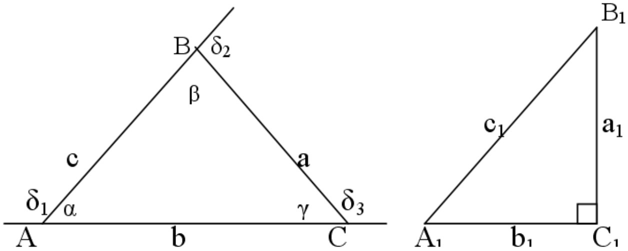
A.Garajaýew
A.Töräýew

ANALITIK GEOMETRIÝA WE ÇYZYKLY ALGEBRA



TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

A.Garajaýew, A.Töräýew

ANALITIK GEOMETRIÝA WE ÇYZYKLY ALGEBRA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat -2010

Täze galkynyşlar we düýpli özgertmeler zamanynda, Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň, hut özüniň aýratyn üns merkezinde bolýanlygy sebäpli, Türkmenistanda bilim we ylym ulgamlary batly depginler bilen ösüş ýoluna düşdi. Şol sebäpli ýokary okuw mekdeplerinde okuw meýilnamalary bütindünýä ülňüne laýyklykda düzüldi.

Häzirki döwürde täze okuw meýilnamalaryna laýyklykda ýazylan okuw kitaplary ýetmezçilik edýär. Şu kitap awtoryň köpýyllyk tejribesiniň netijesinde ýazylan analitik geometriýany we çyzykly algebrany öz içine alýar. Analitik geometriýadan göni çyzyklar we tekizlik bölümler wektorlaryň üsti bilen beýan edilýänligi sebäpli, kitabyň başynda kesgitleýjiler we matrisalar barada düşünjeler ýerleşdirildi. Çyzykly özgertmeler, kwadratik görnüşler kitabyň soňunda öz ornuny aldy. Kitap tehniki hünärler boýunça we uniwersitetiň fizika hänäri boýunça okaýan talyplaryna niýetlenen. Emma analitik geometriýany we çyzykly algebrany öwrenýän beýleki hünärlere hem peýdaly bolar.

Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurduň Prezidentligine ählihalk tarapyndan saýlanmagy ýylyň esasy syýasy wakasy boldy. Bu waka garaşsyz, bitarap Türkmenistanyň öz ösüşiniň täze basgançagyna─milletiň Beýik Galkynyş eýýamyna gadam urmagy bilen şöhratlandy.

Gurbanguly Berdimuhamedow döwlet baştutanynyň wezipesine girişen gününden başlap, jemgyýetçilik durmuşynyň ähli ugurlaryny düýpli özgertmäge başlady. Onuň başlangyjy we ýolbaşçylygy bilen ýurtda demokratiýany pugtalandyrmaga, ykdysadyýeti döwrebaplaşdyrmaga, ilatyň ýaşaýyş derejesini ýokarlandyrmaga gönikdirilen ägirt giň gerimli, ösüşli özgertmeler ýaýbaňlandy. Biziň halkymyz öz lideriniň asylly başlangyçlaryny gyzgyn goldap, olary durmuşa geçirmäge işeňňir girişdi. Bu bolsa ýurdumyzyň durmuş-ykdysady taýdan ösüşiniň depginlerine bada-bat täsirini ýetirdi. Türkmenistanyň Prezidentiniň saýlap alan syýasy ugry dünýäde ägirt uly seslenme tapyp, giň jemgyýetçiligiň üns berip synlaýan obýektine öwrüldi we özüniň çuňňur esaslandyrmalary, ynsanperwerlikli many-mazmuny hem-de sosial ugurlylygy bilen jümle-jahany aňk etdi.

Biziň halkymyz Gurbanguly Berdimuhamedowa çäksiz ynam bildirmek, öz zähmet üstünlikleri bilen onuň ýurdy ösüşiň täze basgançaklaryna çykarmak baradaky belent hyjuwlaryny jany-teni bilen goldamak arkaly jemgyýetimiziň durmuşynda bolup geçýän şeýle özgerişlikler, il-halkymyzyň hal-ýagdaýny gowulandyrmak, Türkmenistany dünýä bileleşigine goşmak we onuň halkara abraýyny pugtalandyrmak ugrunda alyp barýan ýadawsyz tagallasy üçin oňa çuňňur minnetdardyr. Ylym-bilim adamzadyň durmuşynda uly ähmiýete eýedir. Mähriban Prezidentimiziň ýurt Baştutanynyň wezipesine saýlanan ilkinji gününden bilim ulgamyna aýratyn üns berip başlady, türkmen ýaşlarynyň dünýä derejesinde bilim-terbiýe almaklyga giň ýol açdy. Bu ugurda alnyp barylýan işler, tutumly özgertmeler ýaşlaryň döwrebap bilim almaklaryna we kämilleşmeklerine ýardam berýär. Ýurdumyzda hormatly Prezidentimiziň taýsyz tagallasy bilen beýik Galkynyş bilim ulgamynda başlandy.

I BAP

1. Natural sanlar. Iň uly umumy bölüji, iň kiçi umumy kratny

1, 2, 3, 4, … sanlara natural sanlar diýilýär. α natural sanyň galyndysyz bölünýän her bir sanyna onuň bölüjisi diýilýär.

Mysal: 27:3=9; 27:9=3. Bu ýerde 27 üçin 3 we 9 bölüji. Emma 27 üçin 5 bölüji bolmaýar, çünki 27-ni 5-e bölenimizde 2 san galyndy galýar. Eger α natural sanyň diňe iki 1 we α sanlar bölüjisi bolýan bolsa, oňa ýönekeý san diýilýär. Bölüjileriniň sany ikiden köp bolan natural sana düzme san diýilýär.

Mysal:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … - ýönekeý sanlar.

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, … - düzme sanlar.

Her bir düzme natural sany diňe bir görnüşde ýönekeý sanlaryň köpeldijileri bilen ýazyp bolýar:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$$

bu ýerde $p_1, p_2, ..., p_m$ ýönekeý sanlar n sanyň ýönekeý bölüjileri şunlukda p_1 san k_1 gezek, p_2 san k_2 gezek, …, p_m san k_m gezek gaýtalanýar.

Sanlaryň bölünmek nyşanlaryny getirmezden ozal

$27 = 2 \cdot 10 + 7;$ $527 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$, umuman islendik n natural sany

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0} = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$ g

örnüşde ýazyp bolýandygyny ýatlalyň.

1) Eger a_0 2-ä (5-e) bölünýän bolsa, onda n san hem 2-ä (5-e) bölünýär.

Mysal: $38 = 3 \cdot 10 + 8$ (bu ýerde n=38, $a_1 = 3, a_0 = 8$) 8:2=4. Diýmek 38, 2-ä bölünýär. $20 = 2 \cdot 10 + 0$; $a_0 = 0$ san 2-ä we 5-e bölünýär. Diýmek 20, 2-ä we 5-e bölünýär.

2) Eger $a_1 \cdot 10 + a_0$ san 4-e bölünýän bolsa, onda

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

san 4-e bölünýär.

3) Eger $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_1 + a_0$ jem 3-e (9-a) bölünýän bolsa, onda

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

san 3-e (9-a) bölünýär.

Birnäçe natural $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sanlaryň her biriniň galyndysyz bölünýän iň uly N natural sanyna ol sanlaryň iň uly umumy bölüjisi diýilýar. (IUUB) we IUUB$(n_1, n_2, \ldots, n_k) = N$ görnüşde ýazylýar.

Birnäçe $n_1, n_2, \ldots, n_k$ natural sanlaryň her birine bölünýän iň kiçi N natural sana ol sanlaryň iň kiçi umumy kratnysy diýilýär, (IKUK) we IKUK$(n_1, n_2, \ldots, n_k) = N$ görnüşde ýazylýar.

Eger $IUUB(n_1, n_2) = N$ bolsa, onda
$n_1 : N = p_1$, $n_2 : N = p_2$, p_1 we p_2 - natural sanlar.

$IKUK(n_1, n_2) = N$ bolsa,onda $N : n_1 = q_1$, $N : n_2 = q_2$,

q_1 , q_2 - natural sanlar.

Düzgün:

Birnäçe sanlaryň IUUB tapmak üçin olary ýönekeý köpeldijilere dagytmaly, soňra olaryň umumy köpeldijileriniň iň kiçi derejelerinden köpeltmek hasyl düzmeli. Bu köpeltmek hasyly hem şol sanlaryň IUUB bolýar.

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$ diýmek,

$IUUM(1400{,}1980) = 2^2 \cdot 5 = 20$

Birnäçe sanlaryň IKUK tapmak üçin olary ýönekeý köpeldijilere dagytmaly, soňra her sandan iň uly derejeli ýönekeý sanlary alyp, olaryň köpeltmek hasylyny düzmeli. Alnan san IKUK bolýar.

$IKUK(1400;1980) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 138600$

$12 = 2^2 \cdot 3;\ 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$

Diýmek, $IKUK(12;90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

2. Ady we onluk droblar

1) Ady droblar

$0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ sanlara bitin sanlar diýilýär. iki p we q≠0 bitin sanlaryň $\dfrac{p}{q}$ gatnaşygyna (*p:q*, *p/q* ýazgylar hem ulanylýar) ady drob diýilýär. Şunlukda p sana drobyň sanawjysy, q-sana drobuň maýdalawjysy diýilýär.

Eger p we q sanlaryň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda droby şol köpeldijä gysgaldyp bolýar:

$$\frac{15}{20} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{4};\quad \frac{34}{51} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 17} = \frac{2}{3}$$

Eger $|p|<|q|$ ($|p|$-absolyut ululyk, kesgitlemesi aşakda 5 punktda getirilýär) bolsa, onda $\dfrac{p}{q}$ droba dogry drob diýilýär. Şunlukda $|p|\geq|q|$ bolsa, onda $\dfrac{p}{q}$ droba nädogry drob diýilýär. Nädogry droby bitin sanyň we dogry drobuň jemi görnüşinde ýazyp bolýar. Mysal:

$$\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4};\qquad \frac{25}{12}=2+\frac{1}{12}=2\frac{1}{12};\qquad \frac{7}{6}=1+\frac{1}{6}=1\frac{1}{6}\ \text{we ş.m.}$$

$\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ ady droblary goşmak (aýyrmak) üçin aşakdaky ýaly işler ýerine ýetirilýär.

a) b we d sanlaryň IKUK-ny tapmaly: *IKUK(b,d)=A*.
b) $b\cdot r=d\cdot l=A$ deňlikleri ýerine ýetirýän r we l sanlary tapmaly.

ç) $$\frac{\overset{r}{\vee}{a}}{b}\pm\frac{\overset{l}{\vee}{c}}{d}=\frac{ar\pm cl}{A},\qquad A:d=l,\quad A:b=r$$

d) Alnan droby mümkin bolsa gysgaltmaly. Mysal:

$$\frac{5^{\overset{2}{\vee}}}{12}+\frac{3^{\overset{3}{\vee}}}{8}=\frac{5\cdot2+3\cdot3}{24}=\frac{19}{24};\qquad \frac{7^{\overset{3}{\vee}}}{40}-\frac{1^{\overset{5}{\vee}}}{24}=\frac{7\cdot3-1\cdot5}{120}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$$

Ady droblary köpeltmek we bölmek aşakdaky düzgünler boýunça amala aşyrylýar:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d};\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Şunlukda eger mümkin bolsa alnan netijeleri gysgaltmaly. Mysal:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot3}{5\cdot7}=\frac{6}{35};\qquad \frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot7}{5\cdot3}=\frac{14}{15}$$

$\frac{p}{q}$ görnüşde (ýagny ady drob görnüşinde) ýazyp bolýan sanlara rasional sanlar diýilýär. Ähli bitin sanlar rasional sanlardyr.

2) Onluk droblar

Maýdalawjysy 10-yň položitel bitin derejesi bolan droba onluk drob diýilýär. Onluk droblar maýdalawjysyz ýazylýarlar. Sanawjydaky san 10-yň derejesi näçe bolsa (ýagny maýdalawjydaky nollaryň sany näçe bolsa) şonça sifr sagdan çepe sanap otur bilen bölünýär. Meselem:

$$\frac{2}{10}=0{,}2; \qquad \frac{1321}{1000}=\frac{1321}{10^3}=1{,}321; \qquad \frac{17}{10^4}=\frac{17}{10000}=0{,}0017$$

Tükeniksiz onluk drob $a_0, a_1a_2...a_m...$ görnüşde bolýar, bu ýerde

a_0 bitin san $a_1...a_m...$ sifrler 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sanlaryň birine deň. Eger tükeniksiz onluk drobda käbir sifrler topary tükeniksiz gezek gaýtalanýan bolsa, oňa periodiki onluk drob diýilýär we gaýtalanýan sifrler toparyna drobuň periody diýilýär.

