldirler, ýa-da **OX** proýeksiýalar okuna perpendikulýardyrlar. Çyzgyny çyzmaklyk talyplaryň özüne tabşyrylýar.

20.4. Tekizligiñ proýeksiýalar tekizliklerine bolan iñ uly ýapgyt çyzygy.

Berlen tekizlikde ýatan we tekizligiñ islendik gorizontallaryna /şol sanda tekizligiñ gorizontal yzyna hem/ perpendikulýar bolan **AB** göni çyzyga tekizligiñ **H** şekiller tekizligine bolan **<u>iñ uly ýapgyt çyzygy</u>** diýilýär. /55-nji surat/



55-nji surat

AB $\perp$**P$_H$** . **AB** göni çyzyk **P** tekizligiñ **H** şekiller tekizligine bolan iñ uly ýapgyt çyzyklarynyñ biridir.

AB $\perp$ **P$_H$, AB** $\perp$ **NK, NK** $\subset$ **P, NK II H,**

NK – P tekizligiň gorizontalydyr.

Tekizligiñ iñ uly ýapgyt çyzygy bilen tekizligiñ islendik gorizontaly aralygyndaky göni burç **H** tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýän / **göni burçy proýektirlemek hakyndaky teorema esasynda /.** Şeylelikde, tekizligiń iń uly ýapgyt çyzygynyń berlen **ab** gorizontal proýeksiýasy islendik gorizontalyń gorizontal proýeksiýasynyń we tekizligiń gorizontal yzyna perpendikulýardyr.

AB $\perp$ **P$_H$, ab** $\perp$ **P$_H$** , ýa-da **AB** $\perp$ **NK , ab** $\perp$ **nk.**

“Iń uly ýapgyt çyzyk“ diýen sözüń fiziki manysy şundan ybaratdyr : şar, suw damjasy, suw akymjygy we ş.m. tekizligiň üstünden şol çyzyk boýunça hereket edýärler.

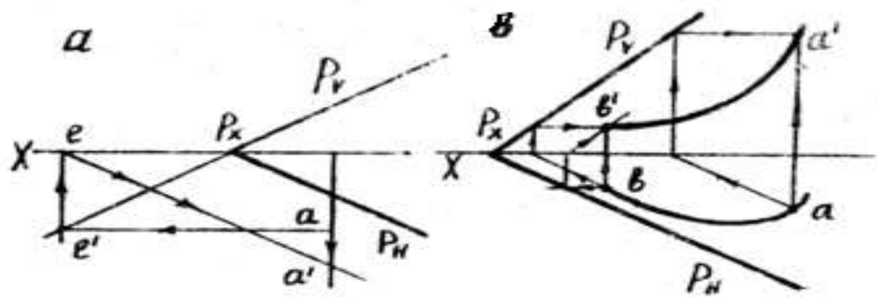
“Iň uly ýapgyt çyzyk“ diýen sözüň geometrik manysy bolsa şundan ybaratdyr: giňişlikde tekizlikdäki bu çyzyk **H, V, W** proýeksiýalar tekizlikleri bilen iň uly ýapgyt burçy emele getirýär . Tekizligiň proýeksiýalar tekizligine ýapgytlygy hem şol burç bilen kesgitlenýär we ölçelýär.

Yzlary bilen berilmedik tekizlikler üçin iň uly ýapgyt çyzygyň proýeksiýasyny gurmaklyk tekizligiň gorizontallarynyň birini öňünden gurmaklyga syrygýar .Iň uly ýapgyt çyzygyň gorizontal proýeksiyasy bolsa adaty usul bilen tapylýar.

Tekizlikde aýratyn ýagdaýlarda ýerleşen göni çyzyklaryň ýagny esasy çyzyklaryň kömegi bilen tekizligiň we nokadyň ýada göni çyzygyň özara ýerleşişine degişli meseleleri çözmeklik has hem amatlydyr.

Mysal üçin **P** tekizlige degişli **A** nokadyň berlen **a^{1}** frontal proýeksiýasy boýunça onuň **a** gorizontal proýeksiýasynyň tapylşy
56-nji a suratda görkezilendir, gurluşy bolsa berlen **P** tekizligiň **AE** gorizontalynyň kömegi bilen ýerine ýetirlendir.

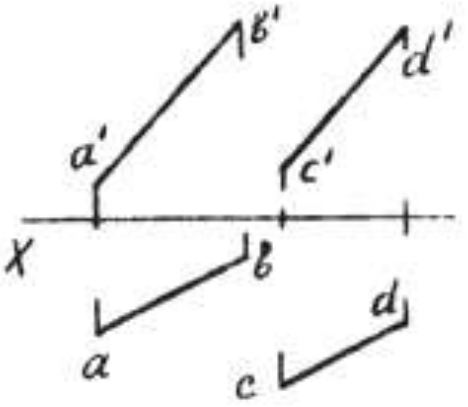
56-njy b suratda bolsa **P** tekizliginde ýerleşen **AB** tekiz egri çyzygyň **ab** gorizontal proýeksiýasy boýunça , **a^{1}b^{1}** frontal proýeksiýasynyň gurluşy görkezilendir. Şonuň üçin tekiz egri çyzygyň üstünde birnäçe nokatlar alynyp we şol nokatlaryň üstünden geçýän gorizontallaryň ýa-da frontallaryň kömegi bilen tekiz egri çyzygyň frontal proýeksiýasy gurlandyr. Tekiz egri çyzygyň gorizontal proýeksiýasy boýunça frontal proýeksiýasynyň gurluşy strelkalar bilen görkezilendir we çyzgydan düşnüklidir.

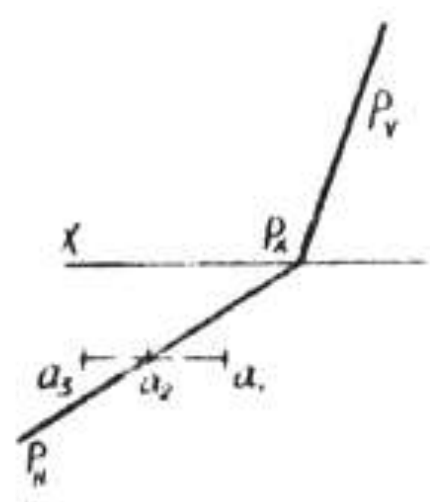


56-njy surat

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler .

1. Göni çyzygyň we nokadyň tekizligiň üstünde ýatmagy üçin nähili şertler berjaý edilmelidir ?





57-nji surat 58-nji surat

2. Tekizlikdäki nähili çyzyklara tekizligiň gorizontaly, frontaly, profil göni çyzygy we tekizligiň iň uly ýapgyt çyzygy diýilýar ? Ortogonal çyzgyda şeýle göni çyzyklaryň proýeksiýalary nähili ýerleşendirler ?
3. Iki sany parallel göni çyzyk **AB /ab, a'b'/** we **CD /sd s'd'/** bilen berlen P tekizligiň gorizontalyny, frontalyny we iň uly ýapgyt göni çyzygyny guruň /57-nji surat/.
4. Eger **A** nokadyň gorizontal proýeksiýasy berlen bolsa, onda
   P /P_H, P_V/ tekizligiň üstünde ýatan bu nokadyň **a'** frontal proýeksiýalaryny guruň . Meseläni çözmek üçin **P** tekizliginiň gorizontalyndan, frontalyndan hem-de umumy haldaky göni çyzygyndan yzly-yzyna peýdalanyň /58-nji surat/ . **A** nokadyň dürli ýagdaýda berlen gorizontal şekillerine üns beriň, ýagny :
   a, a_2, a_3 bu nokatlaryň frontal şekillerini **a^1, a_2^1, a_3^1** – tapmaly.

21. Tekizligiň yzlaryny gurmak.

Tekizligiň yzlaryny gurmaklyk berlen tekizlige degişli göni çyzyklaryň yzlaryny gurmaklyga we tapylan nokatlaryň üstünde tekizligiň degişli yzlaryny geçirmeklige syrygýar. Aşakda birnäçe meselelere garap geçeliň.

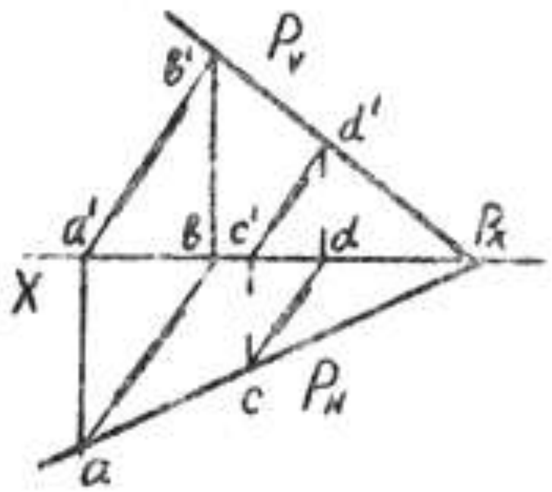
1 - M e s e l e. **AB** we **CD** iki parallel göni çyzyklaryň şekilleri bilen berlen **P** tekizligiň yzlaryny gurmaly /59-njy surat/ .

P (AB II CD)

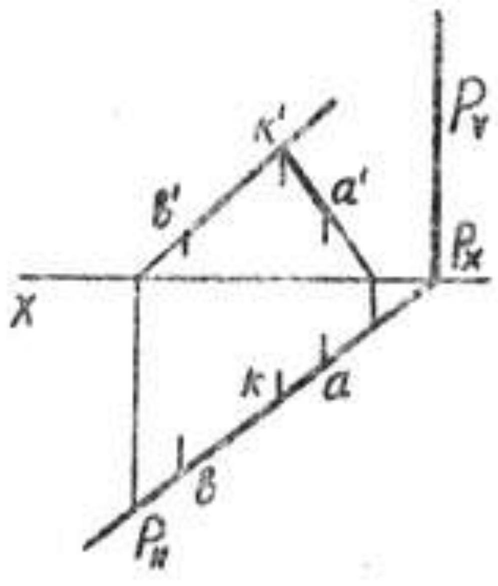
Bu ýagdaýda **AB** we **CD** göni çyzyklaryň frontal yzlary bolan
b' we **d'** nokatlary frontal proýeksiýalary we şol göni çyzyklaryň gorizontal yzlary bolan **a** we **c** nokatlaryň gorizontal proýeksiýalar berlen tekizligiň P_H we P_V yzlaryny kesgitleýärler. Gurluş dogry ýerine ýetirilende, yzlar **OX** okunyñ üstündäki **Px** birleşme nokatda kesişmelidirler bu gurlan **P** tekizlik umumy ýagdaýdaky tekizlikdir.

2 - M e s e l e. Kesişýän **AK** we **BK** göni çyzyklar bilen berlen **P** tekizligiñ yzlaryny gurmaly /60-njy surat/. **P (AK ∩ BK)**

Göni çyzyklaryñ gorizontal proýeksiýalarynyñ bir göni çyzyga proýektirlenýänligi üçin tekizligiñ gorizontal yzy şol proýeksiýalaryñ üstünden geçer. **P** gorizontal proýektirleýji tekizlikdir.



59-njy surat



60-njy surat

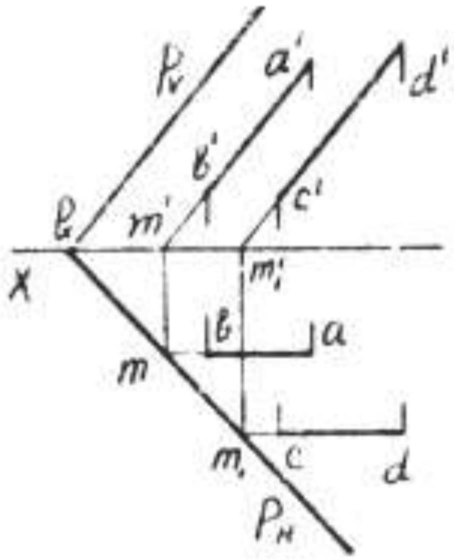
3 - M e s e l e. **BA** we **CD** parallel göni çyzyklar bilen berlen **P** tekizligiñ yzlaryny gurmaly /61-nji surat/.

P (BA II CD)

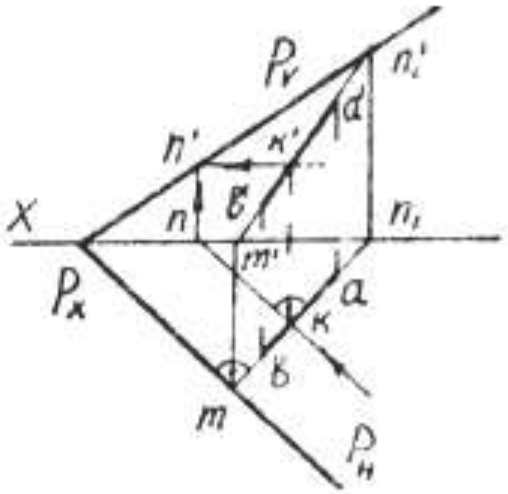
BA we **CD** göni çyzyklar **V** şekiller tekizligine paralleldirler. Diýmek, bu göni çyzyklar **P** tekizliginiñ frontallary bolarlar. Göni çyzyklaryñ **M** we **M₁** gorizontal yzlaryny tapyp we **m** hem **m₁** nokadyñ üstünden göni çyzyk geçirip, tekizligiň **P_H** gorizontal yzyny taparys. Tekizligiñ **Pv** frontal yzy **Px** birleşme nokadyñ üstünden **a^1b^1** frontal proýeksiýa parallel geçer. Sebäbi tekizligiñ frontal yzy tekizligiñ **BA** frontalynyñ frontal proýeksiýasyna paralleldir. Diýmek, biz **Px** bir nokadyñ üsti bilen **Pv** frontal yzy ugry belli bolanlygy üçin **/Pv || BA/ Pv**-ni **a^1b^1** parallel edip geçirýäris.

4 - M e s e l e. Iñ uly ýapgyt **AB** çyzygy bilen berlen P tekizligiñ yzlaryny gurmaly.

AB göni çyzygyñ üstünde erkin alnan **K** nokadyñ üstünden **KN** gorizontal geçireliñ, onuñ **kn** gorizontal proýeksiýasy **ab** perpendikulýar, **k^1n^1** frontal proýeksiýasyny bolsa **OX** oka parallel geçireliñ /62-nji surat/.



61-nji surat



62-nji surat

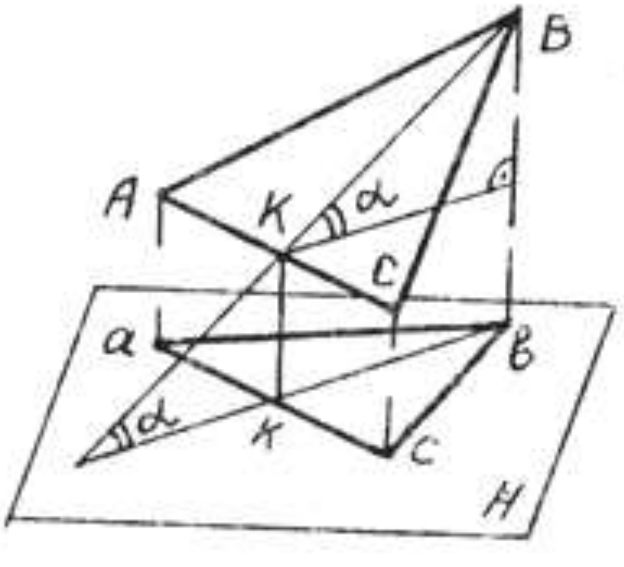
M gorizontal yzyñ **m** gorizontal proýeksiýasynyñ üstünden iñ uly ýapgytlyk **AB** çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar **/P_H⊥ab/** ýa-da gorizontalyñ gorizontal proýeksiýasyna **/P_H II nk/** parallel edilip **P** tekizligiñ **P_H** gorizontal yzyny geçireliñ.

Tekizligiñ **Pv** frontal yzy **Px,** $\mathbf{n^1}$ we $\mathbf{n^1_1}$ nokatlaryñ üstünden geçer. Guran tekizligimiz umumy ýagdaýdaky tekizlikdir.

22. Tekiz figuralary proýektirlemek.

Ähli nokatlary bir tekizlikde ýatan we figuranyñ gyralaryny emele getirýän çyzyklar bilen çäklendirilen şekile **tekiz figura** diýilýär.

Tekiz figuralary proýektirlemek üçin şol figura degişli degerli nokatlary, göni we egri çyzyklary proýektirlemek ýeterlikdir. Nokatlaryñ göni we egri çyzyklaryñ proýeksiýalar tekizligindäki emele gelen proýeksiýalaryny giñişlikdäki ýerleşen tertibinde birleşdirip tekiz figuralaryñ proýeksiýalary alynýar. Garalyp geçilen mysallaryñ birnäçesinde üçburçlugyñ proýeksiýasynyň gurluşyna ozal duşulypdy.



63-nji surat

63-nji suratda tekiz figuralaryñ proýeksiýalarynyñ meýdany **/Sabc/** bilen onuñ giñişlikdäki meýdanynyñ **/Sabc/** nähili baglanyşykdadygy görkezilendir. Bu suratda **ABC** üçburçlugyñ **AC** tarapy **H** gorizontal şekiller tekizligine parallel edilip alnandyr.

/AC # ac/. BK $\perp$ **AC** geçirip $\mathbf{S_{ABC} = 1/2AC \bullet BK}$ alýarys

Göniburçuñ proýeksiýasynyñ häsiýetine görä **bk** $\perp$**ac** .
Onda

$$S_{ABC} = 1/2ac \bullet bk .$$

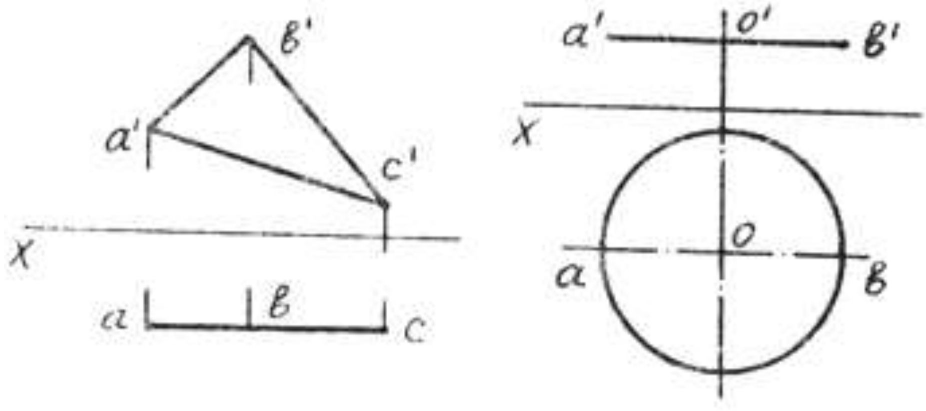
Eger **ABC** üçburçlugyñ **H** gorizontal şekiller tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny **α** bilen bellesek, onda **bk = BK** $\cdot$ **cos α.**
Şeýlelikde, $S_{ABC} = 1/2AC \bullet BK \bullet \cos\alpha = S_{ABC} \bullet \cos\alpha$

Şonuñ ýaly hem: $S_{a^I b^I c^I} = S_{ABC} \bullet \cos\beta$, $S_{a^{II} b^{II} c^{II}} = S_{ABC} \bullet \cos\gamma$

Bu ýerde **β, γ** tekizligiñ **/ΔABC/ V** hem **W** şekiller tekizliklerine degişlilikde ýapgytlyk burçlarydyr. Alnan baglanyşyklar figuranyñ taraplarynyñ proýeksiýalar tekizliklerine görä ýerleşişlerine bagly däldir. Eger tekiz figuranyñ taraplary proýeksiýalar tekizliklerine parallel bolmasalar, onda tekizlikde şol tekizligi ikä bölýän we **H, V** ýa-da **W** tekizligine parallel bolan göni çyzyk geçirip, şol gönüniñ her bir tarapynda emele gelen tekiz figuralar üçin ýokardaky aýdylanlary ulanýarys. Figuranyñ meýdany şol emele gelen bölekleriñ meýdanlarynyñ jemine deñ bolar.

Eger tekiz figura proýeksiýalar tekizligine parallel bolsa, onda onuñ hakyky ululygy şol parallel bolan tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýär.

64-nji a, b suratda **ABC** üçburçlugyñ tekizligi **V** frontal şekiller tekizlige paralleldir. Şonuñ üçin hem **ABC** üçburçlugy frontal proýeksiýalar tekizligine özüniñ hakyky ululygynda /$\beta=0$/ $S_{a`b`c`}=S_{ABC}$/, töweregiñ tekizligi bolsa **H** tekizligine hakyky ululygynda proýektirlenendir. / $\alpha = 0$, $S_{teg.} = S_{teg.pr.}$/.



64-nji surat

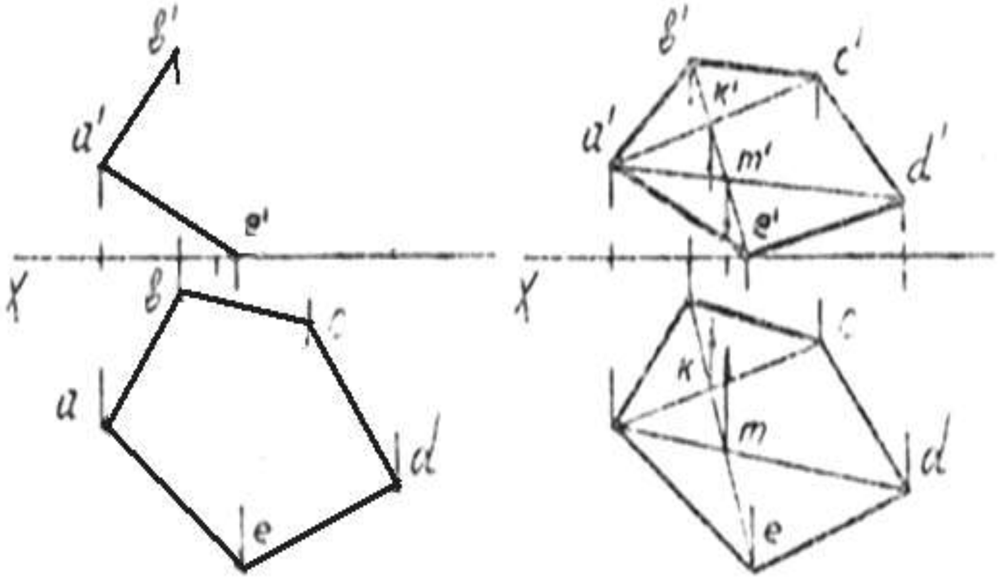
Eger tekiz figura **H, V** ýa-da **W** profil şekiller tekizliklerine perpendikulýar bolsa onda onuñ proýeksiýasy şol tekizlikde göni çykyz bolar /64-nji a surat/ .

$\alpha = 90^o$; $\cos 90^0 = 0$; $S_{abc} = 0$; $\beta = 90^0$; $\cos 90^0 = 0$; $S_{t.p.} = 0$.

Eger tekiz figuranyñ iki proýeksiýasy hususy ýagdaýy eýelemeýän bolsa, onda onuñ tekizligi umumy haldaky tekizlik bolar.

Eger töweregiň tekizligi giñişlikde umumy ýagdaýda ýerleşen bolsa, onda ol tekizligiñ gorizontal, frontal we profil proýeksiýalary **ellips** görnüşde proýektirlener. Bu ellipsiñ uly diametri töweregiň diametrne deñdir, kiçi diametri bolsa şol töweregiň proýeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçuna baglydyr.

65-nji suratda **ABCDE** bäşburçlugyñ gorizontal proýeksiýasy we onuñ uç depesiniñ **a^1, b^1** we **e^1** frontal proýeksiýalary berilipdir. Beýleki iki depäni gurmak üçin **BE, AC** we **AD** diagonallardan peýdalanylýar



65-nji surat

Tekizligiñ frontal proýeksiýasynda diñe diagonalyñ **b¹e¹** proýeksiýasyny gurmak bolar. Diagonallaryñ köpburçlugyñ tekizlikde ýatanlygy üçin diagonallaryñ kesişme nokatlary bolan **K** we **M** **AC** we **AD** göni çyzyklaryň **BE** göni çyzyk bilen hakyky kesişme nokatlary bolarlar. **K** we **M** gorizontal proýeksiýalar boýunça **K¹** we **m¹** frontal proýeksiýalary tapylýar. **a¹** nokady **k¹** we **m¹** nokatlary bilen birleşdirip, deogonallaryň **a¹k¹** we **a¹ m¹** frontal proýeksiýalaryň ugurlaryny anyklaýarys. **C** we **D** nokatlary diogonallaryň frontal proýeksiýalarynyň üstüne proýektirläp **c¹** we **d¹** nokatlary alarys. Nokatlary yzygyderli birleşdirip köpburçlugyň frontal proýeksiýasyny gurarys.

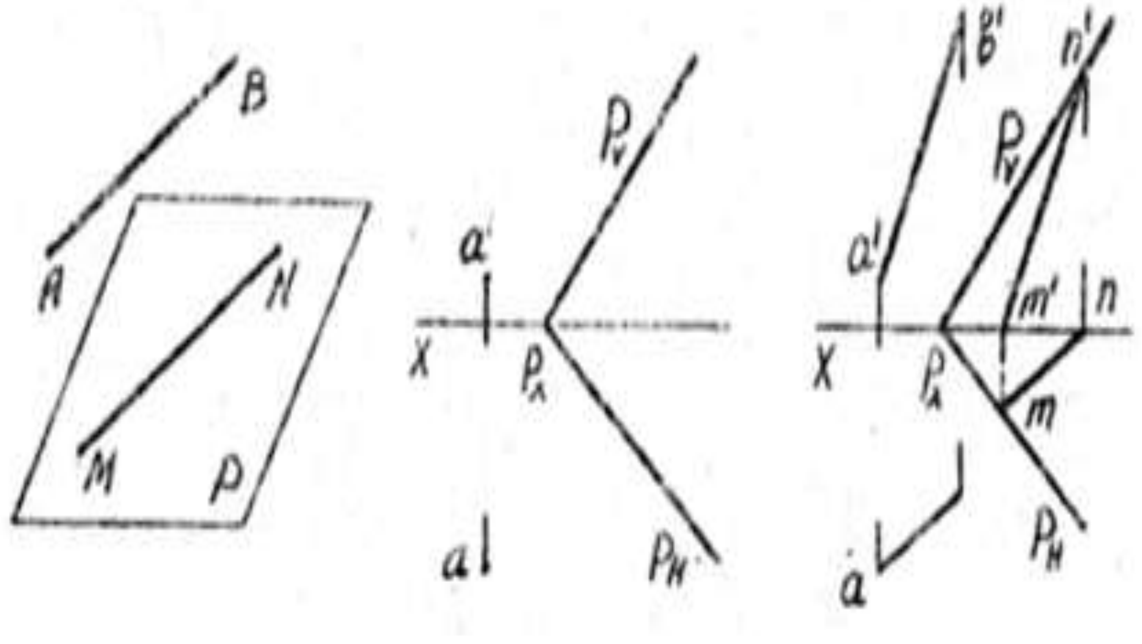
23. Tekizlige parallel göni çyzyk.

Göni çyzygyň tekizlige parallelik nyşany : Elementar geometriýadan bize belli bolşy ýaly, eger **AB** göni çyzyk **P** tekizligiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir **MN** göni çyzyga parallel bolsa, onda ol göni çyzyk şol tekizlige-de paralleldir. (66-njy a surat).

1 – Mesele. A /a,a^1 / nokadyň üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P / P_H, Pv/** tekizlige parallel **AB** göni çyzyk geçirmeli (66-njy b, ç surat).

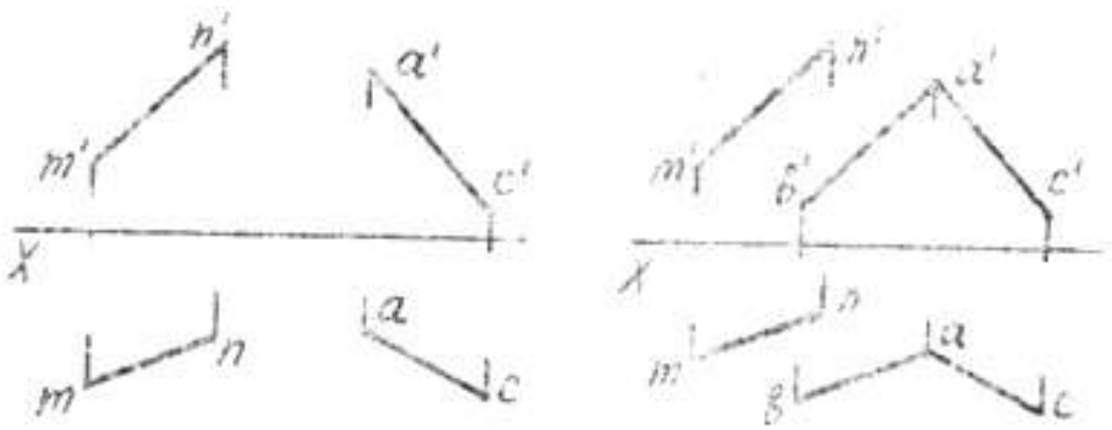
P /P_H, Pv/ tekizligiň üstünde ýerleşen islendik **MN /mn, m^{1}n^1/** göni çyzygyny alýarys, onuň **M / m, m^1**/ we **N /n, n^1**/ yzlaryny
P tekizligiň biratly yzlarynyñ üstünde ýerleşdirýäris. Nokatlaryň biratly **m**. **n** we **m^1-n^1** proýeksiýalaryny birleşdirip, göni çyzygyň **mn** gorizontal we **m^{1}n^1** frontal proýeksiýalaryny gurýarys.

Berlen **A /a,a^1/** nokadyň üstünden P tekizliginde alnan **MN** göni çyzygyñ **mn, m^{1}n^1** proýeksiýalaryna degişlilikde parallel **ab**, **a^{1}b^1** proýeksiýalary geçirýäris. Alnan **AB** göni çyzyk P tekizligine paralleldir. **MN ⊂ P, AB || MN** onda **AB || P**;



66-njy surat

2 - Mesele. AC göni çyzygyñ üştünden **MN** göni çyzyga parallel bolan **P** tekizligi geçirmeli /67-nji surat/.

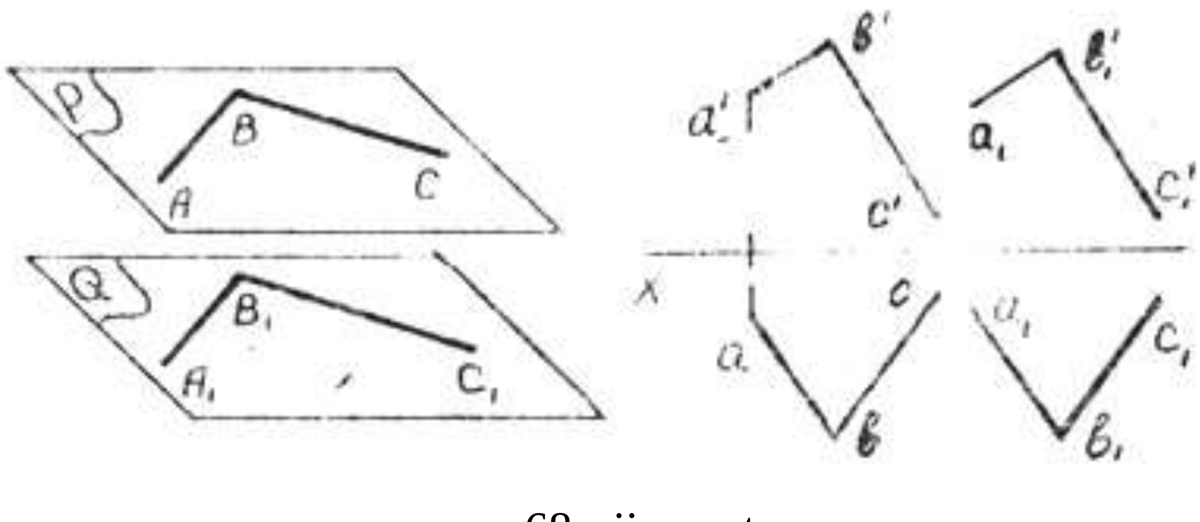


67-nji surat

Gözlenýän tekizligi **AC** göni çyzygynyñ üstünden geçirip, berlen **MN** göni çyzyga-da parallel bolmaly bolsa, onda **A** nokadyñ üstünden berlen **MN** göni çyzyga parallel bolan **AB** göni çyzyga **/AB || MN/** geçireliñ. Gözlenýän tekizlik kesişýän **AB** we **AC** göni çyzyklar bilen kesgitlenýär, **P /AB** $\cap$ **AC/.** **MN II AB**, **mn II ab**, **m^1 n^1 II a^1 b^1, AB** $\subset$ **P** onda **MN II P.**

24. Parallel tekizlikler.

Iki tekizligiñ parallelik nyşany : **P** tekizligiñ üstünde ýatan **AB** we **CD** kesişýän iki göni çyzyk beýleki **Q** tekizligiñ üstündäki **A_1B_1** we **C_1D_1** kesişýän iki göni çyzyga degişlilikde parallel bolsalar, onda bu iki **P** we **Q** tekizlikler giñişlikde-de özara paralleldirler /68-nji a surat/.

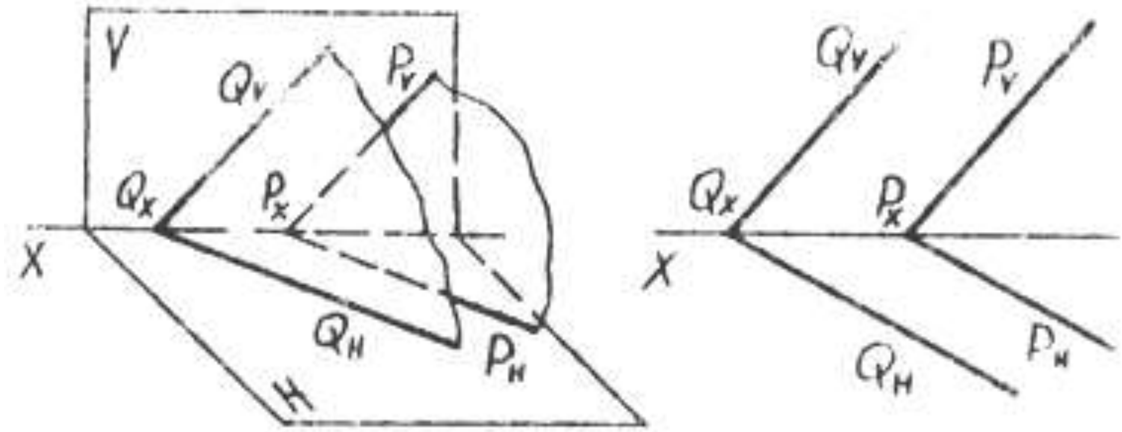


68-nji surat

Şonuñ üçin-de olara degişli iki sany **/AB ∩ BC/ we /A_1B_1 ∩B_1C_1/** kesişýän göni çyzyklaryñ biratly proýeksiýalaryda özara parallel bolmalydyrlar /68-nji b surat/.

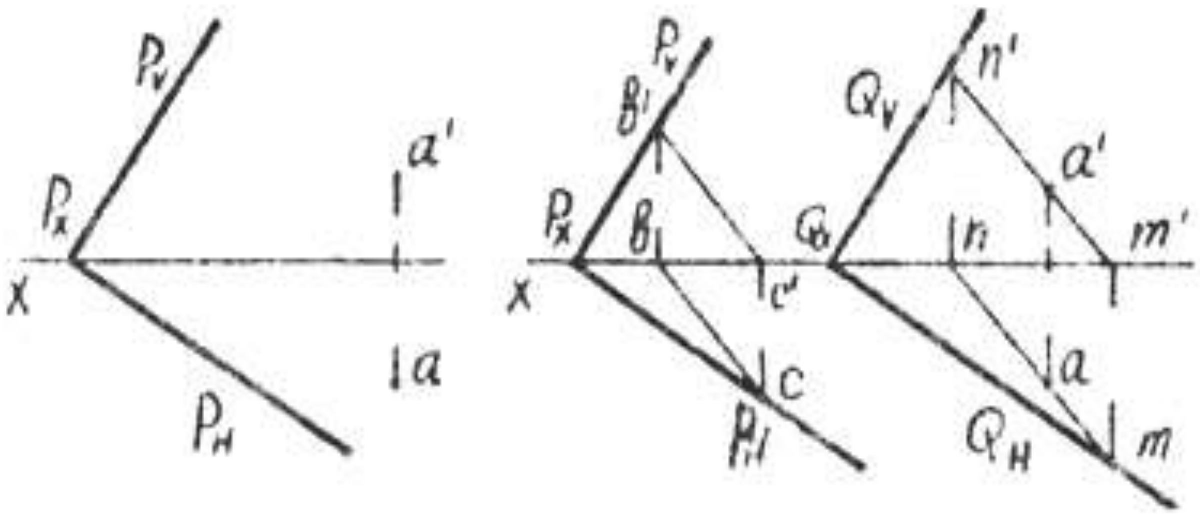
Tekizlikde ýatan we kesişýän çyzyklar edilip, tekizligiñ esasy çyzyklaryny /gorizontallary we frontallary/ almak çyzmaly geometriýada meseleler işlenilende giñden ulanylýar, ýagny örän amatly bolýar.

Eger parallel iki **/P we Q/** tekizliogi üçünji **/H ýa-da V /** tekizlik bilen kesseñ, onda olaryñ kesişme çyzyklary / **P_H, Q_H we Pv, Qv** biratly yzlary/ özara parallel bolarlar /69-nji surat/.



69-njy surat

Mesele. A nokadyñ üstünden, yzlary bilen berlen **P** tekizlige parallel bolan **Q** tekizligini yzlary bilen geçirmeli /70-nji surat/.



70-nji surat

A nokadyñ üstünden **P** tekizligiñ üstünde islendik alnan **BC** göni çyzyga parallel **MN** göni çyzygy geçirýäris we onuň frontal **N /n, n¹ /,** gorizontal **M /m, m¹**/ yzlaryny tapýarys. Şu **MN** göni çyzygyñ biratly yzlarynyñ üstünden gözleýän **Q** tekizliginiñ biratly yzlaryny geçirýäris, ýagny **m** nokadyñ üstünden **Q_H || P_H** we **n¹** nokadyň üstünden bolsa **Qv || Pv** edip geçirýäris. Olar **Qx** birleşme nokadynda kesişmelidirler. Alnan – gurlan tekizlikleriniň biratly yzlary-da özara paralleldirler. Diýmek bu iki **P** we **Q** tekizlikler giňişlikde paralleldirler. Seret 69-njy surata.

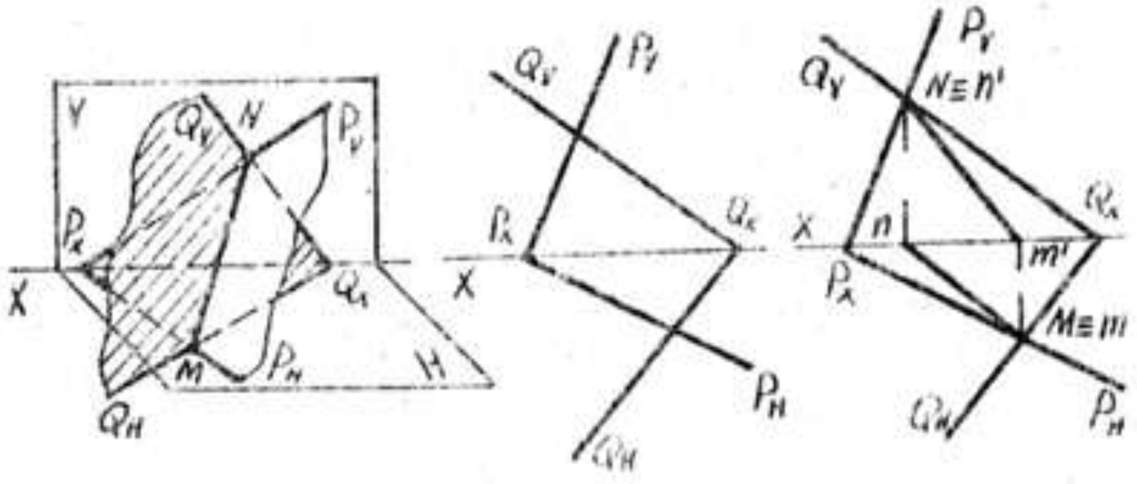
25. Kesişýän tekizlikler.

Giňişlikde iki tekižlik özara parallel bolmasalar onda olar giňişlikde kesişýändirler. Iki kesişýän tekižligiň kesişme çyžygy göni çyzykdyr. Ony gurmak üçin iki kesişýän tekizlik üçin-de umumy bolan iki sany nokady ýa-da iki kesişýän tekizlik üçin hem umumy bolan bir nokady we tekizlikleriň kesişme çyzygynyň ugryny kesgitlemek ýeterlikdir.

Umumy halda, kesişme çyzygy gurmak üçin her biri şol bir wagytyň özünde iki kesişýän tekizlige-de degişli bolan umumy iki nokady tapmak gerek.

Proýeksiýalar tekizliklerine görä ýerleşişleri bilen baglanyşyklykda tekizlikleriň kesişmeleriniň mümkin bolan birnäçe hallaryna garap geçeliň.

Birinji hal. Biratly yzlarynyň kesişýän iki tekizlikleriniň umumy kesişme çyzygyny gurmak /71-nji surat/.



71-nji surat

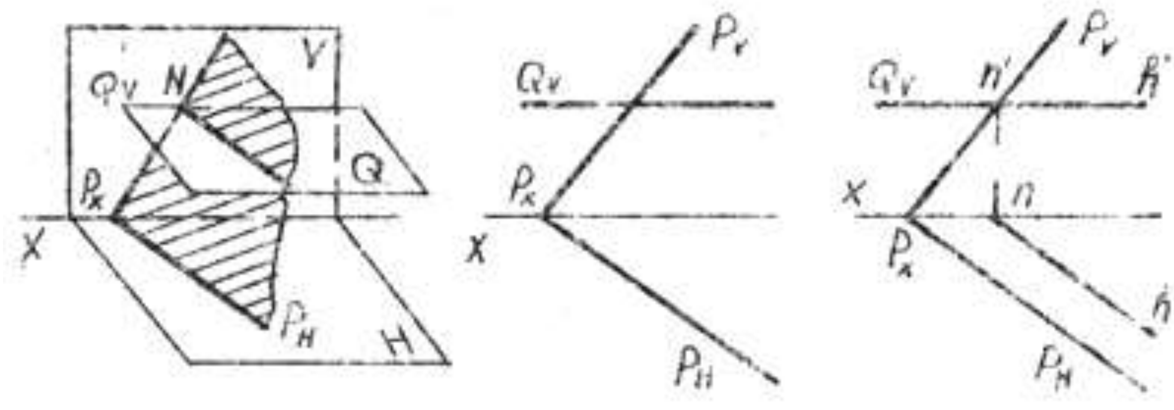
Tekizlikleriň biratly yzlary çyzygynyň çäginde kesişýärler.

Mesele. P we **Q** tekizliklere degişli bolan umumy **M** we **N** iki nokat boýunça **MN** kesişme çyzygyny tapmaklyga syrygýar. Biratly yzlaryň kesişme nokatlary kesişme çyzygyň gözlenýän umumy nokatlarydyrlar. 71-nji suratda giňişlikdäki aýdyň çyzgyda we epýurda tekizlikleriň kesişme çyzygynyň **M** we **N** iki umumy nokady tapylypdyr. **MN** /**mn,** $\mathbf{m^1n^1}$/ göni çyzyk **P**/$\mathbf{P_H}$, $\mathbf{P_V}$/ **we Q** /$\mathbf{Q_H}$, $\mathbf{Q_V}$/ tekizlikleriň kesişme çyzygydyr, ýagny **M** we **N** nokatlar **P** we **Q** tekizlikleriň ikisi üçin hem umumy nokatdyr. Başgaça aýdylanda , **M** we **N** nokatlar kesişme çyzygyň yzlarydyr. $\mathbf{MN = P \cap Q}$

Ikinji hal. Biri proýeksiýalar tekizligine parallel bolan **Q** – dereje tekizligi, ikinjisi **P** umumy halda yzlary bilen berlen iki tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmak /72-nji surat/.

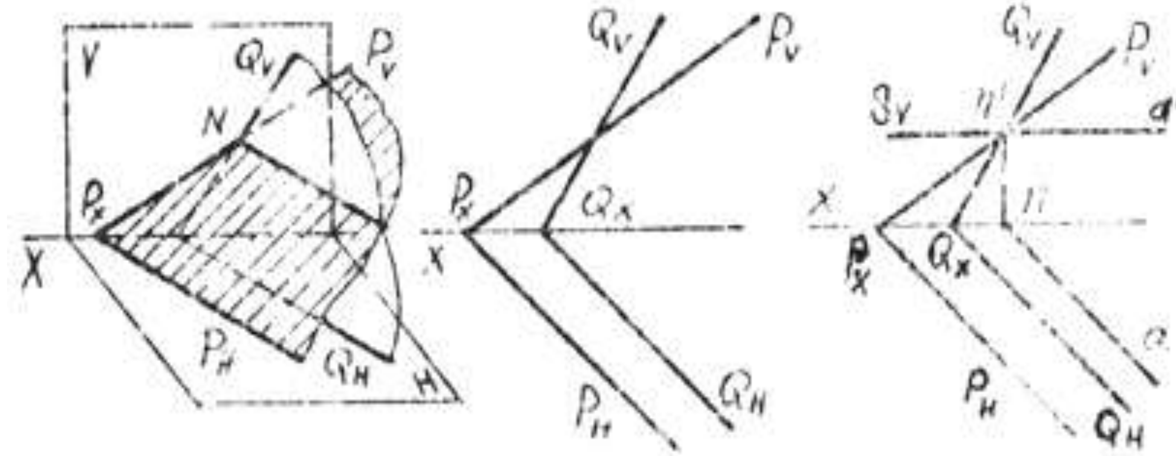
Umumy haldaky **P** tekizlik, gorizontal **Q** tekizligi bilen kesişende olaryň kesişme çyzygy iki tekizlik üçin hem umumy gorizontaldyr, ýagny **Q** we **H** parallel iki tekizlik üçünji **P** tekizlik bilen parallel göni çyzyklar arkaly kesişýärler /72-nji surat/. **Ýagny, nh //** $\mathbf{P_H}$.

Bu ýagdaýda iki tekizlik üçin bir umumy **N** nokat bellidir. Kesişme çyzygyň ugry-da belli, ol çyzyk $\mathbf{P_H}$ yza parallel bolan **Nh** umumy gorizontaldyr – **Nh II** $\mathbf{P_H}$.



72-nji surat

<u>Üçünji hal</u>. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birinde /mysal üçin,**H** tekizliginde/ yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmak /73-nji surat/.



73-nji surat

Eger tekizlikleriň yzlarynyň bir jübti parallel göni çyzyklar bolsa, onda tekizlikleriň kesişme çyzygy şol yzlara parallel bolar. Diýmek, tekizlikler özleriniň esasy çyzyklary (gorizontaly ýa-da frontaly) boýunça kesişýändirler.

Bu ýagdaýda tekizlikleriň kesişme çyzygy umumy gorizontaldyr, ýagny bu tekizlikleriň gorizontal yzlarynyň umumy nokady ýokdur.

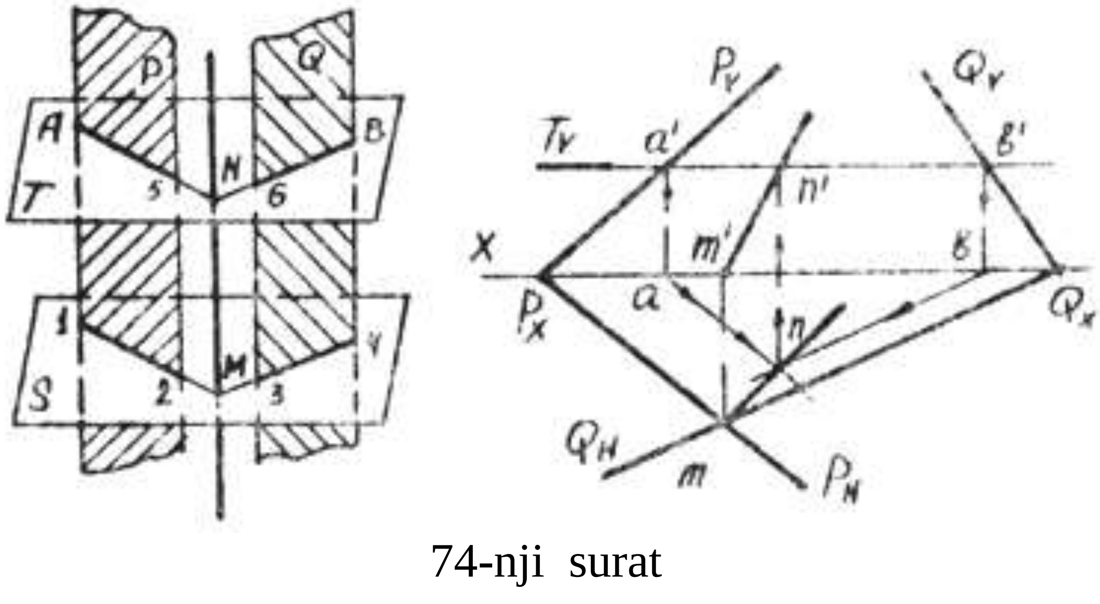
Munuň özi aşakdakydan bellidir. Frontal yzlaryň kesişme nokadynyň üstünden kömekçi **S** gorizontal tekizlik geçirilen , ol **P** we **Q** tekizlikleri olaryň umumy **AN** gorizontaly boýunça keser. **AN** göni çyzyk üç tekizlik üçin hem umumy göni çyzyk bolar. **AN ⊂ P, AN ⊂ Q , AN ⊂ S** we **AN II H** üç tekizlik uçin hem **umumy gorizontaldyr**.

AN II P_H, an II P_H, AN II Q_H, an II Q_H

Eger frontal yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikler kesişýän bolsalar, onda **umumy frontal** olaryň kesişme çyzygy bolar.

Dördünji hal. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birinde /çyzgynyň mümkinçiliginde / bir jübüt yzlary kesişmeýän umumy ýagdaýdaky berlen iki tekizligiň umumy kesişme çyzygyny gurmak /74-nji surat/.

Diňe gorizontal yzlary kesişýän umumy haldaky **P** we **Q** tekizlikler üçin düzülen meseläni şeýle çözmek bolar. Gorizontal yzlaryň kesişýänligi netijesinde gözlenýän göni çyzygyň nokatlarynyň biri bolan M tapylypdyr. Kesişme çyzygyň ikinji **N** umumy nokadyny tapmak üçin **P** we **Q** berlen tekizlikleri gorizontallar boýunça kesýän kömekçi **T** gorizontal tekizlik geçirilýär /ikinji hala seret/.

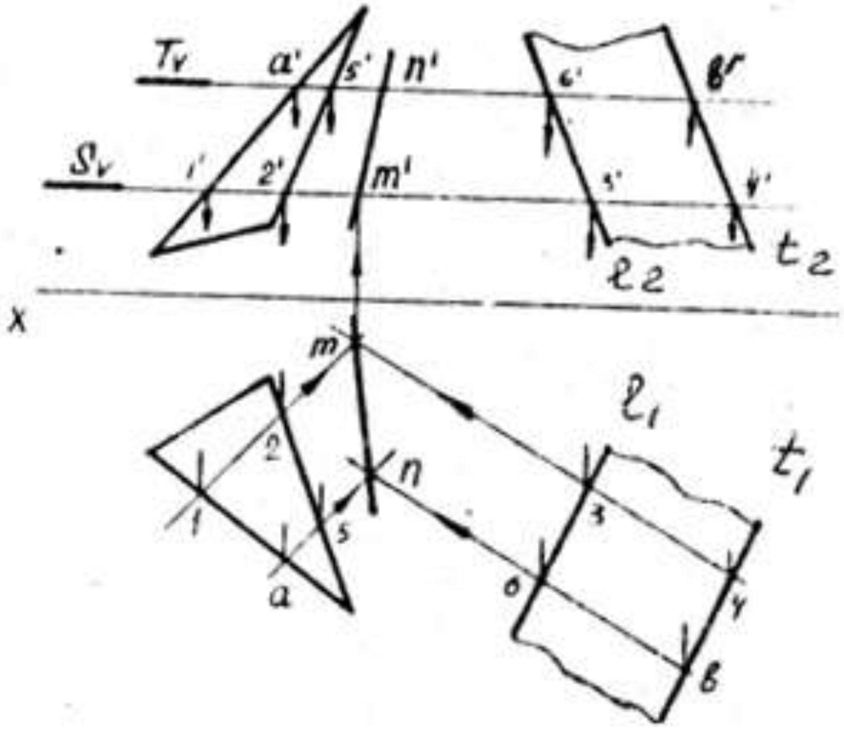


74-nji surat

Kömekçi **T** gorizontal tekizlik bilen **P** we **Q** tekizlikleriň aýratynlykda kesişme çyzyklaryny **AN** we **BN** göni çyzyklary kesgitleýäris /ýagny **P_xM|| AN, Q_x M|| BN/** we olaryň kesişýän **N** nokadyny tapýarys. Bu **N** nokat **P,Q** we **T** tekizlikleriniň üçüsi üçin hen umumydyr. **N (n,n^1)** nokat berilen tekizlikler üçin umumy bolan ikinji nokatdyr. Bu **N** nokat **M** nokat bilen bilelikde berilen iki tekizligiň MN **/mn,m^{1}n^1/** kesişme çyzygyny kesgitleýär. **N$\subset$ P, N $\subset$ Q, N $\subset$ T, M $\subset$ P, M$\subset$ Q**

Eger yzlaryň ikinji jübti hem çyzgynyň çäginde kesişmeýän bolsalar, onda ýenede bir kömekçi /S/ tekizligiň üsti bilen ikinji umumy nokady tapmak bolar.

Bäşinji hal. Yzlary bilen berilmedik umumy haldaky iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmagyň umumy ýagdaýyna garap geçeliň.



75-nji surat

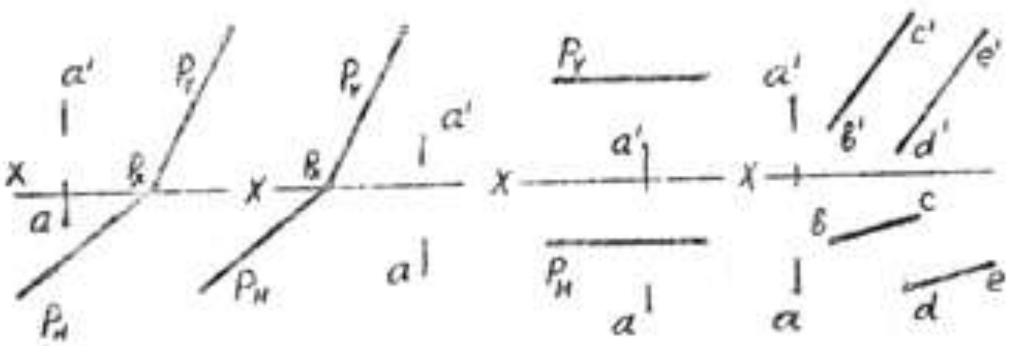
P (ΔABC) $\cap$ Q (l II t) = MN

Goý, tekizlikleriň biri **P** kesişýän iki göni çyzyk bilen, beýlekisi **Q** parallel iki göni çyzyk bilen berilipdir diýeliň (75-nji sutat). Iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmak üçin kömekçi gorizontal ýa-da frontal, gorizontal proýektirleýji ýa-da frontal proýektirleýji tekizliklerden peýdalanmak bolar. Bu mysalda kömekçi tekizlikler hökmünde gorizontal S we T iki tekizlik alnan. S tekizlik P tekizligi **1-2, 1^1-2^1** göni çyzyklar boyunça, Q tekizligi bolsa **3-4, 3^1-4^1** göni çyzyklar boýunça keser.Bu göni çyzyklaryň frontal proýeksiýalary S_V frontal yz bilen gabat gelerler, gorizontal proýeksiýalaryny bolsa bu çyzyklary gorizontal proýeksiýalar tekizligine proýektirläp taparys. **1 – 2** we **3 – 4** gorizontal proýeksiýalaryñ özara kesişmeleri netijesinde umumy nokatlaryñ biri bolan M nokady alarys. Edil şu usul bilen ikinji N nokady-da taparys. Iki tekizligiñ umumy nokatlarynyñ biratly proýeksiýalaryny birleşdirip, olaryñ kesişme çyzygy bolan MN /**mn, m^1n^1**/ göni çyzygy alarys **Q ∩ P = MN.**

P (AB ∩ BC) ∩ Q (l II t) = MN

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler.

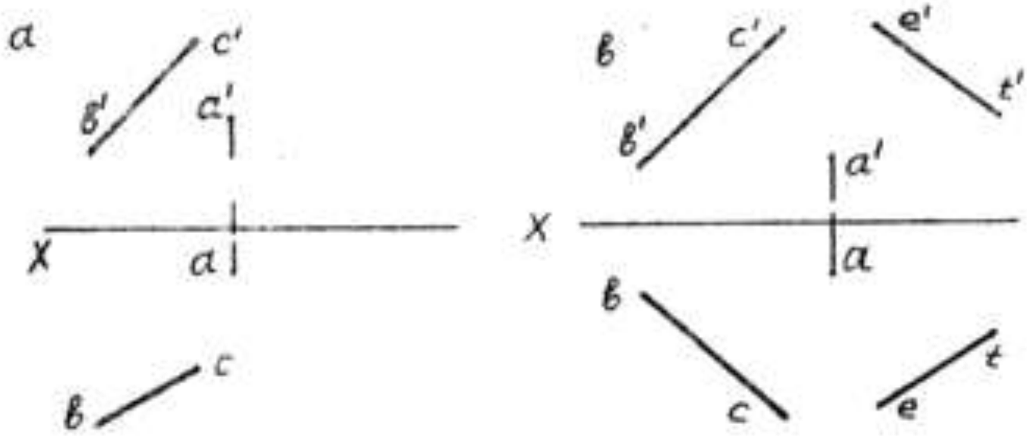
1. Göni çyzygyñ tekizlige parallellik nyşanyny aýdyñ.
2. A /**a, a^1**/ nokadyñ üstünden berlen P tekizlige parallel göni çyzyk geçiriñ /76-njy surat/.



76-njy surat

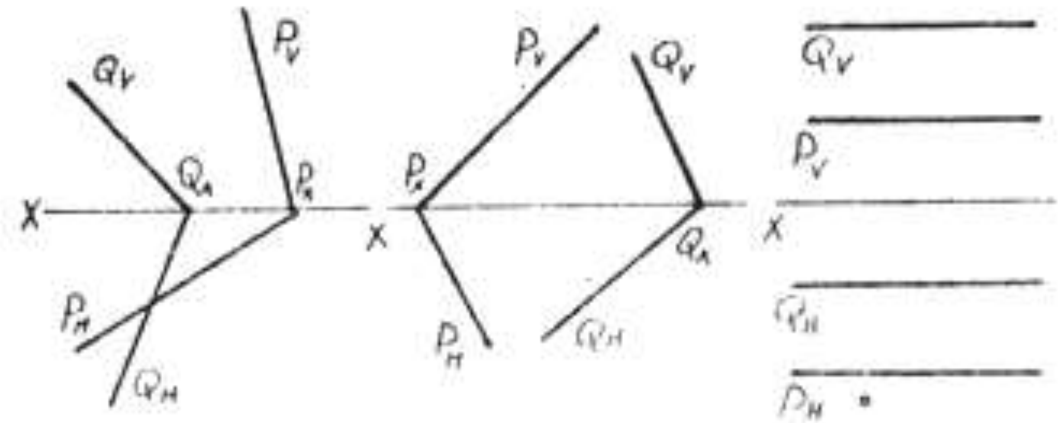
3. A nokadyñ üstünden BC göni çyzyga parallel bolan tekizligi yzlary bilen geçiriñ /77-nji a surat/.
4. A nokadyñ üstünden şol bir wagtda BC we ET göni çyzyklara parallel bolan tekizligi guruñ /77-nji b surat/.
5. Iki tekizligiñ özara parallellik nyşanyny aýdyñ. Parallel tekizlikleriñ biratly yzlary özara nähili ýerleşýärler?
6. Berlen P tekizlige A /**a,a^1**/ nokadyñ üstünden parallel Q tekizlik geçiriň /76-njy surat/.

7. Umumy haldaky kesişýän tekizlikleriň kesişme çyzygyny nähili kesgitlemeli?



77-nji surat

8. P we Q tekizlikleriñ kesişme çyzygyny guruñ /78-nji surat/.
9. Iki tekizligiñ umumy kesişme çyzygyny tapmak üçin, nähili ýagdaýlarda haýsy kömekçi tekizlikler ulanylýär, amatly bolýar.



78-nji surat

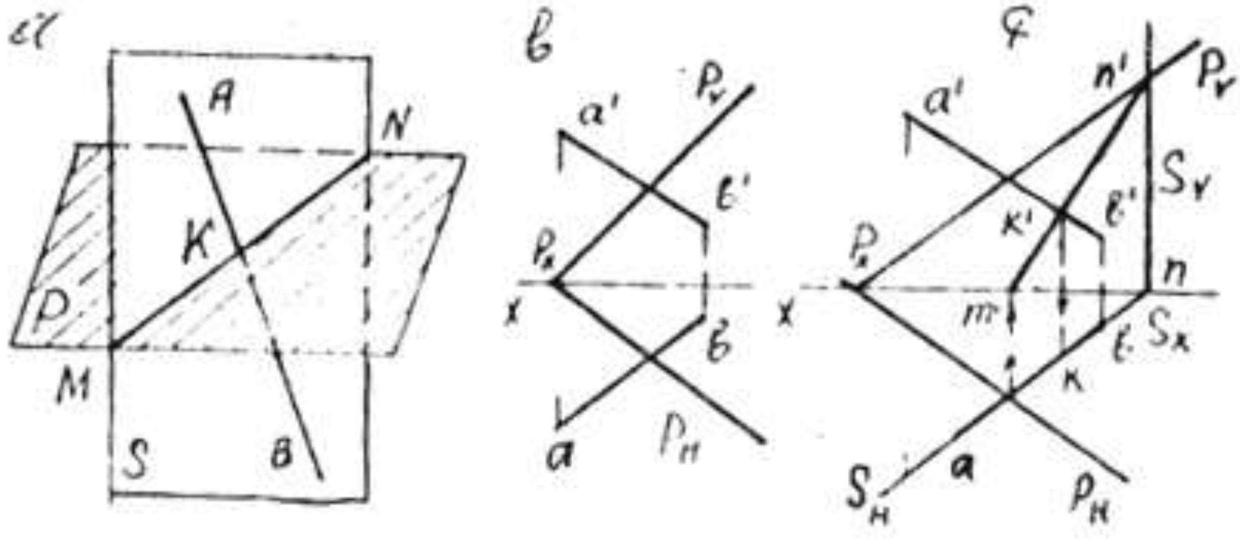
26. Umumy haldaky göni çyzygyñ umumy we hususy haldaky tekizlik bilen kesişmegi.

Eger göni çyzyk tekizligiñ üstünde ýatmaýan bolsa ýa-da oña parallel bolmasa, onda ol göni çyzyk tekizligi nirede bolsa-da bir ýerde kesýändir.

Göni çyzyk tekizlik bilen kesişende onuñ bilen umumy bir nokady bolýar, oña hem göni çyzygyñ tekizlik bilen **k e s i ş m e n o k a d y** diýilýär.

Mesele. AB göni çyzygyñ P tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaly. Göni çyzygyň umumy haldaky tekizlik bilen kesişme

nokadyny gurmak üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli /79-njy surat/.



79-njy surat

1. Berlen AB göni çyzygyñ üstünden kömekçi S gorizontal proýektirleýji tekizligi geçirmeli.
2. P we S tekizlikleriñ umumy kesişýän MN göni çyzygyny gurmaly. MN = P $\cap$ S
3. Berlen AB we gurlan MN göni çyzyklaryñ kesişme nokady bolan K nokadyñ ýagdaýyny anyklamaly.

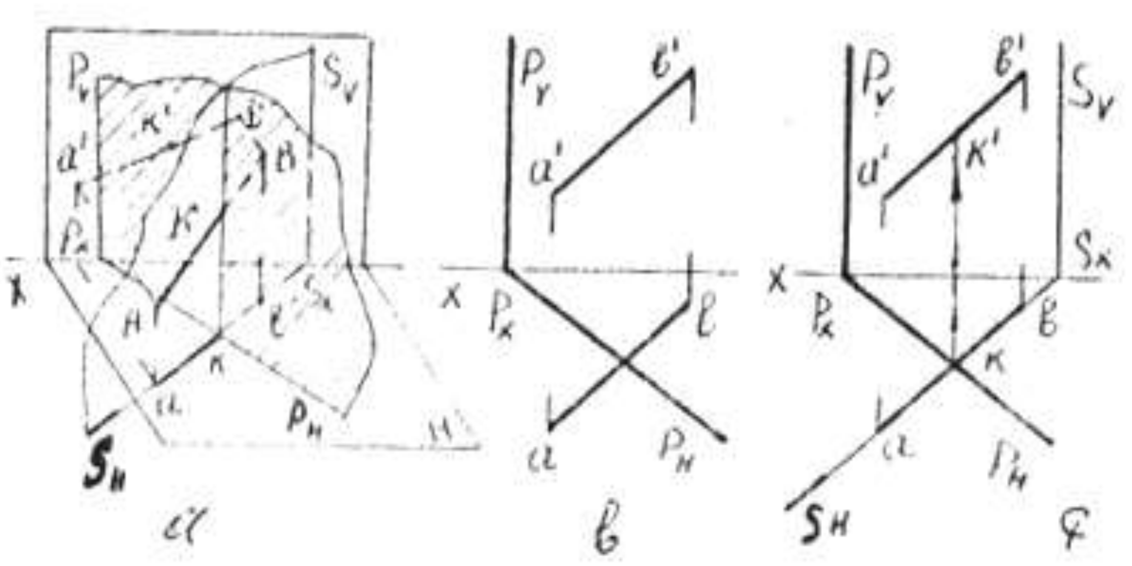
AB $\cap$ MN = K

Tapylan K nokat AB göni çyzyk bilen P tekizligiñ gözlenýän ýeketäk kesişme nokady bolar.AB göni çyzygyñ üstünden geçýän kömekçi tekizlik hökmünde islendik tekizligi almak bolar. Çözülişi ýönekeýlişdirmek üçin proýektirleýji tekizligi almak amatlydyr. Sebäbi şeýle tekizligiñ bir yzy göni çyzygyñ bir proýeksiýasynyñ üstünden geçip, beýleki yzy bolsa OX okuna perpendikulýardyr.

79-njy b, ç suratda yzlary bilen şekillendirilen umumy haldaky P tekizlik bilen, AB göni çyzygyñ kesişme nokadynyñ tapylyşyna degişli mesele berlipdir. Şu ýagdaýda göni çyzygyñ üstünden gorizontal proýektirleýji S tekizlik geçirilipdir. Şu geçirilen kömekçi S tekizligiñ S_H gorizontal yzy berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ üstünden geçýändir. Şondan soñky çözülişi ýokarda görkezilen **shema** boýunça alnyp barylýar.

Göni çyzyk bilen umumy haldaky tekizligiñ kesişme nokadyny tapmagyñ görkezilen şu usuly tekizlikleriñ berlişiniñ beýleki usullary üçin hem peýdalanylyp bilner.

Gorizontal proýektirleýji P tekizlik umumy haldaky AB göni çyzygyñ kesişýän halyna seredeliñ /80-nji surat/.



80-nji surat

Ilki bilen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ tekizligiñ P_H gorizontal yzy bilen kesişýän nokadynyñ k gorizontal proýeksiýasy tapylýar we şol esasda baglanyşyk çyzgynyñ kömegi bilen gözlenýän nokadyñ k^1 frontal proýeksiýasy gurular.

27. Göni çyzygyñ tekiz figura bilen kesişmegi.

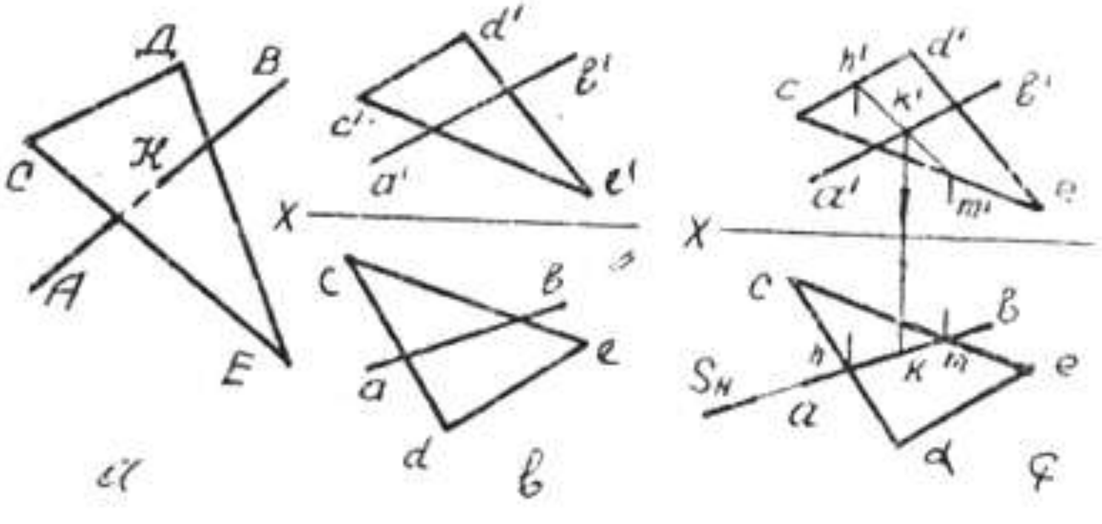
Göni çyzygyñ tekiz figura – tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaga degişli meseläniñ çözüliş usuly göni çyzygyñ yzlary bilen berlen tekizlik bilen kesişýän nokadyny tapmaga degişli meseläniñ çözüliş usulyndan tapawutlanmaýar. Munuñ özi diñe daş görnüşi boýunça tapawutlydyr.

Mesele. Berlen CDE üçburçlugyñ tekizligi bilen umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygyñ kesişme nokadyny tapmaly. /81-nji surat/. $AB \cap \Delta CDE = K$

Meseläni çözmek üçin berlen AB göni çyzygyñ üstünden kömekçi S gorizontal proýektirleýji tekizlik geçirilendir. CDE üçburçlugyñ tekizligi bilen kömekçi S tekizligiñ kesişme çyzygy üçburçlugyñ DC we EC taraplarynyñ şol tekizlik bilen kesişýän N we M iki nokadynyñ üsti bilen tapylýar. $n^1m^1 \cap a^1b^1 = k^1$

Ilki bilen AB göni çyzygyñ üçburçlugyñ tekizligi bilen kesişme nokadynyñ K^1 frontal proýeksiýasyny, soñra bolsa K gorizontal proýeksiýasyny birleşdiriji çyzygyň kömegi bilen tapýarys .

$k^1k \perp OX$, $AB \cap \Delta CDE = K$.



81-nji surat

28. Epýurda görnüp – görünmezligi anyklamak.

Çyzylan çyzgynyñ añsat okalmagy we düşnükli bolmagy üçin geometriki figuralaryň proýeksiýalarynyñ görünýän ýerlerini bitewi çyzyklar bilen, görünmeýän ýerlerini bolsa aralary kesilen - üzük çyzyklar /ştrihli çyzyk/ bilen şekillendirmeklik kabul edilendir. Käbir halatlarda bolsa görünmeýän çyzyklary asla çyzgyda görkezilmeýär.

Proýeksiýalar tekizligine geçirilen şol bir perpendikulýaryñ üstünde ýatan iki nokadyñ haýsysy gözegçilik edýäniñ gözüne ýakyn bolsa, şol hem görünýän nokat bolar. Gorizontal proýeksiýalar tekizligine görünýän nokady anyklamak üçin gözegçilik edýäniñ gözi şol iki nokadyñ üstünde proýeksiýalar tekizligine geçirilen perpendikulýaryñ üstünde diýilip hasap edilýär.

Şonuñ üçin, bu tekizlikden has uzakda ýerleşen nokat görünýän nokat bolar. Göni çyzygyñ kesimleriniñ görnüp – görünmezligine proýeksiýalarnyñ her biri üçin aýratynlykda kesgitlenýär.

Elementleriñ ol ýa-da beýlekisiniñ görnüp – görünmezligi degişli meseläni figuranyñ diñe bir proýeksiýasyna garap göçmek bilen çözüp bolmaýandygyna, hökmany suratda proýeksiýalaryñ ikisini hem göz öñünde tutmalydygyny ýatda saklamak gerek.

Göni çyzygyñ görnüp – görünmezligine degişli mesele mydama nokatlaryñ görnüp – görünmezligine syrygýar.

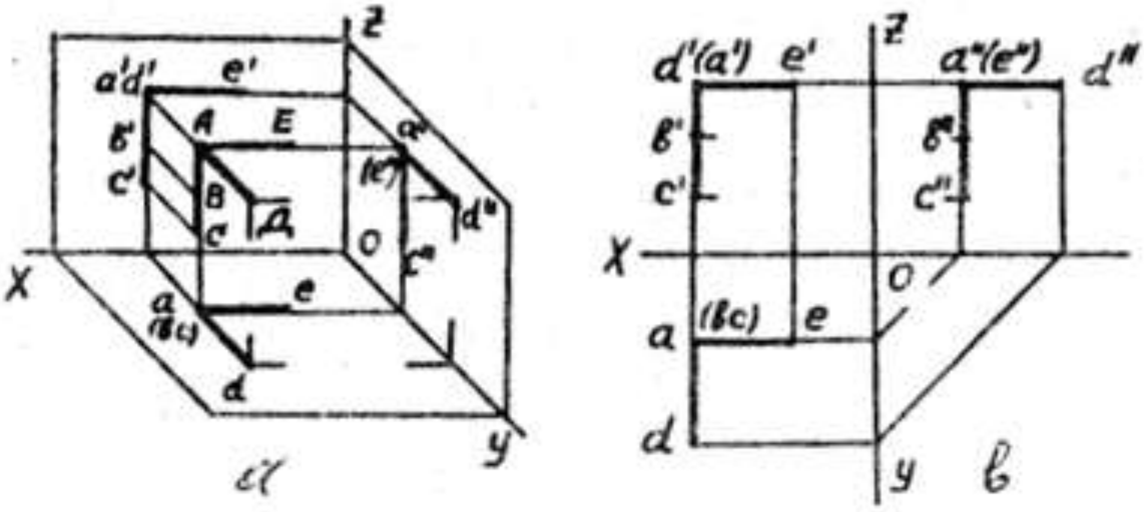
Eger nokatlaryñ birnäçesi edil şol bir proýektirleýji çyzygyň üstünde ýatan bolsa, onda olaryñ diñe biri görünýändir:

1. H – gorizontal şekiller tekizligine görä /82-nji a, b surat/, görünýän A nokatdyr, B we C nokatlar görünmeýärler, ýagny A nokat olaryñ öñünde durandyr.

2. V - frontal şekiller tekizligine görä, D nokat görünýändir, A nokat bolsa görünmeýär, sebäbi D nokat onuñ öñünde dur.

3. W – gapdal - profil şekiller tekizligine görä bolsa, A nokat görünýär, E nokat bolsa görünmeýär.

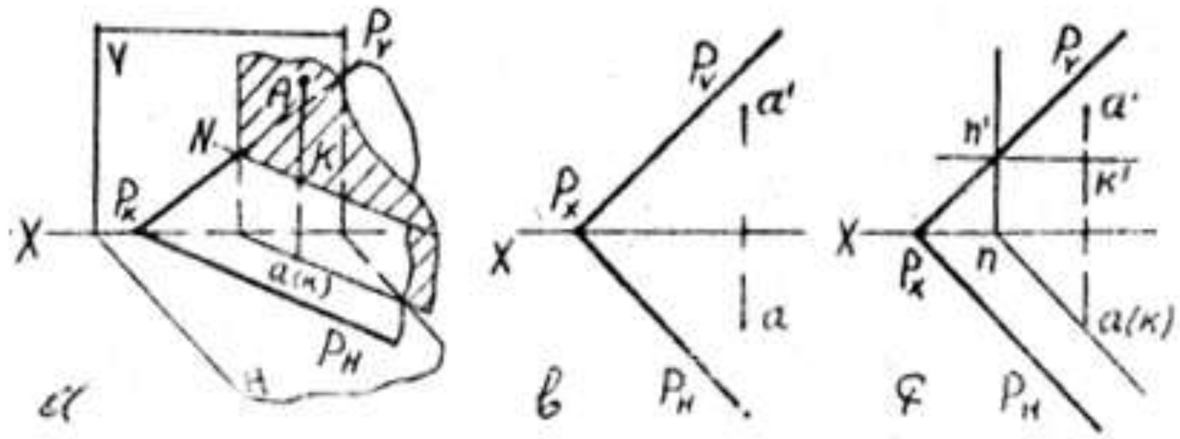
Nokatlaryñ görnüp – görünmeýänligini anyklamak üçin iki atanak ýatan göni çyzyklaryñ mysalyndan bäsleşýän nokatlardan peýdalanmak amatly bolar.



82-nji surat

1 – nji mesele. P tekizlige görä, A nokat görünýärmi, ýa-da bu tekizlik onuñ öñünu ýapýarmy? /83-nji surat/.

A nokatdyñ üstünden geçýän H tekizligine perpendikulýar proýektirleýji göni çyzyk P tekizligi k /k, k^1 / nokatda kesýär, onuñ gorizontal proýeksiýasy **a** proýeksiýanyñ üstüne düşýär. $\mathbf{a^1}$ nokat $\mathbf{k^1}$ nokada garanyñda OX okdan daşda /ýökarda/ ýerleşendir. Şonuñ üçin H gorizontal şekiller tekizligine görä A nokadyñ öñi P tekizlik bilen ýapylan däldir, şonuň üçin A nokat görünýär.



83-nji surat

2 – nji mesele. Dury däl ABC we DEF üçburçluklar bilen berlen tekizlikleriñ kesişme çyzygyny gurmaly we bu üçburçluklaryñ görünýän hem-de görünmeýän ýerlerini kesgitlemeli /84-nji surat/.

Iki tekiz figuranyñ kesişme çyzygy hem iki tekizligiñ kesişme çyzygynyñ tapylyşy ýaly, olara umumy bolan iki nokadyñ üsti bilen tapylýar. Iki üçburçlugyñ kesişme çyzygyny tapmak üçin meseläniñ çözgüdini göni çyzygyñ (üçburçlugyñ) taraplarynyñ biriniñ beýleki üçburçlugyñ tekizligi bilen kesişme nokadyny tapmaklyga syrykdyrmak gerek. Şonuñ üçin meseläniñ çözülşiniñ **yzygiderligini - shemasyny** aşakdaky görnüşde bermek bolar.

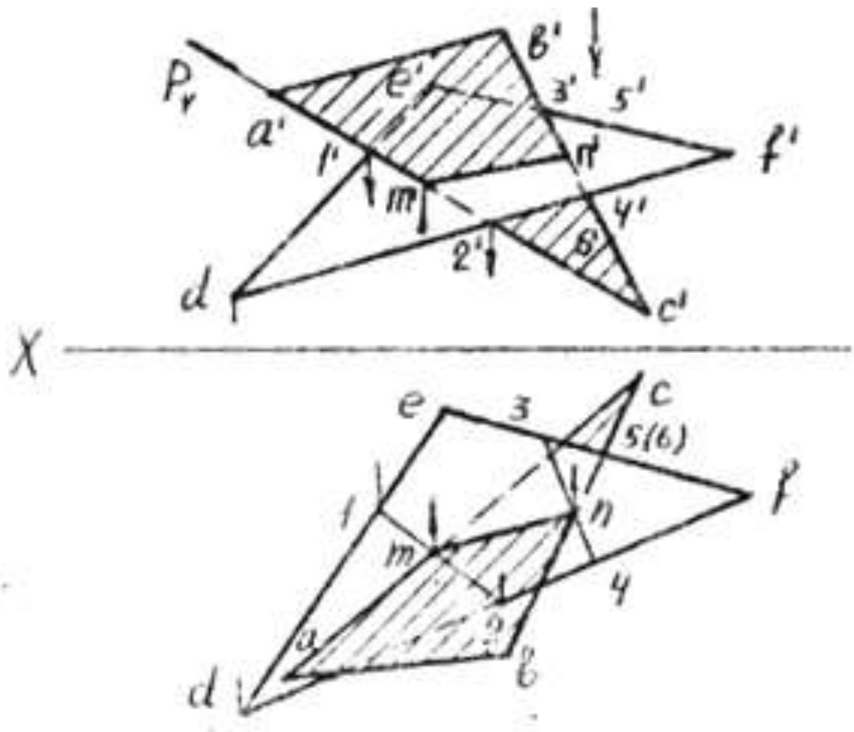
1. ABC üçburçlugyñ AC tarapynyñ DEF üçburçluk bilen kesişýän M nokadyny tapýarys. Munuñ üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli:

a/ AC tarapyñ üstünden kömekçi frontal proýektirleýji P tekizligi göçürmeli. Tekizligiñ frontal yzy AC göni çyzygynyñ frontal proýeksiýanyñ üstünden geçer.

b/ Kömekçi P tekizliginiñ DEF üçburçluk bilen kesişýän **/ 1 – 2, 1^1 – 2^1/** çyzygyny tapmaly.

ç/ **1 – 2** gorizontal proýeksiýanyñ **ac** gorizontal proýeksiýa bilen kesişýän **m** nokadyny tapmaly, **m^1** frontal proýeksiýa adaty usul bilen tapylýar.

2. ABC üçburçlugyñ BC tarapynyñ DEF üçburçluk bilen kesişýän N nokadyny tapýarys, munuñ üçin AC tarap üçin ýerine ýetirilen gurluşlary yzygiderli gaýtalamaly.



84-nji surat

3. M we N nokatlary birleşdirip, iki üçburçlugyñ umumy MN kesişme çyzygyny alarys. **R (Δ ABC) ∩ Q (Δ DEF) = MN**

Çyzgyda üçburçlugyñ görünýän hem-de görünmeýän elementlerini anyklalyñ.

Munuñ üçin iki atanak ýatýan göni çyzykdan peýdalanmak gerek. Atanak ýatýan göni çyzyklar hökmünde üçburçluklaryñ BC we EF taraplaryny alalyñ. Gorizontal proýeksiýadaky **5, 6** nokatlarda görünýän **5** nokat bolar, sebäbi **5** nokatdan H tekizligine çenli aralyk **6** nokada garanyñda daşdyr. Diýmek 5 nokatda EF tarap BC tarapyñ üstüni ýapar.

29. Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.

Giňişlikde göni çyzygyñ tekizlige perpendikulýarlyk nyşany:

Eger /AK/ göni çyzyk tekizlikde ýatan we kesişýän iki /MK we NK/ göni çyzyklara perpendikulýar bolsa, onda ol AK göni çyzyk P tekizligiñ özüne - de perpendikulýardyr /85-nji a surat/.

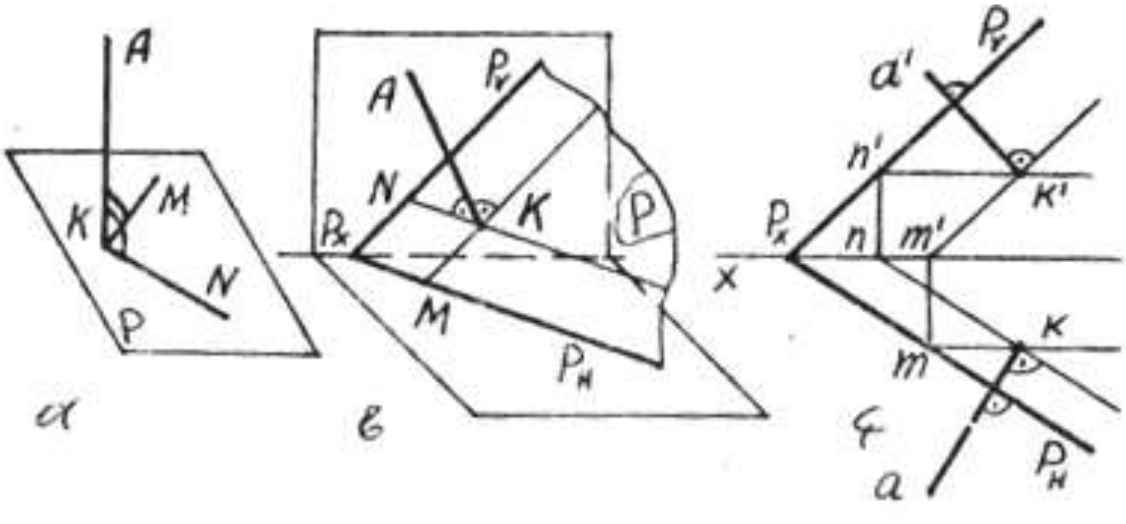
Epýurda tekizlikdäki kesişýän iki göni çyzygyñ deregine berlen tekizligiñ yzlaryny ýa-da şol tekizligiñ gorizontallaryny we frontallaryny almak amatlydyr.