Ýazgyda drobuň periodyny skobka alyp ýazýarlar. Mysal üçin: 1,6234234234 drob şeýle ýazylýar: 1,6(234).

Rasional däl, ýagny $\frac{p}{q}$ görnüşde ýazyp bolmaýan sanlara, irrasional sanlar diýilýär. Mysal: $\sqrt{2}=1{,}414213...$ irrasional san.

Eger a we b sanlar ýönekeý köpeldijilere dagydylanda umumy köpeldijileri ýok bolsa, onda olara özara ýönekeý sanlar diýilýär, ýagny IUUB(a;b)=1.

Meselem: 15 we 8. $15=3\cdot 5;\ \ 8=2\cdot 2\cdot 2$.

$\sqrt{2}$ sanyň irrassional sandygyny subut ediň.

3). Prosentler

Sanyň ýüzden bir bölegine prosent (%) diýilýär. (procentum, latyn sözi ýüzden bir diýmek). Meselem, 35-iň 20% onuň $\frac{20}{100}$ bölegini düzýär, diýmek ol

$$35 \cdot \frac{20}{100} = 35 \cdot \frac{1}{5} = 7$$

Eger x sanyň $a\%$-ti a deň bolsa, onda $x = \frac{a \cdot 100}{\alpha}$; Meselem, x sanyň 30% 15 deň bolsa, onda ol sanyň özi $x = \frac{15 \cdot 100}{30} = 50$.

4). Proporsiýalar

Iki gatnaşygyň deňligine proporsiýa diýilýär. (latynça proportio, ölçegdeşlik manysynda). Eger $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ bolsa, onda $a \cdot d = b \cdot c$ (proporsiýanyň esasy häsiýeti)

Islendik $k,l,m,$ we n sanlar üçin

$$\frac{ka + lb}{ma + nb} = \frac{kc + ld}{mc + nd} \qquad \text{(proporsiýanyň önümleri)}$$

Meselem :

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \qquad \frac{a - b}{a + b} = \frac{c - d}{c + d}$$

5). Sanyň absolýut ululygy

x sanyň absolýut ululygy $|x|$ görnüşde belgilenýär we

$$|x| = \begin{cases} x, \ eger \ \ x \geq 0 \ \ bolsa \\ -x, \ eger \ \ x < 0 \ \ bolsa \end{cases}$$

formula boýunça kesgitlenýär.

Meselem: $|7| = 7; \quad |-5| = -(-5) = 5.$

Absolýut ululygyň esasy häsiýetleri:

1. $|x| \geq 0$, diňe x=0 bolanda. $|x| = 0$

2. $-|x| \leq x \leq |x|$

3. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

4. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

6. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|x|} \quad (y \neq 0)$

7. $\sqrt{x^2} = |x|$

6). Progressiýalar

Eger $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ san yzygiderliginiň her bir a_k agzasy onuň a_{k-1} agzasyna käbir d sany goşup alynýan bolsa $(a_k = a_{k-1} + d)$, onda oňa arifmetiki progressiýa diýilýär. Şunlukda d sana arifmetiki progressiýanyň tapawudy diýilýär.

Mysal: -1, 3, 7, 11,... arifmetiki progessiýa. Onuň tapawudy d=4.

Arifmetiki profressiýanyň formulalary:

$$a_n = a_1 + (n-1)d; \qquad \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n$$

Arifmetiki progressiýanyň ilkinji n agzasynyň jemi

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

formula boýunça tapylýar.

Eger $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ san yzygiderliginiň her bir a_k agzasy onuň a_{k-1} agzasyny käbir q sana köpeldip alynýan bolsa $(a_k = a_{k-1} \cdot q)$, onda oňa geometriki progressiýa diýilýär. Şunlukda q sana geometriki progressiýanyň maýdalawjysy diýilýär.

Mysal: 2, 8, 32, 128,... geometriki progressiýa, onuň maýdalawjysy q=4.

Geometriki progressiýanyň formulalary:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}; \qquad a_{n-k} \cdot a_{n+k} = a_n^2$$

Geometriki progressiýanyň ilkinji n agzasynyň jemini tapmak formulasy:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \qquad q \neq 1$$

Eger q=1 bolsa, onda $S_n = na_1$. Eger $|q| < 1$ bolsa, geometriki progressiýa kemelýän geometriki progressiýa diýilýär we $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, $(\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0)$ ýazylýar. Bu halda $S = \frac{a_1}{1-q}$ -sana tükeniksiz kemelýän geometriki progressiýanyň jemi diýilýär.

Mysal: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Käbir peýdaly formulalar:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

7). Dereje we kök

a sanyň öz-özüne n (n- natural san) gezek köpeldilmeginden alnan $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ sana α sanyň n-nji derejesi diýilýär we a^n belgi bilen belgilenýär: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,gezek}$. *a* sana derejäniň esasy diýilýär.

Şunlukda

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1 : a^n (a \neq 0); \qquad a^1 = a;$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad \frac{a_m}{a_n} = a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m}; \qquad 1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0, \ a \neq 0;$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a \geq 0, b > 0.$$

Eger $x^n = a$, bolsa onda *x* sana *a* sanyň n derejeli kök diýilýär

we $x = \sqrt[n]{a}$ ýa-da $x = a^{\frac{1}{n}}$ görnüşde ýazylýar.

Eger *a>0* bolsa, položitel *x* sana onuň *n* derejeli arifmetiki köki diýilýär. Kwadrat kök $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ görnüşde ýazylýar. Eger *n=2k* bolsa, *a*>0 bolmaly.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m; \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \ (b \neq 0)$$

Eger *a* =0 bolsa, $\sqrt[n]{a} = 0$.

8). Nýutonyň binomy

Eger n – natural san bolsa, onda islendik *a* we *b* sanlar üçin aşakdaky formula dogrydyr:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Bu ýerde

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$$

(okalyşy: n faktorial). Meselem:

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120; \qquad C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 15$$

C_n^k üçin şeýle formulalar dogry:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$
$$C_n^1 = n; \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

Birnäçe hususy hallar:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b^2) + (-b^3) =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Aşakdaky formulalar hem köp ulanylýar:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a=b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

9). Logorifmler

N sany almak üçin $a(a>0, a\neq 1)$ sany götermeli bolan y dereje görkezijisine N sanyň a esasa görä logorifmi diýilýär we ol $y = \log_a N$

görnüşde ýazylar, ýagny $a^y = N$. Meselem: $log_3 27 = 3$, çünki $3^3 = 27$, $\log_2 16 = 4$, $2^4 = 16$.

Logorifmleriň häsiýetleri:

Islendik $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ we islendik N>0, N_1>0, N_2>0 hem-de islendik a üçin aşakdaky formulalar dogry:

1. $log_a 1 = 0.$ $log_a a = 1.$

2. $a^{\log_a N} = N.$

3. $log_a(N_1 \cdot N_2) = log_a N_1 + log_a N_2.$

4. $log_a \dfrac{N_1}{N_2} = log_a N_1 - log_a N_2.$

5. $log_a(N^\alpha) = \alpha \cdot log_a N.$

6. $\log_{a^\alpha} N = \dfrac{1}{\alpha} \log_a N.$

7. $\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}$ $(N \neq 1).$

8. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}.$

Esasy 10 bolan logarifmlere onluk logarifmler diýilýär (belgisi $lg\,N$) we esasy e=2,71828… bolan logarifmlere natural logarifmler diýilýär. (belgisi $ln\,N$)

10). Algebraik deňlemeler

a) Çyzykly deňlemeler

$$ax = b \ , \quad x = \frac{b}{a};$$

$$ax + b = 0, \quad ax = -b, \quad x = -\frac{b}{a};$$

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2 \qquad x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

b) Kwadrat deňlemeler

$$ax^2 + bx + c = 0, \ \ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$ax^2 = c \qquad x^2 = \frac{c}{a}, \ \ x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}, \ \ \frac{c}{a} \geq 0;$$

$$ax^2 + bx = 0\,, \ \ x(\,ax + b\,) = 0\,,$$

$$x_1 = 0. \ \ ax + b = 0, \quad x_2 - \frac{b}{a};$$

$$x^2 + bx + c = 0\,, \ \ x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

ç) Görkezijili we logarifm deňlemeler

Görkezijili deňleme $a^{f(x)} = b, \ (a > 0)$ görnüşde bolup ol diňe b>0 bolanda çözüwe eýe bolup biler: $f(x) = \log_a b, \ \ a \neq 1$.

Mysal:

$a)\ \ 3^{x^2-5x+6} = 1, \ \ 3^0 = 1, \ \ 3^{x^2-5x+6} = 3^0, \ \ x^2 - 5x + 6 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}, \qquad x_1 = 3; \ \ x_2 = 2$$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

$\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ bolýandygyny belläp, berlen deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-3}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3-7x}$$

Esaslary deň, görkezijileri hem deň bolmaly.

$3x-7=3-7x; \qquad x=1$

Logarifm deňlemeler çözülende logarifmiň kesgitlemesini we ýokarda getirilen häsiýetleri ulanmaly.

Mysal:

a) $\log_3(5+4\log_3(x-1))=2$

logarifmiň kesgitlemesine görä

$5+4\log_3(x-1)=3^2,$

$4\log_3(x-1)=4,$

$\log_3(x-1)=1, \quad x-1=3^1, \quad x=4$

$b)$ $\log_{5-x}(x^2-2x+65)=2, \qquad 5-x>0, \qquad 5-x\neq 1$

$x^2-2x+65=(5-x)^2, x^2-2x+65=25-10x+x^2,$

$8x=-40, \qquad x=-5.$

ç) $\log_3 x-2\log_3 x=6$

Ilkinji deňlemä girýän logorifmleriň esaslaryny deňlemeli. Logorifmleriň 6-njy häsiýetine görä

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$$

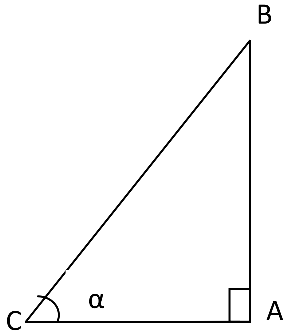
Diýmek,

$$log_3 x + 2log_3 x = 6,\ log_3 x = 2.\ \ x = 3^2.\ \ \ x = 9$$

11). Trigonometriýa

1. Trigonometrik funksiýalaryň kesgitlemesi.
Göniburçly üçburçlyk alalyň

$\angle C = 90^0$



$$\frac{BC}{AB} = \sin\alpha; \quad \frac{AC}{AB} = \cos\alpha; \quad \frac{BC}{AC} = tg\alpha; \quad \frac{AC}{BC} = ctg\alpha;$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \cos ec\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$

2. Trigonometrik formulalar.

Trigonometrik funksiýalaryň çärýeklerdäki alamatlary

Çärýekler	Funksiýalar			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Käbir burçlarda trigonometrik funksiýalaryň bahalary

Argument α	Funksiýalar			
	sinα	cosα	tgα	ctgα
0^0	0	1	0	Ýok
$30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

3. Triginometrik toždestwolar

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\cos ec\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$ctg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, \quad \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta, \qquad tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta},$$

$$ctg(\alpha\pm\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}, \quad ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cos}ec\alpha \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^0-\alpha),\quad \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^0-\alpha),$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\qquad tg\alpha-ctg\beta=-\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right),\qquad 1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$1\pm tg\alpha=\frac{\sin(45^0\pm\alpha)}{\cos 45^0\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^0\pm\alpha)}{\cos\alpha},\ 1\pm tg\alpha tg\beta=\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$ctg\,\alpha\cdot ctg\,\beta\pm 1=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\qquad 1-tg^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$1-ctg^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha},\qquad ctg^2\alpha-ctg^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$tg^2\alpha-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot tg^2\alpha,\qquad ctg^2\alpha-\cos^2\alpha=ctg^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

4. Ters trigonometrik funksiýalaryň arasyndaky baglanyşyk

$$\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha = arctg\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha = arcctg\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$arctg\,\alpha = -arctg\,(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - arcctg\,\alpha = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$

$$arcctg\,\alpha = \pi - arctg\,(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - arctg\,\alpha = \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

5. Ýönekeý trigonometrik deňlemeleriň çözülişi

$\mathrm{sinx} = a, \quad |a| \le 1$

$x = \mathrm{arcsina} + 2n\pi, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$\mathrm{cosx} = a, \quad |a| \le 1,$

$x = \pm\mathrm{arccosa} + 2n\pi, \; n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

ýa-da $\quad x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad n = 0,1,2,\ldots$

Mysal:

$\sin x = \frac{1}{2}, \; x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi; \; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$

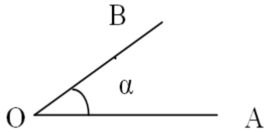
$tgx = a, \; x = arctga + n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$cosx = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

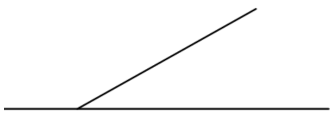
$ctgx = a, \quad x = arctga + n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

3. Burçlar. Burçlaryň ölçenişi

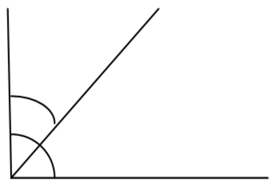
Eger göni çyzykda bir nokat alsak, onda ol iki şöhlä bölünýär, şunlukda gönini bölýän nokada şöhleleriň başlangyç nokady düşilýär.Tekizligiň käbir nokatlarynda çykýan iki şöhle bu tekizligi iki bölege bölýär , ol böleklere burç diýilýär. Burçy emele getirýän şöhlelere burçuň taraplary we tekizligiň burça degişli bölegine burçuň içgi oblasty diýilýär. Burçuň içgi oblasty töweregiň dugasy bilen ýa-da harp bilen belgilenýär. Burçuň her tarapynda bir nokat alyp olary belgiläliň. Burçuň depesini O harp bilen belgiläliň. Onda burç $\angle AOB$ görnüşde ýazylýar.



Şunlukda OA tarapdan OB tarapa hereket sagat diliniň hereketiniň tersine bolýar: $\angle\alpha = \angle AOB$. (ýa-da $\alpha = \angle AOB$).Bir tarapy umumy bolan we beýleki iki tarapy göni çyzyk emele getirýän iki burça **çatyk** burçlar diýilýär. Özüniň çatyk burçuna deň burça göni burç diýilýär. Taraplary göni çyzyk emele getirýän burça **ýazgyn** burç diýilýär. Ýazgyn burç iki göni burçuň jemine deň.



Çatyk burçlar

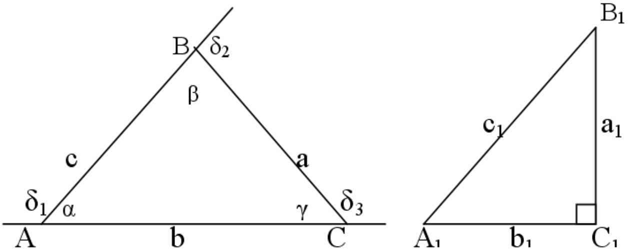


Dolduryjy burç

Eger iki burçuň jemi göni burça deň bolsa, onda olara biri-birini dolduryjy burçlar diýilýär. Göni burçdan kiçi burça ýiti burç, göni burçdan uly, ýöne ýazgyn burçdan kiçi burça kütek burç diýilýär.

Burçlaryň ölçeg birligi hökmünde göni burçuň 90-gradusdan bir bölegi kabul edilýär we oňa gradus diýilýär. Gradusyň 60-dan bir bölegine minut (1^I) we miniduň 60-dan bir bölegine sekund (1^{II}) diýilýär.

I. Üçburçluklar.



$$a+b>c,\quad a+c>b,\quad b+c>a.$$
$$\alpha+\beta<180^0,\quad \gamma<180^0,\quad \alpha+\beta+\gamma=180^0.$$
$$\delta_1=\beta+\gamma,\qquad \delta_2=\alpha+\gamma,\qquad \delta_3=\alpha+\beta.$$

Bir burçy 90^0 bolan üçburçluga göniburçly üçburçluk diýilýär. Göni burçuň garşysyndaky tarapyna onuň gipetenuzasy diýilýär.

Teorema: (Pifagor) Göniburçly üçburçlukda onuň gipotenuzasynyň kwadraty katetleriniň kwadratlarynyň jemine deň.

$$A_1B_1^2=B_1C_1^2+A_1C_1^2 \qquad (c_1^2=a_1^2+b_1^2)$$

Belgiler: $a+b+c$- üçburçlygyň perimetri , $p=\dfrac{a+b+c}{2}$- üçburçlugyň ýarym perimetri, S-üçburçlygyň meýdany, $R(r)$- üçburçlygyň daşyndan (içinden) çyzylan töweregiň radiusy, h-üçburçlygyň beýikligi, m-mediana, l-bissektrisa, h_a, m_a, l_a- üçburçlygyň a tarapyna inderilen beýikligini, medianansyny, bissektrisaýny aňladýarlar. Beýleki taraplar üçin hem degişli harplar ýazylýar. r_a-üçburçlygyň A burçunyň içinden çyzylan, a tarapyna galtaşýan we b, c taraplaryň dowamyna galtaşýan töweregiň radiusy.

Kosinuslar teoremasy

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Sinuslar teoremasy

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Tangensler teoremasy

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{ctg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}; \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\frac{\alpha+\gamma}{2}}{tg\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{ctg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{ctg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Üçburçluguň meýdanyny tapmak formulalary

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Geronyň formulasy

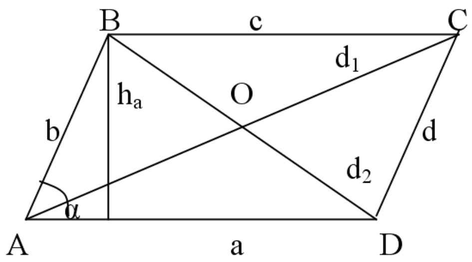
$$S = p^2 tg\frac{\alpha}{2} tg\frac{\beta}{2} tg\frac{\gamma}{2}; \quad S = p(p-a)tg\frac{\alpha}{2} = p(p-b)tg\frac{\beta}{2} =$$
$$= p(p-c)tg\frac{\gamma}{2}$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad S = p \cdot r. \qquad S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c};$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

II. Dörtburçluklar

a) Garşylykly taraplary parallel bolan dörtburçluga parallelogram diýilýär.



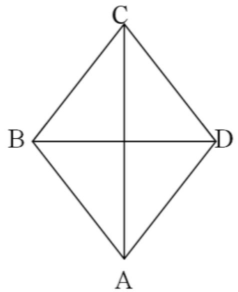
$a = c;\ b = d.\quad \angle A = \angle C,\quad \angle D = \angle B.\quad \Delta ABD = \Delta BDC;$

$\Delta ABC = \Delta ACD.$

$AO = OC,\ BO = OD.\quad d_1^2 + d_2 = 2(a^2 + b^2)$

S- Parallelogramyň meýdany $S = a \cdot h_a,\ S = absin\alpha$

b) Ähli taraplary deň bolen parallelograma romb diýilýär.



$BD \perp AC;\quad \angle BCA = \angle ACD;\quad \angle ABD = \angle DBC;$

$\angle BDC = \angle BDA;\quad \angle BAC = \angle CAD$

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$

ç) Ähli burçlary göni bolan parallelograma göniburçluk diýilýär.

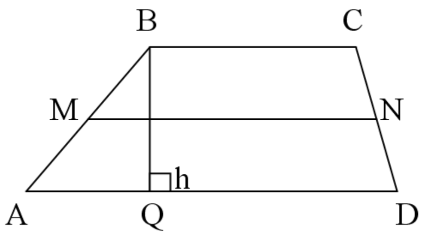
$$S = a \cdot b; \qquad d_1 = d_2,$$

d) Ähli taraplary deň bolan göniburçluga kwadrat diýilýär.

$$a = b = c = d. \qquad S = a^2,$$

e) Iki tarapy parallel we beýleki iki tarapy parallel däl dörtburç-luga trapesiýa diýilýär.

Trapesiýanyň parallel taraplaryna onuň esaslary, beýleki ikisine bolsa gapdal taraplary diýilýär. Gapdal taraplary deň bolan trapesiýa deňýanly trapesiýa diýilýär.



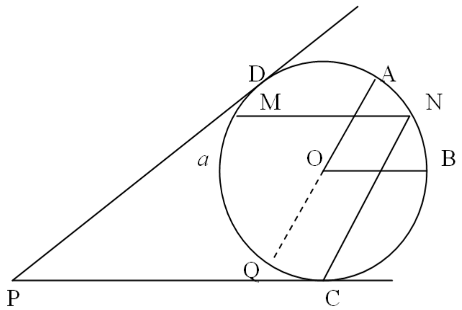
$$BC \parallel AD; \qquad BM = MA; \qquad CN = ND.$$

MN – orta çyzyk $\quad MN = \dfrac{BC + AD}{2}, \quad S = MN \cdot h$.

4. Töwerek we tegelek

Tekizlikde berlen nokatdan $r > 0$ uzaklykda ýatan nokatlar köplügine töwerek diýilýär. Şunlukda berlen nokada onuň merkezi we berlen r sana onuň radiusy diýilýär. Töweregiň iki nokadyny birleşdirýän kesime horda we onuň hordanyň bölen bölegine duga diýilýär. Töweregiň merkezinden geçýän horda onuň diametri diýilýär. Töweregiň tekizliginde ýatýan we töwerek bilen bir umumy nokady bolan gönä töwerege galtaşma diýilýär. Depesi töwerekde bolan, taraplary töweregi kesýän burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär. Bir nokatdan çykýan töwerege galtaşýan iki gönüniň emele getiren burçyna onuň daşyndan çyzylan burç diýilýär. Iki radiusyň emele getiren burçyna (ýagny depesi töweregiň merkezinde) merkezi burç diýilýär.

Tekizligiň töweregiň içinde ýatan bölegine tegelek diýilýär.



O-merkez;

PD, PC- galtaşma;

MN, NC – hordalar;

OA, OB – radius;

AQ-diametr;

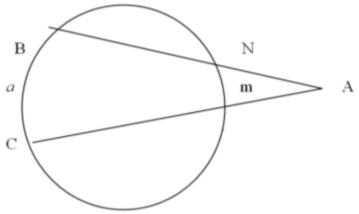
$\angle$MNC – içinden çyzylan burç;

$\angle$DPC – daşyndan çyzylan burç;

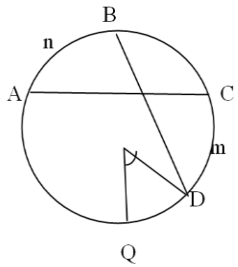
$\angle$AOB-merkezi burç.

$$\angle AOB = \cup ANB. \qquad \angle MNC = \frac{1}{2} \cup MaC.$$

$$\angle DPC = \frac{1}{2}\left(\cup DBC - \cup DMC\right)$$



$$\angle BAC = \frac{\cup BaC - \cup MmN}{2}$$



O-töweregiň merkezi

$$\angle CMD = \frac{\cup DmC + \cup AnB}{2}$$

$$CM \cdot MA = BM \cdot MD$$

L- töweregiň uzynlygy, S-tegelegiň meýdany, QOD sektoryň meýdany - S_{sek} :

$$L = 2\pi r, \quad S = \pi r^2. \quad S_{sek.} = \frac{\alpha R^2}{2}, \ \alpha \text{ - radianda.}$$

Ýokary matematikada burçuň radian ölçegi giňden ulanylýar. Merkezi burçuň depesinde we radiusy bire deň bolan töwerek alalyň. Eger burçuň taraplarynyň töwerekden kesýän dugasynyň uzynlygy bire deň bolsa, onda ol burçuň ululygyna bir radian diýilýär. Diýmek, burçuň taraplarynyň merkezi onuň depesinde we radiusy bire deň bolan töwerekden kesýän dugasynyň uzynlygy ol burçuň radian ölçeginiň ululygy bolýar.

Käbir ýygy duş gelýän burçlaryň radian ölçegini görkezeliň:

$$360^0 = 2\pi, \quad 180^0 = \pi, \quad 90^0 = \frac{\pi}{2}, \quad 60^0 = \frac{\pi}{3}, \quad 45^0 = \frac{\pi}{4}.$$

1 radian $=57^0\ 17^I\ 44{,}6^{II}$. $\pi \approx 3{,}1416$.

Burçuň radian ölçegi bilen gradus ölçeginiň arasyndaky baglanyşyk:

$$\alpha^0 = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radian}$$

5. Köpburçluklar

Ähli depeleri töwerekde bolan köpburçluga töweregiň içinden çyzylan köpburçluk diýilýär, şunlykda töwerege köpburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek diýilýär. Taraplary we içki burçlary deň köpburçluga dogry köpburçluk diýilýär. Ähli taraplary töwerege galtaşýan köpburçluga töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk diýilýär, şunlukda töwerege köpburçlugyň içinden çyzylan töwerek diýilýär.