85-nji b surat **P t**ekizlige perpendikulýar bolan **AK** göni çyzyk görkezilendir. Goý, bu göni çyzyk tekizligi **K** nokatda kesýar diýeliñ.

K nokadyñ üstünden **NK** gorizontal we MK frontal geçireliñ.

Şonda göniburçy proýektirlemek baradaky teoremanyñ esasynda

nk ⊥ ak. $\mathbf{P_H}$ **II nk** bolany üçin **ak ⊥** $\mathbf{P_H}$ /85-nji ç surat/.



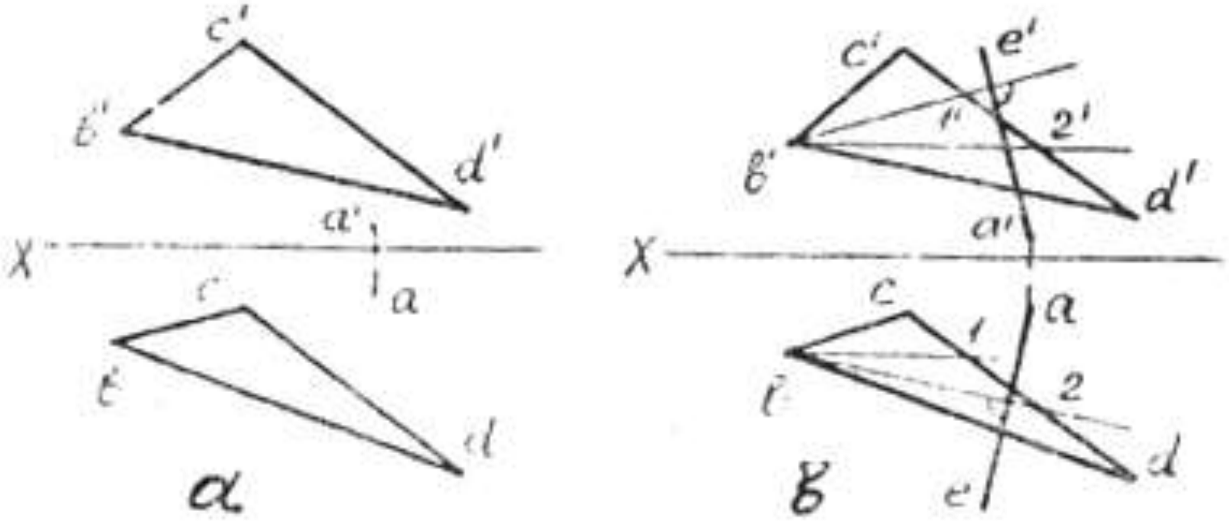
85-nji surat

Edil şonuñ ýaly **a^1k^1⊥ m^1k^1 we a^1k^1⊥ Pv**.

Tersine, ýagny eger göni çyzygyñ proýeksiýalary tekizligiñ biratly yzlaryna perpendikulýar bolsalar, onda göni çyzyk hem tekizlige perpendikulýardyr.

Haçan-da tekizlik epýurda yzlary bilen berilmedik ýagdaýda, olaryñ yzlaryny gyrmak hökmanam däldir, sebäbi 85-nji b, ç suratdan görnüşi ýaly, tekizlige perpendikulýar **AK** göni çyzygyñ gorizontal proýeksiýasy tekizligiñ gorizontal yzyna ýa-da islendik gorizontalyna perpendikulýardyr. **(ak ⊥ P_H ýa-da ak ⊥ nk),** hem-de frontal proýeksiýasy **$a^1k^1 \perp$ Pv** ýa-da **$a^1k^1 \perp m^1k^1$** . Şu çyzgydan görnüşi ýaly, tekizligiñ nähili berlendigine garamazdan, berlen tekizligiñ esasy çyzyklary gorizontaly ýa-da frontaly belli bolsa, onda şol tekizlige perpendikulýar geçirmek bolar.

Eger tekizlik yzlary bilen berilmedik bolsa, onda perpendikulýaryñ proýeksiýalary degişlilikde: gorinzontal proýeksiýasy tekizligiñ gorinzontalynyñ gorinzontal proýeksiýasyna, perpendikulýaryñ frontal proýeksiýasy bolsa tekizligiñ frontalynyñ frontal proýeksiýasyna perpendikulýardyr /86-njy surat/.

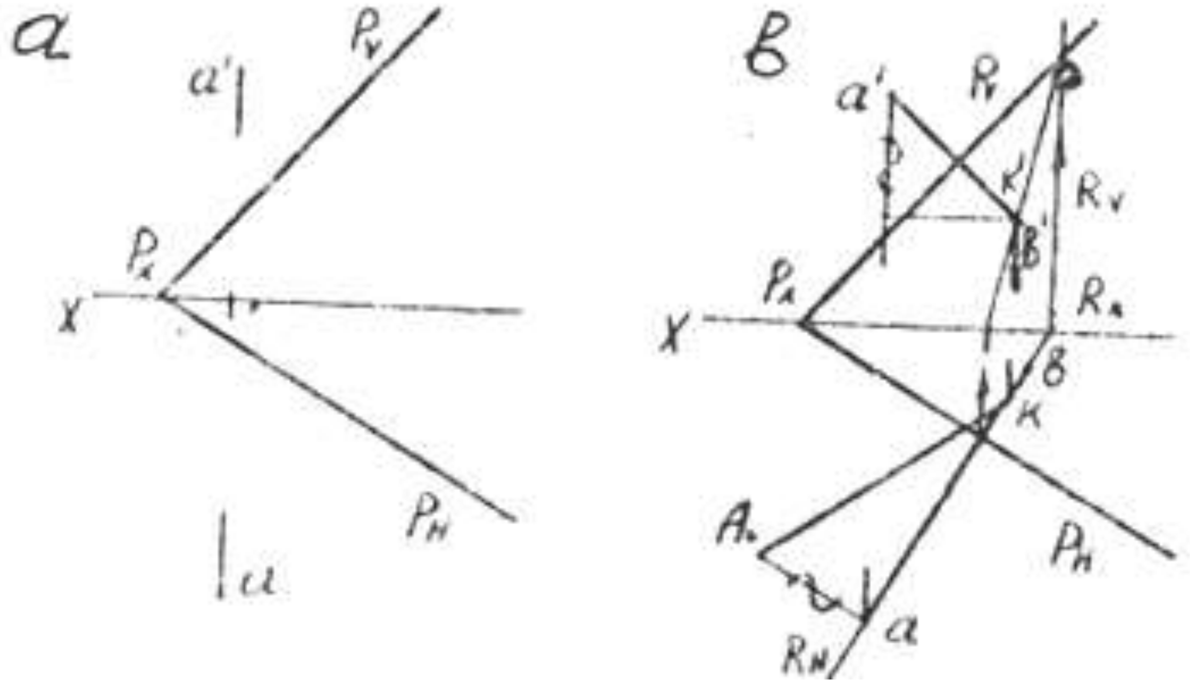


86-njy surat

Mesele. **A** nokadyñ üstünden umumy ýagdaýda **BCD** üçburçluk bilen berlen tekizlige perpendikulýar çyzyk geçirmeli /86-njy surat/.

BCD üçburçlugyñ tekizliginde B2 gorinzontaly we B1 frontaly geçirip, A nokadyñ üstünden **AE / ae⊥b2, $a^1e^1 \perp b^11^1$ /** perpendikulýaryñ gorinzontal we frontal proýeksiýalaryny geçirmek ýeterlikdir.

Mesele. A / a, a¹/ nokatdan umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P /P_H, Pv/** tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /87-nji surat/.



87-nji surat

Nokatdan tekizlige çenli iň ýakyn aralyk berlen nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryñ tekizlik bilen kesişýän nokadyna çenli aralyga deñdir.

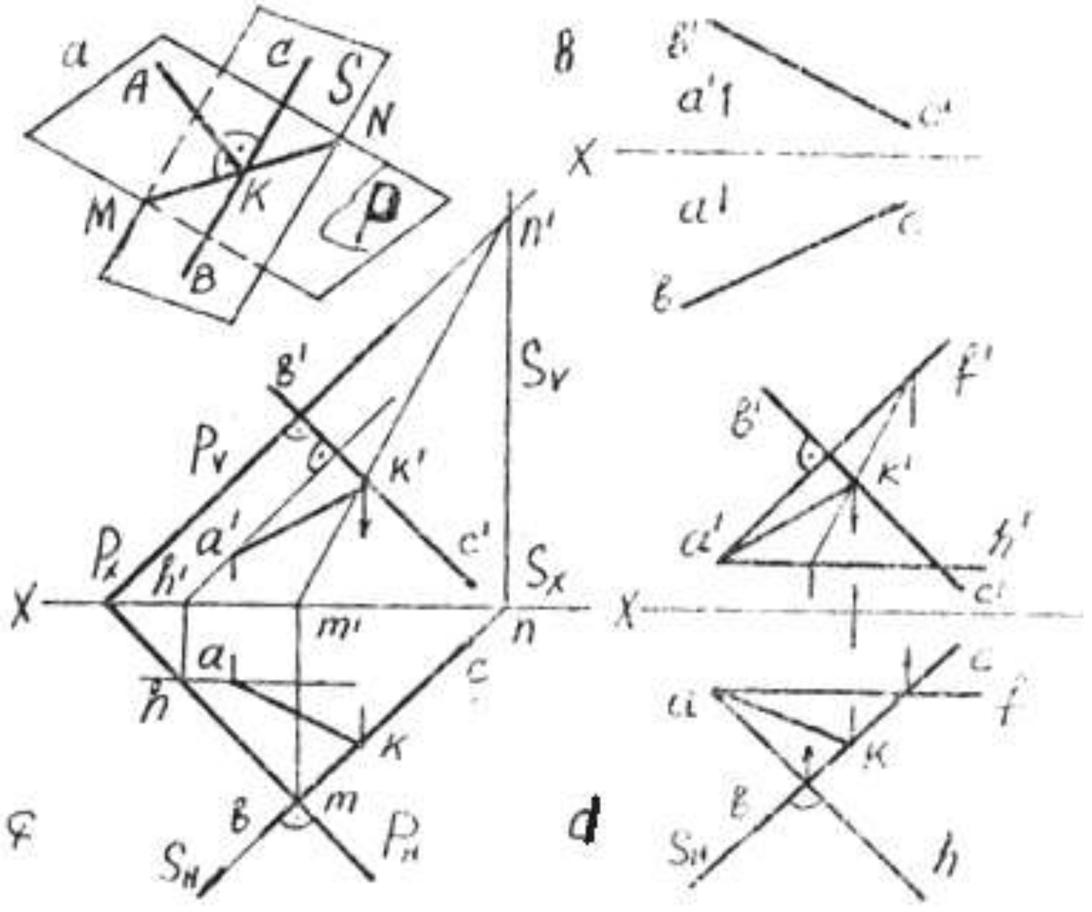
Meseläni çözmegiñ yzygiderligi:

1. Berlen **A** nokatdan **P** tekizlige **AB** perpendikulýar geçirýäris.

   $\mathbf{ab \perp P_H, a^1b^1 \perp P_V}$.
2. AB perpendikulýaryñ **P** tekizlik bilen kesişýän **K /k, k¹/** nokadyny taparys.
3. **KA_0** gözlenýän aralygyñ hakyky uzynlygyny bize belli bolşy ýaly üçburçluklar usuly bilen kesgitleýäris. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

30. Umumy ýagdaýdaky göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk gurmak. (Umumy hal).

Mesele. **A** nokatdan umumy ýagdaýdaky **BC** göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirmeli /88-nji a,b,ç surat/.



88-nji surat

Meseläniñ çözülişiniñ **yzygiderligi - shemasy** aşakdaky ýaly bolup biler:

1. **A** nokadyñ üstünden **BC** göni çyzyga perpendikulýar bolan **P** tekizligi geçireliñ. Şonuñ üçin proýeksiýasy $\mathbf{b^1c^1}$ göni çyzyga perpendikulýar / $\mathbf{h^1a^1 \perp b^1c^1}$ / bolan frontaly ulanýarys. P_H gorizontal yz **h** nokadyñ üstünden **bc** gorizontal proýeksiýa perpendikulýar edilip, Pv frontal yz bolsa **Px** nokadyñ üstünden $\mathbf{b^1c^1}$ proýeksiýa perpendikulýar edilip geçirilendir.

2. BC göni çyzygyñ P tekizlik bilen kesişme K nokadyny tapýarys. Şonuñ üçin **BC** göni çyzygyñ üstünden kömekçi **S** tekizligi **H** tekizligine perpendikulýar edip geçirýäris**.** Berlen

P tekizlik bilen, geçiren kömekçi **S** tekizligimiziň umumy kesişme çyzygyny

MN (mn, m^1n^1) gurýarys. Guran MN kesişme çyzygyň **m^1n^1** bilen **b^1c^1** proýeksiýanyñ kesişmeginde **k^1** nokady alarys.

Tapan **k^1** nokadyň **k** – gorizontal şekilini adaty usul bilen tapylandyr.

2. **A** we **K** nokatlary göni çyzyk arkaly birleşdirýäris. **A** we **K** nokatlar P tekizliginde ýatýarlar, şonuñ üçin **AK** göni çyzyk **P** tekizliginde ýatýar. **BC** göni çyzyk **P** tekizlige perpendikulýardyr, diýmek, **AK** we **BC** göni çyzyklar özara perpendikulýardyrlar.
3. **AK ⊥ BC** 88-nji d suratda P tekizligi yzlary bilen gurman, esasy çyzyklary bilen gurup, bu iki çyzgynyñ netijesiniñ birligine göz ýetýäris. **P(Af ∩ Ah).**

31. Perpendikulýar tekizlikler.

Giňişlikdäki tekizlikleriñ perpendikulýarlyk nyşany:

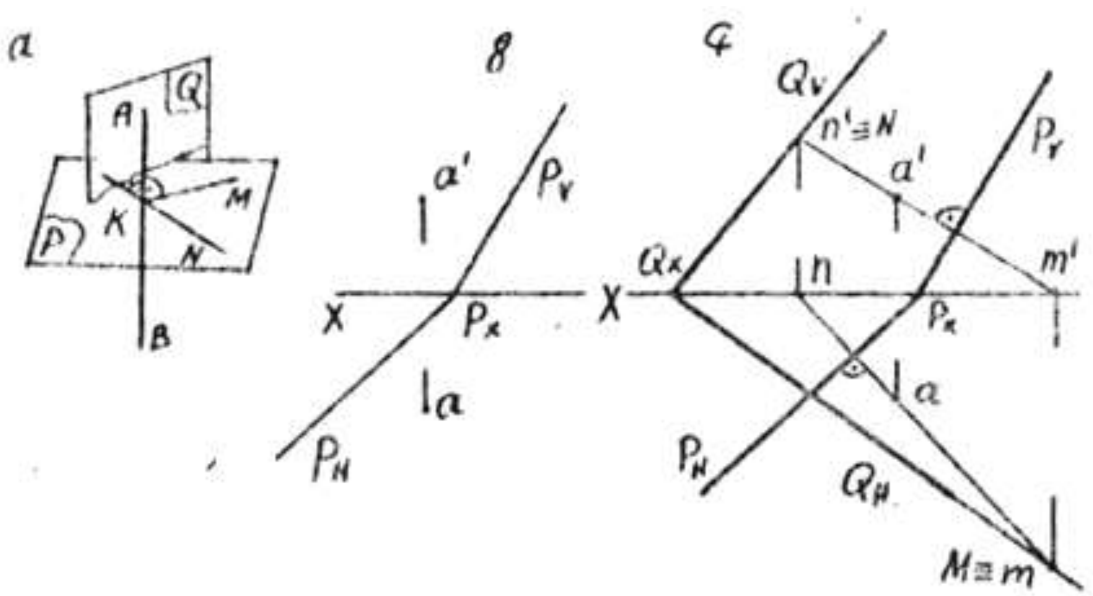
Eger iki tekizligiñ biri beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyñ üstünden geçýän bolsa, onda ol tekizlikler giňişlikde özara perpendikulýardyrlar /89-njy a surat/.

Berlen P tekizlige perpendikulýar bolan **Q** tekizligi gurmaklyk iki ýol bilen amala aşyrlyp bilner:

1. **Q** tekizlik **P** tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyñ üstünden geçirilýär.
2. **Q** tekizlik **P** tekizligiñ üstünde ýatan göni çyzyga perpendikulýar edilip geçirilýär.

Perpendikulýar tekizliklere degişli birnäçe meseläniñ işlenilişine garap geçeliñ.

1–nji mesele. Berlen **A /a, a^1/** nokadyñ üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P /P_H,Pv/** tekizlige perpendikulýar bolan **Q /Q_H, Qv/** tekizligi yzlary bilen geçirmeli /89-njy a, b surat/.

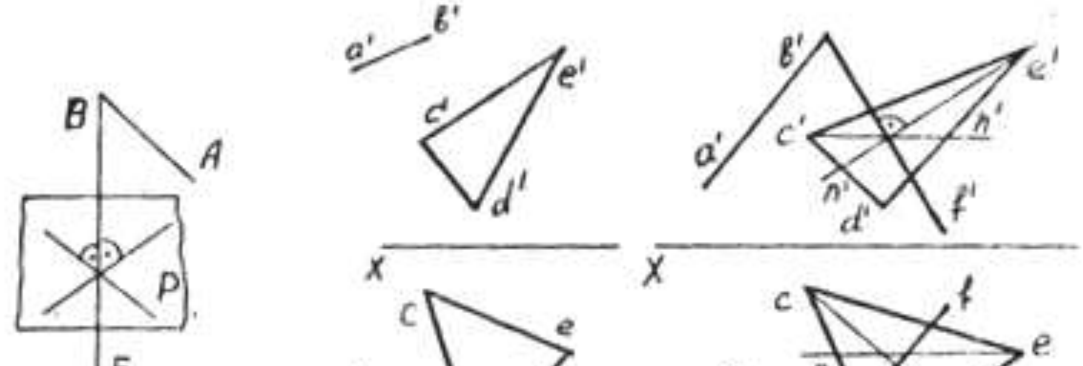


89-njy surat

Epýurda /89-njy ç surat/ özara perpendikulýar tekizlikleriniñ yzygiderli gurluşy görkezilendir. Berlen **A** nokadyñ üstünden **P** tekizlige perpendikulýaryñ proýeksiýalary geçirilen. Bu perpendikulýaryñ gorizontal **M** we frontal **N** yzlaryny taparys.

M gorizontal yzyñ we erkin alnan **Qx** nokadyñ üstünden tekizligiñ $\mathbf{Q_H}$ gorizontal yzyny geçirýäris, tekizligiñ frontal yzlary **N** we **Qx** nokatlar bilen kesgitlenýär.

2–nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen **AB** göni çyzygyñ üstünden **CDE** üçburçlugyñ tekizligine perpendikulýar tekizlik geçirmeli /90-njy a surat/.



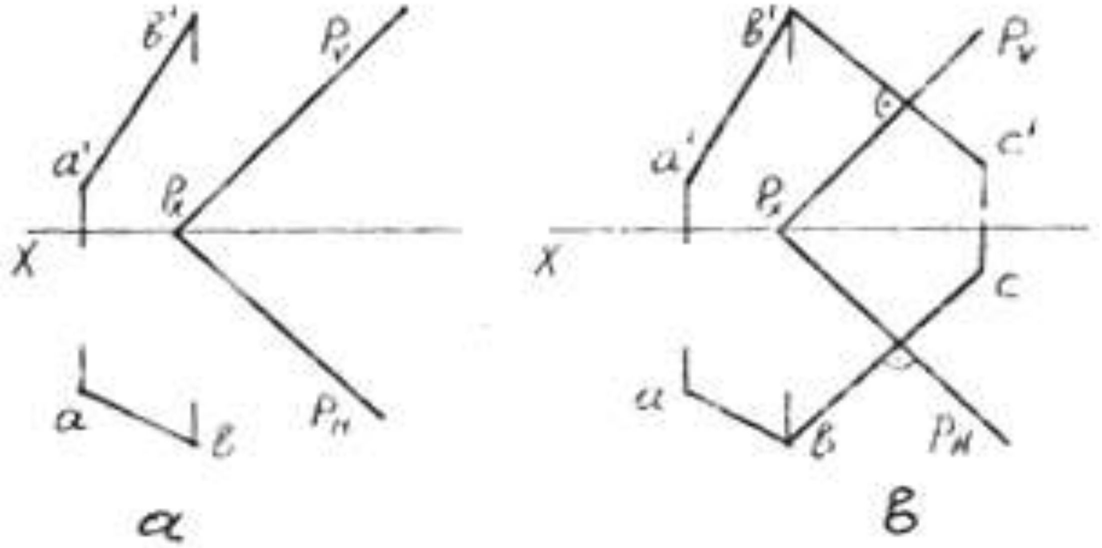
90-njy surat

Bu meseläni çözmek üçin **AB** göni çyzyga degişli B nokadynyñ üstünden **CDE** perpendikulýar geçirmeli. Perpendikulýaryñ $\mathbf{b^1f^1}$ frontal proýeksiýasy frontalyñ $\mathbf{n^1e^1}$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar, perpendikulýaryñ **bf** gorizontal proýeksiýasyna bolsa, gorizontalyñ gorizontal **ch** proýeksiýasyna perpendikulýar edip geçirmeli.

AB we **BF** kesişýän göni çyzyklar **CDE** üçburçlugyñ tekizligine perpendikulýar **Q** tekizligi kesgitleýärler. **Q (AB $\cap$ BF),**

Q $\perp \Delta$ CDE, BF $\perp \Delta$ CDE, BF $\subset$ Q.

3-nji mesele. 91-nji a, b suratda berlen umumy ýagdaýda **AB /ab, $\mathbf{a^1b^1}$**/ göni çyzygyñ üstünden yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky **P /$\mathbf{P_H}$, Pv/** tekizlige perpendikulýar bolan Q tekizligiñ geçirilişi görkezilendir.



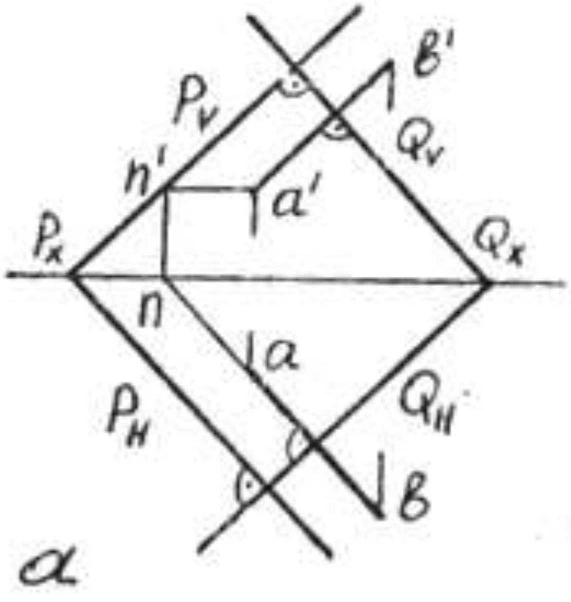
91-nji surat

BC $\perp$ P, Q (AB $\cap$ BC), BC $\subset$ Q, Q $\perp$ P.

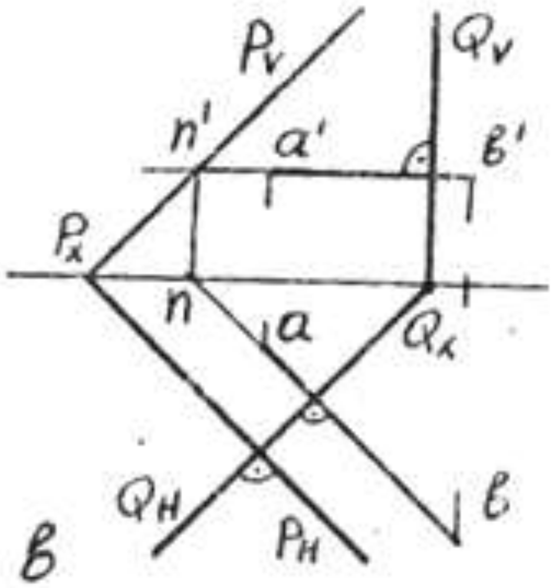
Umumy haldaky iki tekizligiñ biratly yzlarynyñ özara perpendikulýar ýerleşmekleri bu tekizlikleriñ göni burç bilen kesişmeýändikleriniñ nyşanydygyny belläp geçmek gerek.

4-nji mesele. Goý, **P** we **Q** tekizlikler berlen bolsun / /$\mathbf{P_H \perp Q_H}$ we **Pv$\perp$Qv**/. Tekizlikleriñ perpendikulýar däldiklerine göz ýetireliñ /92-nji surat/

Umumy haldaky iki tekizligiñ biratly yzlarynyñ özara perpendikulýar ýerleşmekleri bu tekizlikleriñ göni burç bilen kesişmeýändikleriniñ nyşanydygyny belläp geçmek gerek.



92-nji surat



93-nji surat

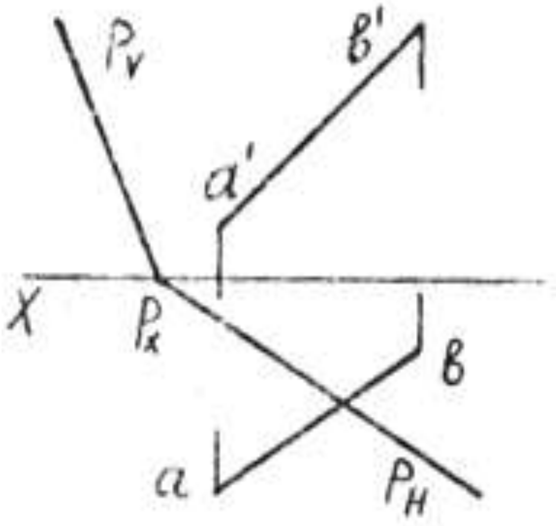
P tekizlikde ýerleşen **A** nokatdan Q tekizlige AB perpendikulýar geçirýäris. **P** we **Q** tekizlikleriñ özara perpendikulýar bolan ýagdaýlarynda **AB** göni çyzygy **P** tekizlige degişli bolmalydyr. Emma hakykatda bu beýle däldir. **AB** göni çyzyk **P** tekizliginde ýatmaýar. Diýmek, **P** tekizlik **Q** tekizlige perpendikulýar däldir.

5-njy mesele. Eger tekizlikleriñ biri **/P/** umumy haldaky beýlekisi bolsa **/Q/** gorizontal proýektirleýji bolsa, şeýle hem gorizontal yzlar özara perpendikulýar bolanlarynda şol tekizlikleriñ perpendikulýardyklaryna göz ýetireliñ /98-nji surat/.

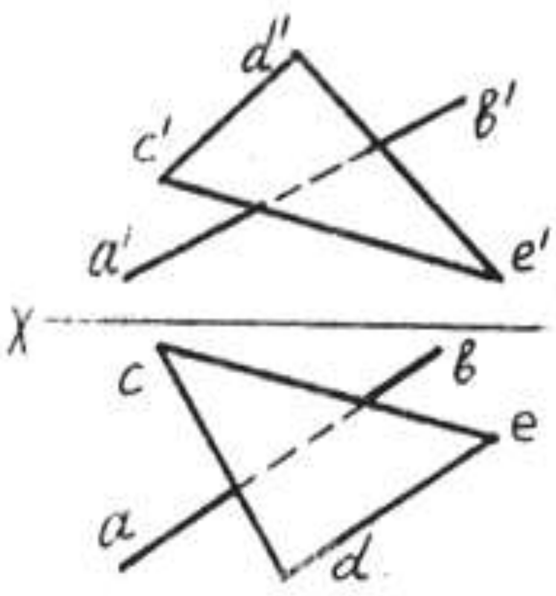
Şunuñ öñ ýanyndaky ýagdaýda görşümiz ýaly, **P** tekizlige degişli **A** nokatdan **Q** tekizlige perpendikulýar inderýäris. **AB** göni çyzyk **P** tekizlige degişlidir we **Q** tekizlige perpendikulýardyr **/Q⊥ AB /**, diýmek, **P⊥Q** sebäbi **ab** $\perp$ $\mathbf{Q_H}$, $\mathbf{a^1b^1} \perp \mathbf{Q_V}$

Öz-özüňi barlamak üçin soraglar we meseleler.

1. Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaga degişli meseleleriň çözülişiniň yzygiderliligi nähili ? Näme üçin göni çyzygyň üstünden kömekçi tekizlik geçirilýär ?
2. Tekiz figura diyilip näme aýdylýar?
3. Üçburçlyk , dörtburçlyk, paralellogram, trapesiýa, islendik köpburçlyk ýaly tekiz figuralary proýektirlemegiň aýratynlyklary nämeden ybarat?
4. Nähili nokatlara **konkurirleşýän /bäsleşýän/** nokatlar diýilýär? Ortogonal çyzgyda geometrik elementleriň haýsynyň görünýändigini kesgitlemekde bu nokatlar nähili peýdalanylýar?
5. **AB/ab, a^1 b^1**/göni çyzygyň **P/P_H Pv**/tekizlik bilen /94-nji surat/ we **СДЕ** üçburçlugyň tekizligi bilen /95-nji surat/ kesişme nokadyny guruň. Tekizlige görä göni çyzygyň görünýän hem-de görünmeýän böleklerini anyklaň.



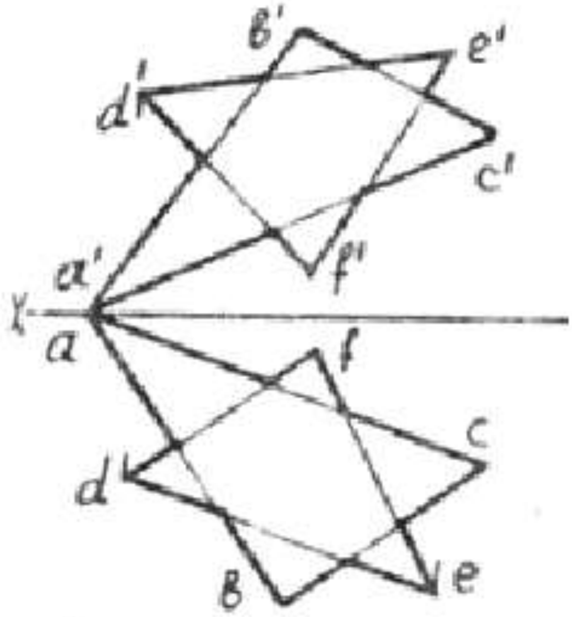
94-nji surat



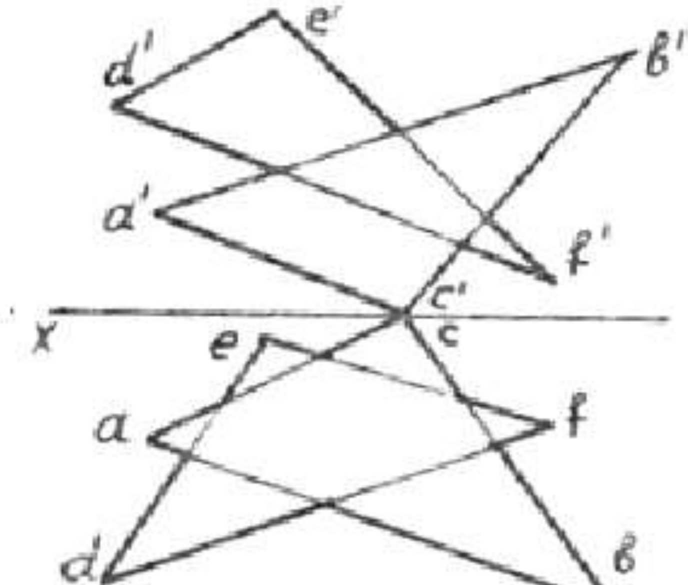
95-nji surat

6. Umumy ýagdaýda berlen iki tekiz figuranyň,ýagny ABC we ДЕF üçburçluklaryň ikesime çyzygyny guruň /96-njy a we b surat/. Olaryň özara görnüp-görünmezligini anyklaň.
7. Ortogonal çyzgyda berlen tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk nähili görkezilýär - çyzylýar?

8. Giňişlikde we epýurada – kompleks çyzgyda iki tekizligiň özara perpendikulýarlyk **nyşanyny-şertini** söz bilen aýdyň – düşündiriň we çyzgysyny ýerine ýetiriň.



a



в

96-njy surat

II - B Ö L Ü M

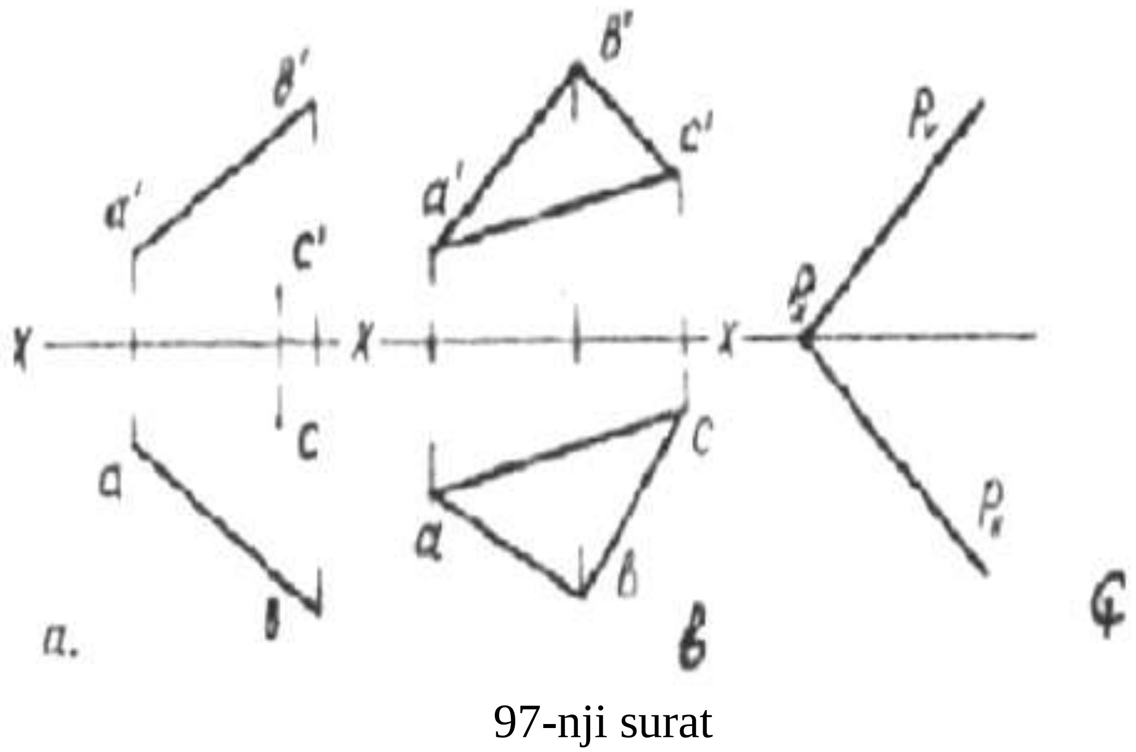
32. PROÝEKSIÝALARY ÖZGERTMEGIŇ USULLARY
32.1 UMUMY MAGLUMATLAR

Çyzmaly geometriýanyň çözýän ähli meselelerini, esasan, iki topara bölmek bolar:

Birinji topara girýänlere **p o z i s i o n** meseleler diýilýär. Olaryň çözgüdi geometrik elementleriň özara ýerleşişlerini kesgitlemekden ybaratdyr.

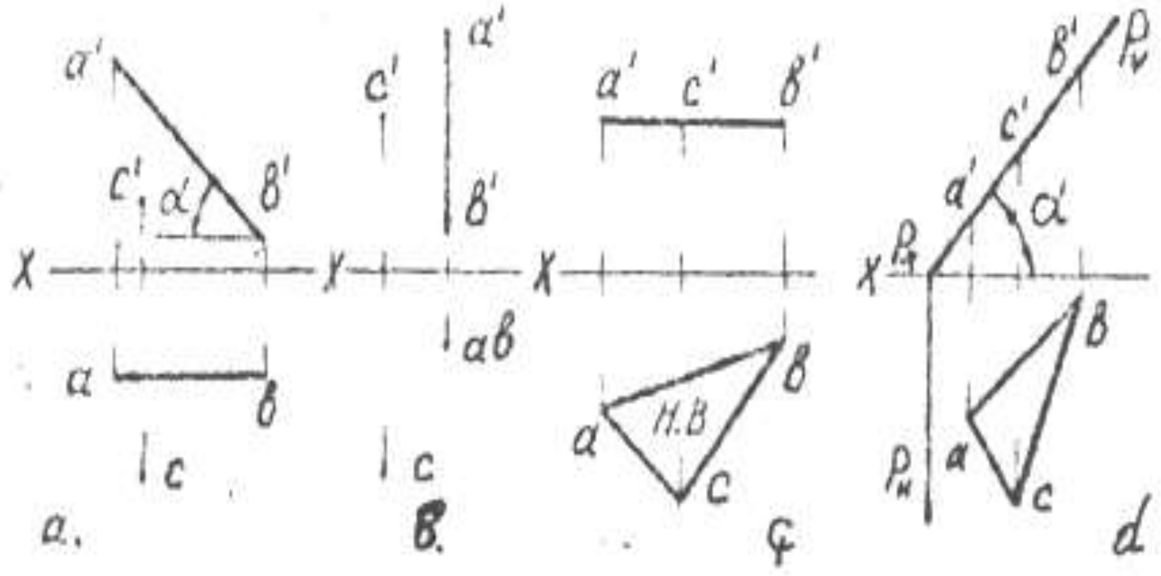
Ikinji topara girýänler **m e t r i k** /ölçeg/ meseleleri bolmak bilen olaryň çözgüdiniň netijesinde ululyk, aralyk /uzaklyk/, burç hem-de meýdan ölçenilýär we alynýar.

Proýeksiýalar tekizliklerine görä **e r k i n - u m u m y ý a g d a ý d a** ýerleşen göni çyzyklaryň, tekizlikleriň we figuralaryň proýeksiýalary anyk /takyk/ meseleler çözmek üçin amatly bolmaýar / 97-nji surat /.



97-nji surat

Göni çyzyklaryň we figuralaryň proýeksiýalar tekizlikleriine görä **hususy** halda ýerleşmegi - berilmegi meseleleriň çözgütlerini ep-esli ýeňilleşdirýär, kä halatlarda bolsa gös-göni çyzgynyň özünden meseläniň jogabyny almaga mümkinçilik berýär /98-nji surat/.



98-nji surat

Mysal üçin, frontal proýeksiýalar tekziligine parallel ***AB*** kesimiň hakyky uzynlygyny kesgitlemek kyn däldir, sebäbi kesimiň frontal proýeksiýasy bize mälim bolşy ýaly, onuň hakyky uzynlygydyr.

/ 98-nji ***a*** surat/ a^1b^1 **= AB.**

Umumy haldaky tekizligiň / 97-ji ***b, ç*** surat / gorizontal proýeksiýalar tekziligine ýapgytlyk burçuny ýörite gurluş geçirmezden kesgitläp bolmaz. Eger şol tekizlik hususy haldaky proýektirleýji tekizlik bolaýsa, onda onuň yzlaryndan haýsy hem bolsa biriniň OX oka ýapgytlygy gös-göni şol berlen hususy haldaky proýektirleýji tekizligiň proýeksiýalar tekziliginiň birine bolan gözlenýän ýapgytlyk burçuny bererdi / 98-nji ***b, d*** surat /.

Şeýleiklde, eger geometrik elementleri proýeksiýalar tekizliklerine görä umumy ýagdaýdan **hususy** ýagdaýa geçriseň, **metrik** meseleleri ýönekeý hem-de çalt we takyk çözmek aňsat boljak eken. Muny esasan **iki usul** bilen amala aşyryp bolýar:

I. Giňişlikde proýeksiýalar tekziliklerniň ýagdaýyny üýtgewsiz diýip hasap etmek bolar. Şeýle ýagdaýda geometrik elementiň proýeksiýasyny üýtgetmeklik ol ýa-da beýleki orun üýtgetmegiň netijesinde, adatça ony bir ýa-da birnäçe okuň töwereginde yzygiderli aýlamagyň netijesinde onuň giňişlikdäki ornuny üýtgetmegiň hasabyna amala aşryrylýar.

2. Giňişlikde geometrik elementleriň orny üýtgewsiz diýlip hasap edilýär. Şeýle ýagdaýda bu elementleriň proýeksiýasyny üýtgemeklik proýeksiýalar tekizlikleriniň biriniň, ikisiniň ýa-da birnäçesiniň giňişlikdäki ornuny **yzygiderli çalşyrmagyň- üýtgetmegiň** hasabyna amala aşyrylýar.

Geometrik elementleriň proýeksiýalaryny üýtgetmegiň ýa-da proýeksiýalar tekizlikleriniň ornuny / ýerini / üýtgetmegiň ýokarda görkezilen iki ýoly esasynda çyzmaly geometriýada proýeksiýalary özgertmegiň esasan şu aşakdaky usullaryna garalyp geçilýär:

1. **Aýlamak** usulyna.

2. **Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak** usulyna.

3. **Utgaşdyrmak** usulyna

Proýeksiýalary özgertmegiň ýokardaky görkezilen esasy usullary bilen bilelikde, kä halatlarda goşmaça gyşyk burçly proýektirlemek usuly hem ulanylýar. Munda proýeksiýalar tekizlikleriniň birine geometrik elementler şol tekizlige perpendikulýar bolmadyk ugur boýunça proýektirlenýär. Bu usul şu gollanmada görkezilen däldir.

32.2 AÝLAMAK USULY

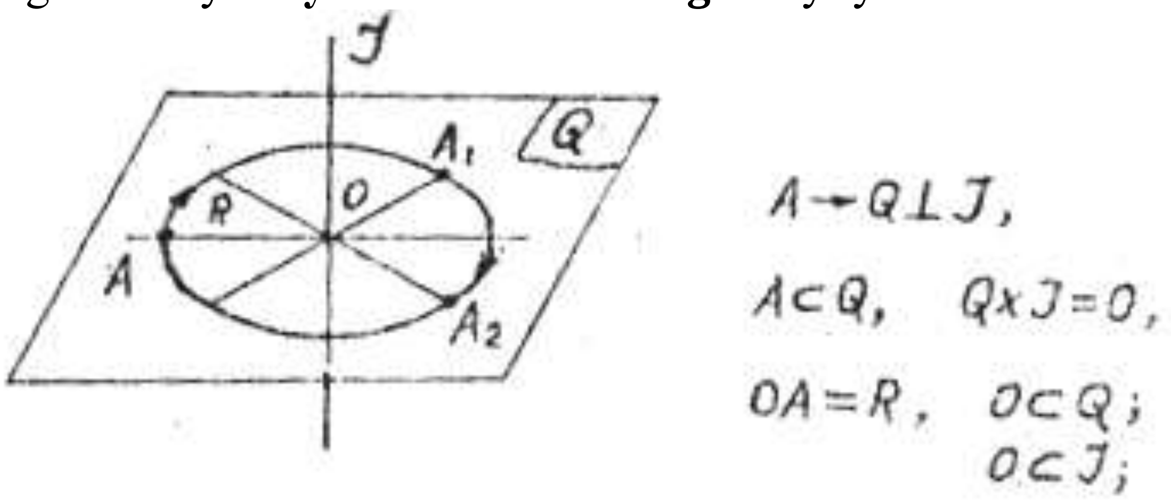
Durmuşda okuň daşynda aýlanýan her bir jisime gabat gelinýär, ýagny welosipediň, awtomobiliň, parawozyň we şuňa meňzeş mehanizmleriň tigirleriniň gorizontal aýlama okuň daşynda, ýa-da başga bir jisimiň wertikal-dik aýlama okuň daşynda aýlanýandygy her birimize durmuşdan bellidir.

Eger şular ýaly geometrik jisimiň üstünde islendik bir nokat alsak, onda şu alnan nokat giňişlikde aýlama okuň daşynda aýlanyp töwerek emele getirýär. Şol emele gelen töweregiň tekizligi aýlama oka perpendikulýardyr.

Aýlamak usuly gozganmaýan tekizliklere görä giňişlikde geometrik predmetiň ýagdaýyny bir ýa-da birnäçe aýlama okuň töwereginde-daşynda islendik burça aýlamagyň netijesinde, bu elementleriň proýeksiýalaryny bize islän ýagdaýymyza çenli üýtgetmäge mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde, aýlamak usulynyň şu aşakdaky esasy ýagdaýlaryny göz öňünde tutmak gerek / 99-nji surat /.

I. Nokatlaryň islendik toplumy /giňişlikdäki **A** nokat / heýsy hem bolsa bir aýlama okuň daşynda aýlananda şol toplumyň her bir nokady / **A** nokat / aýlama ***I*** okuna perpendikulýar ***Q*** tekizlikde öz ornuny üýtgedýär. Şu ***Q*** tekzilige nokadyň **aýlama tekizligi** diýilýär.



99-nji surat

2. Aýlanýan nokatlaryň islendik toplumynyň her bir nokady aýlanma ***Q*** tekziliginde töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär. Şol töweregiň merkezi ***O*** nokat aýlama ***I*** okunyň aýlanma ***Q*** tekizligi bilen kesişýän ýerindedir. Bu alnan ***O*** nokada aýlama nokadyň **merkezi** diýilýär. Şol töweregiň ***R*** radiusy bolsa ***A*** nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýardyr. Oňa **aýlama radiusy** diýilýär.

$$\mathbf{OA = R = OA_1 = OA_2}$$

3. Aýlama okunyň üstünde ýatan hemme nokatlar giňişlikde aýlanma wagtynda öz orunlaryny üýtgetmeýärler.

Çyzmaly geometriýada meseleler işlenende aýlama usulynyň şu aşakdaky görnüşleri praktikada – durmuşda köp gabat gelýär:

1. Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak.

2. Anyklanmadyk okuň daşynda aýlamak – tekiz parallel orun üýtgetmek usuly.

3. Proýeksiýalar tekizligine parallel okuň daşynda aýlamak – esasy çyzyklaryň /gorizontalyň ýa-da frontalyň/, ýagny dereje çyzyklaryň daşynda aýlamak.

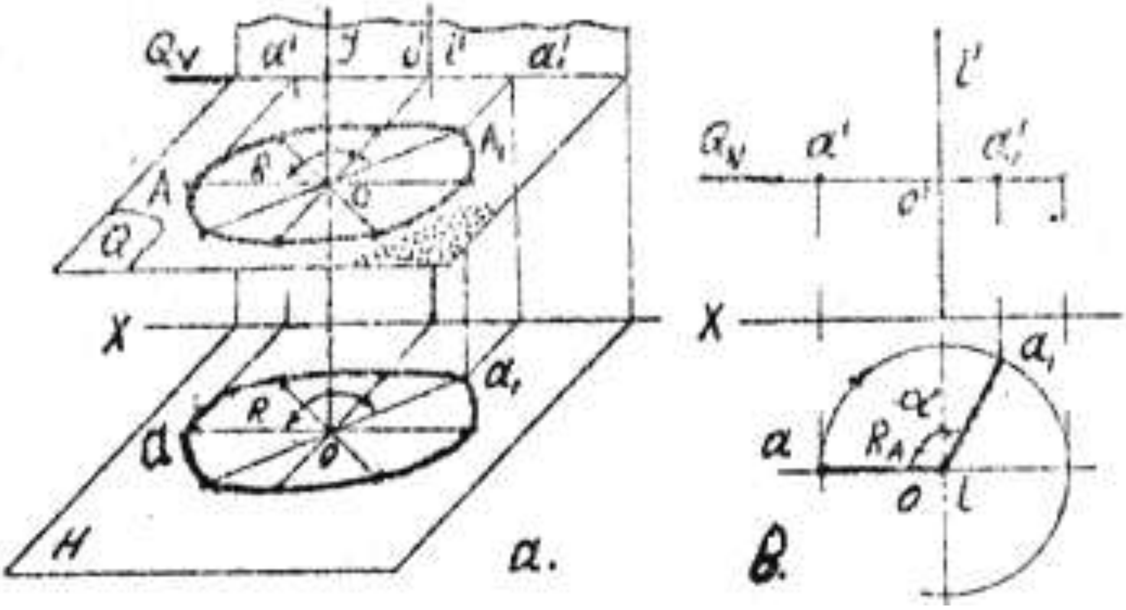
4. Proýeksiýalar tekziliginiň üstünde ýatan okuň, ýagny **tekizligiň yzlarynyň daşynda aýlamak – utgaşdyrmak.**

5. Proýeksiýalar tekizligine garanyňda **erkin ýerleşen – okuň daşynda** aýlamak. Bu aýlamak usuly şu gollanmada görkezilen däldir. Umumy ýagdaýdaky okuň daşynda aýlamak usuly birnäçe hususy meseleleri işlemek üçin, esasanam, nazary mehanikada hem-de mehanizmleriň we maşynlaryň teoriýasy kursunda giňden ulanylýar.

33 . PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINE PERPENDIKULÝAR OKUŇ DAŞYNDA AÝLAMAK

33.1. NOKADY AÝLAMAK

1-nji mesele. ***A*** nokady gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda α burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly. /100-nji surat/.



100-nji surat

Bize belli bolşy ýaly, nokat aýlandyrylýan wagtynda aýlama okuna perpendikulýar ***Q*** tekizligiň üstünde ýatan töwerek boýunça öz ornuny üýtgedýär, şol töweregiň radiusy aýlama radiusyna deňdir.

Nokadyň aýlama radiusyny tapmaklyk aýlandyrylýan nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýaryň kömegi bilen amala aşyrylýar.

Aýlama okunyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulaýrdygyny göz öňünde tutsak, onda ***A*** nokat aýlanýan wagtynda ***H*** tekizligine parallel ***Q*** tekziligiň üstündäki töweregiň dugasy boýunça öz ornuny yzygiderli üýtgedýär, şol töweregiň radiusy hem ***H*** tekizligine paralleldir. Şeýlelikde, aýlanma radiusy ***H*** tekizligine üýtgedilmezden hakyky ululygynda proýektirlenýär, ýagny epýurda biz ***A*** nokadyň gorizontal proýeksiýasyny aýlama okuň gorizontal proýeksiýasy bilen birleşdirip, ***R_A*** aýlama radiusyny taparys.

A nokadyň ***I*** aýlama okuň daşynda aýlanandaky emele getiren töweregi ***V*** şekiller tekizligine şol töweregiň diametrine deň bolan göni çyzyk görnüşinde proýektirlener we ***OX*** oka parallel ýa-da aýlanma okuň ***L^1*** frontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolar. ***W*** şekiller tekizligine şol töwerek ***OX*** oka parallel göni çyzyk bolup proýektirlener.

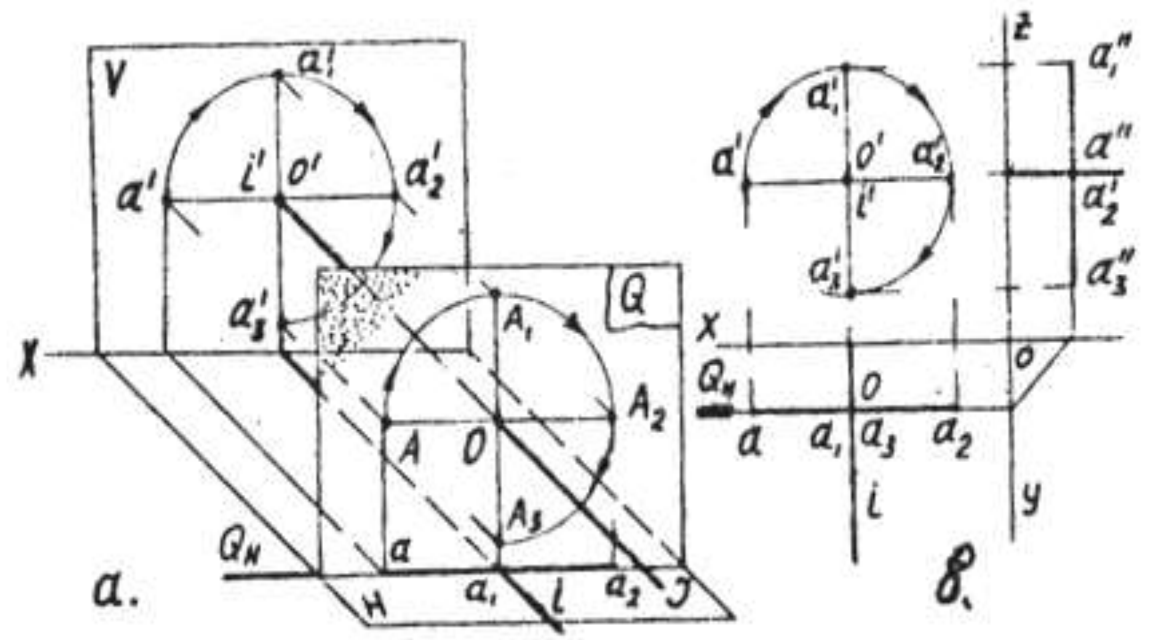
Epýurda ***A*** nokady gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda ***a*** burça aýlamak üçin:

1.Berlen ***a*** burça deň bolan we görkezilen ugur boýunça nokatdan /aýlama okunyň gorizontal proýeksiýasyndan/ radiusy ***$La = R_A$*** deň bolan ***aa_1*** duga geçirýäris.

2. Berlen ***A*** nokadyň ***a^1*** frontal proýeksiýasynyň üstünden ***OX*** proýeksiýalar okuna parallel geçirýäris, ýagny nokadyň frontal proýeksiýasynyň hereket edip geçmeli ýoluny /ugruny/ kesgitleýäris.

3. Alnan täze ***a_1*** gorizontal proýeksiýasynyň üstünden ***OX*** oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk geçirip, ***a^1*** frontal proýeksiýanyň hereket ediş ugry bilen kesişýän täze ýagdaýdaky ***a_1^1*** nokady alarys.

2-nji mesele. A nokady frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda ***a***$=180^0$ burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly /101-nji surat/.



101-nji surat

Bu hili ýagdaýda:

1. **A** nokadyň aýlanandaky emele getiren töweregi ***V*** tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýär.
2. **H** tekizlige töwerek ***OX*** oka parallel göni çyzyk bolup proýektirlenýär.
3. **W** tekizlige töwerek ***OZ*** oka parallel göni çyzyk görnüşinde proýektirlenýär.

Diýmek, nokat proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, bu tekizlikde nokadyň proýeksiýasy aýlanma radiusynyň töwereginiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär, beýleki tekizlikde bolsa nokadyň proýeksiýasy proýeksiýalar okuna parallel göni çyzyk boýunça ýagny aýlanma okuna perpendikulýar çyzyk boýunça öz ornuny üýtgedýär.

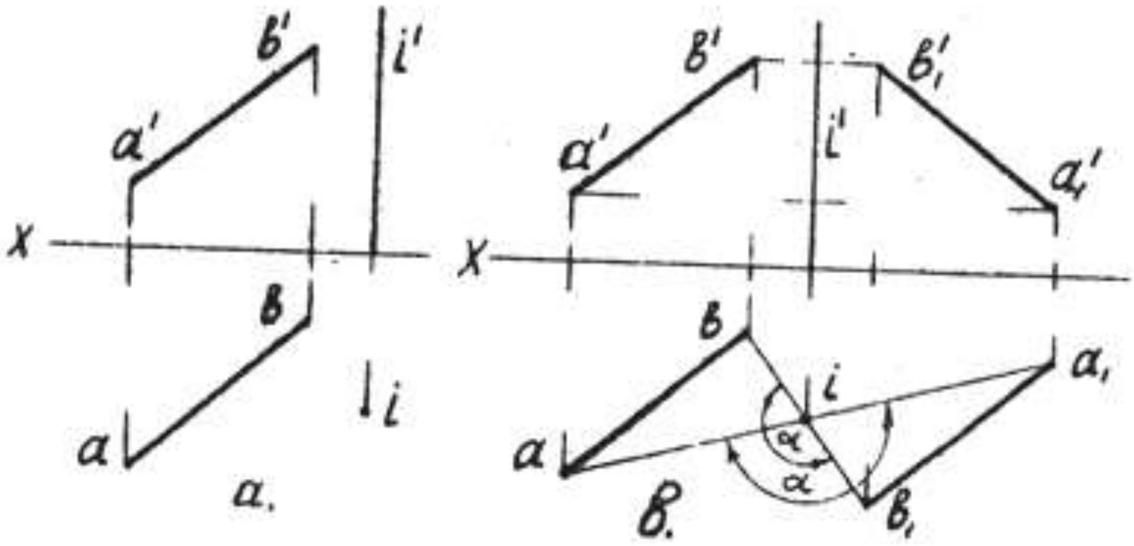
Nokady proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak gorizontal /frontal/ proýektirleýji göni çyzygyň daşynda aýlamaklyk diýmekdir.

Oksuz proýektirlenýän wagtda epýurda proýeksiýalar okuny görkezmegiň geregi – zerurlygy ýok we aýlama okuny hem mydama görkezip durmak hökman däldir.

33.2. GÖNI ÇYZYGY AÝLAMAK

Giňişlikde göni çyzygy berlen okuň daşynda käbir ***a*** burça aýlamak üçin onuň hemme nokatlaryny ýa-da islendik iki nokadyny şol burça aýlamak ýeterlikdir.

I-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky ***AB*** göni çyzygy gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda sagadyň aýlanýan ugrunyň tersine ***a***=180^0 burça aýlamaly. **H** tekzilige ýokardan seredilýär diýip düşünmeli /102-njy surat/.



102-njy surat

AB göni çyzygyň gorizontal ***a*** we ***b*** nokatlaryny degişli radiusly dugalar boýunça şol bir ***a*** burça aýlap, nokatlaryň täze a_1 we b_1 gorizontal proýeksiýasynyň ýagdaýlaryny taparys.

Göni çyzygyň frontal a^1 we b^1 proýeksiýalary bolsa ***OX*** okuna parallel ýa-da aýlama ***I*** okunyň frontal proýeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgederler. Nokadyň täze alnan gorizontal a_1 we b_1 proýeksiýalaryndan birleşdiriji çyzyklar geçirip, nokadyň frontal a_1^1 we b_1^1 proýeksiýalaryny alarys.

Nokatlaryň bir atly proýeksiýalaryny birleşdirip, berlen ***AB*** göni çyzygyň täze ýagdaýyny A_1B_1 göni çyzygyň a_1 b_1 gorizontal we a_1^1 b_1^1 frontal proýeksiýalaryny alarys.

Ýokardaky çyzgydan görnüşi ýaly,

□□***iab*** = □***ia$_1$b$_1$*** (ýagny) ***ia$_1$=ia,*** ***ib$_1$=ib,***□□□□ ***a$_1$ib$_1$=***□***aib***).

Üçburçluklaryň deňliginden: ***a$_1$b$_1$ = ab***.

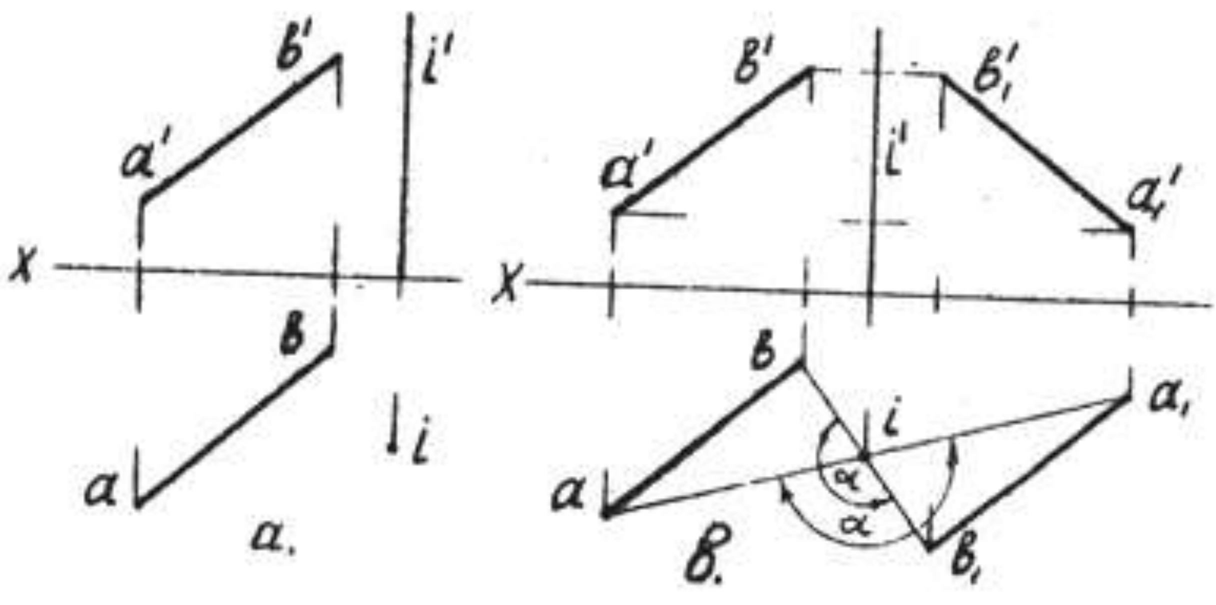
Diýmek, göni çyzyk proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, göni çyzygyň islendik kesiminiň şol proýeksiýalar tekizligine proýeksiýanyň uzynlygy üýtgemeýär, ýagny göni çyzygyň şol proýeksiýalar tekizligine ýapgyt burçy üýtgewsiz galýar. Eger şu aýlamak usuly bilen **AB** göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyny frontal proýeksiýalar tekizligine parallel ýagdaýa çenli aýlap frontal proýeksiýasyny tapsak, onda iki meseläni çözeris. /103-nji surat/.

Birnjiden-ä, **AB** göni çyzygyň täze a_1^1 b^1 frontal proýeksiýasy hakyky uzynlygy bolar. Ýagny, $\mathbf{a^1_1b^1 = AB}$.

Ikinjiden hem, **AB** göni çyzygyň täze $\mathbf{a^1_1b^1}$ frontal proýeksiýasy bilen **OX** okuň arasyndaky emele gelen burç **AB** göni çyzygyň gorizotnal proýeksiýalar tekizligine **ýapgytlyk burçy** bolardy. Bu ýagdaýlary gelejekde göz öňünde tutarys.

2-nji mesele. AB göni çyzyk we aýlama ***I*** oky berlen. **AB** göni çyzygy sagadyň aýlanýan ugruna ***a*=120^0** burça aýlamak talap edilýär /103-nji surat/:

Aşakdaky suratdan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy ***a*** burça aýlap, täze **A$_1$B$_1$** ýagdaýyny tapmak üçin şol göni çyzygyň iki nokadyny aýlaman, b i r n o k a d y n y aýlamak hem ýeterlikdir.



103-nji surat

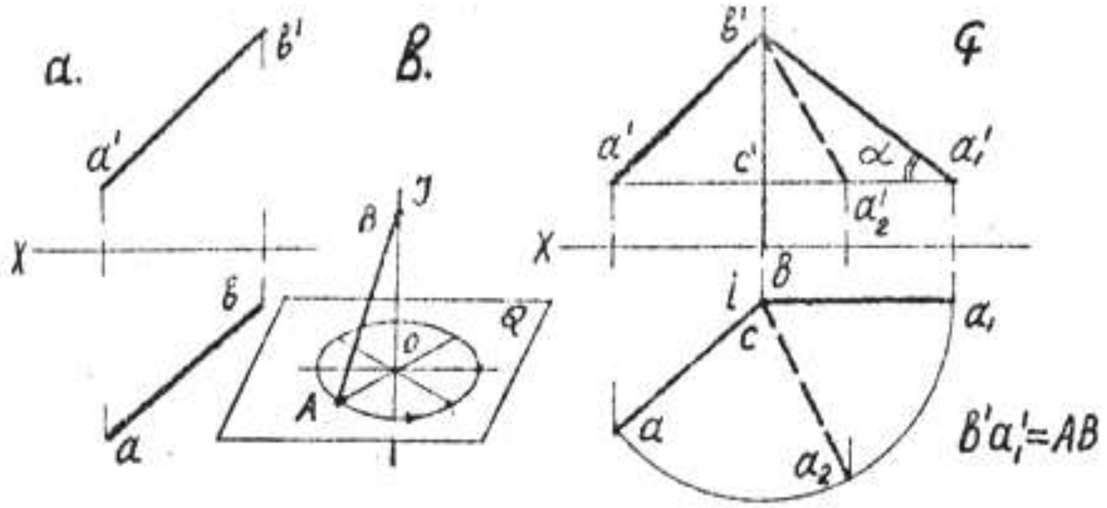
Aýlanma merkezi hökmünde **0** nokatdan **AB** göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna ***oc*** perpendikulýar inderýäris we alnan ***c*** nokady ***a*** burça aýlaýarys, şonda göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasy hem şol burça aýlanar we ol täze a_1b_1 ýagdaýy eýelär. /Ýagny, $oc_1 \perp a_1b_1$, $c_1a_1=ca$, $c_1b_1=cb$/.

$a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasynyň tapylyş usuly öňden bize belli bolşy ýaly, çyzgydan düşnüklidir.

3-nji mesele. AB göni çyzygyň bir nokadyny aýlap, şol çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli / 104-nji surat/.

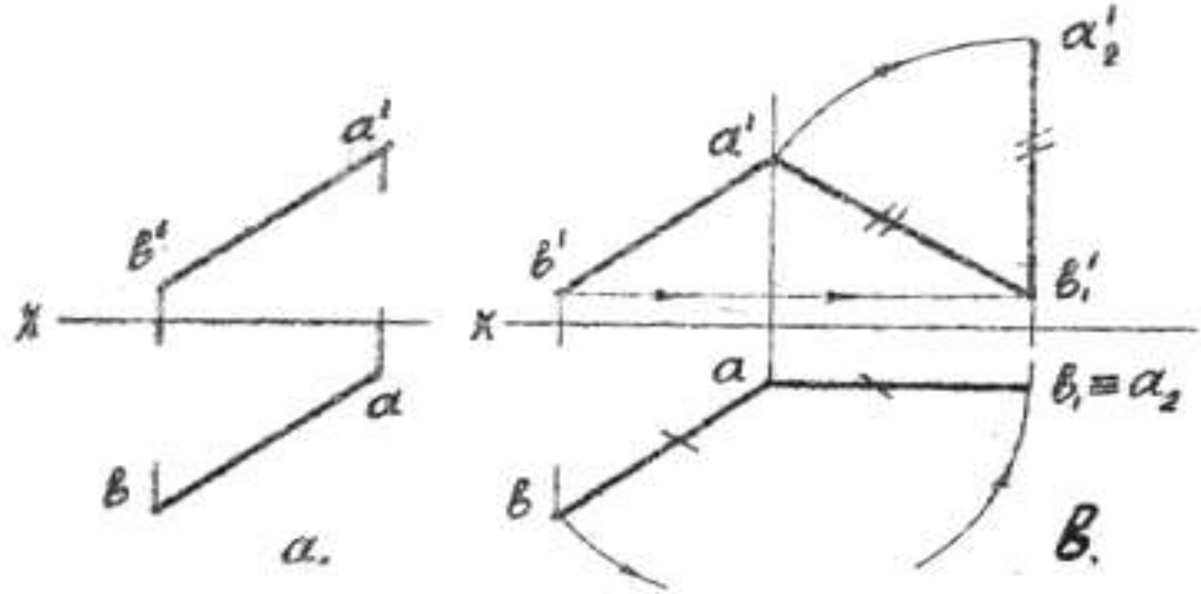
Eger aýlama oky göni çyzygyň haýsy hem bolsa bir ujundaky nokadynyň üstünden geçýän bolsa, onda aýlamaklyk has-da ýönekeýleşýär - ýeňilleşýär. Aýlama wagtynda şol nokat giňişlikde öz ornuny üýtgetmeýär, sebäbi bu nokat aýlama okda ýatýanlygy üçin. Şeýlelikde, göni çyzygy haýsy hem bolsa bir burça aýlamak üçin onuň diňe bir nokadyny şol burça aýlamak ýeterlikdir. Aýlanan **A** nokat hem-de aýlanma okuň üstünde ýatan **B** nokat **AB** göni çyzygyň täze A_1B (ba_1, $b^1a^1_1$) ýagdaýyny doly kesgitleýär. Ýokardaky meseläniň gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Täze $b^1a^1_1 = AB$, $BA_1 \parallel V$. Umumy ýagdaýda berlen **AB** göni çyzyk, frontal şekiller tekizligine parallel ýagdaýy eýeländir. Şonuň üçin hem goýlan meseläň ikisi hem çözülendir.



104-nji surat

4-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan okuň daşynda yzygiderli aýlamak bilen ony **H** gorizontal şekiller tekizligine perpendikulýar bolan ýagdaýyna getirmeli /105-njy surat/.



105-njy surat

Çözülişi: Şeýle ýagdaýa getirmek üçin diňe bir okuň daşynda aýlamaklyk ýeterlik däldir, şonuň üçin ilki bilen **AB** göni çyzygy **A** nokadyň üstünden geçýän we **H** tekizlige perpendikulýar bolan aýlama okunyň daşynda aýlaýarys. Birinji aýlamadan soň göni çyzyk frontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan täze ýagdaýy eýelär. Şonuň üçin onuň gorizontal proýeksiýasy $\boldsymbol{ab_1}$□$\boldsymbol{b_1^1 b_1}$ bolar, frontal proýeksiýasy bolsa hakyky uzynlygynda proýektirlener, ýagny $\boldsymbol{AB_1 // V}$**,** $\boldsymbol{ab_1}$ **// ox,** onda $\boldsymbol{a^1 b_1^1}$ **= AB**.

Ikinji gezek aýlamak üçin **B** nokadyň üstünden geçýän ***V*** tekizlige perpendikulýar bolan aýlanma okuny alýarys. $\boldsymbol{a^1 b_1^1}$ frontal proýeksiýany wertikal ýagdaýa çenli aýlaýarys. Şeýle aýlamaklygyň netijesinde göni çyzyk **H** tekizlige perpendikulýar ýagdaýy **/**$\mathbf{A_2B_1}$□**H/** eýelär, şonuň üçin göni çyzygyň gorizontal proýeksiýasy $\boldsymbol{a_2 b_1}$ nokat bolup proýektirlener. Bu alynan $\mathbf{A_2B_1 \perp H}$ – gorizontal proýektirleýji göni çyzyk bolar. Bu çyzygyň gorizontal şekili $\mathbf{a_2b_1}$ –

nokatdyr, emma frontal şekili hakyky uzynlygyna deňdir. $\mathbf{a_2^1b^1_1} = \mathbf{AB}$

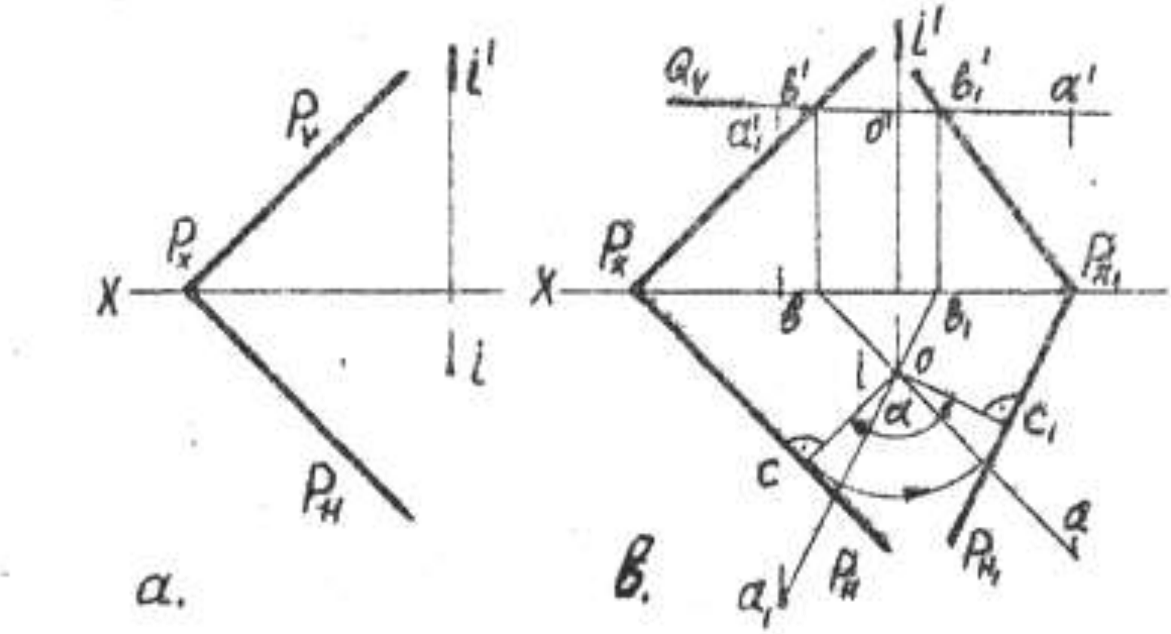
33.3. TEKIZLIGI AÝLAMAK

Tekizligi proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda käbir burça aýlamak üçin tekizligi kesgitleýän elementleri (bir gönininiň üstünde ýatmaýan üç nokady) şol burça aýlamak ýeterlikdir.

I-nji mesele. Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen ***P*** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda ***a*** burça aýlamaly /106-njy surat/.

P tekizlige degişli we ***I*** aýlama okuň üstünden geçýän ***AB*** gorizontal geçireliň. Aýlanma okuň gorizontal proýeksiýasyndan / üstünde alnan ***0*** nokatdan/ P_H yza ***oc*** perpendikulýary indereleriň we **c** nokady hem-de şonuň bilen birlikde P_H yzy ***a*** burça aýlalyň**.** P_H □□***oc*** bolany üçin $\mathbf{c_1}$ nokadyň üstünden P_{H1}□$\mathbf{oc_1}$ geçirýäris. $\mathbf{P_{H1}}$ aýlandyrylan P tekizligiň täze gorizontal yzy bolar, yzlaryň täze birleşme nokady bolsa $\mathbf{P_{X1}}$ bolar.

Frontal P_{V1} yzyny tapmak üçin $\mathbf{P_{X1}}$-den başga-da, ikinji bir nokady tapmak gerek. Munuň üçin **AB** gorizontalyň aýlanan täze $\mathbf{A_1B_1}$ ýagdaýyny tapýarys. Aýlamadan öň hem, soň hem gorizontalyň gorizontal proýeksiýasy gorizontal yza paralleldigi üçin onuň a_1b_1 täze proýeksiýasy tekizligiň täze $\mathbf{P_{H1}}$ gorizontal yzyna parallel bolar. Gorizontalyň frontal proýeksiýasynyň ähli nokatlary **OX** oka parallel bolan a^1b^1 göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgetmelidirler.



106-njy surat

Şeýlelikde, $a_1^1b_1^1$ gorizontalyň a^1b^1 bilen utgaşýan täze frontal proýeksiýasy bolar, ýagny $a_1^1b_1^1 = a^1b^1$

Täze $\mathbf{P_{V1}}$ frontal yz yzlaryň birleşme nokady bolan $\mathbf{P_{X1}}$ nokadyň we gorizontalyň frontal yzynyň / b_1^1/ frontal proýeksiýasynyň üstünden geçmelidir.

2-nji mesele. Yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky **P** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar ***I*** okuň daşynda yzly-yzyna aýlap: (107-nji a surat)

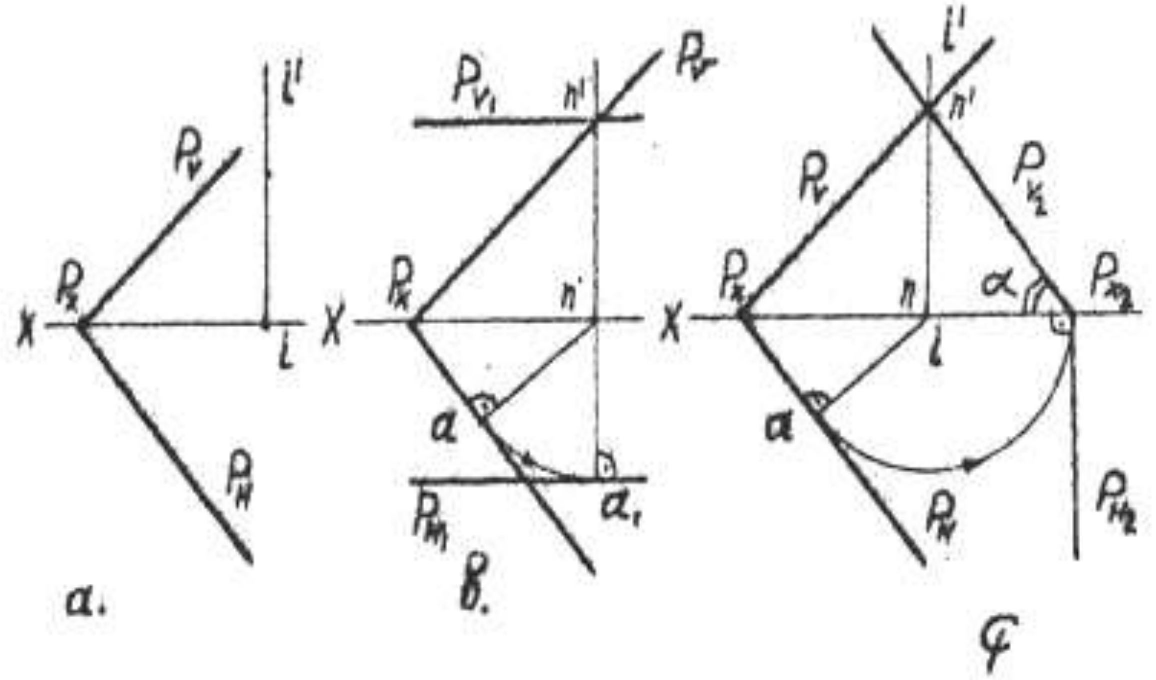
I. Profil proýektirleýji tekizlik, (107-nji b surat)

2.Frontal proýektirleýji tekizlik bolýança aýlamaly. (107-nji ç surat)

107-nji **b,ç** suratda frontal proýeksiýalar tekizliginde ýerleşen, gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda aýlanandan soň **P** tekizligiň iki sany täze ýagdaýy görkezilendir. **P** tekizlik aýlanmazyndan öň umumy haldaky tekizlikdi.

Birinji aýlanmadan soň **P** tekizlik $\mathbf{P_1}$ tekizlige öwrüldi we profil proýektirleýji tekizlik boldy $\mathbf{P_{H1}}$ **II OX,** $\mathbf{P_{V1}}$**//*OX***. Aýlamaklygy dowam etdirsek $\mathbf{P_1}$ tekizlik frontal-proýektirleýji $\mathbf{P_2}$ tekizlige öwrüler. $\mathbf{P_{H2}}$**□OX.** Aýlanma okuna perpendikulýar bolan gorizontal proýeksiýalar tekizligine berlen **P** tekizligiň ýapgyt α burçy üýtgemän galar.

P tekizligi P_2 /frontal-proýektirleýji/ tekizlige öwrüp, **P** tekizligiň **H** tekizligine ýapgytlyk bolan ***a*** burçuny kesgitleýäris. Ýokardaky görkezilen **P** tekizligiň täze iki ýagdaýynda-da tekizligiň frontal yzlary aýlanma wagtynda üýtgemeýän ***N*** nokadyň üstünden geçerler.



107-nji surat

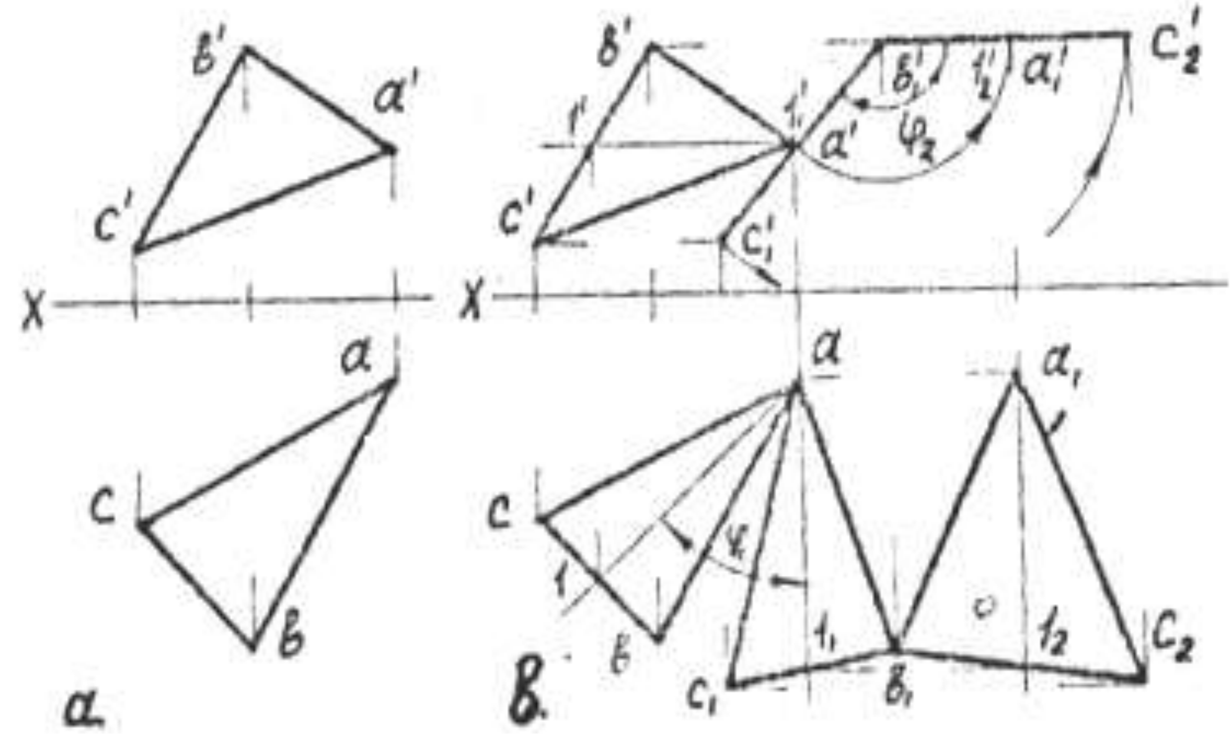
Şonuň ýaly-da **P** tekizligiň ***V*** tekzilige ýapgyt burçuny kesgitlemek üçin berlen tekizligi frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan okuň daşynda aýlamak gerek. Bu meseläni talyplaryň özlerine işlemegi maslahat berýäris.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen **ABC** üçburçlygyň hakyky ululygyny - meýdanyny tapmaly / I08-nji surat /.

Bu mesele proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan iki okuň daşynda yzly-yzyna aýlamak bilen çözülýär. Aýlama oklar çyzgyda görkezilen däldir.

Üçburçlygy ***V*** proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar ýagdaýyna getirmek üçin **ABC** üçburçlygyň tekizligini H tekizligine perpendikulýar we **A** depeden geçýän aýlama ***I*** okuň daşynda ilkinji gezek φ_1 burça aýlalyň. Şonda **A** nokat aýlama okuň üstünde ýatanlygy sebäpli giňişlikde öz ornuny üýtgetmez. Diýmek **B** we **C** iki depäni şol bir φ_1 burça aýlamak ýeterlikdir.

Berlen **ABC** üçburçlyk ***I*** aýlanma okunyň daşynda aýlananda, onuň gorizontal proýeksiýasy öz ululygyny üýtgetmän, diňe ornuny üýtgedýär, sebäbi, üçburçlygyň tekizliginiň H tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçy üýtgemän galýar.



108-nji surat

Eger bu tekizligiň üstünde beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk bar bolsa onda ol tekizlikleriň özara perpendikulýar bolýandyklaryny biz geometriýadan bilýäris. Şonuň üçin üçburçlygyň tekizliginde A***1*** gorizontaly guralyň we ony ***V*** tekizligine perpendikulýar bolan $\mathbf{A}\boldsymbol{1_1}$, ýagdaýyna çenli aýlalyň, şonda onuň gorizontal $\boldsymbol{a1_1}$**,** proýeksiýasy **OX** okuna perpendikulýar bolýar.

Üçburçlygyň aýlanan ýagdaýda gorizontal proýeksiýasynyň öz ululygyny üýtgetmänligi üçin ony gorizontalyň ***a1***, proýeksiýasynyň üstünde gurmak bolar / sirkulyň kömegi bilen /.

Aýlama wagtynda nokadyň $\boldsymbol{b^1}$ we $\boldsymbol{c^1}$ frontal proýeksiýalary **OX** okuna parallel bolan göni çyzyk boýunça orunlaryny üýtgederler we täze ýagdaýdaky $\boldsymbol{b_1}$ we $\boldsymbol{c_1}$ proýeksiaýalardan geçirlen baglanyşyk çyzyklary bilen kesişýän nokatlarda ýatarlar.