Goý, R dogry köpburçlygyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy we a_n - onuň tarapynyň uzynlygy bolsun, n köpburçlugyň taraplarynyň sany. S_n - köpburçlugyň meýdany we P_n - onuň perimetri

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}; \qquad S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot r \quad , \quad P_n = 2nrtg\frac{180^0}{n},$$

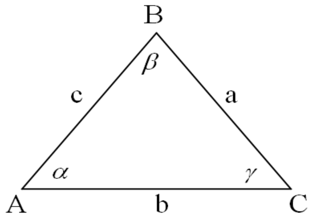
$$S_n = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^0}{n}, \qquad P_n = 2nrtg\frac{180^0}{n}, \;\; a_n = 2rtg\frac{180^0}{n}$$

Bu ýerde r, R degişlilikde içinden, daşyndan çyzylan töweregiň radiusy

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sin\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

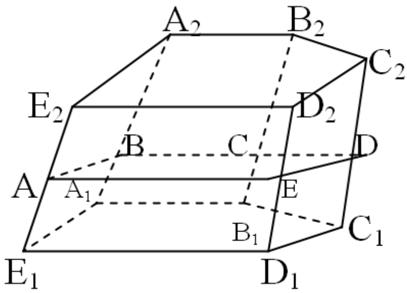
$$r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



6. Köpgranlyklar

Iki grany parallel tekizliklerde ýatan n-burçluk bolup, galan n grany parallelogram bolan köpgranlyga n burçly prizma diýilýär. Iki deň n burçluga prizmanyň esaslary we galan granlaryna onuň gapdal granlary diýilýär. Granlaryň taraplaryna prizmanyň gapyrgalary diýilýär. Eger prizmanyň gapdal granlary esaslarynyň tekizliklerine perpendikulýar bolsa, oňa göni prizma diýilýär. Başga prizmalara ýapgyt prizmalar diýilýär.

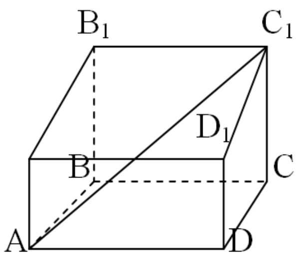
Goý, ABCDE prizmanyň perpendikulýar kesigi we P_n-bu köpburçlugyň perimetri, S_n-onuň meýdany bolsun. V-prizmanyň göwrümi



$$S_n = P_n \cdot A_1A_2 \qquad\qquad V = S_n \cdot A_1A_2$$

7. Parallelopiped we kub

Esaslary parallelogram bolan prizma parallelopiped diýilýär. Parallelopipediň ähli alty grany parallelogram. Parallelopipediň bir granda ýatmaýan iki depesini birleşdirýän kesime onuň diagonaly diýilýär. V- gönüburçly parallelopipediň göwrümi.



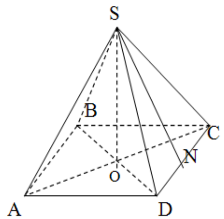
$$AB = a, \quad AD = b, \qquad AA_1 = C.$$

$$V = abc. \qquad AC_1 = a^2 + b^2 + c^2$$

Eger a=b=c bolsa, onda gönibурçly parallelopipede kub diýilýär. $V = a^3$

8. Piramida. Kesik piramida

Bir grany erkin köpburçluk, galan granlary umumy bir depesi bolan üçburçluklar bolan köpburçluga piramida diýilýär. Köpburçluga piramidanyň esasy, galan granlaryna bolsa, onuň gapdal granlary diýilýär. Granlarynyň taraplaryna piramidanyň gapyrgalary diýilýär. Ähli gapdal granlaryň umumy depesine piramidanyň S depesi diýilýär. Piramidanyň depesinden onuň esasynyň tekizligine inderilen perpendikulýaryň uzynlygyna piramidanyň beýikligi diýilýär. (SO=h– beýiklik) (S-depe, SA, SB, SC, CD – gapdal gapyrgalary, AB, BC, CD, AD – esasyň gapyrgalary). Eger piramidanyň esasy dogry köpburçluk bolsa, onda oňa dogry piramida diýilýär. Dogry piramidanyň ähli gapdal granlary deňýanly, deň üçburçluklar. Dogry piramidanyň gapdal granynyň onuň depesinden geçirilen beýikligine piramidanyň apofemasy diýilýär.

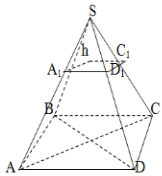


Dogry piramida

$h = SN$ - apofema, P – dogry piramidanyň esasynyň perimetri, S - gapdal üsti, H -piramidanyň beýikligi, S_{es}- piramidanyň esasynyň meýdany.

$$S = \frac{1}{2}Ph; \qquad V = \frac{1}{3}S_{es}H$$

Piramidany onuň esasyna parallel tekizlik bilen keseliň. Şunlukda berlen piramidadan SABCD piramidany kesip alarys. Piramidanyň galan bölegine kesik piramida diýilýär. Kesiik piramidanyň gapdal granlary – trapesiýalar. Eger berlen piramida dogry piramida bolsa, onda kesik piramida (ondan bölünip alynan) hem dogry kesik piramida diýilýär. Dogry kesik piramidanyň gapdal granlary – deň deňýanly trapesiýalar, bularyň beýikliklerine dogry kesik piramidanyň apofemasy diýilýär. Piramidanyň esaslaryna trapesiýalar we uçlary onuň esaslarynyň tekizliklerinde bolan kesimiň uzynlygyna kesik piramidanyň beýikligi diýilýär. Goý, P we p kesik piramidalaryň esaslarynyň perimetrleri, h-apofema, H-beýikligi, S – dogry kesik piramidanyň gapdal stüniň meýdany, S_1, S_2 –esaslarynyň meýdany, V – göwrümi.



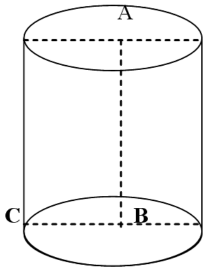
$$S = \frac{1}{2}(P + p)h$$

$$V = \frac{H}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

9. Silindr

Göniburçlugyň bir tarapyndan geçýän okuň daşynda aýlanmasyndan emele gelen figura silindr diýilýär.

Goý, H silindriň beýikligi: AB=H, BC=R-onuň radiusy, V-silindriň göwrümi, S-onuň gapdal üsti.



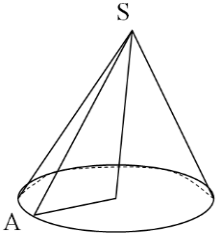
silindr

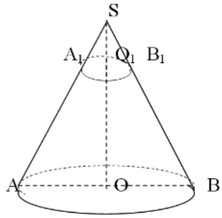
$$V = \pi R^2 H$$
$$S = 2\pi RH$$

10. Konus

Göniburçly üçburçlugy onuň katetinden geçýän okuň daşynda aýlanmakdan emele gelen figura konus diýilýär. SA gipetenuzanyň aýlanmagyndan emele gelen figura konusyň gapdal üsti diýilýär. OA katetiň aýlanmasyndan emele gelen tegelege konusyň esasy diýilýär. OA=R, SO=H. Konusy onuň esasyna parallel tekizlik bilen kesenimizde tekizlik we konusyň esasynyň aralygynda galan bölegine kesik konus diýilýär. Kesik konusyň esaslary tegelekdir. $O_1A_1=R_1$, OA=R – kesik konusyň esaslarynyň radiuslary. OS=H. $OO_1=h$; V_{kon}-konusyň göwrümi, $V_{k.kon}$- kesik konusyň göwrümi.S-konusyň gapdal üstiniň meýdany. $S_{k.k.}$- kesik konusyň gapdal üstüniň meýdany AS=α-konusyň emele getirijisiniň uzynlygy.

AA_1-α_1- kesik konusyň emele getirijisi





Konus Kesilen konus

$$V_{kon} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

$$S = \pi RL,$$

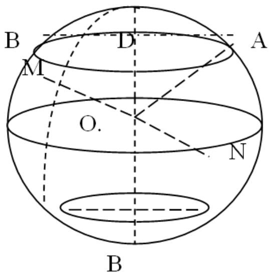
$$V_{k.k} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + R_1 R + R_1^2),$$

$$S_{k.k} = \pi\ (R + R_1)L_1.$$

Tegelegiň segmentiniň onuň hordasyna perpendikulýar diametriň daşynda aýlanmasyndan emele gelen figura şar segmety diýilýär.

11. Sfera. Şar

Giňişligiň berlen bir O nokadyndan deň R>0 uzaklykda ýatan ähli nokatlar köplügine sfera diýilýär. O nokada sferanyň merkezi, R sana onuň radiusy diýilýär. Eger M sferanyň nokady bolsa, OM=R. Sferanyň islendik iki nokadyny birikdirýän kesime horda diýilýär. Sferanyň merkezinden geçýän horda onuň diametri diýilýär. Sferanyň içinde ýatýan ähli nokatlar köplügine şar diýilýär. (N – şaryň nokady, ON<R). Goý V - şaryň göwrümi, S – sferanyň üstiniň meýdany bolsun. Onda



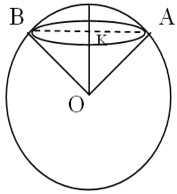
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

Sferanyň ony kesýän iki parallel tekizligiň arasynda ýerleşen bölegine şar guşaklygy diýilýär. Bu iki tekizligiň arasyndaky uzaklyga şar guşaklygynyň beýikligi diýilýär. Şaryň ony kesýän iki parallel tekizligiň arasyndaky bölegine şar gatlagy diýilýär. Ýokardaky suratda $AD=r_1$, $A_1D_1=r_2$ şar guşaklygynyň radiuslary, DD_1 onuň beýikligi. Eger $r_1=0$ ýa-da $r_2=0$ onda şar gatlagyna şar segmenti diýilýär.

Tegelegiň sektorynyň onuň tarapynyň daşynda aýlanmasyndan emele gelen figura şar sktory diýilýär.

Goý, $V_{ş.g}$ – şar gatlagynyň göwrümi, $V_{ş,sek}$ -şar sektoryň göwrümi, $S_{ş,g}$ - şaryň gatlagynyň üstüniň meýdany, $S_{ş.g}$ –şar gatlagynyň üstüniň meýdany, $S_{ş,s}$ - şar segmentiniň üstüniň meýdany. $S_{ş.sek}$ –şar sektorynyň üstüniň meýdany. H-şar guşagyň beýikligi



Şar sektory

CK=H-şar segmentiniň beýikligi. OA=R, AK=r

$$V_{ş.g} = \frac{1}{6}\pi H(3r_1^2 + 3r_3^2 + H^2)$$

$$V_{ş.seg} = \frac{1}{6}\pi H(3r + H^2) \quad (r_1 = 0, r_2 = r)$$

$$V_{ş.seg} = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H),$$

$$V_{ş.sekt.} = V_{ş.seg} + V_{kon} = \frac{1}{6}\pi H(3r + H^2) + \frac{\pi}{3}r^2(R - H)$$

$$S_{ş.g} = 2\pi RH \quad S_{s.sekt} = S_{s.seg} + S_{kon} = 2\pi Rh + \pi R\sqrt{2Rh - h^2}$$

II BAP

1. Kesgitleýjiler

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

sistemany çözeliň. Bu sistemanyň birinji deňlemesini a_{21}, ikinjisini a_{11} köpeldip olary goşalyň. Netijede alarys

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

Goý $a_{11}\ a_{21} - a_{12}\ a_{21} \neq 0$, *onda*

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (2)$$

Şeýle usul bilen x_1 tapalyň:

$$x_1 = \frac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

(2) we (3) deňlikleriň maýdalawjylary deň: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Kesgitleme:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

sana (aňlatma) ikinji tertipli kesgitleýji diýilýär we ol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

görnüşde belgilenýär.

Şunlukda kesgitlemä görä

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$a_{11}, a_{21}; a_{12}, a_{22}$ kesgitleýjiniň setirleri we $a_{11}\, a_{12}; a_{21}\, a_{22}$ kesgitleýjiniň sütünleri diýilýär.

a_{ij} $(i=1,2,\ \ j=1,2)$ sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. $a_{11}a_{22},\ \ a_{12}\ a_{21}$ köpeltmek hasyllara kesgitleýjiniň agzalary diýilýär.

Kesgitleýjiniň elementleri iki indeks bilen üpjün edilen, olaryň birinjisi elementiň ýerleşen setiriniň nomerini, ikinjisi onuň ýerleşen sütüniniň nomerini görkezýär. a_{11}, a_{22} elementleriniň ýerleşen diagonalyna kesgitleýjiniň baş diagonaly, a_{21} a_{12} elementleriň ýerleşen diagonalyna bolsa onuň gapdal diagonaly diýilýär.

Diýmek, baş diagonalyň elementleriniň köpeldilmegi (+) alamat bilen, gapdal diagonalyň elementleriniň köpeldilmegi bolsa (-) alamty bilen alynýar.