Birinji gezek gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň berlen umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlygyň täze ýagdaýyny - **frontal proýektirleýji** $\mathbf{AB_1C_1}$ bolan üçburçlyk alyndy we bu üçburçlygyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçy tapyldy.

Ikinji gezek üçburçlygyň **B** depesinde geçýän frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ikinji bir okuň daşynda aýlap, $\mathbf{A\ B_1C_1}$ üçburçlugy **H** tekizligine parallel $\mathbf{A_1B_1C_2}$ ýagdaýyna getirýäris. Şol ýagdaýynda üçburçlygyň $a_1^1b_1^1c_2^1$ frontal proýeksiýasy **OX** okuna parallel bolar. Üçburçlygyň $a_1b_1c_2$ gorizontal proýeksiýasy **ABC** üçburçlygyň hakyky ululygy bolar. $\Delta a_1b_1c_2 = \Delta ABC = A_1B_1C_2$

Aýlama oklary soňabaka çyzgyda köplenç halatlarda görkezilmeýär.

33.4 TEKIZ – PARALLEL ORUN ÜÝTGETME USULY

/Aýlama oky görkezmezden aýlamak/

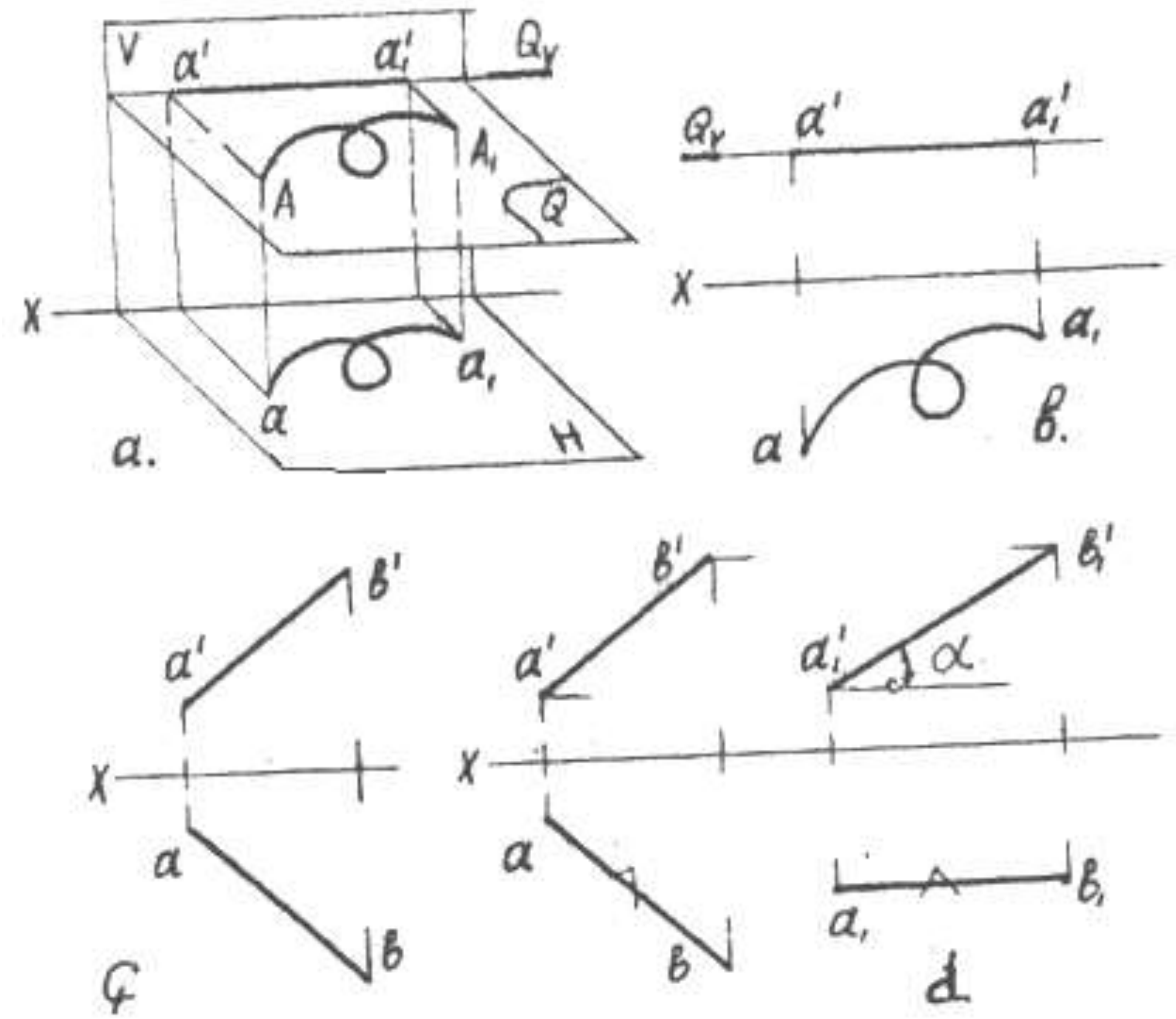
Tekiz-parallel orun üýtgetmeklik usulynda giňişlikde öz orunlaryny üýtgedýän **geometrik figuralaryň - obýektiň** ähli nokatlary proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolan tekizliklerde hereket edýärler. Şeýlelikde, bu orun üýtgetmegiň netijesinde **obýektiň** nokatlaryndan şol tekizlige çenli bolan aralyklar elmydama üýtgemeýärler. Hakykatdan-da figuranyň ornuny üýtgetmek üçin onuň haýsy hem bolsa bir göni çyzykly elementiniň ornuny üýtgetmek ýeterlikdir. Soňra orun üýtgedilen elementi boýunça figuranyň beýleki elementleriniň täze ornuny kesgitlemek bolar.

Göni çyzygyň kesiminiň ornuny islendik bir ýagdaýdan başga bir ýagdaýa, ýagny **proýeksiýalar tekizligine tekiz-parallel orun üýtgetmek diýmek, anyklanmadyk okuň daşynda aýlamak diýmekdir.**

Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyk tekiz-parallel orun üýtgetmekligiň hususy haly bolup biler.

Şu ýagdaýda proýeksiýalar tekziligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyga mahsus bolan usul peýdalanylýar, has takygyny aýdanyňda, bu ýerde gönüburçly proýektirlemekde ölçegleriň üýtgemeýänligi we proýeksiýalaryň beýleki proýeksiýalar tekizliginde proýeksiýlar okuna parallel göni çyzyklar / şol bir wagtyň özünde olar aýlama tekizlikleriniň yzlarydyr / boýunça öz orunlaryny üýtgedýändikleri göz öňünde tutulýar

Eger nokady we göni çyzygyň her bir nokadyny /109-nji surat/ ýa-da tekiz figurany /110-113-nji suratlar/ proýeksiýalar tekizligine parallel bolan tekizligiň üstünde ornuny üýtgetsek ýa-da proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlasak, onda okuň şol tekizligiň üstündäki proýeksiýasy görnüşi boýunça-da, ululygy boýunça-da üýtemeýär, diňe proýeksiýalar okuna görä ýagdaýy üýtgeýär. Ikinji proýeksiýasy **OX** oka parallel göni çyzyk boýunça ornuny üýtgedýär.



109-nji surat

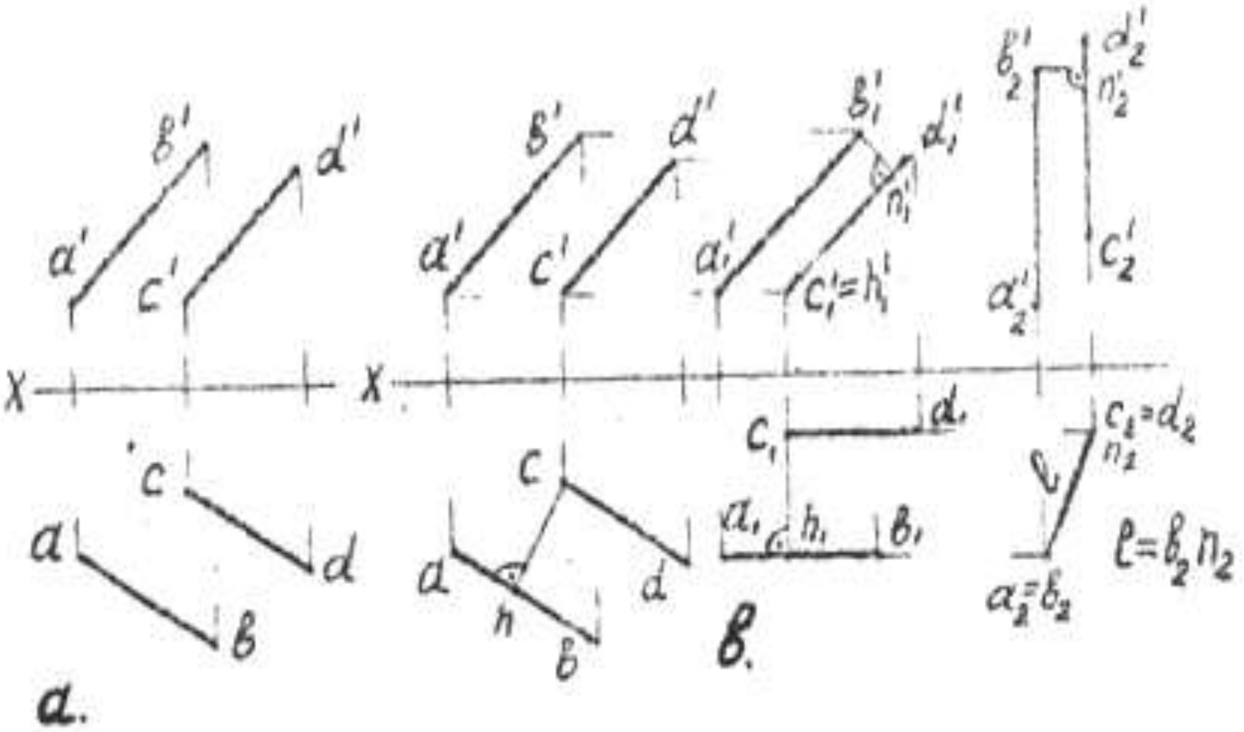
109-nji ç, d suratda tekiz parallel orun üýtgetmeklik bilen berlen **AB** göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk ***a*** burçunyň kesgitlenişi görkezilendir. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Aýlama okuna üns bermezden we aýlama radiusynyň ululygyny kesgitlemezden, aýlama usulyny ulanmak bolar. Figuranyň proýeksiýasyny üýtgetmezden, ony proýeksiýalar okuna görä gerekli ýagdaýyna öwürmek, soňra bolsa şu boýunça beýleki proýeksiýany gurmak ýeterlikdir.

Ýokardaky görkezilen / tekiz parallel orun üýtgetme/ usulyny ulanyp, birnäçe meseleleri işläliň:

1-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky iki sany parallel **AB** we **CD** göni çyzyklaryň arasyndaky hakyky uzaklygy – aralygy kesgitlemek talap edilýär /110-nji surat/.

Eger parallel göni çyzyklar haýsy-da bolsa bir proýeksiýalar tekziligine perpendikulýar bolsalar, onda olaryň arasyndaky iň ýakyn aralyk şol proýeksiýalar tekizligine hakyky ululygynda proýektirlenýär.

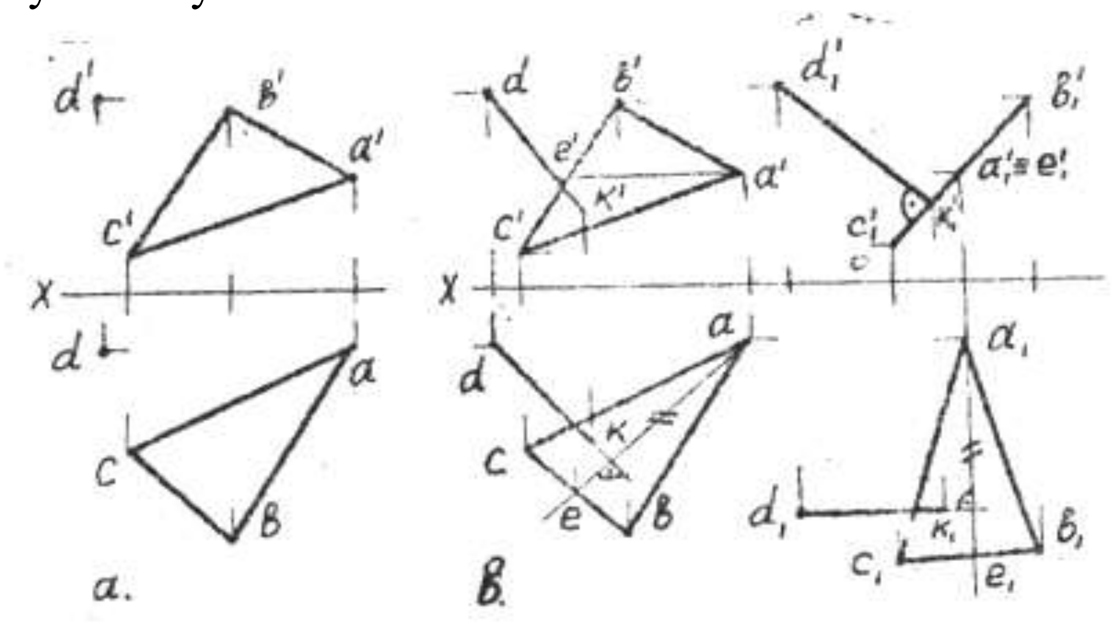


110-nji surat

H şekiller tekizlige perpendikulýar okuň daşynda birinji gezek aýlap, bu berlen umumy ýagdaýdaky **AB** we **CD** göni çyzyklary ***V*** tekizlige parallel ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny $\mathbf{A_1B_1IIV}$, $\mathbf{C_1D_1IIV}$ alynýar. Olary ***V*** tekizlige perpendikulýar okuň daşynda ikinji gezek aýlap, H tekizligine perpendikulýar ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny $\mathbf{A_2B_2}$□$\mathbf{H}$, $\mathbf{C_2D_2}$□$\mathbf{H}$. Şonda $\mathbf{A_2B_2}$ **we** $\mathbf{C_2D_2}$ alan göni çyzyklarymyzyň arasyndaky ***l*** aralygyň **H** tekziligine hakyky ululygynda proýektirlenýänligi çyzgydan görünýär, ýagny $B_2N_2 // H$, $D_2C_2 \perp H$, $l = b_2n_2$; $b^1_2n^1_2 // OX$;

2-nji mesele. **D** nokatdan umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlyga çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /111-nji a, b surat/.

Berlen **D** nokatdan umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlygyň iň ýakyn aralygyny tapmak üçin ýokardaky görkezilen usuldan peýdalanalyň

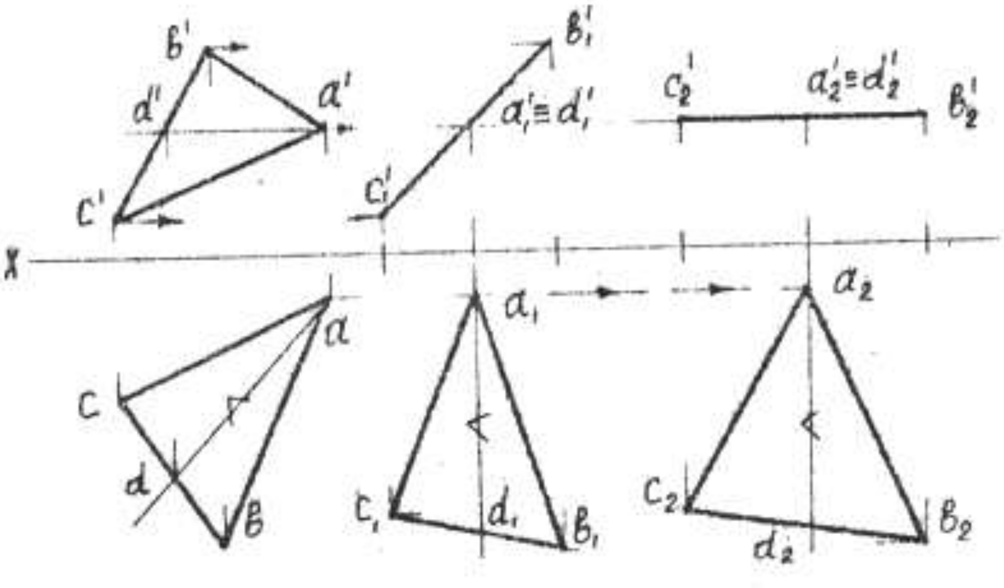


111-nji surat

.

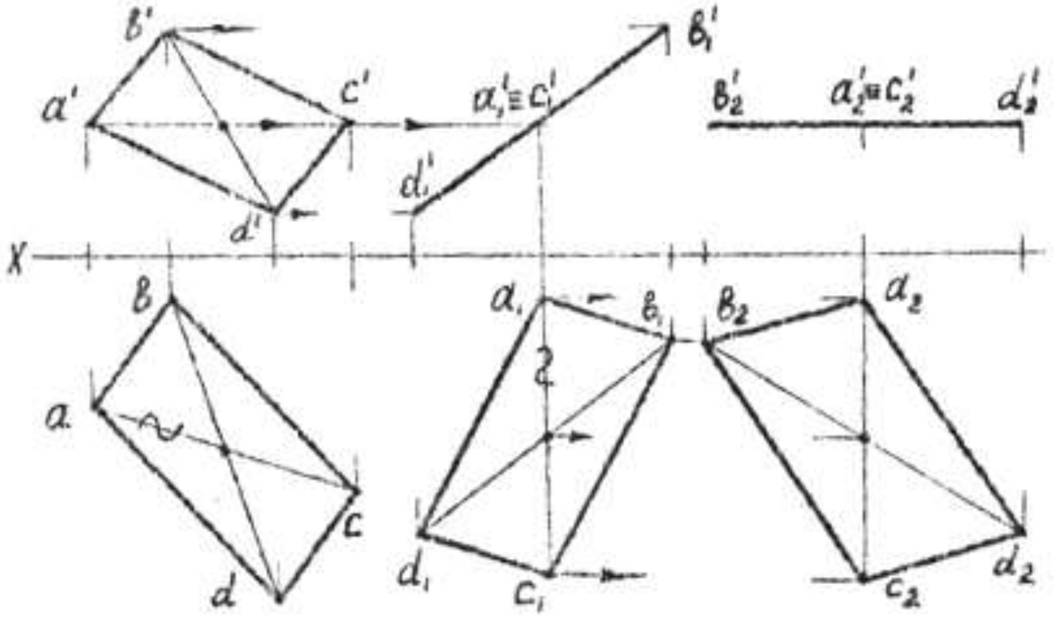
ABC üçburçlygyň üstünde ýatan **AE** gorizontalyny geçirip, **D** nokay we **ABC** üçburçlugy şol bir burça aýlap, $\mathbf{A_1B_1C_1}$ frontal proýektirleýji üçburçlugy we $\mathbf{D_1}$ nokady guryarys. Gözlenýän aralyk $\mathbf{D_1}$ nokatdan $\mathbf{A_1B_1C_1}$ üçburçluga inderilen $\mathbf{D_1K_1}$ gözlenilýän iň ýakyn aralygyň hakyky uzynlygy bolýan bolsa, onda onuň gorizontal proýeksiýasy **OX** oka paralleldir. $\boldsymbol{d_1k_1}$**II OX,** ýa-da $\mathbf{D_1K_1}$ **//*V***;

3-nji mesele. Üçburçlygyň hakyky meýdanyny kesgitlemeli /112-njy surat/.



112-njy surat

Bu meseläniň çözmek üçin ilki bilen umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlugyň tekizligini proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar **/ $A_1B_1C_1$□V/** ýagdaýa çenli, soňra bolsa täze alnan **$A_1B_1C_1$** üçburçlugy proýeksiýalar tekzilikleriniň beýlekisine parallel **/ *$A_2B_2C_2$ II H* /** ýagdaýa çenli aýlap getirýäris, ýagny proýeksiýalar tekizliklerine degişlilikde perpendikulýar bolan aýlanma oklary görkezmezden-tekiz parallel orun üýtgetmek usuly boýunça aýlanma oklarynyň daşynda iki gezek yzygiderli aýlaýarys. Meseläniň doly yzygiderli çözülişi çyzgydan düşnüklidir. **$\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2 = \Delta a_2b_2c_2$** **4-nji mesele.** Umumy ýagdaýda berlen **ABCD** dörtburçlygyň hakyky ululygyny- meýdanyny kesgitlemeli / 113-nji surat/.

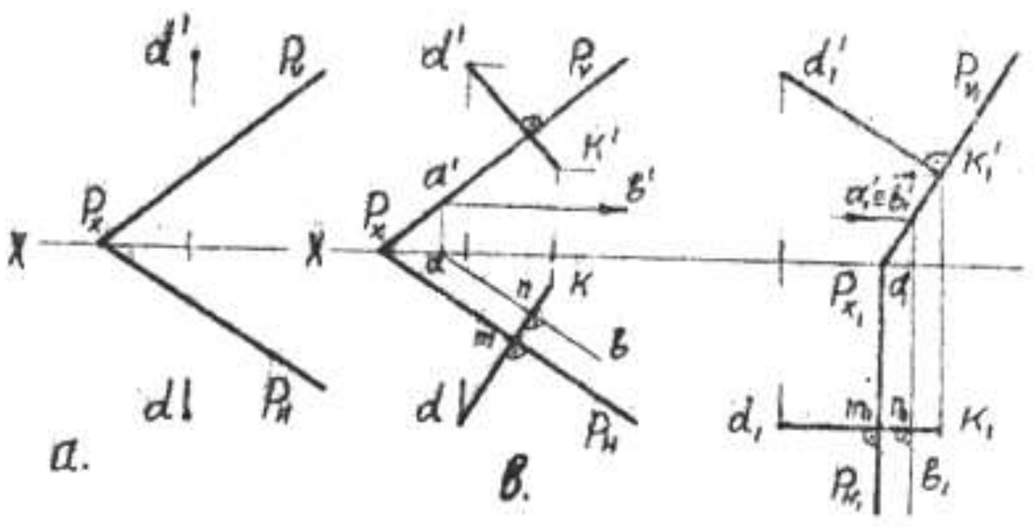


113-nji surat

Dörtburçlugyň ***abcd*** gorizontal proýeksiýasyny **AC** gorizontalynyň frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolar ýaly edip, **A_1C_1□V,** ***$a_1b_1c_1d_1$*** täze ýagdaýa çenli ululygyny üýtgetmezden ornuny üýtgedýäris. Şonuň netijesinde tekziligiň täze ***$a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$*** frontal proýeksiýasy göni çyzyga öwrüler ***a^1_1 c^1_1*** – nokat bolar. Täze orny üýtgedip guran dörtburçlygymyz **A_1 B_1 C_1 D_1** □**V**, ýagdaýda şekillendiriler, ýagny frontal proýektirleýji tekizlik bolar, şonuň üçin onuň ***$a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$*** – göni çyzyk bolar.

Ikinji gezek orun üýtgedilende dörtburçlugyň ***$a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$*** frontal proýeksiýasy **H** tekzilige parallel bolan ***$a_2^1b_2^1c_2^1d_2^1$*** täze ýagdaýy eýeleýär. Dörtburçlugyň täze guralan ***$a_2b_2c_2$***d_2 gorizontal proýeksiýasy **ABCD** dörtburçlugyň gözlenýän hakyky ululygy bolar. □ ***$a_2b_2c_2$***d_2= □***ABCD***

5-nji mesele. ***D*** nokatdan yzlary bilen berlen umumy haldaky **P** tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /114-nji surat/.



114-nji surat

Bu gözlenýän aralygy kesgitlemek üçin berlen umumy ýagdaýdaky **P** tekziligi hususy ýagdaýa frontal /ýa-da gorizontal/ proýektirleýji tekizligiň ýagdaýyna getirmeli. Şonda gözlenýän aralyk **D** nokadyň frontal proýeksiýasyndan tekizligiň frontal yzyna inderilen perpendikuloýar bilen kesgitlener.

$l = d_1^1 k_1^1 = DK$; $d_1^1k_1^1 \square P_{V1}$; d_1k_1 *II OX*; d_1k_1 *II V*;

Meseläniň çözgüdi şu aşakdaky yzygiderlilige syrygýar:

1. **P** tekizligiň **AB** gorizontalyny geçirýäris.

2. **D** nokadyň gorizontal ***d*** proýeksiýasyndan **P** tekizligiň gorizontal P_H yzyna we gorizontalyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar inderýäris.

3. **H** tekizlige perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň tekizligiň P_H gorizontal yzy **OX** oka perpendikulýar bolar, d_1 nokat we a_1b_1 proýeksiýa $d_1m_1=dm$; $m_1n_1=mn$ aralykda ýerleşer.

4. Gorizontalyň $a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasyny we nokadyň d_1^1 frontal proýeksiýasyny adaty usul bilen tapýarys.

5. **D** nokatdan **P** tekizlige çenli gözlenýän aralyk $d_1^1k_1^1$ bolar, ýagny

$$D_1K_1 = d_1^1k_1^1 = DK; \quad d_1k_1\ II OX, \quad d_1k_1 \square P_{H1}; \quad dk \square P_H;$$

$$d_1^1k_1^1 \square P_{V1}; \quad d^1k^1 \square P_V; \quad d_1k_1 // V;$$

ÖZ-ÖZÜŇI BARLAMAK ÜÇIN SORAGLAR WE MESELELER:

1. Proýeksiýalary özgertmegiň usullary nähili maksatlar üçin ulanylýar?

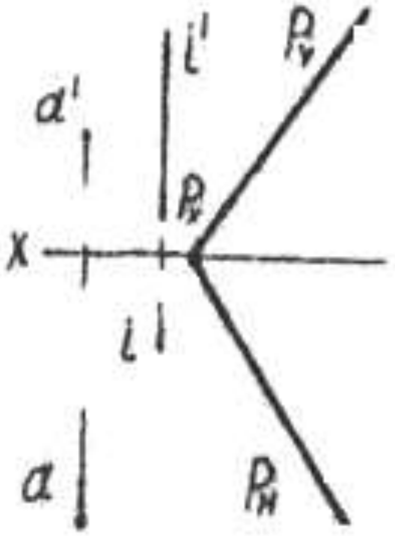
2. Geometrik elementleriň proýeksiýalaryny üýtgetmeklik haýsy ýollar bilen amala aşyrylyp bilner?

3. Aýlamak usulynyň esaslanýan esasy ýagdaýlaryny kesgitläň.

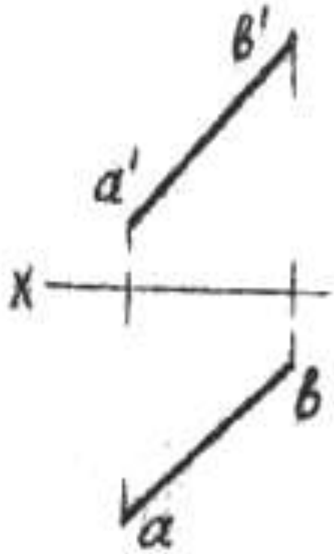
4. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda nokadyň proýeksiýalarynyň üýtgeýşiniň kanunalaýyklygy nähili?

5. **Mesele № I**. Berlen **A** nokady ***I*** okuň daşynda aýlap umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizligiň üstüne düşürmeli. /115-njy surat /.

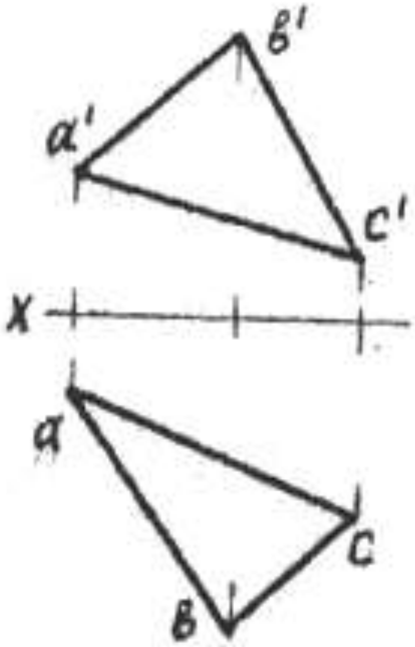
Meseläni çözmek üçin görkezme. Aýlamakdan soň **A** nokat özüniň aýlanma tekizligi bilen berlen **P** tekizligiň kesişme çyzygynyň üstünde ýatmalydyr.



115-njy surat



116-nji surat



117-nji surat

6. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda göni çyzygyň proýeksiýalarynyň üýtgeýşiniň kanunalaýyklygy nähili?

7. ***V*** tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak bilen **AB** kesimiň uzynlygyny kesgitlemeli.

Meseläni çözmek üçin görkezme. Aýlama okuny kesimiň haýsy hem bolsa bir ujundan geçýän edip almaly we kesimi **H** tekizligine parallel ýagdaýa çenli aýlamaly /116–nji surat/.

8. **ABC** üçburçlugyň tekizliginiň ***V*** tekizlige ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli / 117–nji surat / we bu üçburçlugyň meýdanyny kesgitlemeli.

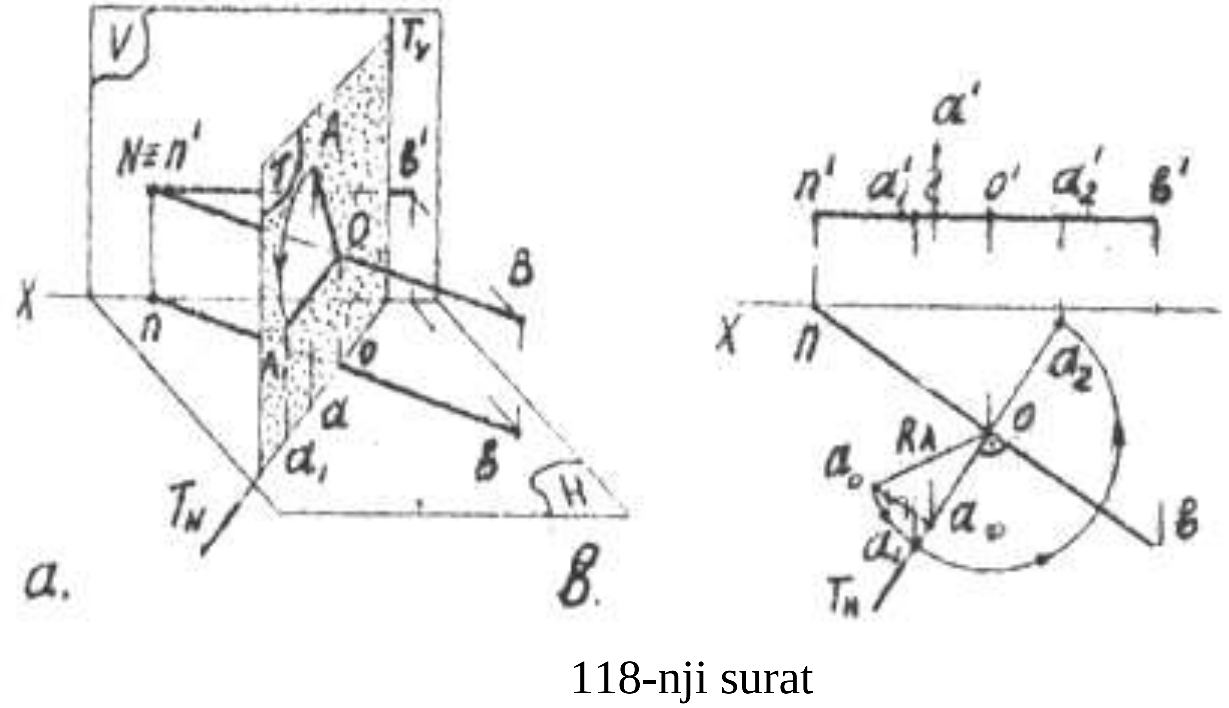
9. Aýlanyş oky görkezilmedik ýagdaýda / tekiz parallel ornuny üýtgetmek usuly/ aýlamak usuly nämä esaslandyrylýar?

34. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINE PARALLEL OKUŇ DAŞYNDA AÝLAMAK

34.1. Nokady gorizontal göni çyzygyň daşynda aýlamak

Bize belli bolşy ýaly, nokat okuň daşynda aýlananda, şol nokat aýlama okuna perpendikulýar tekizligiň üstünde töweregiň dugasy boýunça aýlanýar.

1-nji mesele. A nokady berlen ***NB*** gorizontal-aýlama okuň daşynda aýlap, nokat bilen okuň iň ýakyn aralygyny kesgitlemeli / 118-nji surat /.



118-nji surat

Eger aýlamaklyk **H** tekizligine parallel okuň daşynda geçirilýän bolsa, onda nokadyň aýlanýan ***T*** tekizligi aýlama oky bolan şol ***NB*** göni çyzyga, şeýle hem gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolar.

Şeýlelikde, aýlandyrylýan **A** nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasy gorizontal ***NB*** göni çyzygyň ***nb*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar ***ao*** göni çyzygyň üsti boýunça öz ornuny üýtgeder, ýagny aýlama geçýän ***T*** gorizontal-proýektirleýji tekizligiň gorizontal yzy boýunça ornuny üýtgeder. $\mathbf{T \perp NB}$, $\mathbf{T_H \perp nb}$, $\mathbf{T \cap NB = 0}$,

$\mathbf{T_H \cap nb = 0}$, $\mathbf{R_A = OA}$

118-nji ***a*** suratda **A** nokadyň ***NB*** **(*nb*, *n¹b¹*)** gorizontal göni çyzygyň daşynda aýlanyşy we şol aýlama oka çenli bolan iň ýakyn aralygyň ýagny aýlama $\boldsymbol{R_A}$ radiusyň tapylyşy görkezilendir. Bu aýlamaklykda **OA** deň bolan $\boldsymbol{R_A}$ aýlanma radiusyň **H** tekizligine parallel bolan ýagdaýy görkezilipdir. Şonuň üçin hem aýlanma radius gorizontal tekizlige hakyky ululygynda proýektirlenýär, ýagny $\boldsymbol{R_A = OA_1 = OA} = \mathbf{oa_1}$.

118-nji ***b*** suratda görkezilen ortogonal çyzgyda gurluş $\boldsymbol{R_A}$ – aýlanma radiusyň hakyky ululygyny **g ö n i b u r ç l y ü ç b u r ç l y k** usuly bilen kesgitlemeklige syrykdyrylýar. $\boldsymbol{R_A}$ – aýlama radiusyň hakyky uzynlygyny aýlama tekizliginiň gorizontal yzy bolan $\boldsymbol{T_H}$ bilen gabat gelýän ***ao*** perpendikulýaryň üstünde **0** nokatdan başlap, islendik tarapa ölçäp goýmak bolar. Şeýlelik bilen biz **A** nokady ***T*** aýlama tekizliginde ***NB*** okunyň daşynda aýlap, $\boldsymbol{R_A}$ aýlama radiusynyň **H** tekizligine parallel ýagdaýyny tapdyk. Başgaça aýdanyňda, **A** nokatdan **H** tekizligine çenli bolan aralyk ***NB*** gorizontalyň **H** tekizligine çenli bolan aralygyna deňdir, ýagny $\boldsymbol{a_1o}$ aralyk **A** nokatda aýlama ***NB*** okuna çenli aralyga deňdir.

$\boldsymbol{a_1}$ – berlen **A** nokadyň aýlanan ýagdaýdaky täze alnan gorizontal proýeksiýasydyr. Nokadyň $\boldsymbol{a_1^1}$ frontal proýeksiýasy $\boldsymbol{a_1}$ nokadyň üstünden geçýän proýeksion – baglanyşyk çyzygynyň kömegi bilen kesgitlenýär we ol gorizontal göni çyzygyň $\boldsymbol{n^1b^1}$ frontal proýeksiýasynyň üstünde ýatandyr. Eger-de aýlamany a_1 nokatda durman a_2 nokada çenli aýlasakda bor, onda **oa_2** – aralygam gözlenýän aralyk bolar, ýagny

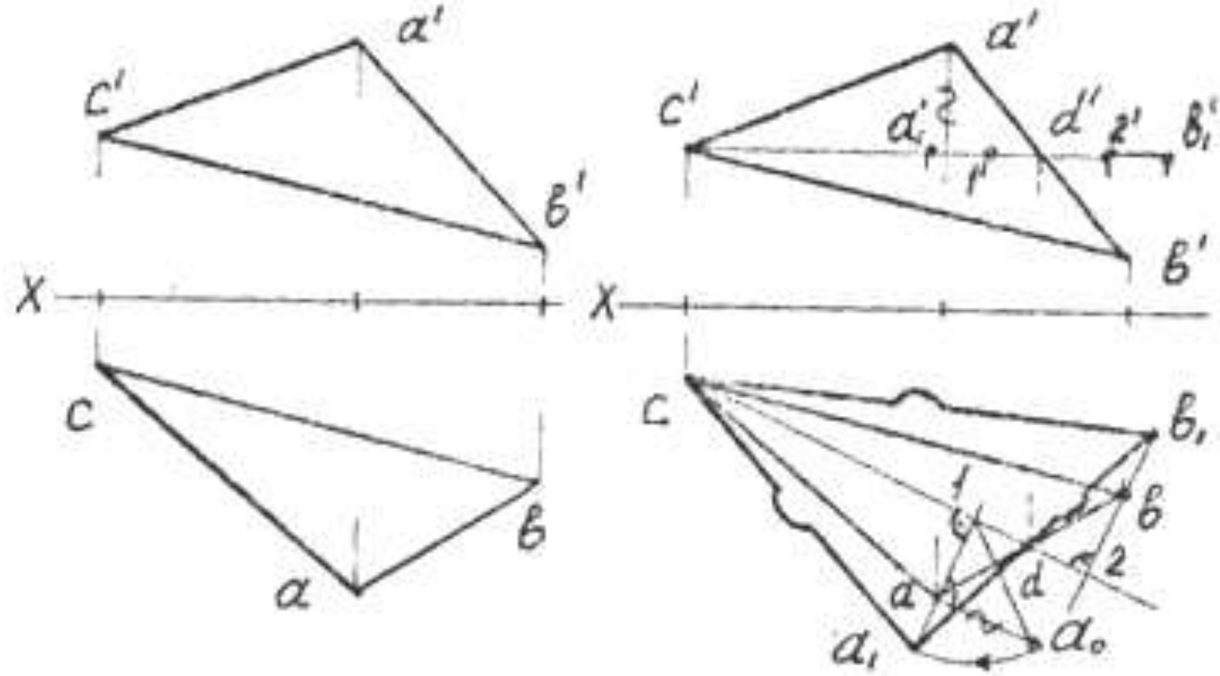
$oa_1 = oa_2$, a_2 – nokadyň tapylyşy çyzgydan düşnüklidir.

34.2. Tekiz figurany gorizontalynyň daşynda aýlamak

Tekiz figuranyň hakyky ululygyny – meýdanyny **ýeňil-aňsat** we **gysga** ýol bilen ýagny diňe bir okuň gorizontalynyň ýa-da frontalynyň daşynda aýlamaklyk bilen hem tapyp bolar.

Berlen tekizligiň gorizontalynyň daşynda aýlamaklyga garap geçeliň.

1-nji mesele. Erkin berlen **ABC** üçburçlugyň hakyky ululygyny - meýdanyny kesgitlemeli / 119-nji surat /.



119-nji surat

Eger tekiz figurany diňe bir gezek aýlap, **H** tekizlige parallel ýagdaýda goýmaly bolsa, onda aýlama okuny figuranyň tekizliginiň üstünde almaly, özünem ol alnan göni çyzyk – aýlama ok **H** tekizlige parallel bolmaly, ýagny berlen tekiz figuranyň islendik gorizontallarynyň biri bolmaly.

Üçburçlugyň tekizligi **H** tekizlige parallel bolan halatda, üçburçlugyň her bir depesiniň proýeksiýasy aýlama okundan şol nokadyň aýlama radiusyna deň aralyga süýşer.

Meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlilikde ýerine ýetirilýär:

1. Berlen umumy haldaky **ABC** üçburçlugyň tekizliginde **C / c, c^1 /** depesiniň üstünden geçýän aýlama oky hökmünde **SD / sd, sd^1 /** gorizontaly geçirýäris, şonda **C / c, c^1 / we D / d, d^1** / nokatlar aýlama okuň / gorizontalyň / üstünde ýatanlygy sebäpli öz orunlaryny üýtgetmezler.

2. Üçburçlugyň **A** / ***a***, ***a***^{1} / we ***B* / *b*, *b***^{1} / depesinden aýlama oky bolan **SD**-ä perpendikulýar göni çyzyklaryň poýeksiýasyny geçirýäris / ***a***1□***cd***, ***b***2□***cd***/, şol göni çyzyklar boýunça hem aýlanýan nokatlaryň gorizontal proýeksiýalary orunlaryny üýtgedýärler. Sebäbi, gorizontalyň daşynda aýlananda her bir nokat giňişlikde göni burçuň proýeksiýasy hakynda teorema esasynda töweregiň dugasyny çyzýar, ol bolsa **H** gorizontal şekiller tekizlige parallel aýlama oky bolan **CD** gorizontalyň ***cd*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk bolup proýektirlenýär, ýagny $a_1$1□***cd***, $b_1$2□***cd***

3. Üçburçlugyň **A** depesiniň aýlama radiusynyň proýeksiýasyny gurýarys. ***1a***, 1^1a^1 – iki proýeksiýa boýunça R_A aýlama radiusyň hakyky uzynlygyny kesgitleýäris, $R_A = 1a_0$

Aýlama radiusy **H** tekizligine parallel bolýança ***A* /*a*, *a***^{1}/ nokady şol gorizontalyň daşynda aýlaýarys: ***1a*** – **A** nokadyň aýlama radiusynyň gorizontal proýeksiýasydyr. 1^1a^1 – aýlanma radiusynyň frontal proýeksiýasydyr. $a_0$1 **– şol aýlama radiusyň hakyky uzynlygydyr,** ol gönüburçly üçburçluk gurmak ýoly bilen kesgitlenendir.

4. $R_A = a_0$1 ululygy perpendikulýaryň üstünde **1** nokatdan başlap islendik tarapa ölçäp goýmak bilen, **ABC** üçburçluk gorizontal, proýeksiýalar tekizligine parallel bolan ýagdaýda **A** depäniň iň soňky ýagdaýdaky a_1 täze proýeksiýasyny taparys.