Kesgitleýjileri ulanyp, (2) we (3) deňlikleri

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

görnüşde ýazyp bilýäris. Şeýlelikde, çyzykly sistemanyň çözüwleri tapylanda kesgitleýjileri ulanyp tapmak amatly.

Kesgitleýjileriň aşakdaky häsiýetlerini ýeňillik bilen barlap bolýar:

1)eger kesgitleyjide onuň setirlerini degişli sütünler bilen çalşyrsak, onda kesgitleýjiniň bahasy üýtgemeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiniň bu häsiýetine görä onuň setirleri we sütünleri deňhukukly ýagny eger kesgitleýji setirlerine görä bir häsiýete eýe bolsa, onda ol sütünlerine görä hem şol häsiýete eýedir.

2) eger kesgitleýjide onuň iki setiriniň (sütüniniň) ornuny çalşyrsak, onda onuň alamaty üýtgeýär:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3) eger kesgitleýjiniň haýsyda bolsa bir setirini (sütünini) käbir ***k*** sana köpeltsek, onda ***k*** sana kesgitleýjiniň özi köpeldilýär:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

başgaça- eger kesgitleýjiniň setirinde ýa-da sütününde umumy köpeldiji bar bolsa, onda ony kesgitleýjiniň belgisiniň daşyna çykaryp ýazyp bolýar.

Netije. Eger kesgitleýjiniň käbir setiriniň ýa-da (sütüniniň) elementleri nola deň bolsa, onda kesgitleýji nola deň:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

4) eger kesgitleýjiniň iki setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri degişlilikde deň bolsalar kesgitleýji nola deňdir.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0$$

5) eger iki kesgitleýji diňe bir setiriniň (sütüniniň) elementleri bilen tapawutlanan bolsalar,onda ol iki kesgitleýjiniň jemi bir kesgitleýjä deň bolýar,şunlukda ol kesgitleýjiniň görkezilen setiri

(sütüni) iki kesgitleýjiniň degişli setiriniň (sütüniniň) elementleriniň jemine deňdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + b_1 \\ a_{21} & a_{22} + b_2 \end{vmatrix}$$

6) eger kesgitleýjiniň iki setiriniň (iki sütüniniň) elementleri proporsional bolsalar, ýagny

$$\frac{\mathrm{a}_{11}}{\mathrm{a}_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad \left(\frac{\mathrm{a}_{11}}{\mathrm{a}_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \right)$$

onda ol kesgitleýji nola deňdir.

Dogrudan-da, goý

$$\frac{\mathrm{a}_{11}}{\mathrm{a}_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \lambda, \Rightarrow a_{11} = \lambda a_{21}, a_{12} = \lambda a_{22}$$

Onda kesgitleýjiniň 3)-nji we 4)-nji häsiýetlerine görä

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \left\|\begin{matrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right| = \lambda \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

7) eger kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň (sütüniniň) elementlerini bir sana köpeldip, başga bir setiriniň (sütüniniň) degişli elementlerine goşsak, kesgitleýjiniň bahasy üýtgemez:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix}$$

Hakykatdan-da kesgitleýjiniň 6)-njy we 7)-nji häsiýetlerine görä

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3-nji we *n*-tertipli kesgitleýjiler

Biz indi 3-nji hem-de ***n***-tertipli kesgitleýjiler girizeris. Olar üçin ýokarda getirilen häsiýetleriň ählisi dogry.

Kesgitleme. Şeýle

$$\begin{aligned} \Delta = a_{11}\ a_{22}\, a_{33} + a_{12}\ a_{23}\, a_{21} + a_{13}\ a_{21}\, a_{32} - a_{13}\ a_{22}\, a_{31} - \\ - a_{11}\ a_{23}\, a_{32} - a_{12}\ a_{21}\, a_{33} \end{aligned} \tag{4}$$

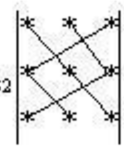
aňlatma 3-nji tertipli kesgieleýji diýilýär we ol

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

bilen belgilenýär.

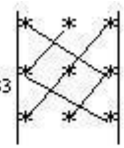
Kesgitleýjiniň a_{11}, a_{22}, a_{33} elementleri onuň baş diagonalyny düzýärler, a_{31}, a_{22}, a_{13} elementler bolsa onuň gapdal diagonalyny düzýärler. a_{ik}, element i setirinde we k sütünde ýerleşen. Şonuň üçin hem a_{ik} elemente i setiriniň we k sütüniň kesişmesinde ýerleşen diýeris. (4) aňlatmanyň gurluşy ýönekeý: Onuň položitel alamatly agzalarynyň birinji agzasy: baş diagonalda ýerleşen elementleriň köpeltmek esasynda alnan a_{11}, a_{22}, a_{33}; galanlary esasy baş diagonala parallel, bir depesi a_{13} elementde, şonuň ýalyda bir gepesi a_{31}, elementde bolan iki üçburçlygyň depelerinde ýerleşen elementleriň köpeltmek hasyllaryny düzýäris:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$



Şonuň ýaly usul bilen gapdal diagonala görä köpeltmek hassyllary düzýäris we olary minus alamat bilen alýarys:

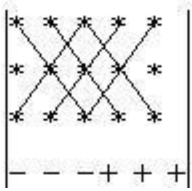
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



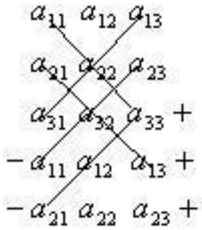
Her bir $\alpha_{i_1j_1}, \alpha_{i_2j_2}, \alpha_{i_3j_3}$ köpeltmek hasyla olaryň degişli alamaty bilen, **kesgitleýjiniň agzasy** diýilýär.

Indi kesgitleýjiniň birinji we ikinji sütünlerini onuň üçinji sütüninden sagda ýazalyň.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & -+ & + & + \end{vmatrix}$$



Suratda görnüşi ýaly + bilen belgilenen çyzyklarda ýerleşen elementleriň köpeltmek hasyly plus alamat bilen, minus bilen belgilenen çyzyklarda ýerleşen elementleriň köpeltmek hasyly minus alamat bilen alynmaly. Kesgitleyjini tapmaklygyň bu düzgünine Sarrýusyň düzgüni diýilýär. Sütüniň ýerine setirleri hem ulanmak bolar.



(5) kesgitleýjede a_{ij} elementi alalyň, ol elementiň ýerleşen i setirini we j sütünini çyzalyň. Kesgitleýjiniň çyzylan setirinden we sütüninden galan elementlerinden ikinji tertipli kesgitleýji düzeliň. Bu kesgitleýjä a_{ij} elementiň **minory** diýilýär we M_{ij} belgi bilen belgilenýär.

Meselem:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad\qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$(-1)^{i+j}$ alamat bilen alnan M_{ij} minora a_{ij} elementiň algebraik doldyrgyjy diýilýär we A_{ij} belgi bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Mysal: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ kesgitleýji üçin

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 42 = -38. \quad A_{12} = (-1)^{1+2}(-38) = 38$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 18 = -16. \quad A_{22} = (-1)^{2+2}(-16) = 16$$

9) Kesgitleýjiniň käbir setiriniň (sütünini̇ň) elementlerini olaryň degişli algebraik doldyrgyjyna köpeldip düzülen jem kesgitleýjinin özüne deň:

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{2i} A_{2i} + a_{3i} A_{3i} \qquad i = 1,2,3;$$

$$\Delta = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3} \qquad i = 1,2,3$$

10) kesgitleýjiniň käbir setiriniň (sütüniniň) elementlerini onuň başga setiriniň (sütüniniň) degişli algebraik doldurgyjyna köpeldip düzülen jem nola deň :

$$a_{11} A_{k1} + a_{12} A_{k2} + a_{13} A_{k3} = 0, \qquad k = 2,3$$

$$a_{11} A_{1k} + a_{21} A_{2k} + a_{31} A_{3k} = 0, \qquad k = 2,3.$$

Indi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

görnüşdäki ýazgyda a_{ij} elementiň ýerleşen i-nji setirini we j-nji sütünini çyzalyň, galan elementlerinden üçinji tertipli kesgitleýji düzeliň we ony M_{ij} belgi bilen belgiläliň we

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (6)$$

formula boýunça A_{ij} kesgitläliň.Onda

$$a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} + a_{3i} A_{3i} + a_{4i} A_{4i} \qquad (i = 1,2,3,4)$$

aňlatma 4-nji teripli kesgitleýji diýilýär we

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + a_{3i}A_{3i} + a_{4i}A_{4i} \qquad (6)$$

deňlikdäki M_{ij} kesgitlýjä a_{ij} elementiň minory, A_{ij} bolsa onuň algebraik doldurgyjy diýiliýär.

Şunlukda

$\Delta = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + a_{3i}A_{3i} + a_{4i}A_{4i}$

formula boýunça 4-nji tertipli kesgitleýjileri tapmak 3-nji teripli kesgitleýjileri hasaplamaklyga getirilýär

Goý, biz (n-1)-nji teripli kesgitleýjileri bilýän bolalyň.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

Indi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

görnüşdäki ýazgyny alalyň we onuň a_{ij} elementiniň ýerleşen setirini we sütüninii çyzalyň, onda onuň galan elementleri n-1 tertipli kegiitleýjini düzýär, ol kesgitleýjini M_{ij} belgi bilen belgiläliň we goý

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \, . \qquad (7)$$

Kesgitleme.Şeýle

$$\Delta = a_{1i} A_{1i} + a_{2i} A_{2i} \ldots + a_{ni} A_{ni} \quad 1$$

aňlatma ***n***-nji tertipli kesgitleýji diýilýär we ol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

belgi bilen belgilenýär. (7) formuladaky (n-1)-nji tertipli M_{ij} kesgitleýä a_{ij} elementiň minory, A_{ij} bolsa onuň algebraik doldurgyjy diýiliýär.

n-nji tertipli kesgitleýjiler üçin hem kesgitleýjileriň 1) – 10) häsiýetleri dogrudyr.

Mysallar

Kesgitleýjileri hasaplamaly

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11$

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{i\alpha} & 1 \\ 1 & e^{-i\alpha} \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$

Bu kesgitleýiniň ikinji sütünini $e^{i\alpha}$ köpeltsek birinji sütünini alýarys, şonuň üçin hem kesgitleýjileriň 7-nji häsiýetine görä ol nola deň.

$$4.\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Biz bu ýerde kesgitleýjileriň 3-nji häsiýetini ulanyp we birinji sütünden umumy köpeldiji bolan 2 sany kesgitleýjiniň alamatynyň daşyna çykardyk.

$$2.\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ - & - & - & + & + \ + \end{vmatrix} = 2[28-6+20-(-35+2+48)] = 2(22-15) = 14$$

Kesgitleýjiniň tertibi 3-den ýokary bolanda, ony hasaplamak üçin onüň häsiýetlerini ulanyp ony ýönekeýleşdirip bolýar. Biz birnäçe usulyň üstünde durup geçeliň.

I. Kesgitleýjiniň tertibini peseltmek

Bu usul kesgitleýjileriň 9-njy häsiýetine esaslanan.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

(i -üýtgemeýär, diňe k-a görä).

Biz şu formulany ulananymyzda ozal kesgitleýjiniň häsiýetlerini ulanyp onuň bir setiriniň (ýa-da sütüniniň) elementleriniň birinden başgalaryny nola öwürsek onda hasaplamanyň ýeňilleşýändigini görýäris.

Mysal. $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & 7 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjini hasaplamaly.

Birinji setirine ikinji setiri goşalyň we üçünji setiri 2 köpeldip, ikinji setire goşalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 9 & 20 \\ -2 & 2 & 7 & 10 \\ 0 & 10 & 11 & 20 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjini birinji sütün boýunça dagydalyň (kesgitleýjiniň 8-nji häsiýeti)

$$\Delta = (-1)^{1+2}(-2)\begin{vmatrix} 9 & 9 & 20 \\ 10 & 11 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiniň 3-nji häsiýetine görä üçünji sütünden 2-nji kesgitleýjiniň daşyna çykaryp bolýar:

$$\Delta = 4 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 10 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Indi 3-nji sütüniň iki elementini nola öwüreliň (2 setiri -1-e köpeldip, 1-nji setire goşýarys; 3-nji setiri -10 köpeldip 2-nji setire goşýarys):

$$\Delta = 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -30 & 41 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{3+2\cdot 1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -30 & 41 \end{vmatrix} = 4(-41-60) = -404$$

II. Üçburçluk görnüşine getirme usuly

Kesgitleýjiniň bir diagonalyndan ýokarda ýa-da aşakda ýerleşen elementlerini nola öwürmeli.