5. Täze alnan a_1 we üýtgemän duran ***d*** nokatlaryň üstünden göni çyzyk geçirýäris. Ony **B** depäniň ***b*** gorizontal proýeksiýasynyň ornuny üýtgedýän ***b2*** göni çyzygy bilen

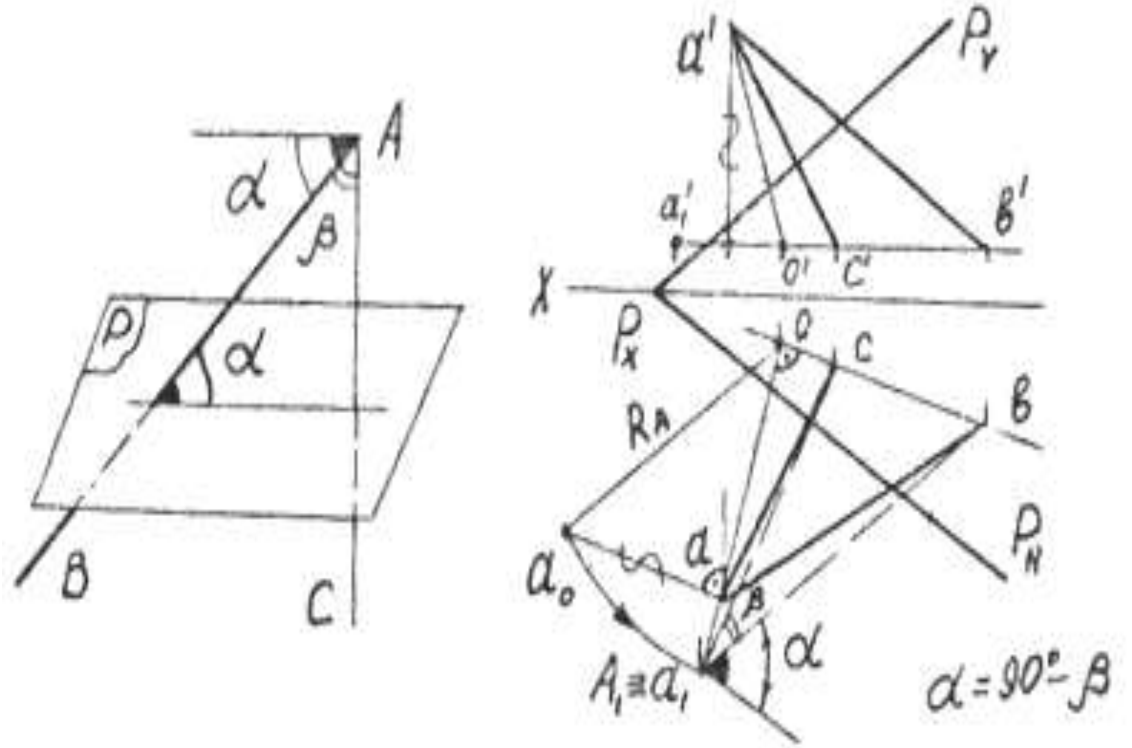
kesişýänçä dowam etdirýäris, we b_1 nokady, ýagny **B** mokadyň aýlanandan soňky täze **b_1** proýeksiýasyny tapýarys /anyklaýarys/.

6. Tapylan b_1 we a_1 nokatlary **C** nokat bilen birleşdirip, aýlanandan soňky ýagdaýda üçburçlugyň a_1 b_1c gorizontal proýeksiýasyny alarys, ol hem gözlenilýän üçburçlugyň hakyky ululygyna deňdir □ a_1 b_1c = □A_1B_1C=□**ABC**. Aýlanandan soň üçburçlugyň a_1^1 $b_1^1c^1$ frontal proýeksiýasy gorizontalyň frontal proýeksiýasy bilen gabat gelýär we **OX** oka paralleldir. Diýmek, umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçluk aýlandyrylandan soň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel ***ABCIIH*** ýagdaýy eýeleýär, şonuň üçin-de □A_1B_1C=□**ABC.**

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen **AB** göni çyzyk we yzlary bilen berlen umumy haldaky **P** tekizligiň arasyndaky ýapgytlyk burçy tapmaly /120-nji surat/. Bize geometriýadan belli bolşy ýaly tekizlik bilen göni çyzygyň arasyndaky ýapgytlyk burç göni çyzygyň şol tekizligiň üstündäki öz proýeksiýasy bilen emele getirýän burçuna deňdir.

Eger diňe burçuň ululygyny kesgitlemek talap edilýän bolsa, onda bu burçuň proýeksiýasyny gurmak hökman däldir. Ilki berlen **AB** göni çyzyk bilen **P** tekizlige şol göni çyzygyň **A** nokadyndan inderilen perpendikulýaryň arasyndaky dolduryjy □ burçy kesgitläliň.

Berlen **AB** göni çyzygyň **A** nokadyndan **P** tekizlige **AC** perpendikulýar inderýäris we **AB** göni çyzygyň **P** tekizlik bilen emele getirýän ***a*** burçuny dolduryjy □ burçy gurýarys.



120-nji surat

AB göni çyzygyň erkin **B** nokadyň üstünden □**BAC** burçuň tekizliginde **BC** gorizontaly geçirýäris. **BC** gorizontalyň daşynda aýlamak bilen alnan **CAB** üçburçlugyň tekizligini **H** tekizlige parallel ýerleşdirýäris. Aýlama wagtynda aýlama okunyň üstündäki **C** we **B** nokatlar orunlaryny üýtgetmeýärler, emma **A** nokat bolsa gorizontal proýeksiýalar tekizliginde aýlama okuna perpendikulýar bolan tekizlige degişli ***oa*** perpendikulýar boýunça ornuny üýtgedýär.

$\boldsymbol{R_A}$ – aýlanma radiusyň hakyky ululygyny kesgitläp, $\boldsymbol{cA_1b}$ burçy gurýarys, ýagny □$\boldsymbol{A_1bc}$ **=** □**ABC**; □$\boldsymbol{A_1bc}$ //***H***, □$\boldsymbol{A_1^1b^1c^1} \equiv \boldsymbol{b^1c^1a^1}$**.** Täze $\boldsymbol{cA_1b}$ burçuň gorizontal proýeksiýasy **CAB** burça, ýagny □ burça deň diýip ýazmak bolar □ $\boldsymbol{cA_1b}$ **=** □***CAB*** **=**□□**.** Gözlenýän burç

$\boldsymbol{a} = \mathbf{90^0}$ – □ deňdir.

35.PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINIŇ ÜSTÜNDE ÝATAN OKUŇ DAŞYNDA AÝLAMAK

35.1 UTGAŞDYRMAK USULY

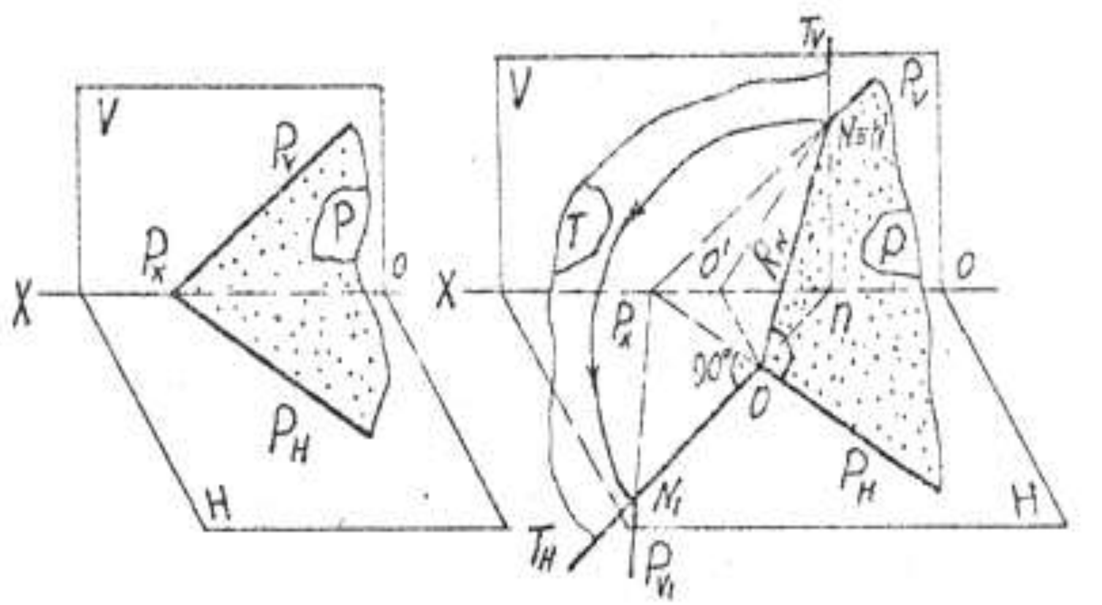
Utgaşdyrma usuly proýeksiýalar tekizliginiň üstünde ýatan okuň daşynda aýlamakdyr, ýagny berlen tekizligiň yzynyň daşynda aýlamakdyr. Aýlama okunyň deregine tekizligiň yzyny alyp, yzlary bilen berlen tekizligi proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmak aýlamaklygyň **hususy** halydyr.

Figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek ýa-da figuranyň geometrik ölçegleri boýunça onuň proýeksiýasyny kesgitlemek talap edilende, şol figuranyň yzlaryny tapyp, şondan soň utgaşdyrma usuly peýdalanylýar.

Utgaşdyrma usuly şundan ybaratdyr: ýagny berlen **P** tekizligi degişlilikde **H** ýa-da ***V*** tekizlik bilen utgaşýança onuň $\mathbf{P_H}$ gorizontal yzynyň ýa-da $\mathbf{P_V}$ frontal yzynyň daşynda aýlaýarlar. **P** tekizliginde ýatan ähli geometrik elementler utgaşdyrylan ýagdaýda **H** ýa-da ***V*** tekizliginde üýtgedilmezden natural ýagdaýynda şekillendirilýär.

Utgaşdyrma usuly diňe **metrik / ölçeg/** meselelerini çözmek üçin ulanylýandyr.

1-nji mesele. Giňişlikde umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmaly / 121-nji we 122-njy suratlar/.



121-nji surat

121-nji suratda utgaşdyrma usulynyň manysy düşündirilendir we görkezilendir. Berlen **P** tekizligi $\mathbf{P_H}$ yzyň daşynda **H** tekizlik bilen utgaşýança aýlaýrys. Şonda **P** tekizliginde ýatan figuranyň ähli nokatlary **H** tekizligiň üstüne düşer we biz figuranyň hakyky ululygyna - meýdanyna deň bolan şekilini alarys.

Utgaşdyrmagy ýerine ýetirmek üçin aýlanyş oky hökmünde tekizligiň kabul edilen $\mathbf{P_H}$ yzynyň gozganmaýandygyny göz öňüne tutmak gerek.

P tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrmak üçin **P** tekizligiň diňe islendik nokadyny şu tekizlik bilen utgaşdyrmak ýeterlikdir. Şonuň üçin $\mathbf{P_V}$ frontal yzyň üstünde ýatan islendik ***N*** nokady almak has maksadalaýyk bolar. Şu alnan ***N*** nokadyň üstünden aýlanma oky bolan $\mathbf{P_H}$ yza perpendikulýar bolan kömekçi gorizontal proýektirleýji ***T*** tekizligi geçirýäris. Bu geçirilen tekizlik berlen **P** tekizlige perpendikulýardyr. ***T*** tekizlik ***N*** nokadyň aýlama tekizligidir. ***T*** tekizlik aýlama oky bilen **O** nokatda kesişýär. Alnan **O** nokat aýlama merkezi bolar. **O*N*** bolsa aýlama radiusydyr. ***N*** nokadyň täze $\boldsymbol{n^1}$ ýagdaýynyň alnyşy çyzgydan düşnüklidir. ***N*** nokat ***T*** aýlama tekizliginiň üstünde ýerini üýtgedip $\boldsymbol{T_H}$ yza çenli aýlanyp **H** tekizlik bilen utgaşan $\boldsymbol{N_1}$ ýagdaýy eýeleýär.

Utgaşdyrylan $\boldsymbol{P_{V1}}$ frontal yzy kesgitlemek üçin $\boldsymbol{P_V}$ frontal yzyň üstünde alnan ***N*** nokadyň täze $\boldsymbol{N_1}$ ornuny tapmaly we ony birleşme nokady bolan P_X bilen göni çyzyk arkaly birleşdirmeli, şonda

$P_X n^1 = P_X N_1 = P_X N = ON$; $O_1 N(on, o^1 n^1) = R_N = ON_o$ deňligi göz öňünde tutmaly.

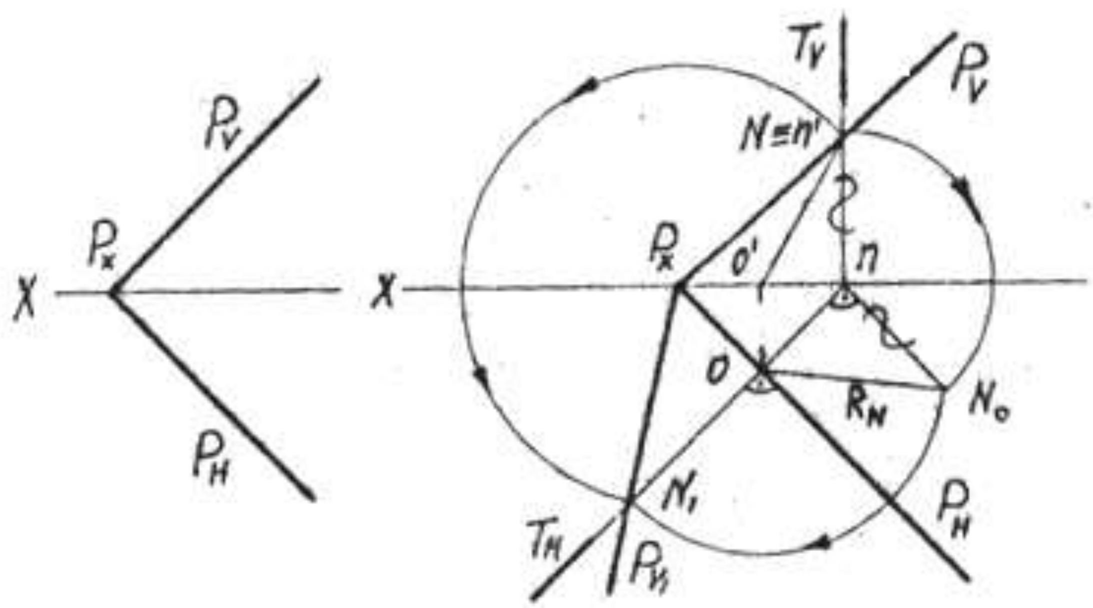
121-nji suratda P_H yzyň daşynda aýlananda **P** tekizligiň giňişlikdäki ornunyň üýtgeýşi we **H** gorizontal şekiller tekizlik bilen utgaşan ýagdaýy görkezilendir.

Ortogonal çyzgyda /122-njy surat/

N nokadyň utgaşdyrylan ýagdaýyny gurmak üçin berlen **P** tekizligiň P_V yzynyň üstünde ýatan islendik $N(n, n^1)$ nokady alýarys. $ON_0 = R_N$ Raýlama radiusyň hakyky ululygyny OnN_0 göniburçly üçburçlukdan kesgitleýäris. ON_0 alnan ululygy n nokatdan P_H yza inderilen perpendikulýaryň üstünde O nokatdan başlap ölçäp goýýarys we $N(n_1 n^1)$ nokadyň **H** tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýyndaky N_1 nokady alýarys, ýa-da çyzgydan görnüşi ýaly.

N_1 nokady ON_0 radius bilen çyzylan duganyň aýlama radiusyň On proýeksiýasynyň dowamy bilen kesişdirip gurmak bolar.

Ortogonal çyzgyda N_1 nokadyň ýagdaýyny ýene-de aşakdaky ýaly kesgitlemek bolar:



122-njy surat

P tekizligiň **P_V** frontal yzynyň üstünde islendik ***n^1*** nokady saýlap alýarys, ol nokatdan **OX** okuna perpendikulýar inderýäris we ***N*** nokadyň gorizontal ***n*** proýeksiýasyny tapýarys.

Alnan ***n*** nokatdan ***P_H*** yza perpenikulýar inderýäris we ***$P_x n^1$*** radius bilen duga çyzýarys. Bu duganyň **P_H** yza inderilen ***nO*** perpendikulýar bilen kesişme nokady hem ***N_1*** nokady kesgitleýär.

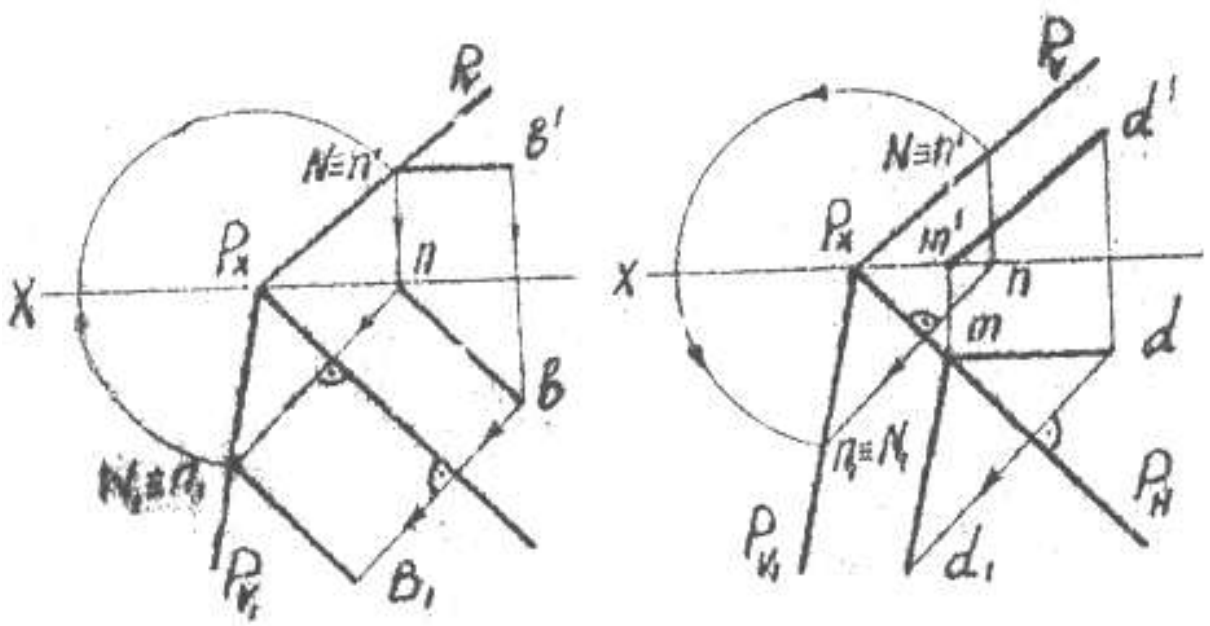
Yzlaryň birleşýän **P_X** nokadyny ***N_1*** nokat bilen birleşdirip, ***P_{V1}*** frontal yzyň utgaşdyrylan täze ýagdaýyny alarys. **Pxn^1** we ***$P_X N_1$*** kesimleriň proýeksiýalar tekizliklerine özleriniň hakyky ululyklarynda proýektirlenýändigi üçin munuň özi mümkindir.

P tekizlik **P_V** yzyň daşynda aýlananda hem edil ýokarda garap geçenimize meňzeş gurluş emele geler, ýagny **P_H** gorizontal yz ***V*** frontal proýeksiýa tekizligi bilen utgaşar.

35.2 Tekizligiň esasy çyzyklaryny utgaşdyrmak

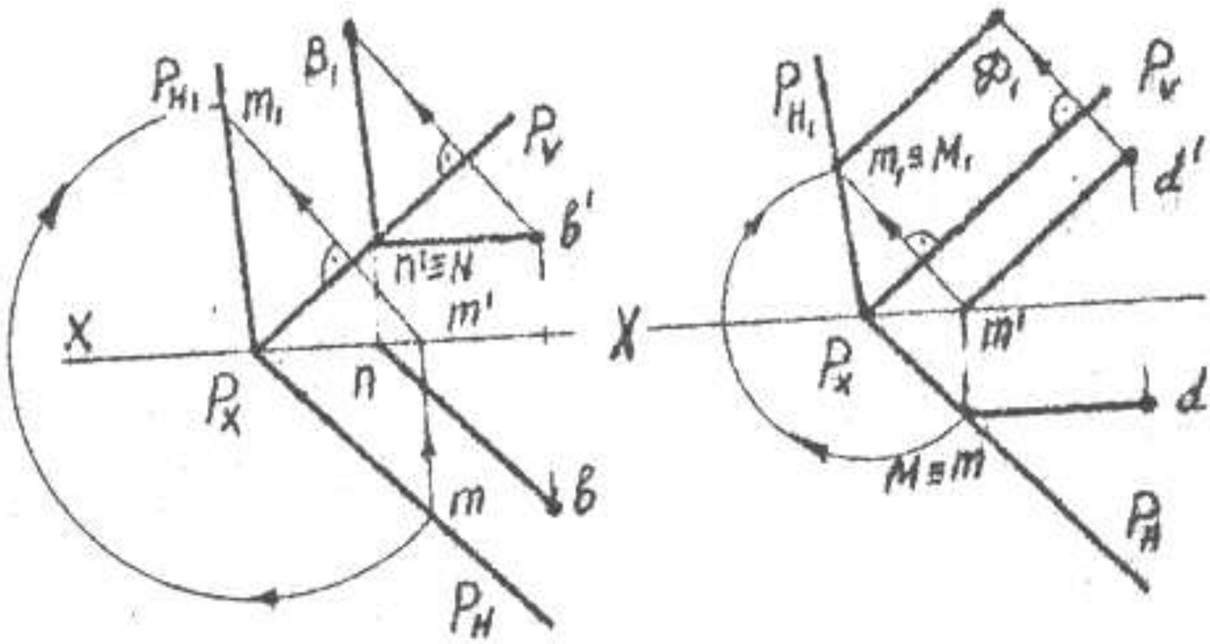
2-nji mesele. P tekizligiň ***NB*** gorizontalyny we ***MD*** frontalyny ***H*** tekizligi bilen utgaşdyrmaly / 123-nji surat/.

NB gorizontalyň ***P_H*** gorizontal yza paralleldigi üçin ***H*** tekizlik bilen utgaşdyrylanda, ol utgaşdyrylan ***N_1B_1*** gorizontal P_H yza parallel bolar, ýagny ***N_1B_1 // P_H***. Tekizligiň ***MD*** frontaly ***H*** tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýda ***P_{V1}*** yza paralleldir. **$MD_1//P_{V1}$.**



123-nji surat

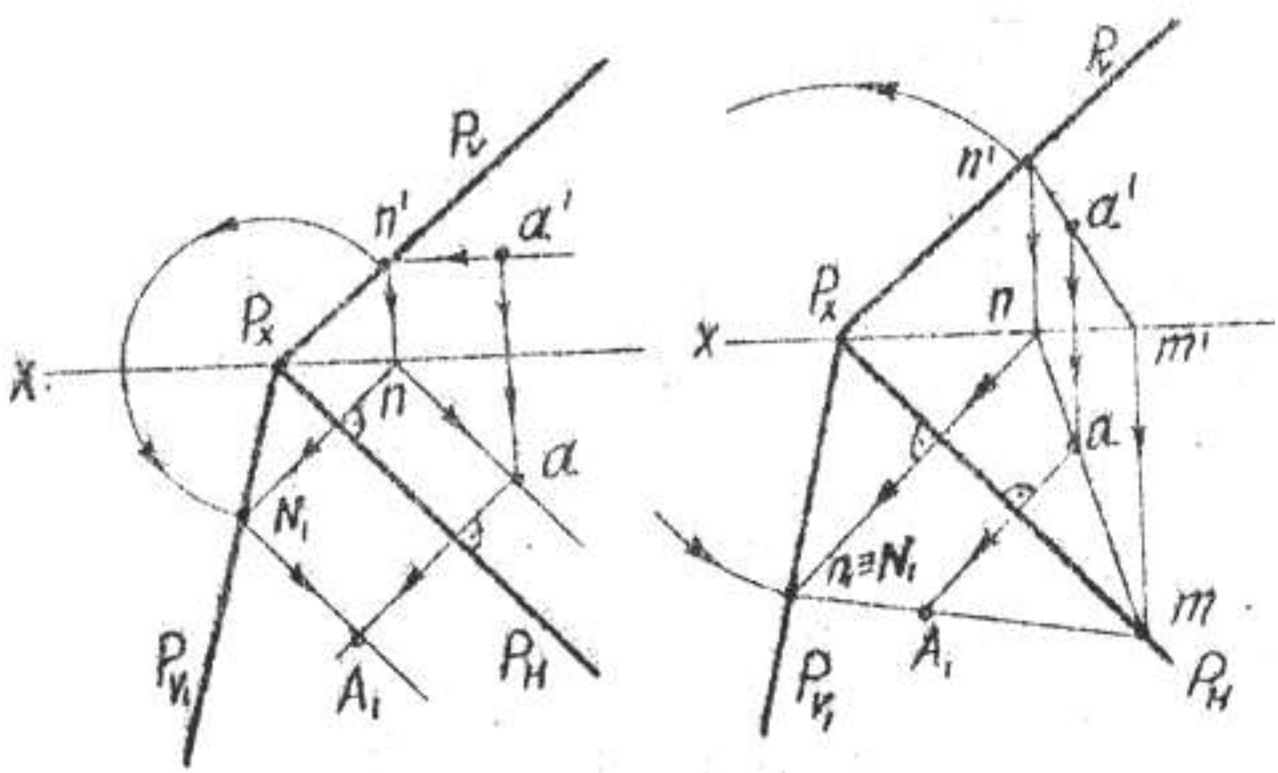
3-nji mesele. **P** tekizligiň ***NB*** gorizontalyny we ***MD*** frontalyny ***V*** tekizlik bilen utgaşdyrmaly. Eger ***P*** tekizlik frontal proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylan bolsa, onda ugtaşdyrylan ýagdaýdaky gorizontal $NB_1//P_{H1}$ frontal $M_1D_1//P_V$ bolar / 124-nji surat/



124-nji surat

Giňişlikde berlen ***P*** tekizligi ***H*** tekizligi bilen utgaşdyrylanda, tekizligiň islendik nokadynyň utgaşdyrylan ýagdaýyny tekizligiň esasy çyzyklary bilen nokadyň gorizontal proýeksiýasyndan aýlanma oky bolan P_H gorizontal yzyna inderilen perpendikulýaryň kesişmeginde alynýar / 123-nji surat/.

4-nji mesele. ***P*** tekizlikde ýatan ***A*** nokadyň a^1 frontal proýeksiýasy boýunça gorizontal tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýyny tapmaly / 125-njy surat/.

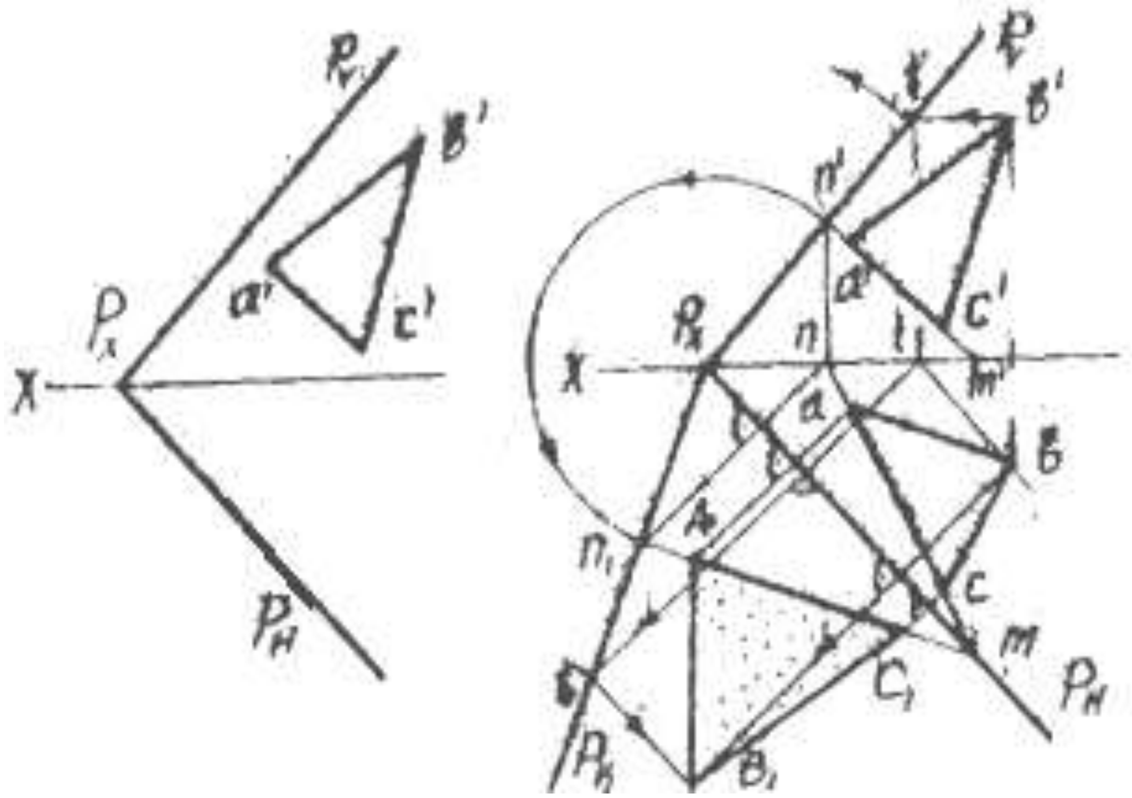


125-njy surat

Bu ýagdaýda ***A*** nokadyň üstünden geçýän we berlen ***P*** tekizlikde ýatan ***AN*** gorizontalyň 125-njy a surat we umumy ýagdaýdaky ***MN*** göni çyzygyň kömegi bilen 125-njy b surat nokadyň utgaşdyrylan ***A₁*** ýagdaýynyň tapylyşy görkezilendir. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir. Tapylyş usullaryna, haýsy usulyň amatlydygyna üns beriň, analiz ediň, derňäň.

35. 3 YZLARY BILEN BERLEN UMUMY HALDAKY TEKIZLIGIŇ ÜSTÜNDE ÝATAN TEKIZ FIGURANYŇ HAKYKY ULULYGYNY KESGITLEMEK

1-nji mesele. Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde ýerleşen **ABC** üçburçlugyň frontal proýeksiýasy boýunça **hakyky ululygyny tapmaly** / 126-njy surat /.



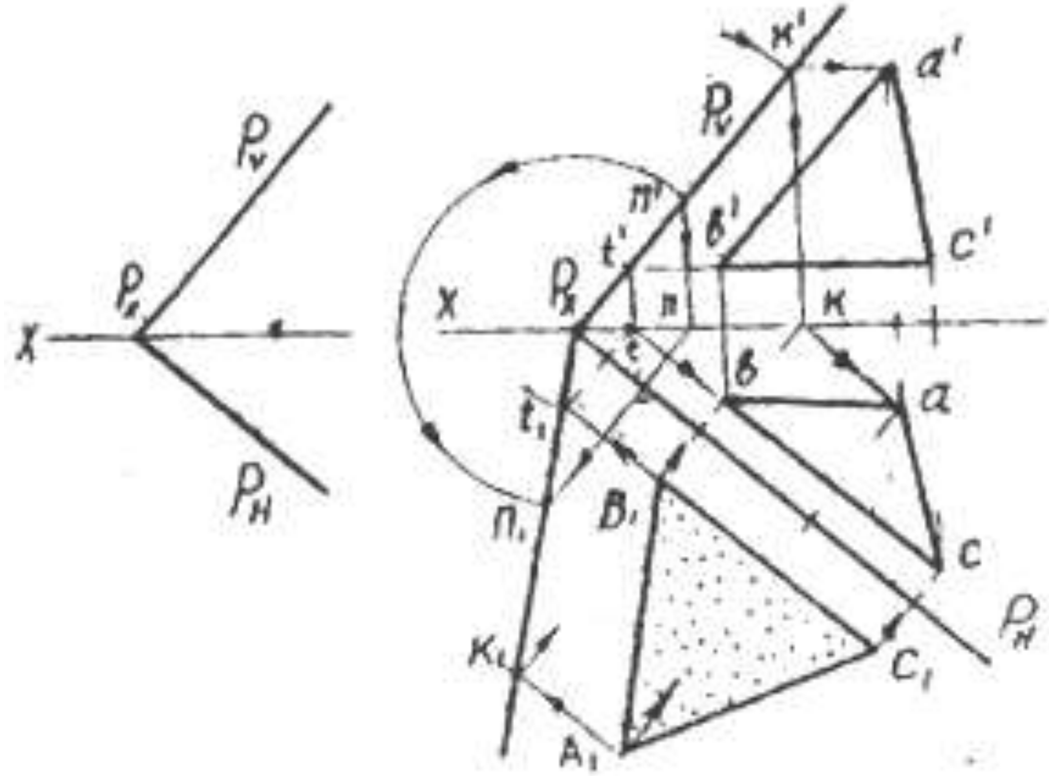
126-njy surat

Bu meseläni işlemek üçin bize belli bolşy ýaly **ABC** üçburçlugyň **a^I^b^I^c^I^** üçburçlugyň frontal şekili boýunça onuň gorizontal şekilini **abc** tapylandyr.

Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde ýerleşen **ABC** üçburçlugyň hakyky ululygyny tapmak üçin $\mathbf{P_H}$ yzyň daşynda aýlamak bilen **P** tekizlik şonuň bilen birlikde üstünde ýatan **ABC** üçburçluk hem **H** tekizlik bilen utgaşdyrylýar. Üçburçlugyň $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{B_1}$ $\mathbf{C_1}$ depeleriniň ugtaşdyrylan ýagdaýy kesgitlenýär. Munuň üçin tekiz figuranyň, ýagny üçburçlugyň **AC** tarapynyň üstünden geçýän umumy ýagdaýdaky ***MN*** göni çyzygy hem-de **B** depesinde geçýän $\mathbf{BT_1}$ gorizontaly peýdalanylandyr. Täze utgaşdyrylyp tapylan $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{B_1}$ $\mathbf{C_1}$ berlen

ABC üçburçlugyň hakyky ululygydyr. **□$A_1B_1C_1$ =□ABC; □$A_1B_1C_1$□H.**

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen **P** tekizligiň üstünde **deňtaraply** üçburçluk gurmaly / 127-nji surat /



127-nji surat

Meseläni çözmek üçin görkezme. **P** tekizligini proýeksiýalar tekizliginiň haýsy hem bolsa biri bilen utgaşdyrmaly we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde deňtaraply üçburçluk gurmaly. Soňra **P** tekizligi üçburçluk bilen bilelikde ilki başdaky berlen ýagdaýyna aýlap getirmeli, ýagny üçburçlugyň gorizontal we frontal proýeksiýalaryny gurmaly.

Meseläni çözmek üçin **P** berlen tekizligiň üstünde islendik alnan ***N (n, n^1)*** nokadyň kömegi bilen **P** tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrýarys we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde ýatan deňtaraply **$A_1B_1C_1$** üçburçlugy gurýarys.

Gurluşy ýönekeýleşdirmek üçin üçburçlugyň **B_1C_1** tarapy tekizligiň **P_H** yzyna parallel ýerleşdirildi we üçburçlugyň **A** üçünji depesi guruldy.

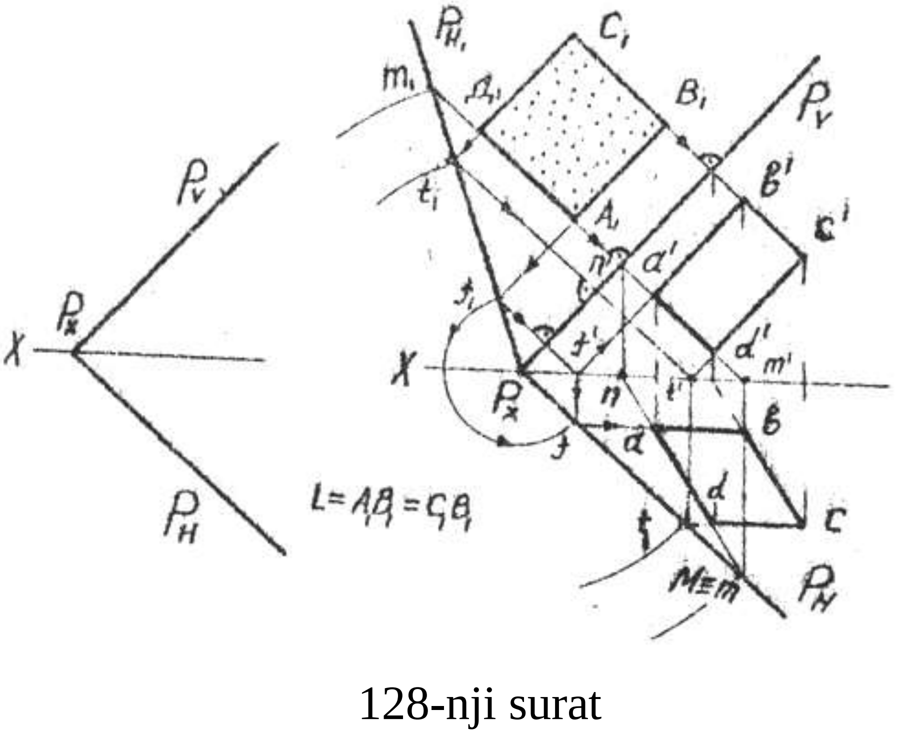
A_1 nokadyň proýeksiýalaryny gurmak üçin bu nokadyň üstünden **P** tekizligiň gorizontaly utgaşdyrylan ýagdaýda **P_H** yza parallel edilip geçirildi we utgaşdyrylan **P_{V1}** yz bilen kesişme nokat bolan **k^1** alyndy.

K_1 nokatdan **P_H** yza perpendikulýar geçirildi we ony **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, **K** nokat tapyldy. **K** nokatdan **OX** oka perpendikulýar galdyryldy we ol **P_V** yz bilen kesişýänçä dowam etdirilip, **k^1** nokat kesgitlendi. **k** hem-de **k^1** nokatlaryň üstünden **P** tekizligiň üstünde ýatan **A** nokatdan gorizontalynyň gorizontal we frontal proýeksiýalary geçirildi.

Gorizontalyň gorizontal proýeksiýasy bilen **A_1** nokatdan **P_H** yza inderilen perpendikulýaryň kesişýän ýerinde nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasy bilen ***a*** gorizontal proýeksiýanyň üstünden geçirilen proýeksion-baglanyşyk çyzygynyň kesişme nokady bolsa ***a^1*** nokadyň gözlenýän frontal proýeksiýasydyr.

B /*b, b^1*/ we ***C* /*c, c^1*/** nokatlaryň proýeksiýalary hem ýokardaky görkezilen usul bilen tapylýar.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky **P** tekizlik yzlary bilen berlipdir. Onuň üstünde ýerleşen tarapy ***L*** – deň bolan **kwadrat** gurmaly /128-nji surat/.



128-nji surat

Çözülişi. **P** tekizligi frontal proýeksiýalar tekizlik bilen utgaşdyralyň. Tekizlik **P_V** okuň daşynda aýlananda, bu ýerde hem tekizlige degişli her bir nokat töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgeder, proýeksiýasy bolsa $\mathbf{P_V}$ perpendikulýar bolan göni çyzyk bolar. Utgaşdyrylan ýagdaýda $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ **kwadraty** gurýarys we tekizligiň üstündäki kwadraty yzyna aýlap, öňki ýagdaýyna getirýäris, ýagny kwadratyň **gorizontal** we **frontal** proýeksiýalaryny gurýarys.

Gurluş **P** tekizligiň kwadratynyň depeleriniň üstünden geçririlen frontallaryň kömegi bilen ýerine ýetirilýär.

Tekizlik başdaky ýagdaýa getirilende, **kwadratyň** degişli $\mathbf{A_1B_1C_1}$ we $\mathbf{D_1}$ depeleriniň ýatmaly frontallarynyň proýeksiýalaryny tapýarys.

$\mathbf{A_1,B_1,C_1,D_1}$, nokatlaryň üstünden P_V perpendikulýar geçirýäris we olary frontalyň frontal proýeksiýalary bilen kesişýänçä dowanm etdirip, $\boldsymbol{a}^1,\boldsymbol{b}^1,\boldsymbol{c}^1$ we $\boldsymbol{d}^1$ nokatlary tapýarys. $\mathbf{A_1B_1C_1}$ we $\mathbf{D_1}$ nokatlary frontallaryň degişli gorizontal proýeksiýalaryna proýektirläp, ***a*, *b*, *c*** we ***d*** gorizontal proýeksiýalaryny tapýarys.

4-nji mesele. Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde merkezi **O** nokatda bolan töwerek gurmaly / 129-nji surat /.

Bu umumy ýagdaýdaky tekizligiň üstünde ýerleşen töwerek proýeksiýalar tekizliklerine ellips görnüşinde proýektirlenýär. Berlen oklary boýunça ellipsi gurmaklygy ellipsiň uly we kiçi oklarynyň ululygy hem-de ugry kesgitlenenden soň amala aşyrmak bolar.

Umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan töweregiň diametrleriniň biri **O** nokadyň üstünden geçýän gorizontal bilen gabat gelýär, diýmek **H** tekizlige gözlenýän töweregiň diametri hakyky ululygynda proýektirlenýär, beýlekisi frontal bilen gabat gelýär, şonuň üçin ***V*** tekizlige hem töweregiň bir diametri hakyky ululygyndan proýektirlenýär.

Töweregiň tekizliginiň gorizontaly bilen gabat gelýän diametri ellipsiň gorizontal proýeksiýalar tekizligindäki uly oky bolar.

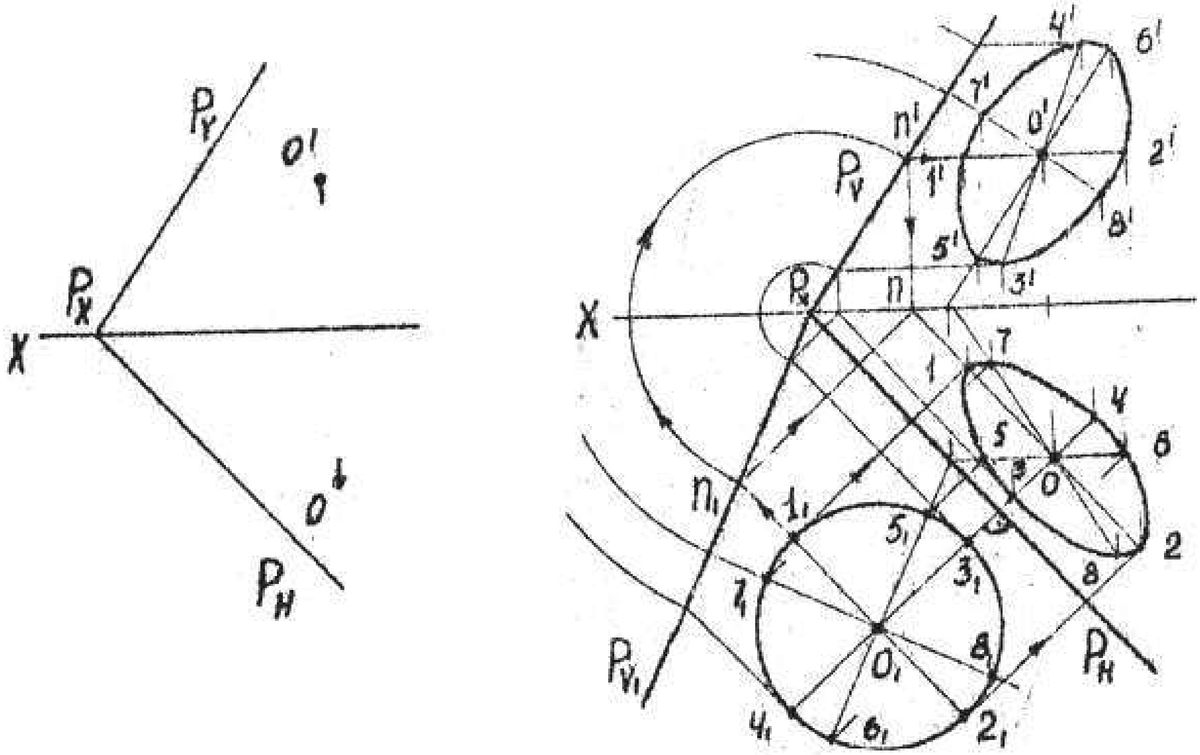
Töweregiň proýeksiýasyny gurmak üçin **P** tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrmak gerek, soňra merkezi **O** nokatda bolan islendik radiusly töwerek gurmaly we proýeksiýalary degişlilikde ellipsiň oklaryna deň bolan diametrlerini geçirmeli.

$\mathbf{P_H}$ yza parallel bolan $\mathbf{I_1}$ - $\mathbf{2_1}$ diametr ellipsiň H tekizligindäki uly okuny kesgitleýär. $\mathbf{I_1}$ - $\mathbf{2_1}$ perpendikulýar bolan $\mathbf{3_1}$ - $\mathbf{4_1}$ diametr bolsa şol ellipsiň kiçi okuny kesgitleýär.

$\mathbf{P_v}$ yza parallel bolan $\mathbf{5_1}$ - $\mathbf{6_1}$ diametr ellipsiň ***V*** tekizligindäki uly okuny, $\mathbf{7_1}$ - $\mathbf{8_1}$ diametr bolsa kiçi okuny kesgitleýär.

P tekizligi başdaky ornuna getirmek bilen, $\mathbf{1_1}$ **we** $\mathbf{2_1}$ nokatlaryny

1 – 2 gorizontalyň gorizontal proýeksiýasyna proýektirleýäris.



129-nji surat

Ellipsiň kiçi oky **1 – 2** göni çyzyga perpendikulýardyr, **3** nokat **3 – K** gorizontal göni çyzygyň kömegi bilen tapyldy, **4** nokat **0-3** we **0-4** kesimleriň deňligi esasynda tapyldy.

Frontal proýeksiýalar tekizliginde ellipsiň uly oky $\mathbf{O}^1$ nokadyň üstünden geçirilendir / **5-6** göni çyzyk $\mathbf{P_{V1}}$ yza paralleldir we töweregiň diametrine deňdir /. Eger **8** nokady ellipsiň gorizontal proýeksiýasyna, **8** nokady kiçi okuň frontal proýeksiýasyna proýektirlesek kiçi oky alarys. $\mathbf{7^1}$ nokat $\mathbf{0^1} – \mathbf{8^1} = \mathbf{0^1} – \mathbf{7^1}$ deňlikden tapylýar.

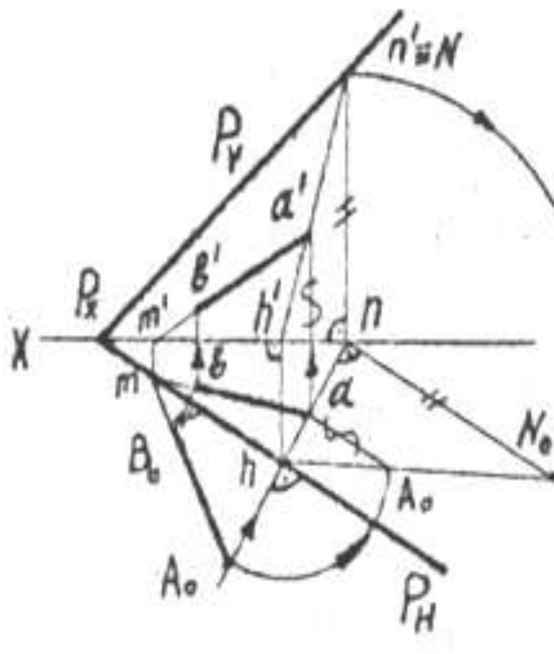
Her bir ellips üçin uly we kiçi oklaryň gurulmagy ellipsiň özüni çyzmaga mümkinçilik berýär.

5 – nji mesele. P tekizlikde ýatan **AB** göni çyzygyň **H** tekizlik bilen utgaşan $\mathbf{A_0B_0}$ ýagdaýy boýunça, tekizligiň yzlaryny utgaşdyrmazdan **AB** göni çyzygyň gorizontal we frontal proýeksiýasyny gurmaly / 130– nji surat /.

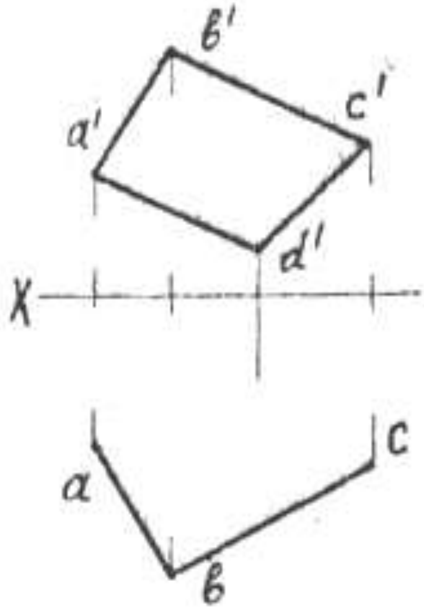
Umumy ýagdaýdaky **P** tekizlikde ýatan **AB** göni çyzygyň gorizontal proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylan ýagdaýy boýunça, berlen tekizligiň yzlarynyň utgaşan ýagdaýlaryny tapmazdan, şol **AB** göni çyzygyň gorizontal we frontal proýeksiýalarynyň gurluşy strelkanyň kömegi bilen 130 – nji suratda görkezilendir.

ÖZ - ÖZÜŇI BARLAMAK ÜÇIN SORAGLAR WE MESELELER:

1. Dereje çyzygynyň / gorizontalyň we frontalyň / töwereginde daşynda aýlamagyň manysy nämeden ybarat we proýektirleýji göni çyzyklaryň töwereginde aýlamakdan onuň näme tapawudy / aýratynlygy / bar?
2. Gorizontalyň ýa-da frontalyň töwereginde aýlananda nokadyň aýlama merkezini we aýlama radiusyny nähili kesgitlemeli?
3. Gorizontalyň / frontalyň / töwereginde aýlananda nokadyň gorizontal / frontal / proýeksiýasy ornuny haýsy tekizlikde we nähili üýtgedýär?



130-nji surat



131-nji surat

4. Gorizontalyň / frontalyň / daşynda aýlamak bilen **ABCD** / ***abcd, a¹b¹c¹d¹***/ dörtburçlugyň hakyky ululygyny ksgitlemeli / 131 – nji surat /.

Meseläni çözmek üçin görkezme. Ilki bilen **A, B, C** üç depäniň tekizliginde ýatan nokadyň proýeksiýasy hökmünde dörtburçlugyň dördünji depesiniň ***d*** gorizontal proýeksiýasyny gurmak hökmandyr.

5. **Utgaşdyrma** usulynyň manysy nämeden ybarat?

6. Tekizlik proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylanda, aýlama oky bolup näme hyzmat edýär?

7. Tekizligiň utgaşdyrylan yzyny nähili kesgitlemek bolar?

8. Utgaşdyrma usuly bilen haýsy meseleler / göni we ters meseleler / çözülýär?

9. Utgaşdyrylan nokadyň aýlanma merkezini we aýlama radiusyny epýurda nähili kesgitlemeli?

10. Tekizligiň yzyny utgaşdryman ýa-da utgaşdyryp, berlen nokat **H** tekizligi bilen nähili utgaşdyrylýar?

36. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINI ÇALŞYRMAK USULY

36.1. UMUMY MAGLUMAT

Aýlama we utgaşdyrma usullarynda proýektirlenýän obýektleriň orunlaryny üýtgedýärdiler, proýeksiýalar tekizlikleri bolsa öz ýerlerinde üýtgemän galýardylar. Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak usulynda bolsa tersine, proýektirleýji obýektler şol durşuna galdyrylyp, proýeksiýalar tekizlikleri öz ýagdaýlaryny geregiçe yzygiderli üýtgedýärler.

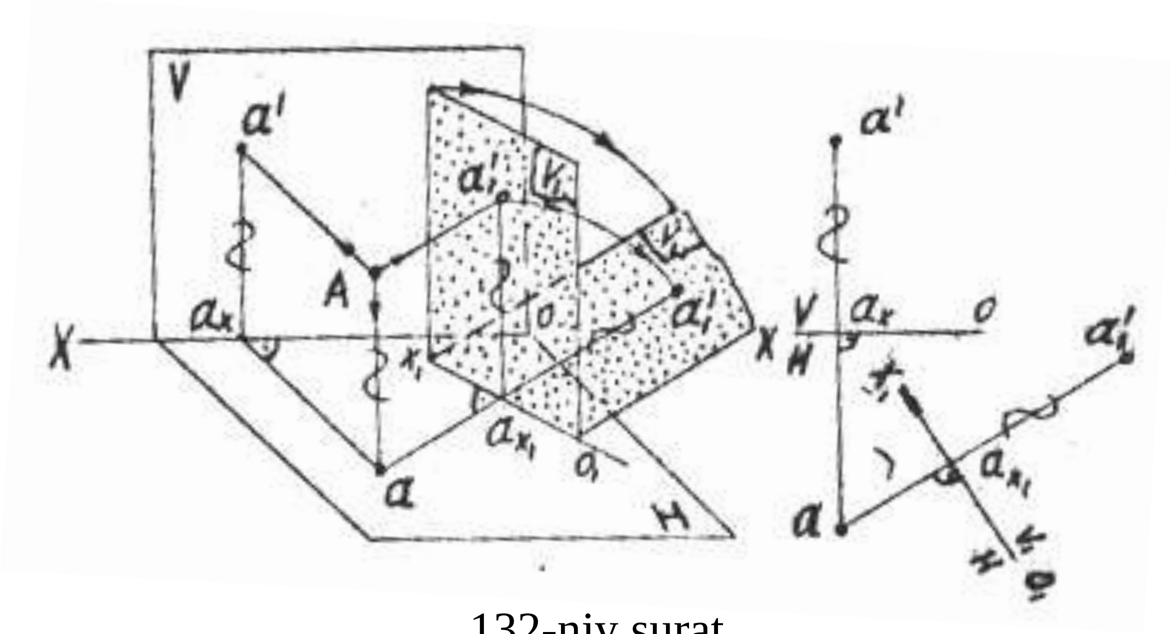
Proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usuly geometrik elementleriň proýeksiýalaryny üýtgetmeklige mümkinçilik berýär. Ýöne munuň özi olaryň giňişlikdäki orunlaryny üýtgetmegiň hasabyna däl-de, bu geometrik elementleriň proýektirlenilýän tekizlikleriniň ýagdaýyny üýtgetmegiň hasabyna amala aşyrylýar. Garalyp geçilýän bu usul proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyryp, öz ýerlerini üýtgetmäge mümkinçilik berýär, şeýlelikde her gezek bu tekizlikleriň biri üýtgedilende geometrik elementler iki sany özara perpendikulýar tekizliklere proýektirlener ýaly edilýär.

Nokatlaryň täze proýeksiýalarynyň häsiýetlerine we olary epýurda gurmagyň usulyna birnäçe meseleler arkaly garap geçeliň.

1 – nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V_1}{H}$ sistemada gurmaly / 132-njy surat /.

$\boldsymbol{V}$ proýeksiýalar tekizligi täze $\boldsymbol{V_1}$ □**H** proýeksiýalar tekizligi bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ sistemadan $\boldsymbol{X}_1$ okly täze $\frac{V_1}{H}$ proýeksiýalar tekizlikleriniň sistemasyna geçilende, A / $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^1$ / nokadyň $\boldsymbol{a_1^1}$ täze proýeksiýasynyň gurluşyna garap geçeliň.
H tekizligiň **“köne”** we **“täze”** sistemalaryň ikisi üçin hem umumy bolýanlygy üçin **A** nokadyň $\boldsymbol{Z}$ koordinatasy, ýagny **A**

nokatdan **H** tekizlige çenli aralyk /**A** ***a*** – kesim bilen aňladylan/ üýtgemän galýar.



132-njy surat

Şeýlelikde, täze frontal proýeksiýadan täze OX oka çenli aralyk çalşyrylan köne proýeksiýadan OX oka çenli aralyk çalşyrylan köne proýeksiýadan **OX** oka çenli aralykda deňdir, ýagny $\boldsymbol{a^1a_x = a_1^1\ a_{x1} = Aa = Z}$. Gorizontal ***a*** proýeksiýa öňküligine galar, nokadyň koordinatalary bolsa **X**, okuň täze ýagdaýyna baglylykda başga bolar.

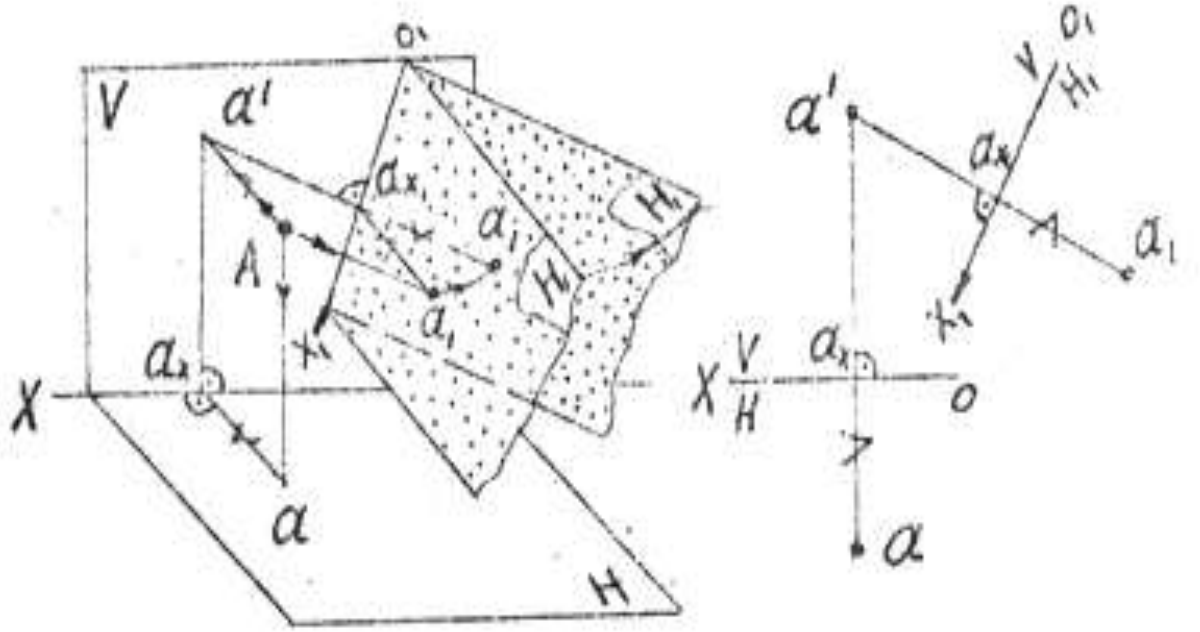
Epýury almak üçin $\boldsymbol{V_1}$ tekizligi $\boldsymbol{X_1}$ okuň daşynda aýlap, **H** tekizlik bilen utgaşdyrýarys. Täze $\boldsymbol{a_1^1}$ frontal proýeksiýa hem **H** tekizlik bilen utgaşar we ol ***a*** gorizontal proýeksiýa bilen birlikde $\boldsymbol{X_1}$ oka geçirilen perpendikulýaryň üstünde ýerleşer.

Ortogonal çyzgyda nokadyň $\boldsymbol{a_1^1}$ täze proýeksiýasy gurmak üçin nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasyndan islendik uzaklykda çalşyrylan täze $\boldsymbol{X_1}$ oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk indermek we şol perpendikulýaryň üstünde $\boldsymbol{a_{x1}}$ nokatdan başlap, öňki köne sistemadaky $\boldsymbol{a^1a_x}$ kesime deň bolan $\boldsymbol{a_x\ a_1^1}$ kesimi ölçäp goýmak ýeterlikdir

/ 36-njy b surat /.

2– nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V}{H_1}$ sistemada gurmaly / 133-nji surat /.

H tekizlik ***V*** tekizlige perpendikulýar bolan **H₁** tekizlik bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ tekizlikler sistemasyndan $\boldsymbol{X_1}$ täze okly $\frac{V}{H_1}$ tekizlikler sistemasyna geçilende, A /***a, a^1***/ nokadyň $\boldsymbol{a_1}$ täze gorizontal proýeksiýasynyň gurluşyna garap geçeliň.



133-nji surat

Ortogonal çyzgyda nokadyň täze proýeksiýasyny gurmak üçin $\boldsymbol{a^1}$ – frontal proýeksiýadan islendik uzaklykda geçirilen täze $\boldsymbol{X_1}$ oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk geçirmek we öňki sistemadaky $\boldsymbol{aa_x}$ kesime deň bolan $\boldsymbol{a_{x1}}$ $\boldsymbol{a_1}$ kesimi şol perpendikulýaryň üstünde $\boldsymbol{a_{x1}}$ nokatdan başlap ýerleşdirmek ýeterlikdir.

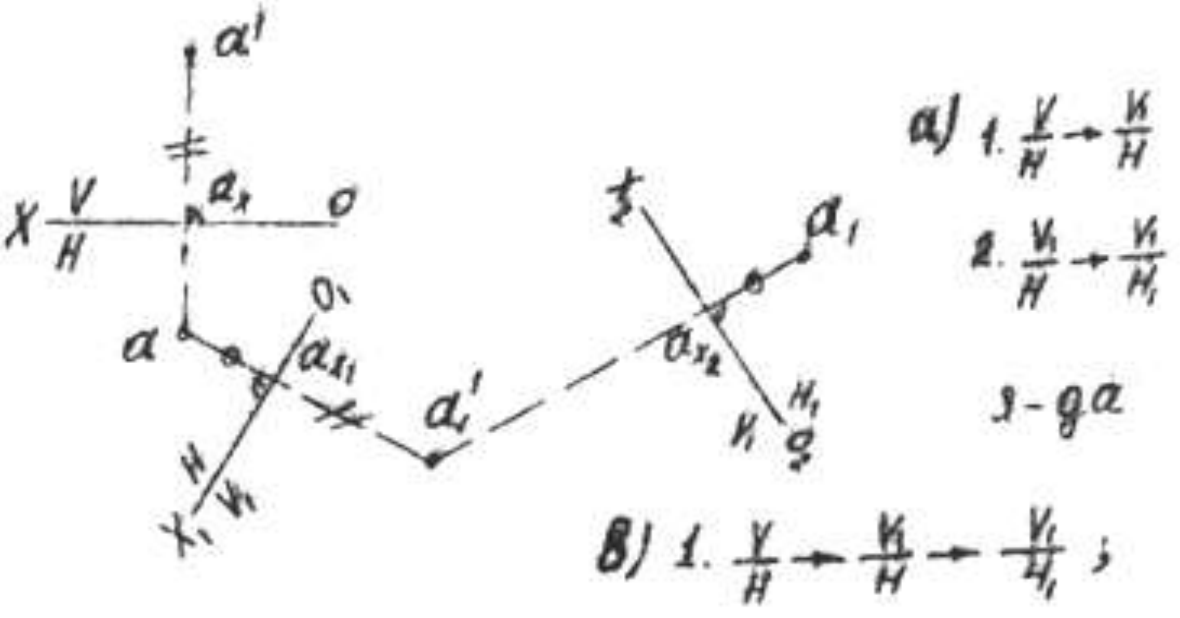
Iki sany özara perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizlikleriniň biri galan beýleki tekizlige perpendikulýar bolan täze tekizlik bilen çalşyrylanda, nokadyň täze proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasyndan täze oka çenli bolan aralyk nokadyň köne tekizlikdäki proýeksiýasyndan köne oka çenli aralyga deňdir.

Meseleler çözülende proýeksiýalar tekizligini yzygiderlilikde iki, üç we ondan-da köp gezek yzygiderli çalşyrmaly bolýan halatlary duş gelýär. Her gezek proýeksiýalar tekizlikleriniň bar bolan sistemasyndan täze sistema geçmeklik beýan edilen kanunalaýyklyk esasynda amala aşyrylýar.

3-nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V_1}{H}$ hem-de $\frac{V_1}{H_1}$ sistemada yzygiderli çalşyryp gurmaly / 134 – nji surat /.

V we **H** tekizlikler yzygiderli çalşyrylanda **A** nokadyň täze proýeksiýalaryny guralyň. Eger ***V*** tekizligi V_1 tekizlik bilen, **H** tekizligi bolsa $\mathbf{H_1}$ tekizlik bilen yzygiderli çalşyrsak, onda ilki proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H}$ sistemasyna soňra bolsa proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V_1}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H_1}$ sistemasyna geçýäris / 134-nji surat /.

Ortogonal çyzgyda a_1^1 we a_1 täze proýeksiýalary gurmak üçin $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$



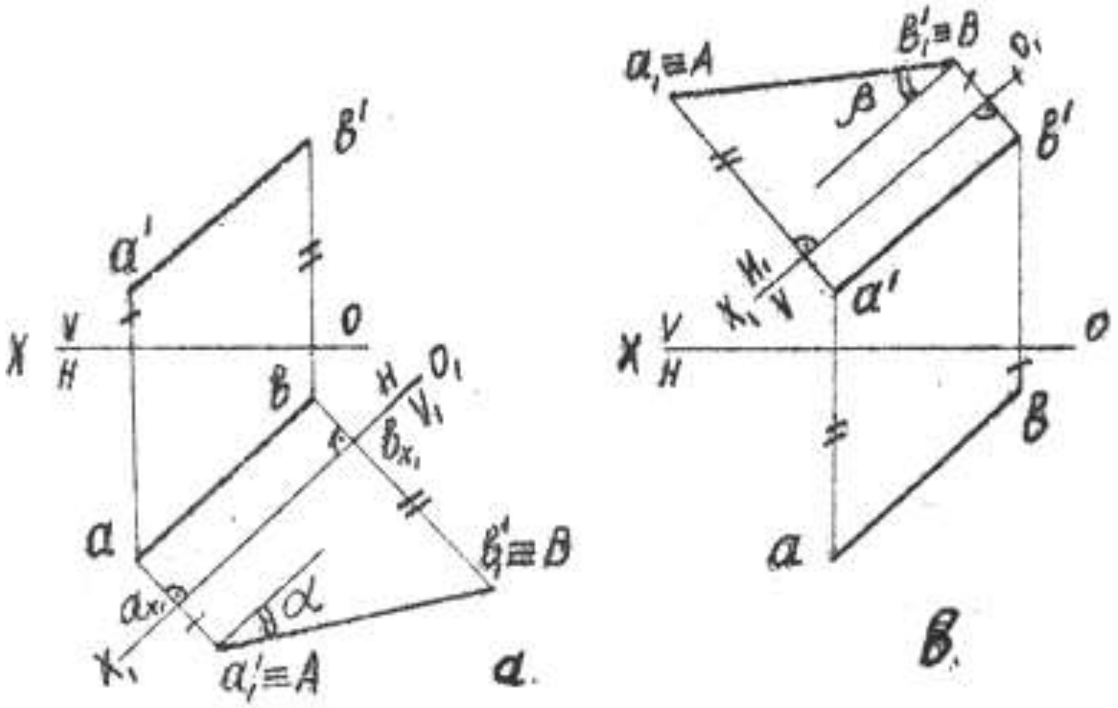
134-nji surat

sistema geçilende $a_{X1}\, a_1^1 = a_X\, a^1$ deňlikden peýdalanýarys. $\frac{V_1}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H_1}$ sistema geçilen bolsa $a_1\, a_{X2} = a\, a_{X1}$ deňlikden peýdalanýarys. Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmagyň guralyşy we ýazylyşy çyzgydan düşnüklidir.

36. 2.PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINI ÇALŞYRMAK USULYNY ULANYP ÖlÇEG MESELELERINI ÇÖZMEK

Ölçeg meselelerini çözmek üçin birnäçe meseläniň çözülişine garap geçeliň.

1-nji mesele. Umumy haldaky **AB** göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we onuň proýeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli / 135-njy surat /.



135-njy surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýda berlen **AB** kesim proýeksiýalar tekizlikleriň sistemasynda olaryň birine-de parallel däldir, diýmek, onuň proýeksiýalarynyň hiç biri hem kesimiň hakyky uzynlygyny şekillendirmez.

Kesimiň hakyky uzynlygyny tapmak üçin täze proýeksiýalar tekizligi berlen **AB** göni çyzyga parallel edilip ýerleşdirilmelidir. Onuň üçin bolsa $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistema geçilmelidir.

Meseläni çözmek üçin berlen **AB** kesime parallel bolan $\boldsymbol{V_1}$ täze proýeksiýalar tekizligini saýlamak gerek. **AB** kesimiň $\boldsymbol{V_1}$

täze proýeksiýalar tekizligindäki $a_1^1b_1^1$ proýeksiýasynyň uzynlygy **AB** kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar.

Eger göni çyzyk proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolsa, onda beýleki proýeksiýalar tekizliginde ol proýeksiýalar okuna parallel göni çyzyk bolup şekillenýändigi bize öňden bellidir. Şeýlelik bilen, eger **AB** kesime parallel bolan täze V_1 proýeksiýalar tekizligi saýlanyp alynýan bolsa, tekizligi şeýle saýlap almaklyga ortogonal çyzgyda kesimiň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna parallel bolan X_1 täze oky saýlap almaklyk gabat gelýär.

$$X_1 \parallel ab,\ \ V_1 \parallel ab,\ \ AB \parallel V_1,\ \ a^1{}_1 \equiv A^1,\ \ b^1{}_1 \equiv B,\ a^1{}_1\, b^1{}_1 = AB$$

a we ***b*** nokatlardan X_1 oka inderilen birleşdiriji çyzyklaryň, ýagny perpendikulýarlaryň üstünde $a_{X1}a_1^1 = a_Xa^1$, $b_{X1}b^1{}_1 = b_X b^1$ kesimleri ölçäp goýmak bilen alnan $a_1^1b_1^1$ göni çyzygyň frontal proýeksiýasyny alarys, ol hem **AB** kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar, ýagny

$a_1^1b_1^1 = AB$, sebäbi $AB \parallel V_1$.

Şunuň bilen birlikde çyzgydan görnüşi ýaly, **AB** göni çyzygyň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçy bolan ***a*** burçuny hem kesgitländiris. Sebäbi, proýeksiýalar tekizligi çalşyrylandan soň umumy haldaky **AB** kesim frontal göni çyzyk ýagdaýyny eýeländir. Şonuň üçin hem **AB** göni çyzygyň täze $a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasy bilen täze X_1 proýeksiýalar okunyň arasyndaky ***a*** burçy **AB** göni çyzygyň **H** tekizligine bolan iň uly ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger-de **AB** göni çyzygyň / kesimiň / ***V*** tekizligine ýapgytlyk burçuny ölçemeli bolsa, onda $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V}{H_1}$ sistema geçirmeli, hem-de X_1 täze oky a^1b^1 proýeksiýa parallel edip geçirmeli. Gurluş çyzgydan düşnüklidir.

135-njy ***a*** suratdan görnüşi ýaly, umumy haldaky berlen **AB** göni çyzyk hususy /frontal/ ýagdaýa geçendir, ýagny $AB \parallel V_1$; $ab \parallel V_1$;

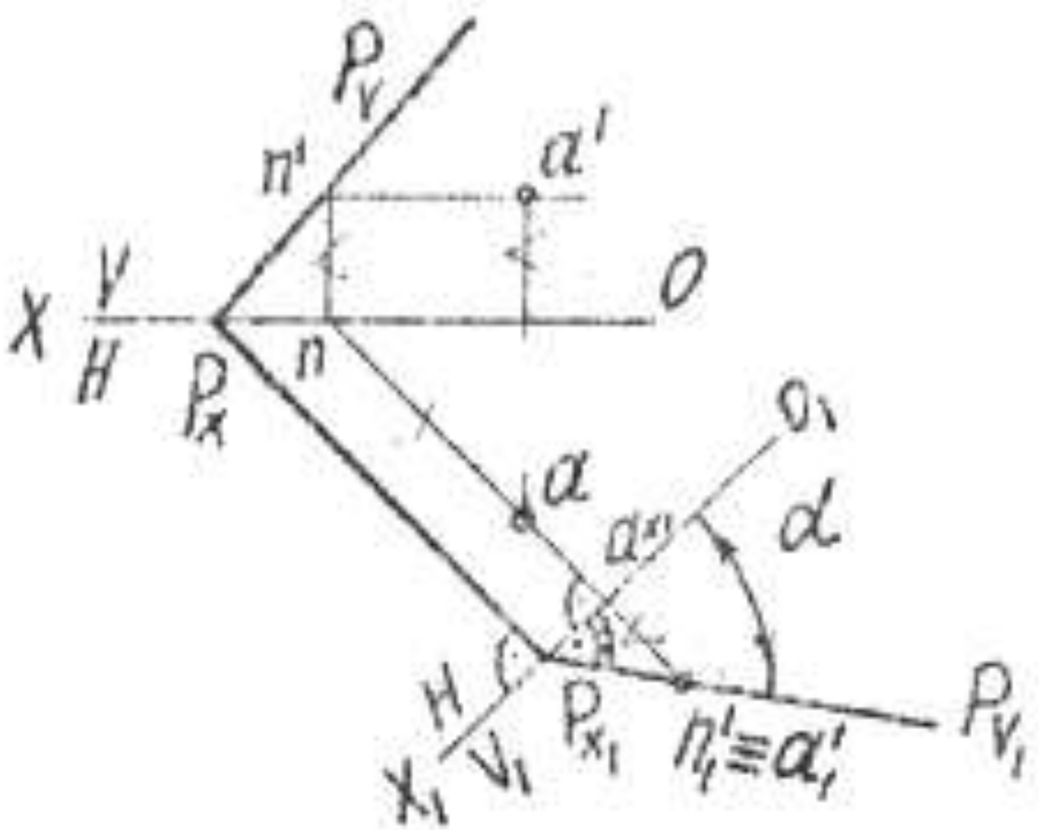
$ab \parallel X_1$; $a_1^1b_1^1 = AB$ frontal göni çyzyga öwrülendir.

135-njy ***b*** suratda bolsa ýagdaýda berlen **AB** göni çyzyk gorizontal göni çyzyk bolandyr. $\boldsymbol{AB}//\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^1//\ \boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{a}^1\boldsymbol{b}^1//\ \boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{a_1b_1} = \boldsymbol{AB}$. Şonuň üçin hem **AB** göni çyzygyň täze $\boldsymbol{a_1b_1}$ gorizontal proýeksiýasy bilen täze $\boldsymbol{X_1}$ proýeksiýalar okunyň arasyndaky alnan □ burçy bolsa, göni çyzygyň ***V*** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger-de berlen umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy proýektirleýji göni çyzyk etmekçi bolan bolsak, onda proýeksiýalar tekizligini yzly-yzyna iki gezek çalşyrmaly bolardyk.

1. $\frac{V}{H}\rightarrow\frac{V_1}{H}\rightarrow\frac{V_1}{H_1}$; $\boldsymbol{V}_1$ // $\boldsymbol{AB}$; $\boldsymbol{H}_1$□$\boldsymbol{AB}$ çyzgysyny, talyplar özüňize gurmaklyk maslahat berilýär.

2-nji mesele. P tekizlik yzlary bilen $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. $\frac{V_1}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_1} yzyny we **H** tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçuny gurmaly / 136-njy surat /.



136-njy surat

Berlen umumy haldaky **P** tekizlik $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. Çalşyrmak usulyny peýdalanyp, $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_1} yzyny gurmaly, ýagny frontakl proýektirleýji ýagdaýyna geçirmeli.

/ P□*V*₁ /.

Täze $\boldsymbol{X}_1$ oky $\boldsymbol{P}_{\mathrm{H}}$ gorizontal yza perpendikulýar edip geçirýäris.

X_1 □□P_H

$\boldsymbol{P}_{\mathrm{H}}$ gorizontal yzyň $\boldsymbol{X}_1$ täze ok bilen kesişýän nokady – tekizligiň P_{X_1} birleşme nokadyny kesgitleýär. Täze frontal yzy gurmak üçin ikinji nokadyň bolmagy zerur. Munuň üçin **P** tekizlige degişli erkin **A** nokady alýarys we onuň täze a_1^1 proýeksiýasyny gurýarys. Muny şeýle ýerine ýetirýäris: **A** nokadyň gorizontal proýeksiasy bolan *a* nokatdan täze $\boldsymbol{X}_1$ oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk inderýäris, soňra a_{X_1} nokatdan şol perpendikulýaryň üstünde - ugrunda $nn^1 = a_Xa^1$ deň bolan kesimi ölçäp goýýarys. Şondan soň n_1^1 ýagdaýyny tapýarys. Şol nokatda a_1^1 bolýar. $n_1^1 = a_1^1$;

Soňra $\frac{V}{H}$ sistemada **A** nokadyň $a_1^1 = n_1^1$ täze frontal proýeksiýasynyň üstünden we **P** tekizligiň P_{X_1} birleşme nokadynyň üstünden P_{V_1} täze frontal yzy geçirýäris.

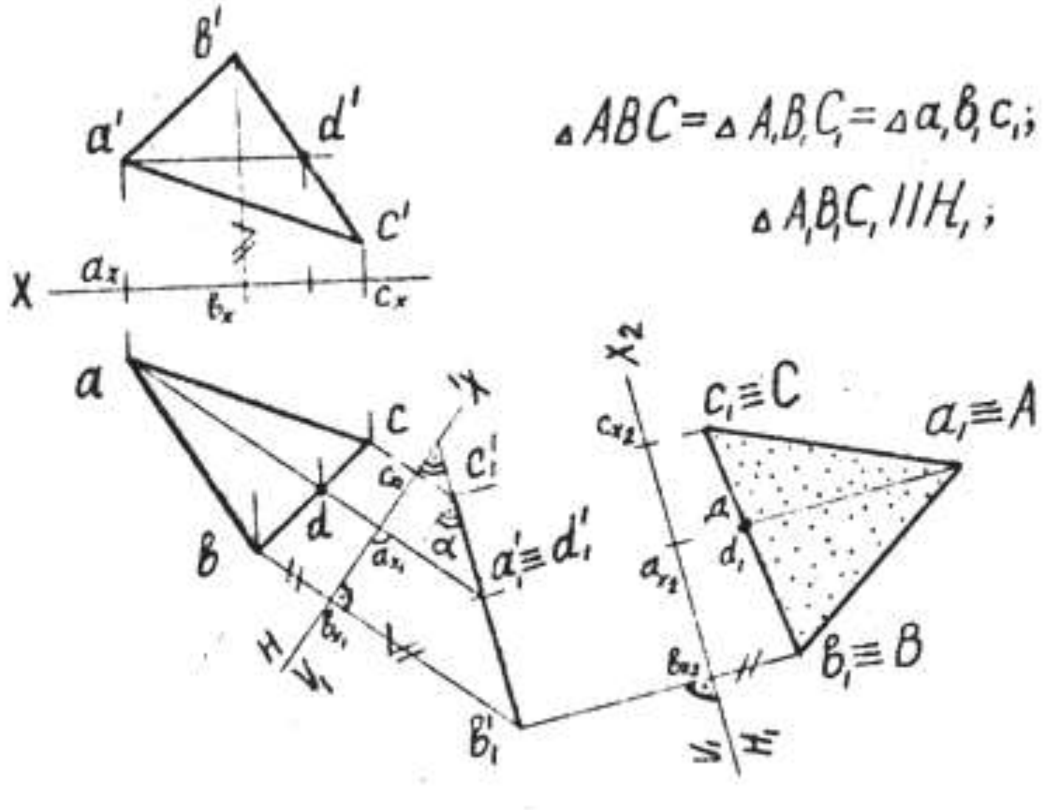
Berlen umumy haldaky **P** tekizligiň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy täze frontal P_{V_1} yz bilen **OX_1** ok aralygyndaky *a* burçuna deňdir.

3-nji mesele. Giňişlikde erkin ýagdaýda ýerleşen **ABC** üçburçlugyň proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny we bu üçburçlugyň hakyky ululygyny kesgitlemeli /137 – nji surat /.

Berlen üçburçlugyň tekizligine parallel tekizlige üçburçluk üýtgewsiz hakyky ululygynda proýektirlener. Şonuň üçin hem meseläni çözmek üçin şeýle proýeksiýalar tekizligini saýlap almak gerek. Berlen üçburçlugyň tekizligi proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasynda umumy haldaky tekizlikdir, şeýlelikde, oňa parallel bolan tekizlik ***V*** we **H** tekizlikleriniň hiç birine-de perpendikulýar bolmaz we proýeksiýalar tekizligi hökmünde kabul edilip bilinmez. Şeýlelik bilen proýeksiýalar tekizlikleriniň diňe birini çalşyrmak bilen meseläni çözmek mümkin däldir. Şonuň üçin hem proýeksiýalar tekizlikleriniň ikisini hem yzygiderli çalşyrmak ýeterlikdir.

Täze proýeksiýalar tekizliginiň birinjisini – $\boldsymbol{V}_1$, **ABC** üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar edip alýarys. Şeýle ýagdaýda $\boldsymbol{V}_1$ tekizlik bu üçburçlugyň tekizliginiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir göni çyzyga perpendikulýar bolmalydyr. Şeýle göni çyzyk hökmünde üçburçlugyň tekizliginiň **AD** gorizontalyny saýlap alýarys. Proýeksiýalar tekizligini bu saýlap almaklyga ortogonal çyzgyda gorizontalyň ***ad*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolan täze $\boldsymbol{X}_1$ proýeksiýalar oky saýlap almaklyk gabat gelýär. ***ad*** täze sistemada ol $a_1^1d_1^1$ nokat bolup proýektirlener.

ABC üçburçlugyň täze $\boldsymbol{V}_1$ tekizligine täze frontal proýeksiýasy $c_1^1a_1^1b_1^1$ göni çyzyk bolup proýektirlener, sebäbi ***ad***□$\boldsymbol{V}_1$; ***ad*** □□□***ABC*** onda □***ABC*** □$\boldsymbol{V}_1$.



137-nji surat

Proýeksiýalar tekizligini birnji gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçluk täzeki sistemada, ýagny $\frac{V_1}{H}$ sistemada frontal proýektirleýji ($\perp A_1B_1C_1 \perp V_1$) tekizlik boldy. Diýmek, **ABC** üçburçlugynyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy üçburçlugyň täze $a_1^1b_1^1c_1^1$ proýeksiýasy bilen täze X_1 proýeksiýalar okunyň arasyndaky emele gelen burça, ýagny a burça deňdir.

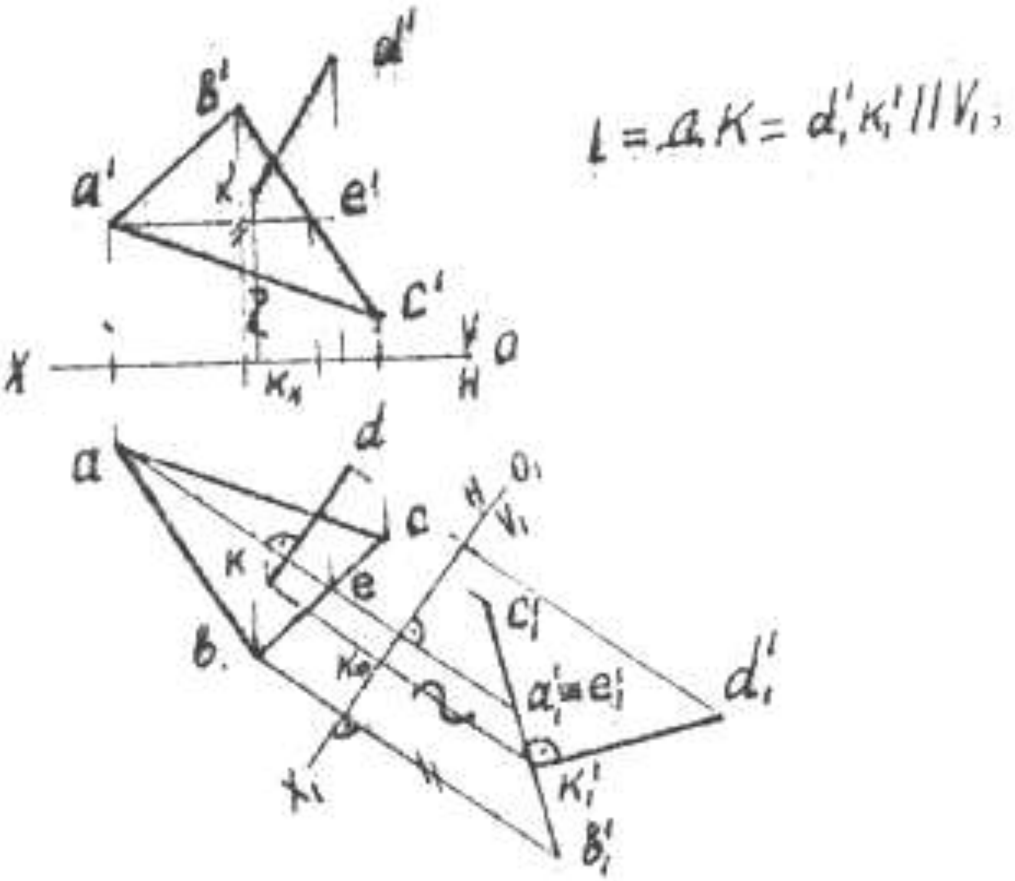
H tekizligi üçburçlugyň tekizligine parallel bolan täze H_1 gorizontal proýeksiýalar tekizlik bilen çalşyrýarys, munuň üçin ortogonal çyzgyda proýeksiýalaryň täze X_2 okuny üçburçlugyň täze frontal proýeksiýasyna, ýagny c_1^1,a_1^1 we b_1^1 göni çyzyga parallel edip geçirýäris.