Mysal. Kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

birinji setirini beýleki setirlerinden aýralyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

Kesgitleýjini hasaplamaly.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Birinji setiri a_1 köpeldip, 2-nji setirden, 2-nji setiri a_1 köpeldip 3-nji setirden aýralyň:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_2 a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2^2 - a_2 a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\Delta_2$$

Biz 3-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamaklygy özüne meňzeş 2-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamaga getirdik. Umuman ***n***-nji tertipli şeýle kesgitleýjini hasaplamaklygy oňa meňzeş ***n-1***-nji tertipli kesgitleýjini hasaplamaklyga getirip bolýar, ýagny

$$\Delta_n = A_1 \cdot \Delta_{n-1}, \qquad \Delta_{n-1} = A_2, \Delta_{n-2}, \ldots$$

Bu deňliklere rekurrent gatnaşyklar diýýilýär.Şunlukda

$$\Delta_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$

Mysallar

1.Kesgitleýjileri hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a^2 + 1 & a\beta & a\gamma \\ a\beta & \beta^2 + 1 & \beta\gamma \\ a\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 + 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

2. Deňlemeleri çözelmeli:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Kesgitleýjini 3-nji setiri boýunça dagydyp hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

4.Ýokary tertipli kesgitleýjileri hasaplamaly:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$$

5. Rekurrent gatnaşyklar formulasyny ulanyp, kesgitleýjileri hasaplamaly.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6.Üçburçluk görnüşe getirip,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjini hasaplamaly.

7. Üçburçluk görnüşe getirip,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjini hasaplamaly.

Hasaplanylyşy. 2-nji setirden, 3-nji setirden we ş. m. ***n***-nji setirden 1-nji setiri aýralyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & ... & 2 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

Indi 1-nji sütüne 2-nji sütüni, 3-nji sütüni we ş.m. ***n*** -nji sütüni goşalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3+2(n-1) & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2n+1 \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 0\dots0 \\ 1 & 2 & 1\dots0 \\ 0 & 1 & 2\dots0 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0\dots2 \end{matrix} \right\|$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjini rekurrent gatnaşyklar formulasy boýunça hasaplamaly.

$\Delta_1=2;$ $\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$ $\quad \Delta_2=2\Delta_1-1$

Δ_3 - birinji sütüni boýunça dagydalyň

$$\Delta_3 = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\Delta_2 - 2 = 2\Delta_2 - \Delta_1$$

Goý, bu formula $(n\text{-}1)$ –nji tertipli kesgitleýji üçin dogry bolsun.

$$\Delta_{n-1}=2\Delta_{n-2}-\Delta_{n-3}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{vmatrix} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-3}$$

$$\Delta_{n-1}=2\Delta_{n-1}-2\Delta_{n-2}$$

Emma,

$\Delta_1=2, \Delta_2=3, \Delta_3=2\cdot 3-2=4=3+1.$

$\Delta_4=2\cdot 4-3=5=4+1$

Goý

$\Delta_{n-1}=n-1+1=n$ *bolsun onda*

$\Delta_n=2n-(n-1)=2n-n+1=n+1$

2. Matrissalar we olar bilen geçirilýän çyzykly amallar

Kesgitleme. m setirden we n sütünden ybarat bolan gönüburçly

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

tablisa m×n ölçegli matrisa (ýa-da (m×n)-matrisa) diýilýär.

a_{ij}-matrisanyň elementleri. Eger m=n bolsa, onda oňa kwadrat matrisa diýilýär. Matrisalar A,B, C,... baş latyn harplary bilen belgilenýär.

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots a_{mn} \end{Vmatrix},\quad A=\left\|a_{ij}\right\| \quad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

belgiler hem ulanylýar. Eger $A=\left\|a_{ij}\right\|$ we $B=\left\|b_{ij}\right\|$, $1\le i\le m,\ \ 1\le j\le n$ (m×n)-matrisalaryň degişli elementleri deň bolsalar, $(a_{ij} = b_{ij})$ we diňe şonda iki matrisa deň diýilýär we A=B ýazylýar.

A-matrisa san däl-de, sanlardan düzülen tablisadygyny bellemek gerek. Kwadrat matrisalar üçin olaryň kesgitleýjisini (determinantyny) kesgitleýärler.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Eger kwadrat matrisanyň baş diagonalyndan daşda ýerleşen elementleri nola deň bolsa, onda ol matrisa diagonal matrisa diýilýär:

$$A = \|a_{ij}\| \quad a_{ij=0}, \quad i \neq j.$$

Eger matrisanyň bir diagonalyndan aşakda ýa-da ýokarda ýerleşen elementleri nola deň bolsa, onda ol matrisa üçburçly matrisa diýilýär.

Eger $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ deňölçegli (m×n)-matrisa bolsalar we $C = \|a_{ij} + b_{ij}\| = \|c_{ij}\|(m \times n)$-ölçegli matrisa bolsa, onda C matrisa A we B matrisalaryň jemi diýilýär we C=A+B ýazylýar.

Mysal

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}b_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

Kesgitlemä görä diňe ölçegleri deň bolan matrisalary goşup bolýar.

Matrisalary goşmak operasiýasy aşakdaky häsiýetlere eýe:

1.A+B=B+A

2.(A+B)+C=A+(B+C)

Eger $C=\|c_{ij}\|\ (1\le i\le m; 1\le j\le n)$ matrisanyň elementleri $A=\|a_{ij}\|(1\le i\le m; 1\le j\le n)$ matrisanyň elementlerini α sana köpeldilip alnan bolsa, $c_{ij}=\alpha a_{ij}\ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$, onda $C=\alpha A$ we C matrisa A matrisanyň α sana köpeltmek hasyly diýilýär: $c_{ij}=\alpha a_{ij}\ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$.

Mysal.

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}.$$

Matrisany sana köpeltmegiň häsiýetleri:

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

3. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A).$

Iki matrisanyň tapawudy $A-B$ şeýle kesgitlenýär:

$$A-B=A+(-1)\cdot B$$

Eger A n tertipli kwadrat matrisa bolsa

$$\det(\alpha A)=\alpha^n\det A.$$

Goý, z_1 we z_2 ululyklar y_1 we y_2 ululyklaryň üsti bilen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

formula boýunça aňladylan bolsun we y_1, y_2, y_3 ululyklar

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \\ y_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

formula boýunça x_1 we x_2 ululyklaryň üsti bilen aňladylan bolsun. (9) formuladan y_1, y_2, y_3 ululyklaryň bahalaryny (8) formula goýup alarys:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) + a_{13}(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) \\ z_2 &= a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) + a_{23}(b_{31}x_1 + b_{32}x_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{ýa-da}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})x_2 \\ z_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{23}b_{31})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})x_2 \end{aligned}\right\}$$

Goý,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \; c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj} \; ,$$

$$i=1,2; \; j=1,2.$$

Şeýle alnan C matrisa A matrisanyň B matrisa köpeltmek hasyly diýilýär we C=AB ýazylýar.

Alnan netijelerden görnüşine görä:

C matrisanyň c_{ij} elementini almak üçin A matrisanyň i-nji setiriniň elementlerini B matrisanyň j-nji sütüniniň degişli elementlerine köpeldip jemlemeli.

Şunlukda, A matrisany B matrisa köpeltmek diňe A matrisanyň sütünleriniň sany B matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolanda mümkin.

Umumy halda bu düzgün dogry. Goý,

$$A=\left\|a_{ij}\right\|, 1\le i\le \underline{\underline{m}}, 1\le k\le \underline{n}; \quad B=\left\|b_{kl}\right\|, 1\le k\le n,\ 1\le l\le p;$$

$$AB=C=\left\|c_{rq}\right\|,\ \ 1\le r\le m, 1\le q\le p,$$

$$c_{rq}=\sum_{k=1}^{n}a_{rk}b_{kq}$$

Kesgitlemeden görnüşine görä A·B köpeldip bolanda B·A köpeldip bolmazlygy mümkin. AB, BA köpeltmek hasyllaryň bolmagy üçin A we B matrisalar deňtertipli kwadrat matrisa bolmaly. Emma şeýle matrisalar üçin hem mydama AB=BA deňlik ýerine ýetmeýär

Mysal.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$ $\qquad BA=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$, AB=BA.

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 18 & -4\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad AB\neq BA.$$

Getirilen mysallardan görnüşine görä, AB=BA ýa-da, AB≠BA bolmagy mümkin.

Eger AB=BA deňlik ýerine ýetse, onda A we B matrisalara **çalşyrymly** ýada **kommutirlenýän** matrisalar diýilýär.

Matrisalary köpeltmegiň häsiýetleri:

1.(AB)C=A(BC)

2.(A+B)C=AC+BC

3.A(B+C)=AB+AC

Ýene bir zady belläliň. Goý, C=AB, B - kwadrat diagonal matrisa:

$$B=\begin{pmatrix}d_1 & 0 \dots 0\\ 0 & d_2 \dots 0\\ 0 & 0 \dots d_n\end{pmatrix}, \quad A=\|a_{ij}\|, \ (1\le i\le m;\ 1\le j\le n)$$

Onda $c_{ij}=a_{ij}d_j \quad (i=1,2,\ldots,n)$, ýagny

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \dots & a_{1n}d_n\\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \dots & a_{2n}d_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \dots & a_{mn}d_n\end{pmatrix}$$

Eger A we B kwadrat birtertipli matrisalar we C= AB bolsa, onda

$$\det C=\det A\cdot\det B.$$

Baş diagonalynyň elementleri 1-e deň bolup , başga elementleri nola deň bolan kwadrat matrisa birlik matrisa diyilyar we ol E harpy bilen belgilenýär:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Şu matrisa "Birlik" at goýulmasynyň şeýle sebäbi bar. Eger A kwadrat matrisa bolsa, onda

EA=AE=A.

Adaty "1" sanyň köpeltmekde oýnaýan rolyny $(1\cdot a=a\cdot 1=a)$, E matrisa matrisalary köpeltmek operasyýasynda ýerine ýetirýär. Goý

$$\left.\begin{array}{l} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{array}\right\},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Onda matrisalary köpeltmek düzgünini ulanyp, Y=AX ýazyp bilýäris.

Goý, det A≠0.Sistemanyň birinji deňlemesini A_{11}, ikinji deňlemesini A_{12} we üçünji deňlemesini A_{13} köpeldip we soňra alnan deňlemeleri goşup alarys:

$$y_1A_{11}+y_2A_{21}+y_3A_{31}=\left(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}\right)x_1+$$
$$+\left(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}\right)x_2+\left(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{32}A_{31}\right)x_3$$

Kesgitleýjileriň 9-njy häsiýetine görä x_1 näbelliniň koeffisiýenti det A deň. Kesgitleýjileriň 10-njy häsiýetine görä x_2 we x_3 näbellileriň koeffisiýentleri nola deň. Diýmek,

$$x_1=\frac{A_{11}}{\det A}y_1+\frac{A_{21}}{\det A}y_2+\frac{A_{31}}{\det A}y_3\,.$$

Şunuň ýaly usul bilen x_2 we x_3 taparys:

$$\left.\begin{aligned}x_2&=\frac{A_{12}}{\det A}y_1+\frac{A_{22}}{\det A}y_2+\frac{A_{32}}{\det A}y_3\,.\\x_3&=\frac{A_{13}}{\det A}y_1+\frac{A_{23}}{\det A}y_2+\frac{A_{33}}{\det A}y_3\,.\end{aligned}\right\}$$

Şunlukda, biz x_1,x_2,x_3 ululyklary y_1, y_2, y_3 ululyklaryň üsti bilen aňlatdyk. y_1, y_2, y_3 ululyklaryň koeffisiýentlerinden matrisa düzeliň:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

Onda $X=A^{-1}Y$.

A^{-1} matrisa A matrisanyň ters matrisasy diýilýär we

$A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

A^{-1} matrisanyň formulasyndan görnüşine görä, A^{-1} matrisanyň bolmagy üçin $\det A\neq 0$ zerur.

$\det A=0$ kwadrat matrisa üýtgeşik (regulýar däl) diýilýär we $\det A\neq 0$ onda regulýar (üýtgeşik däl) matrisa diýilýär.