Depeleriň gorizontal a, b we c proýeksiýalaryndan X_1 oka çenli aralygy ölçäp, soňra olary c_1^1,a_1^1 we b_1^1 nokatlardan geçirilen perpendikulýaryň üstünde c_{X_2}, a_{X_2} we b_{X_2}-den $a_{X_1}a = a_{X_2}a_1$;

$c_{X_1}c = c_{X_2}c_1$ we $b_{X_1}b = b_{X_2}b_1$ kesimleri goýýarys, hem-de a_1,c_1 we b_1 nokatlary alyp, olary özara birleşdirýäris. Şeýlelikde üçburçlugyň hakyky ululygyna deň bolan täze $a_1b_1c_1$ proýeksiýany alarys, ýagny $\triangle a_1b_1c_1 \cong \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Proýeksiýalar tekizligini iki gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky berlen **P** / $\triangle ABC$ / tekizlik birinji gezek proýektirleýji tekizlik / $a_1^1b_1^1c_1^1 \perp V$ / bolupdy, häzir bolsa H_1 tekizligine parallel boldy, ýagny gorizontal tekizlik boldy. Onda $A_1B_1C_1 \parallel H_1$ şonuň üçin hem üçburçlugyň gorizontal proýeksiýasy $a_1b_1c_1$ berlen üçburçlugyň hakyky ululygydyr:

4-nji mesele. D nokatdan umumy ýagdaýda berlen **ABC** üçburçlugyň tekizligine çenli bolan iň ýakyn ***l*** aralygy tapmaly / 138-nji surat /.



138-nji surat

Üçburçlugyň tekizligi $a_1^1b_1^1c_1^1$ göni çyzyga proýektirlener ýaly, ony frontal proýektirleýji tekizlik bilen çalşyrýarys. Bu ýerde hem gurluş edil geçen mysallardaky ýalydyr. Mundan başga-da proýeksiýalar tekizlikleriniň täze sistemasynda **D** nokadyň proýeksiýasyny tapmak gerek. Bu bolsa adaty usul bilen amala aşyrylýar.

Soňra d_1^1 nokatdan **ABC** üçburçlugyň tekizliginiň täze $a_1^1b_1^1c_1^1$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar inderýäris we perpendikulýaryň esasy bolan k_1^1 nokady alýarys.

$d_1^1k_1^1$ – **D** nokatdan **ABC** üçburçlugyň tekizligine çenli gözlenýän ýakyn aralyk bolar. $d_1^1k_1^1 = DK = l$

DK perpendikulýaryň H we ***V*** tekizliklerde proýeksiýalary tapylanda, ***dk*** gorizontal proýeksiýanyň ***AE*** gorizontalyň ***ae*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýardygyny göz öňüne tutmak gerek. $dk \perp ae$

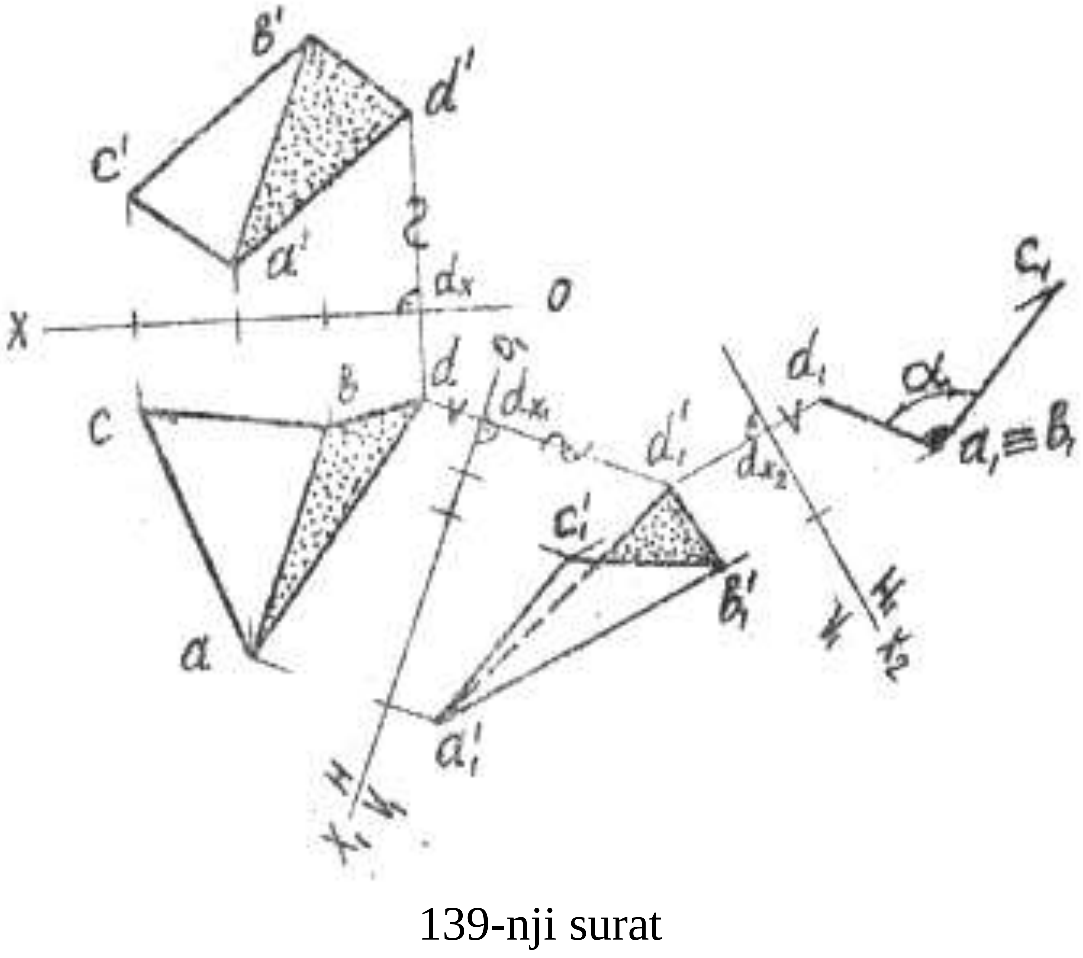
K^1 – frontal proýeksiýany **K** nokatdan **X** oka perpendikulýar edilip geçirilen baglanyşyk çyzgynyň üstünde tapýarys. $\mathbf{K^1}$ nokat **X** okundan $\mathbf{K_1^1}$ nokatdan $\mathbf{X_1}$ oka çenli aralyga deňdir, ýagny $\mathbf{K_XK_1^1 = K_XK^1}$**;**

Gurluşynyň dogrulygyny barlanyp görlende $\boldsymbol{d^1k^1}$ – berilse **ABC** – üçburçlugyň frontalynyň frontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolmalydyr, diýmek **DK□□ABC.**

5-nji mesele. **AB** göni çyzyk boýunça kesişýän **CAB** we **DAB** umumy ýagdaýdaky üçburçluklaryň proýeksiýalary berlipdir. Tekizlikleriň umumy **AB** gapyrgasyndaky iki granly burçunyň ululygyny kesgitlemeli / 139-nji surat /.

Iki tekizligiň arasyndaky burç bu tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolan tekizligiň üstündäki çyzyk burçy bilen ölçelýär.

Ikigranly burç onuň gapyrgasyna perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizligine hakyky ululygynda proýektirlenýär.



139-nji surat

Meseläni çözmek üçin proýeksiýalar tekizlikleriniň ikisini-de yzygiderli çalşyrýarys, ilki **AB** gapyrga täze $\boldsymbol{V_1}$ proýeksiýalar tekizligini parallel bolar ýaly edýäris, soňra bolsa ikinji gezek H_1 proýeksiýalar tekizligini oňa perpendikulýar ýerleşdirýäris.

Berlen bu meselede ilki ***V*** tekizlik **AB** gapyrga parallel bolan V_1 tekizlik bilen, soňra bolsa **H** tekizlik **AB** gapyrga perpendikulýar bolan H_1 tekizlik bilen çalşyrylandyr / 139-nji surat /.

V_1 tekizlik alnanda, X_1 ok **AB** gapyrganyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna parallel edilip ýerleşdirildi we ikigranly burçuň täze c_1^1, a_1^1, b_1^1 we d_1^1 frontal proýeksiýasy tapyldy. **H** tekizlik H_1 tekizlik bilen çalşyrylanda X_2 ok **AB** gapyrganyň täze $a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar edilip alyndy we ikigranly burçuň ululygyny kesgitleýän çyzyk burçuň täze gorizontal proýeksiýasy guruldy.

Gurluş adaty usul bilen gurlandyr we çyzgydan düşnüklidir.

ÖZ-ÖZÜŇI BARLAMAK ÜÇIN SORAGLAR WE MESELELER:

1. Proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulynyň manysy nämeden ybarat?
2. Proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak metodynyň aýlama metodyndan nähili tapawudy bar?
3. Köne şekiller tekizlige garanyňda täze çalşyrylýan şekiller tekizlik nähili ýagdaýy eýelemeli?
4. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birini ýa-da ikisini çalşyranyňda täze tekizligi nähili gurmaly?
5. Umumy haldaky göni çyzygyň kesimi tekizlige nokat bolup proýektirlener ýaly, proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmagy nähili ýerine ýetirmeli?
6. Umumy ýagdaýda berlen **AB** we **CD** parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy kesgitlemeli / 140-nji surat /.

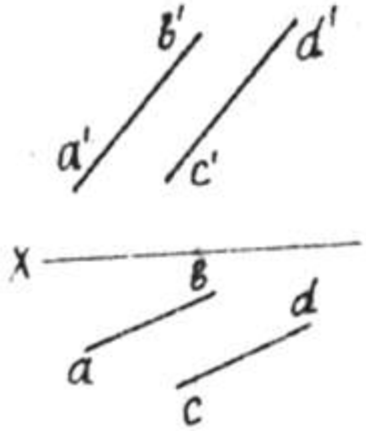
Meseläni çözmek üçin görkezme. Berlen göni çyzyklara perpendikulýar bolan tekizlige gözlenýän uzaklyk üýtgewsiz proýektirlener.

7. Umumy haldaky üçburçluk hakyky ululygynda proýektirlener ýaly, proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmagy nähili ýerine ýetirmeli?

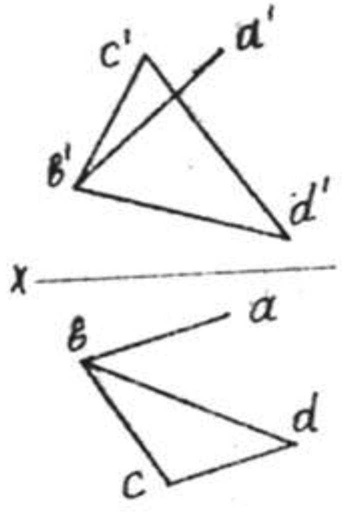
8. Proýeksiýalar tekizlikleriniň biri çalşyrylanda, iki granly burçuň hakyky ululygy haýsy ýagdaýlarda üýtgewsiz kesgitlenilýär?

9. **AB** göni çyzygyň **BCD** üçburçlugyň tekizligi bilen emele getirýän ýapgytlyk burçunyň ululygyny kesgitlemeli / 141-nji surat /.

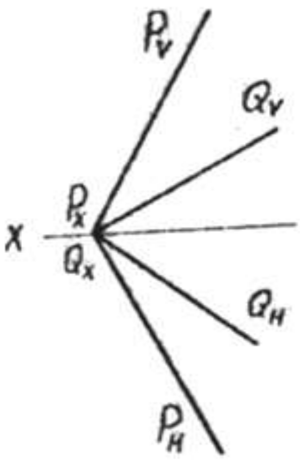
10. Yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky **P** we **Q** tekizlikleriň özara kesişip emele getiren iki granly burçunyň ululygyny kesgitlemeli / 142-njy surat /.



140-nji surat



141-nji surat



142-njy surat

M E T O D I K I   G Ö R K E Z M E

Baky Bitarap, Garaşsyz Türkmenistan ýurdumyzda täze özgerişlikleriň döwri başlandy. Bu Galkynyş döwrüň belent meýilnamasy bilen baglylykda konstruktorlar we proýektirleýjiler çylşyrymly desgalaryň, konstruksiýalaryň we mehanizmleriň proýektlerini işläp düzýärler. Bu işleri ýerine ýetirijilerden proýeksion şekillendirmegiň teoriýasyndan, ýagny grafiki aňlatmak boýunça çuňňur bilimi talap edýär.

Diýmek, çyzuwly geometriýany, çyzuwy, surat çekmegi öwrenmeklik inženeriň kemala gelmeginde esasy orny eýeleýär. Bu dersler-bilimler inžener-mehanige maşynlary we mehanizmleri konstruirlemekde, arhitektora hem-de inžener gurluşykça jaýlary we desgalary proýektirlemekde we gurmakda, topografa ýeriň üstüni öwrenmekde, hudožnige surat çekmekde zerur gerekdir. Inženeriň praktiki işinde çyzmaly geometriýanyň ähmiýeti has-da möhümdir, sebäbi onuň döredijilik işi ýa-da desgalaryň taslamasyny döretmeklige, ýa-da taýýar taslamalar boýunça desgalary bina etmeklige gönükdirilendir.

Çyzuwly geometriýa giňişlikdäki jisimleriň tekizligiň üstündäki şekillerini – proýeksiýalaryny gurmagyň usullaryny öwredýän, metrik – ölçeg we pozision meseleleri işlemegiň ýollaryny öwredýän ylymdyr.

Çyzuwly geometriýada garalyp geçilýän meseleleriň iki ugry bardyr: **birinjisi,** şekillendirişdir. Munda giňişlik formaly jisimleriň proýeksion şekillerini almagyň düzgünleri we tärleri öwrenilýär. **Ikinjisi**, nazary ugrudyr. Munuň maksady şekillendirişiň kömegi bilen giňişlikli meseleleri çözmek we derňemek üçin esaslary bermekden ybaratdyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny **yzygiderli** we **çuňňur** öwrenmeklik **giňişleýin pikirlenmegiň ösmegine,** giňişlikleýin formaly predmetleri olaryň çyzgylary boýunça göz öňüne getirmegi başarmaga we täzeden proýektirlenýän predmetleri şekillendirmegi başarmaga ýardam edýär.

Talyplara çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik zerurdyr. Sebäbi, olara **ýyllyk** we **diplom taslamalaryny** ýerine ýetirmek, öz hünärleri boýunça ýörite edebiýatlary çuňňur özleşdirmek üçin bu ders esasy gural bolup hyzmat edýär.

Talyplar çyzuwly geometriýany ilki okap başlan döwürlerinde kä halatlarda uly kynçylyk bilen özleşdirýärler. Bu kynçylyklar, öňi bilen çyzmaly geometriýanyň talyplar üçin täze ders bolýanlygy, berlen geometrik formalary giňişlikde aýdyň göz öňüne getirmekligi talap edýänligi bilen baglanyşyklydyr. Çyzuwly geometriýany örän düşünjelilik bilen öwrenmek üçin ony öwrenmegiň ilkinji döwründe aýdyň şekilli çyzgylarda – suratlarda özüňi barlamak gerekdir.

Galyberse-de, ýönekeý modelleri taýýarlamaklyk ýa-da maketlerden peýdalanmaklyk peýdalydyr. Çyzuwly geometriýany has çuňňur öwrendigiňçe, proýeksiýalary okamaga endigiň kemala gelmegi bilen baglanşylylykda, **aýdyň şekilli çyzgylara bolan isleg kem-kemden azalmalydyr.**

Çyzuwly geometriýa kursuny öwrenmekde talyp kursuň esasy temalaryna aýratyn uly üns berilmelidir. Çyzuwly geometriýany öwrenmekde proýeksiýalaryň häsiýetlerini özleşdirmek aýratyn ähmiýete eýedir, **metrik**, şeýle hem **pozision** meseleleri çözmek üçin bolsa proýeksiýalaryň häsiýetleri esas bolup durýar.

Çyzuwly geometriýany beýan etmegiň gidişinde **ýönekeýden çylşyrymlylyga** geçilýär, umumy okuw dersinde kem - kemden materiallaryň çylşyrymlylygy artýar, beýan edilýän meseleler giňelýär we çuňlaşýar. Şonuň üçin başdaky temalary kemter özleşdirmek soňky materiallary özleşdirmekde uly päsgelçilik döredýär. **Her bir umumy okuwy onuň diňlenen gününde täzeden işläp geçmek möhümdir.**

Umumy okuw materiallary diňe umumy okuw üçin niýetlenen depderine konspektirlenen ýazgylardan okap öwrenmek bilen çäklenmän, eýsem olaryň üstüni okuw kitabynda giňden berlen materiallar bilen doldurmak hökmandyr. Umumy okuw ýazgylaryndaky ähli formulirowkalaryň dogrulygyny anyklamak, umumy okuw depderdäki ähli suratlary we çyzgylary has takyk hem-de dogry ýerine ýetirmek zerurdyr. Umumy okuw materiallaryň özleşdirilendigine göz ýetirmek üçin şol tema degişli meseleleriň ençemesini özbaşdak çözmek gerek. Her bir geçilen täze tema oňat düşünmek üçin şondan ozalky geçilen temanyň materiallaryna täzeden göz gezdirmek we şol boýunça okalanlary ýa-da salmak möhümdir. Islendik özbaşdak ýerine ýetirilen – çyzylan meseleler mydama çyzgy gurallaryny dogry ulanylyp talaba laýyklykda çyzyklaram, belgilerem – san bilen ýa-da harp bilen bellenende standarta gabat gelmelidir, bu talap mydama talyba sapak bolmalydyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny çuňňur öwrenmeklik her bir talybyň yzygiderli okamaklygyny, onuň özbaşdak meseleleri çözmekligini talap edýär.

Nazaryýetiň esasy düzgünlerini özleşdirmekde mesele çözmegiň uly ähmiýeti bardyr. Amaly okuwyň öň ýanynda nobatdaky amaly okuwyň mazmuny bilen tanyşmak, meseläniň soraglaryna jogaplar taýýarlamak, **öýe berlen meseleleri özbaşdak çözmek gerek.** Meseleleri dogry çözmek üçin onuň şertini üns berip okamaly, berlen geometrik elementleri giňişlikde aýdyň göz öňüne getirmeli, **meseleleri çözmegiň plan-shemasyny düzmeli,** soňra öwredilen usullardan, düzgünlerden we kadalardan peýdalanyp, mesele çözmäge girişmeli. Usulyýetiň düzgüni boýunça talap edilişi ýaly, amaly okuwlarda meseleleri talyplar özbaşdak işleýärler.

Mugallym bolsa, meseleleri takyk işlemek üçin olara meýilnama düzmekde ugrukdyryjy görkezme berýär. Diýmek, her bir amaly okuwa yzygiderli taýýarlanmak bilen, talyp işçi depderinde bar bolan ähli meseleleri dershanalarda çözmäge ukyply bolup biler.

Umumy okuw wagtyndaky material gaýtadan işlenenden soň, her kim özüne berlen barlag işleri özbaşdak ýerine ýetirmäge girişip biler. Barlag işleriniň maksady bolsa nazary materialy berkitmekdir, alnan bilimi amaly okuwda, tejribede ulanmagy başarmakdyr, Grafiki işleri takyk ýerine ýetirmekdir we esasan-da talybyň giňişlikde göz öňüne getirmegini ösdürmekdir.

Her bir meseläniň çözgüdi iki bölümden ybarat bolmalydyr:

1. Meseläniň giňişlikdäki çözgüdi şonda gözlenýän geometrik elementi kesgitlemek üçin giňişlikde nähili çyzyklaryň, tekizlikleriň ýa-da üstleriň yzygiderli geçirilmelidigi anyklanylýar.

2. Meseläniň proýeksiýalardaky çözgüdi munuň özi çyzmaly geometriýanyň nukdaý nazaryndan garanyňda esasy zatdyr.

Meseleleri üstünlikli çözmek üçin talypdan, ozaly bilen, **elementar geometriýanyň, planimetriýanyň** we **stereometriýanyň** esasy teoremalaryny oňat bilmeklik hem-de epýurdan – çyzgydan baş çykarmagy başarmaklyk talap edilýär. Epýura oňat düşünmeklik talyba has kyndyr, şonuň üçin hem bu işde **mydama mugallymyň yzygiderli, ýadawsyz amaly we usuly kömegi gerekdir.**

GOŞMAÇALAR
1-nji Epýur

Maksady: Talyplaryň gönüburçly parallel şekillendirmekde nokadyň,göni çyzygyň we tekizligiň özara ýagdaýlaryna degişli pozision(özara gatnaşyklaryna degişli)- metriki (ölçeg) meseleleri yzygiderli işläp,bilimlerini berkitmeklerindedir.

Mazmuny: Umumy ýagdaýda ABC üçburçlygyň tekizligi we D nokat berlen.Şu aşakda görkezilen meseleleri işlemeli.

1. D nokatdan ABC üçburçlygyň tekizligine çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli.
2. Berlen ABC üçburçlygyň tekizliginden 40mm daşlykda oňa parallel bolan tekizligi gurmaly.
3. Berlen ABC üçburçlygyň B depesinden AC tarapyna perpendikulýar tekizlik geçirmeli, tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmaly.Tekizlikleriň görünýän we görünmeýän ýerlerini anyklamaly.

Usuly görkezme: Bu epýury A3(297*420mm) ululykdaky format çyzgy tagtasynda,galam bilen çyzmaly.Nokatlaryň koordinata oklarynyň san bahasyny her talyp öz şahsy warianty boýunça almaly. 1-nji we 2-nji meseläni 1:1 masştabda, 3-nji meseläni 2:1 masştabda ýerine ýetirmeli.

Meseleleri işläp başlamazdan öňürti,meseläniň yzygiderli işlenişini giňişlikde göz öňüne getirmäni öwrenmeli, mümkin bolsa başlangyç döwürde meseläniň suratyny çyzmagy endik edip,soňa baka kem-kemden surat çekmekden el çekmeli.

Islendik meseläni çyzyp başlamazdan, ilki bilen çyzgynyň ölçeglerine, nähili çyzgy tagtasynda ýerine ýetiriljegine , haýsy masştabda çyzyljagyna üns berilmelidir.

Şu görkezmelerden ugur tutup, çyzgy tagtasynyň pesinden 70% meýdanyny peýdalanmaly, çyzgylary tagtada amatly ýerleşdirmeli we çyzgynyň çyzyklaryny TDS 2.303-81-nyň talaplaryny doly berjaý etmeklik bilen ýerine ýetirmeli.

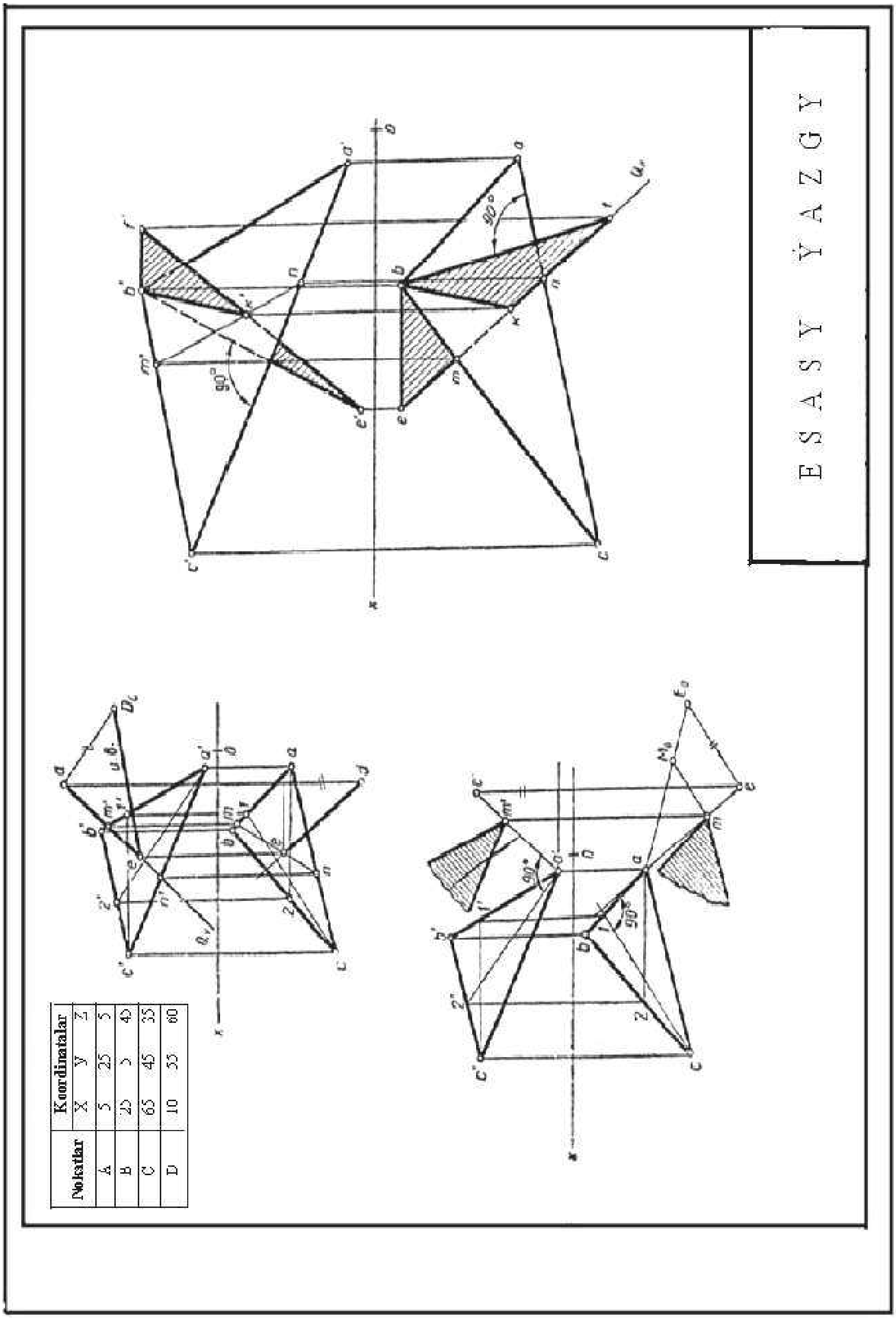
Epýurlar ýerine ýetirilende çyzgy tagtasynyň ýokarky çep tarapynda talybyň öz şahsy wariantyna degişli nokatlaryň koordinatalarynyň san bahalary ýerleşdirilip, aşaky sag

tarapynda TDS 2.304-68 talaplaryny doly berjaý etmeklik bilen esasy ýazgy ýazylýar.
Çyzgylarda harp - san belgiler bilen ýazylýan baglanyşyklar dogry goýulmalydyr we nokatlary birleşdiriji çyzyklaryň doly geçirilmegi hökmanam däldir.

1-nji epýuryň ýumuşlarynyň wariantlary

War. №	Noka-tlar	Koordinatalar			War. №	Noka-tlar	Koordinatalar		
		x	y	z			x	y	z
1.	A B C D	65 10 0 35	10 20 60 70	20 0 60 5	15.	A B C D	66 10 0 35	20 0 60 5	10 20 60 70
2.	A B C D	70 45 0 20	0 50 20 50	60 10 10 55	16.	A B C D	70 45 0 20	60 10 10 55	0 50 20 50
3.	A B C D	70 40 0 65	60 0 45 15	45 55 10 0	17.	A B C D	70 40 0 65	45 55 10 0	60 0 45 15
4.	A B C D	65 40 0 70	20 5 50 65	0 55 5 55	18.	A B C D	65 40 0 70	0 55 5 55	20 5 50 65
5.	A B C D	60 45 0 10	60 15 5 45	10 55 25 55	19.	A B C D	60 45 0 10	10 55 25 55	60 15 5 45
6.	A B C D	60 45 5 70	65 20 10 20	20 50 10 10	20.	A B C D	60 45 5 70	20 50 10 10	65 20 10 20

7.	A B C D	65 40 0 55	15 0 40 60	0 55 20 50	21.	A B C D	65 40 0 55	0 55 20 50	15 0 40 60
8.	A B C D	60 45 5 75	65 10 10 15	30 60 20 10	22.	A B C D	60 45 5 75	30 60 20 10	65 10 10 15
9.	A B C D	75 30 10 60	25 5 60 55	0 50 20 55	23.	A B C D	75 30 10 60	0 50 20 55	25 5 60 55
10.	A B C D	80 45 0 10	20 0 45 0	10 70 40 15	24.	A B C D	80 45 0 10	10 70 40 15	20 0 45 0
11.	A B C D	65 20 0 60	20 5 50 55	55 5 25 10	25.	A B C D	65 25 0 60	55 5 25 10	20 5 50 55
12.	A B C D	75 35 0 65	5 55 25 55	25 65 0 0	26.	A B C D	75 35 0 65	25 65 0 0	5 55 25 55
13.	A B C D	80 0 30 70	0 20 45 55	40 70 0 65	27.	A B C D	80 0 30 70	40 70 0 65	0 20 45 55
14.	A B C D	70 50 0 60	10 45 25 55	20 50 10 0	28.	A B C D			



Nokatlar	Koordinatalar		
	X	Y	Z
A	5	25	5
B	25	5	40
C	65	45	35
D	10	55	60

2-nji Epýur

Maksady: Talyplaryň gönüburçly parallel şekillendirmekde nokadyň,göni çyzygyň we tekizligiň özara ýagdaýlaryna degişli pozision(özara gatnaşyklaryna degişli)- metriki (ölçeg) meseleleri yzygiderli işläp,umumy we amaly sapaklarda alan bilimlerini,
endiklerini,başarnyklaryny, göz öňüne getirijiliklerini ösdürip berkitmeklerindedir.

Mazmuny: SABC piramida depeleriniň koordinatalary bilen berlen. Şu aşakda görkezilen meseleleri işlemeli.

1. Piramidanyň ABC-esasynyň natural ululygyny kesgitlemeli.
2. Piramidanyň S-depesinden ABC esasyna çenli bolan iň ýakyn aralygy tapmaly.
3. Piramidanyň SA we BC gapyrgalarynyň iň ýakyn aralygyny tapmaly.
4. Piramidanyň AB gapyrgasyndaky iki granly burçuň ululygyny kesgitlemeli.

Usuly görkezme: Bu epýury A3(297*420 mm) ululykdaky format çyzgy tagtasynda,galam bilen çyzmaly.Nokatlaryň koordinata oklarynyň san bahasyny her talyp öz şahsy warianty boýunça almaly. Meseläni 1:1 masştabda ýerine ýetirmeli.Meseleleri işlände 1-nji epýuryň usuly görkezmesinde aýdylan talaplary berjaý etmek bilen:

1-nji mesele işlenende tekizligiň esasy çyzyklarynyň (gorizontalyň we frontalyň) daşynda aýlamak bilen

2-nji meselede şekiller tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlap we ýerini üýtgetmek bilen

3-nji we 4-nji meseleler işlenende şekiller tekizligini çalşyrmak usuly bilen ýerine ýetirilýär.

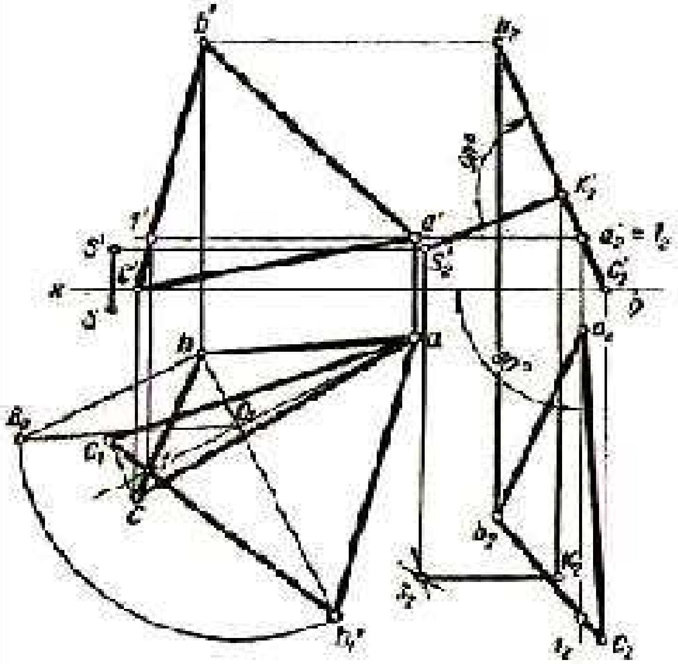
Epýuryň 1-2 meselelerini bir çyzgyda ,3-4 meselelerini bir çyzgyda ýerleşdimek bolýar.

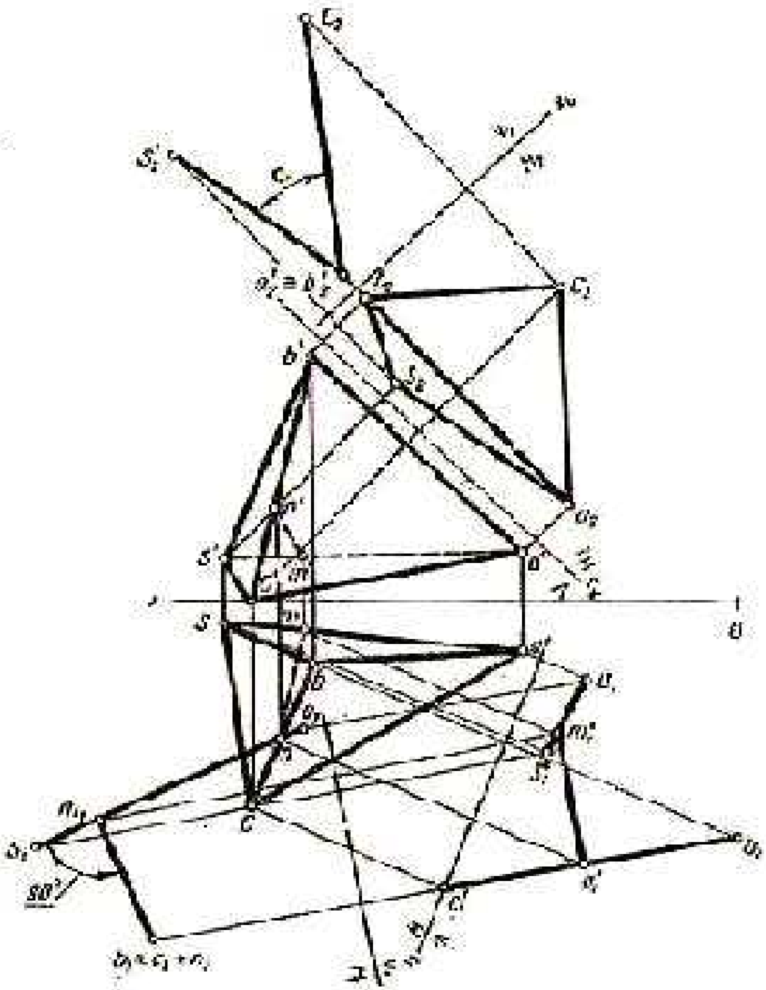
2-nji epýuryň ýumuşlarynyň wariantlary.

War. №	Nokatlar	Koordinatalar			War. №	Nokatlar	Koordinatalar		
		x	y	z			x	y	z
1.	S	65	65	50	15.	S	65	50	65
	A	45	5	55		A	45	55	5
	B	5	45	10		B	5	10	45
	C	70	15	0		C	70	0	15
2.	S	35	60	5	16.	S	35	5	60
	A	65	0	20		A	65	20	0
	B	0	50	60		B	0	60	50
	C	10	10	0		C	10	0	10
3.	S	55	10	50	17.	S	55	50	10
	A	35	60	35		A	35	35	60
	B	5	25	10		B	5	10	25
	C	60	30	5		C	60	5	30
4.	S	10	0	15	18.	S	10	15	0
	A	80	20	10		A	80	10	20
	B	45	0	70		B	45	70	0
	C	0	45	40		C	0	40	45
5.	S	70	65	35	19.	S	70	55	65
	A	40	5	55		A	40	55	5
	B	0	50	10		B	0	10	50
	C	65	20	0		C	65	0	20
6.	S	70	50	5	20.	S	70	5	50
	A	75	15	50		A	75	50	15
	B	35	0	0		B	35	0	0
	C	10	45	20		C	10	20	45
7.	S	60	45	55	21.	S	60	55	45
	A	75	25	0		A	75	0	25
	B	30	15	50		B	30	50	15
	C	10	50	20		C	10	20	50
8.	S	75	25	10	22.	S	75	25	20
	A	45	20	60		A	45	60	20
	B	0	10	20		B	0	20	10
	C	60	65	20		C	60	30	65

9.	S A B C	75 60 45 5	25 65 10 10	20 20 60 20	23.	S A B C	75 60 45 5	10 20 60 20	25 65 10 10
10 .	S A B C	60 45 0 60	10 15 5 60	20 55 25 10	24.	S A B C	60 45 0 60	20 55 25 10	10 15 5 60
11 .	S A B C	20 10 55 80	50 20 50 0	45 10 10 60	25.	S A B C	20 10 55 80	45 10 10 60	50 20 50 0
12 .	S A B C	65 75 5 55	0 20 10 50	40 0 15 30	26.	S A B C	65 75 5 55	45 0 15 30	0 20 10 50
13 .	S A B C	75 45 5 70	55 55 10 0	65 5 50 20	27.	S A B C	75 45 5 70	65 5 50 20	55 55 10 0
14 .	S A B C	70 80 10 60	45 0 15 30	0 30 10 50	28 .	S A B C			

Nokatlar	Koordinatalar		
	X	Y	Z
S	115	5	10
A	45	15	15
B	95	15	60
C	110	30	0





[illegible] epyur				
[illegible]	Amonov		TPI	1:1
[illegible]	Taganov			

EDEBIÝAT :

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň “Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin” Milli maksatnamasy, Aşgabat, 2007.
8. “Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry” Milli Maksatnamasy, “Türkmenistan” gazeti, 2003-nji ýylyň 27-nji awgusty.
9. “Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy”. Aşgabat, 2006.

10. Э.Аннабердиев. Начертал геометрия. Ашгабат. Магарыф. 1988.

11. E. Annaberdiýew. Inženerçilik çyzgy. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýt gullugy. 2002.

12. Э Аннабердиев, Б.А.Ашыров Устлерин кесишмеги. Ашгабат, 1981.

13. Х.А.Арустамов. Сборник задач по начертательной геометрии. М., Машгиз. 1965.

14. Б.А.Ашыров. Рабочая тетрадь по начертательной геометрии. Издание № 1, часть первая, Ашхабад, 1973.

15. Б.А.Ашыров. Чызыклы геометрия (Нокат, гони чызык

16. ве текизлик). Биринжи нешир, Ашгабат, 1976.

17. Б.А.Ашыров. Чызыклы геометрия (Айламак, проекциялар текизликлерини чалшырмак) Ашгабат, 1980.
18. Абдумаликов А Чизмачиликдан терминалогик лугам справочник «Укутувчи» - Ташкент 1977
19. Х.Б.Буравцев и другие. Черчение и начертательная геометрия.Издательство “Просвещение” М., 1969
20. 14. А.Б.Бубеньников, М.Ю.Громов Начертательная геометрия Издательство “Высшая школа” 1973
21. Х А Глаголев Начертательная геометрия Госиздат М 1953
22. К.Х.Гордеев О взаимного пересечения поверхностей и их развертках. ИздательствоТомского университета, 1958
23. Б.О.Гордон, М.А.Семенцов–Огиевский Курс начертательной геометрии “Высшая школа” М., 1971
24. А.И.Добряков Курс начертательной геометрии Госиздат М-Л 1962
25. В.Д.Засов и др. Задачник по начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1968.
26. Е.Б.Зеленин Курс начертательной геометрии М Физматгиз 1961
27. П. И. Ивашкевич Пересечение поверхностей тел Ленинград 1959
28. А.М.Иерусалимский. Начертательная геометрия. Росвузиздат, 1963.
29. Н.Н.Крылов и др. Начертательная геометрия. «Высшая школа», 1977.
30. Н.С. Кузнецов. Начертательная геометрия. Издательсиво «Высшая школа», Москва. 1969.
31. 25. С.М.Колотов и др. Курс начертательной геометрий. Госстройиздат УССР, Киев, 1961.
32. А.Б.Ланюк Аксонометрические проекции «Госстройиздат» Москва 1956
33. А. Г. Климухин Начертательная геометрия Стройиздат М 1973

34. А.С.Куликов Начертательная геометрия в применении к черчению, конструированию и проектиро-ванию Госиздат 1959
35. Киргизбаев Ю. Чизма геометрия «Укутувчи» - Ташкент 1972
36. Киргизбаев Ю. Чизма геометриядан масалалар туплами «Укутувчи» - Ташкент 1976
37. Сабитов Е. Чизма геометрия кичка курсы «Укутувчи» Ташкент 1973
38. А.И.Островский Начертательная геометрия в популярном Изложении. Госиздат М., 1963
39. А.Д.Посвянский Краткий курс начертательной геометрии “Высшая школа” М., 1965
40. С.Б.Розов Курс черчении Издательство “Машиностроение” М 1975
41. Н.Л.Русскевич. Начертательная геометрия. Издательство Харковский государственный университет, 1961.
42. А.К.Рудаев. Сборник задач по начертательной геометрии, Физико-математическая литература, М., 1962.
43. Ю.С.Тимрот Начертательная геометрия Стройиздат М 1973
44. С.А.Фролов. Методы преобразования ортогональных проекций. Машгиз, М., 1963.
45. С.А.Фролов. Начертательная геометрия. Машиностроение, М., 1978.
46. А. М. Хаскин Начертательная геометрия Киев 1959.
47. Р.Хорунов. Чизма геометрия курси. «Учитель», Ташкент, 1964.
48. Н.Ф.Четверухин и др. Начертательная геометрия. «Высшая школа»,М 1963.
49. А.Г.Чалый. Курс начертательной геометрии. Машгиз, Москва .1962.

M A Z M U N Y

I B A P

N O K A D Y Ñ   P R O Ý E K S I Ý A S Y

Nokadyñ proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine we üçüsine proýeksiýalary.

II B A P

G Ö N I   Ç Y Z Y G Y Ñ   P R O Ý E K S I Ý A S Y

III B A P

T E K I Z L I K

II-BÖLÜM