Eger $A=\|a_{ij}\|$ n tertipli kwadrat matrisa bolsa we detA≠0, onda

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ldots A_{n1}\\ A_{12}\ A_{22}\ldots A_{n2}\\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\\ A_{1n}\ A_{2n}\ldots A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Goý, A we B deňölçegli kwadrat matrisalar bolsun. Onda

$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Mysal.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

matrisa ters A^{-1} matrisany tapmaly.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4;\quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=8;\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{22}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-9;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Diýmek

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -7 & -9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Goý,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň setirlerini degişli sütünleri bilen çalşyşyryp ýazalyň:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Bu matrisa A matrisanyň transponirlenen matrisasy diýilýär we A^T belgi bilen belgilenýär. Eger A (m×n) ölçegli bolsa, A^T (n×m) ölçegli matrisa. Eger A kwadrat matrisa bolsa

$$\det A = \det A^T.$$

aşakdaky häsiýetleri ulanarys

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

3. $(AB)^T = A^T B^T$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Goý,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň $i_1<i_2<...<i_k$ setirlerini we $j_1<j_2<...<j_k$ sütünlerini çyzalyň. Matrisanyň çyzylan setirleriniň we sütünleriniň kesişmesinde ýerleşen elementlerinden k tertipli kesgitleýji düzeliň:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \qquad (k \le \min(n; m)).$$

Bu kesgitleýjä A matrisanyň k tertipli minory diýilýär.

Noldan tapawutly minorlaryň iň uly tertibi bolan r sana A matrisanyň rangy diýilýär.

3. Matrisanyň rangyny tapmak usullary

1. Elementar özgertmeler usuly.

Aşakdaky özgertmelere

1) Matrisanyň setirleriniň (sütünleriniň) ornuny çalşyrmak;

2) Matrisanyň setirini (sütünini) noldan tapawutly sana köpeltmek;

3) Matrisanyň setiriniň (sütünininiň) elementlerini käbir sana köpeldilen beýleki setirleriniň (sütünininiň) degişli elementlerine goşmak - matrisanyň elementar özgertmeleri diýilýär.

2.Gurşaýan minorlar usuly

Goý, A matrisanyň k-njy tertipli M_k minory nola deň däl bolsun. Indi diňe öz içinde M_k minory saklaýan M_{k+1} minorlara seredýäris. Eger ol minorlaryň ählisi nola deň bolsa, onda A matrisanyň rangy k deň. Eger nola deň däl k+1 tertipli minor bar bolsa, onuň bilen ýokardaky ýaly işi gaýtalaýarys.

A kwadrat matrisa bolsa we $A=A^T$,bolsa onda oňa simmetrik matrisa diýilýär:

$$A=\|a_{ij}\|, \quad a_{ij}=a_{ji} \qquad 1\le i\le n;\ 1\le j\le n.$$

Mysal.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A kwadrat matrisa bolsa we $A^T=A^{-1}$ bolsa, onda oňa ortogonal matrisa diýilýär. Goý, A ortogonal matrisa. Onda

$AA^T=AA^{-1}=E.$ $\qquad A^TA=A^{-1}A=E.$

$\det(AA^T)=1,$ $\qquad \det A\cdot\det A^T=1.$

$(\det A)^2=1,$ $\qquad \det A=\pm 1$

Mysal.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrisa haçan ortogonal matrisa bolýar?

Çözülişi:

$AA^T = A^T A = E$ deňlikden alýarys:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ýa-da

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$$

Ýene-de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alýarys

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1. \qquad a_{11}a_{12} + a_{22}a_{21} = 0$$

Diýmek

$$a_{21}^2 = -a_{12}^2 \qquad a_{11}^2 = -a_{22}^2$$

$a_{11} = \cos\varphi$, $a_{12} = -\sin\varphi$ hasap etsek, onda her bir 2-nji tertipli ortogonal matrisa

$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}$$

görnüşde bolýar, ikinji setirde iki halda hem + ýa-da – alamat almatly:

$$A_{+} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad A_{-} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mysal.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisanyň minoryny tapmaly.

1.Elementar özgertmeler usuly.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-nji matrisadan 2-nji matrisa geçmek üçin birinji matrisanyň ikinji setirini -1 köpeldip, birinji setire geçirmeli, birinji setiri bäşinji setire we bäşinji setiri ikinji setire geçirmeli. $(2)\to(3)$ geçmek üçin birinji setiri -2-ä köpeldip ony ikinji setire ulanyp, -3 köpeldip üçünji setire goşmaly. $(3)\to(4)$ geçmek üçin 2-nji setiri $-\frac{1}{5}-e,$ üçünji setiri $\frac{-1}{11}-e,$ 4-nji setiri $\frac{1}{5}$ we bäşinji setiri $\frac{1}{2}$ köpeltmeli. $(4)\to(5)$ geçmek üçin onyň birinji sütünini 5-e köpeldip, üçünji sütüne we -4 köpeldip, 2-nji sütüne goşmaly; $(5)\to(6)$ geçmek üçin ikinji sütüni 2-ä köpeldip üçünji sütüne goşmaly, soňra ikinji setiri -1-e köpeldip, 3-nji, 4-nji, 5-nji setirlere goşmaly. Şunlukda

A matrisanyň rangy 2-ä deň. $r \neq (A) = 2$

2. Gurşaýan minorlar usuly.

Bu usul bilen ýokarda sereden A matrisamyzyň rangyny tapalyň

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2.$$

Indi 3-nji tertipli minorlary barlaýarys.Gurşaýan minorlar üç sany:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 + 30 - 48 + 14 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 20 - 32 = 0.$$

Diýmek, A matrisanyň minory 2-ä deň.

Mysallar.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ we $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
   matrisalar üçin 3A+2B matrisany tapmaly.

2. Hasaplamaly.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Aşakdaky matrisalaryň ters matrisasyny tapmaly.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

4. Aşakdaky matrisanyň ortogonaldygyny barlamaly.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. Matrisalaryň rangyny tapmaly.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Çyzykly deňlemeler sistemasy

I .

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (10)$$

sistema çyzykly deňlemeler sistemasy diýilýär. Biz ilki n=m bolan ýagdaýyna seredeliň. Aşakdaky matrisalary girizeliň.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Onda (10) sistemany

$$AX=B \qquad (11)$$

görnüşde ýazyp bilýäris.Eger x_i (i=1,2,...,n) sanlar (10) sistemany kanagatlandyrýan bolsa, onda ol sanlara (10) sistemanyň çözülişi diýilýär.

Goý det A=$\Delta \neq 0$.

Onda A^{-1} bar we (2) deňlemäni sagdan A^{-1} köpeldip alýarys.

X=A^{-1}B.

Indi

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

bu ýerde A_{ij} det A kesgitleýjiniň a_{ij} elementiniň algebraik doldurgyjy.Matrisalary köpeltmek formulanyň esasynda alýarys.

$$X=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}A_{k1}\;b_K\\ \sum_{k=1}^{n}A_{k2}\;b_k\\ \cdots\cdots\\ \sum_{k=1}^{n}A_{kn}\;b_k\end{pmatrix}.$$

Diýmek,

$$x_i=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k, \qquad i=1,2,\ldots,n. \qquad (12)$$

Bu formulalara Krameriň formulalary diýilýär.

Şunlukda, eger det A $\neq 0$ bolsa, onda (11) sistemanyň ýeke-täk çözülişi bar we ol (12) formula bilen tapylýar.

$$\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k$$

jem n-tertipli kesgitleýji bolup, onda detA kesgitleýjiniň i-nji sütüni

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

sütün bilen çalşyryp alýarys, ýagny

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1i-1}b_1a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2i-1}b_2a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{ni-1}b_na_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjini Δn bilen belgiläp, (12) formulany aşakdaky görnüşde ýazalyň.

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \qquad i = 1,2,...,n. \qquad (12')$$

Köplenç Krameriň formulalary $(12')$ görnüşde ýazylýar.

Mysal.

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + \ 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 5x_1 - \ 3x_2 + 2x_3 &= 15 \\ 10x_1 - 11x_2 + 2x_3 &= 36 \end{aligned}\right\}$$

sistemanyň çözülişini Krameriň formulalary bilen tapmaly.

Çözülişi: Ilki Δ-ni tapmaly.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -105 - 165 + 40 + 90 + 154 - 50 = -72.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 15 & -3 & 2 \\ 36 & -11 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 15 & -3 & 2 \\ 21 & -14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & -1 & 2 \\ 27 & -11 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 21 & -11 \end{vmatrix} = -165 + 21 = -144.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 3 \\ 5 & 15 & 2 \\ 10 & 36 & 5 \end{vmatrix} = 72.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 15 \\ 5 & -3 & 15 \\ 10 & -11 & 36 \end{vmatrix} = -72.$$

$$x_1 = \frac{-144}{-72} = 2$$

$$x_2 = \frac{72}{-72} = -1,$$

$$x_3 = \frac{-72}{-72} = 1.$$

Indi $n \neq m$ hala seredeliň.(Umumy hal)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

A-matrisa sistemanyň matrisasy, $\overline{A}$ matrisa bolsa sistemanyň giňeldilen matrisasy diýilýär.

Eger (10) sistemanyň kesgitli çözülişi bar bolsa, onda oňa billelikdäki sistema, eger kesgitli çözülişi ýok bolsa oňa billelikdäki däl sistema diýilýär.

Teorema (Kroneker-Kapelli). (10) sistemanyň billelikdäki sistema bolmagy üçin A matrisanyň rangynyň $\overline{A}$ matrisanyň rangyna deň bolmagy zerur we ýeterlikdir. r(A)= r($\overline{A}$)

1) Biz A hem-de $\overline{A}$ matrisalaryň rangyny tapýarys.Eger rang $\overline{A}>$ rang A bolsa , onda (10) sistemanyň çözülişi ýok.

2) Eger rang A= rang $\overline{A}$ bolsa onda (10) sistemanyň Çözülişi bar.Goý rang A= rang $\overline{A}$=k.Bu çözülişi tapmak üçin (10) sistemanyň haýsy bolsa-da, onuň koefisentlerinden dňzülen matrisanyň rangy k deň bolan, k deňlemesini alýarys we k deňlemeden ybarat bolan sistemany çözýäris. Eger k<min (n,m) bolsa (10) sistemanyň tükeniksiz köp çözülişi bar.

Eger m<n bolsa rang we $A \leq m$ bolsa we bu halda (10) sistemanyň mydam tükeniksiz köp çözülişi bar.

Goý, m>n.rang A=k$\leq n$. Eger k=n bolsa (10) sistemanyň ýeke-täk çözülişi bar.

1. Mysal.(m<n)

$$\left.\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + \ 6x_4 &= 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \ 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 - \ x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 \end{aligned}\right\}.$$

Sistemany derňemeli we çözülişi bar bolsa tapmaly.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 14 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$D_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2^{(2)} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = +1.$$

$$D_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 9 & 5 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$D_3^{(2)} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 14 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -2(63 + 18 + 10 - 9 - 18 - 70) = 12.$$

Diýmek, rang A=3. rang $\overline{A}$=3, çünki 3 tertipliden ýokary tertipli kesgitleýji ýok. Sistemanyň çözülişi bar. Sistemany şeýle

$$\left.\begin{aligned} -3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 - 9x_1 \\ -2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 - 6x_1 \\ -x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 - 3x_1 \end{aligned}\right\}$$

görnüşde ýazalyň. Krameriň düzgüni boýunça çözüwleri tapalyň.

$$\Delta = 12;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 - 9x_1, 5 & 6 \\ 5 - 6x_1, 3 & 4 \\ -8 - 3x_1, 3 & 14 \end{vmatrix} = -3x_1 \cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \\ -8 & 3 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= -6x_1\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 36x_1 + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 36x_1 - 156.$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}-3 & 4-9x_1, & 6\\ -2 & 5-6x_1, & 4\\ -1 & -8-3x_1, & 14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -9 & 6\\ -2 & -6 & 4\\ -1 & -3 & 14\end{vmatrix}x_1+$$

$$+\begin{vmatrix}-3 & 4 & 6\\ -2 & 5 & 4\\ -1 & -8 & 14\end{vmatrix}=-84.$$

$$\Delta_{x_4}=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 4-9x_1\\ -2 & 3 & 5-6x_1\\ -1 & 3 & -8-3x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 5 & -9\\ -2 & 3 & -6\\ -1 & 3 & -3\end{vmatrix}x_1+$$

$$+\begin{vmatrix}-3 & 5 & 4\\ -2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -8\end{vmatrix}=0.$$

$x_2=3x_1-13, x_3=7, x_4=0$

5. Birjynsly deňlemeler sistemasy

Goý, (1) sistemada b_i =0 bolsun

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ ş\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Mu sistema birjynsly deňlemeler sistemany diýilýär. Bu sistemalar üçin rang A=rang $\bar{A}$ bolýandygy anyk. Şonuň üçin hem bu sistemalaryň mydam çözülişi bar,ol $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$. Muňa sistemanyň triwial çözülişi diýilýär. (13) sistemanyň nola deň däl Çözülişine onuň triwial däl çözülişi diýilýär.

(13) sistemany matrissa görnüşde ýazalyň

$$AX=0 \qquad (13^{/})$$

$(13^{/})$ sistemanyň käbir häsiýetlerini belläliň

1) Eger x_1 $(13^{/})$ sistemanyň çözülişi bolsa, onda $c \cdot x_1$ hem bu sistemanyň çözülişi, bu ýerde c=const.

2) Eger x_1 we x_2 $(13^{/})$ sistemanyň çözülişi bolsa, $c_1 x_1 + c_2 x_2$ hem bu sistemanyň çözülişi, bu ýerde c_1=const, c_2=cosnt.

1) we 2) häsiýetlere görä, eger $x_1 x_2 ... x_k$ $(13^{/})$ sistemanyň çözülişi bolsa,onda

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_k x_k, \qquad c_k = const \ (k = 1,2,...,k),$$

$(13^{/})$ sistemanyň çözülişi.

Bu sistemany hem Kronekera-Kapelli teoramasy bilen derňäp bolýar we çözüwleriniň tapylyşy ýokarda seredilen umumy haldaky ýaly.

m=n hala seredeliň.

Teorema: (13) sistemanyň triwial däl çözülişiniň bolmagy üçin

$$\det A=0$$

bolmagy zerur hem ýeterlikdir.

Hakykatdan-da, goý, $\Delta = \det A \neq 0$. Emma $\Delta_{x_i} = 0$ (i=1,2,...,n) we

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0.$$

Sistemanyň diňe triwial çözülişi bar.

Goý, $\Delta = \det A \neq 0$. Eger näbellileriň hiç bolmanda piriniň koeffisenti nola deň däl bolsa, onda rang $A \geq 1$.

Goý, rang A=k, k<n.

Goý, noldan tapawutly minor çep ýokary burçda ýerleşen bolsun, onda

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r &= -a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r &= -a_{2r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r &= -a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemany çözüp, (13) sistemanyň triwial däl çözüwlerini taparys.

Mysal.

$$\left.\begin{aligned}
x_1-x_2+x_3-x_4&=0\\
x_1+x_2+2x_3+3x_4&=0\\
2x_1+4x_2+5x_3+10x_4&=0\\
2x_1-4x_2+x_3-6x_4&=0
\end{aligned}\right\}$$

sistemany derňemeli we çözüwlerini tapmaly.

Çözülişi.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&2&3\\2&4&5&10\\2&-4&1&-6\end{pmatrix}$$

A matrissanyň rangyny tapalyň.

$$D_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ D_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,\ D_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ D_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Diýmek,rang A=2. $D_2^{(1)}$ çep ýokary burçda ýerleşen.Şonuň üçin hem soňky iki deňlemäni taşlap alarys:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 &= -2x_3 - 3x_4 \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan x_1 we x_2 näbellileri tapýarys.

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4, \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4$$

ýa-da

$$x_1 = -\frac{3}{2}c_1 - c_2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}c_1 - 2c_2 \quad , x_3 = c_1, x_4 = c_2$$

6. Çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmegiň näbellileri aýyrmak(ýoklamak) usuly

n näbellili n deňlemeler sistemany

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 , \\ &ş\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n . \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

alalyň.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

matrisany alalyň. B matrisa (14) sistemanyň giňeldilen matrisasy.

Goý,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

bolsun onda (14) sistemanyň ýeke-täk çözülişi bar.

Eger

1) (14) sistemanyň deňlemeleriniň ornyny çalyşyrsak (näbellileriň nomerlerini çalşyrsak)
2) (14) sistemanyň haýsy-da bolsa bir deňlemesini käbir $\lambda \neq 0$ sana köpeldip başga bir deňlemä goşsak.
3) (14) sistemanyň käbir deňlemesini $\lambda \neq 0$ sana köpeltsek.

Onda (14) sistemada ekwiwalent (deňgüýçli) sistemany alarys.

1),2) we 3) operasiýalara B matrisa bilen elementleri geçirmek diýmekdir.

Mysal. Sistemany çözmeli.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Elbetde bu sistemany Krameriň düzgüni bilen çözüp bileris.Emma biz onda bir näçe gaýtalanýan hasaplamalary ýerine ýetirmeli bolýarys.

B matrisany düzeliň

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Birinji setiri -1-e köpeldip, 3-nji we 4-nji setirlere goşup alarys:

$$B_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & . & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & . & -4 \end{pmatrix}$$

B_1^1 matrisada 3-nji setirde näbellileriň diňe x_2 koeffisienleri -2-ä deň,galanlary 0-a deň.Bu setiri ikinji setire geçireliň

$$B_1^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & . & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & . & -4 \end{pmatrix}$$

Ikinji setiri -1-e köpeldip, birinji setire goşýarys;Ikinji setiri $-\frac{1}{2}$ köpeldip üçünji setire goşýarys; Ikinji setiri $\frac{1}{2}$-e köpeldip, dördünji setire goşýarys; Netijede alýarys

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & . & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & . & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & . & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Üçinji setiri -1-e köpeldip, dördünji setire goşýarys:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & . & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & . & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & . & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & . & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & . & 2 \end{pmatrix}$$

dördünji setiri -4-e köpeldip, birinji setire goşýarys:

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & . & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & . & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & 2 \end{pmatrix}.$$

Dördünji setiri -3-e köpeldip, üçinji setire goşýarys:

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & . & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & . & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & . & -\dfrac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & 2 \end{pmatrix}.$$

Üçinji setiri $-\frac{3}{2}$-e köpeldip, birinji setire goşýarys:

$$B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0. & \dfrac{15}{4} \\ 0 & 2 & 0 & 0. & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0. & -\dfrac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{ýa-da} \quad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{15}{4} \\ 2x_2 = 3 \\ 2x_3 = -\dfrac{13}{2} \\ x_4 = 2 \end{array}$$

Şunlukda tapýarys:

$$x_4 = 2; \;\; x_3 = -\frac{13}{4}; \; x_2 = \frac{3}{2}; \; x_1 = \frac{15}{4}.$$

Bu usul bilen sistemalar üçin meseläni umumy görnüşde hem çözüp bolýar.Ýagny n näbellili m deňlemeler sistemanyny alyp, ol sistemanyň bilelikdedigini ýa-da bilelikde däldigini kesgitleýäris we umumy çözüwlerini tapyp bilýäris.

Goý,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Sistema berlen bolsun. Bu sistema üçin B matrisany ýazalyň

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & . & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & . & b_m \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň üstünde elementar özgertmeleri geçirip ony aşakdaky görnüşe getirip bolýar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a^1_{1,r+1} & \ldots & a^1_{1n} & . & b^1_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a^1_{2,r+1} & \ldots & a^1_{2n} & . & b^1_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a^1_{r,r+1} & \ldots & a^1_{rn} & . & b^1_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & . & b^1_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & . & b^1_m \end{pmatrix}$$

Bu matrisa aşakdaky sistemanyň giňeldilen matrisasy

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad + a^1_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^1_{1n}x_n = b^1_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad + a^1_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + a^1_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^1_{rn}x_n = b^1_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b^1_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b^1_m \end{array}\right\} \qquad (16)$$

bu bolsa (15) sistema ekwiwalent sistema, diňe näbellileriň nomerleriniň deň gelmezligi mümkin.

Eger $b_{r+1}^{1}, b_{r+2}^{1}, \ \dots \ , b_{m}^{1}$ sanlaryň biri nola deň däl bolsa, onda (16) sistema,diýmek (15) sistema bilellikdäki sistema däl.

Eger $b_{r+1}^{1} = b_{r+2}^{1} = ş...ş = b_{m}^{1} = 0$ bolsa, onda (15) sistema bilellikdäki sistema we (16) formula onuň çözüwlerini berýär:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = b_1^1 - a_{1,r+1}^1 c_{r+1} - ý...ý - a_{1n}^1 c_n \\
&x_2 = b_2^1 - a_{2,r+1}^1 c_{r+1} - \dots \ - a_{2n}^1 c_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_r = b_r^1 - a_{r,r+1}^1 c_{r+1} - \dots - a_{rn}^1 c_n \\
&x_{r+1} = c_{r+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&x_n = c_n
\end{aligned}
$$

Mysal. Berilen sistemany Žardan-Gauss usyly bilen derňemeli we çözüwlerini tapmaly:

$$
\left.
\begin{array}{rrrrl}
x_1 - 2x_2 & & + \ x_4 & = -3 \\
3x_1 - \ x_2 & - 2x_3 & & = \ 1 \\
2x_1 + \ x_2 & - 2x_3 & - \ x_4 & = \ 4 \\
x_1 + 3x_2 & - 2x_3 & - 2x_4 & = \ 7
\end{array}
\right\}.
$$

1.

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_1 + \ 2x_2 + \ 3x_3 + \ 4x_4 = 0 \\
7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\
5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\
3x_1 + \ 5x_2 + \ 6x_3 + 13x_4 = 5
\end{array}
\right\}
\quad \text{Jogap.} \quad
\begin{array}{l}
x_1 = 1 \\
x_2 = -1 \\
x_3 = -1 \\
x_4 = 1
\end{array}
$$

2.

$$\left.\begin{aligned} 105\ x_1 - 175\ x_2 - 315\ x_3 + 245\ x_4 &= 84 \\ 90\ x_1 - 150\ x_2 - 270\ x_3 + 210\ x_4 &= 72 \\ 75\ x_1 - 125\ x_2 - 225\ x_3 + 175\ x_4 &= 59 \end{aligned}\right\}$$

Jogap. Sistema bilelikdäki sistema däl.

3.

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_3 + 24x_4 &= 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Jogap.

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + c_1 + 2c_2 \\ x_2 &= -3 + c_1 + 2c_2 \\ x_3 &= c_1 \\ x_4 &= c_2 \end{aligned}$$

4.

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 &= 20 \\ 14x_1 + 21x_2 &= 35 \\ 9x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 16x_3 + 20x_4 &= 0 \\ 10x_5 + 12x_6 &= 22 \\ 15x_5 + 18x_6 &= 33 \end{aligned}\right\}$$

Jogap.

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}c_1; \quad x_2 = c_1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{6}{5}c_2,\ x_6 = c_2$$

III BAP

Analitiki geometriýa

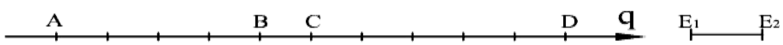
1. Koordinatalar sistemasy

Talyplar dekart koordinatalar sistemasy bilen orta mekdep matematikasyndan tanyş bolmaly.Ýokary mekdepde dürli koordinatalar sistemalary ulanylýar. Analitik geometriýa geometrik şekilleriň saýlanan koordinatalar sistemasynda deňlemelerini düzüp, şol deňlemeleriň üsti bilen olary derňeýär. Şol sebäpli biz bir näçe, has köp ulanylýan, koordinatalar sistemalary barada maglumat getireliň.

I. Ok we okdaky kesimler

Erkin göni alalyň. Bu gönininiň garşylykly iki ugry bar.Öz islegimize görä,bu ugurlaryň birini saýlap alalyň we ony položitel ugur diýip hasap edeliň, garşylykly ugur otrisiatel hasap edilýär.

Položitel ugur „bellenen“ gönä ok diýilýär.Çyzgyda položitel ugur gönininiň şekiliniň gutaran ýerinde peýkamyň ujy ýaly şekil bilen aňladylýar. Ok bir harp bilen belgilenýär we çyzgyda položitel ugruň ujynda ýazylýar.



1-nji çyzgy

Goý, q ok berlen bolsun. E_1E_2 kesimi masştab birlik hasap edeliň.Masştab birlik kesim bilen islendik kesimi ölçäp bilýäris. Kesim masştab birligi bilen ölçegdeş bolmadyk halatynda kesimiň uzynlygy käbir takmyn san bilen aňladylýar. Diýmek her bir kesimiň uzynlygyny tapyp bilýäris.Bu kesimi AB ýa-da BA görnüşde ýazmak bolýar. Häzir A we B nokatlar deňhukukly. Indi biz bu nokatlaryň birini başlangyç nokat we beýlekisini ahyrky nokat diýip hasap edeliň. Şunlukda kesimiň uçlary tertipleşdirildi.Şeýle kesimlere ugrukdyrylan kesim diýilýär.Goý A başlangyç, B soňky nokat bolsun.Onda ol $\overline{AB}$ belgi arkaly ýazylýar. Başlangyç nokat ilki (başda) ýazylýar. $\overline{AB}$ ýazgy kesimiň ugrunyň A nokatdan B nokada tarap ugrukdyrlandygyny aňladýar. $\overline{AB}$ we $\overline{BA}$ garşylykly ugrukdyrylan,uzynlyklary deň kesimler.

Goý, $\overline{AB}$ ugrukdyrylan kesim q okda ýerleşen bolsun .Okda ýerleşen ugrukdyrylan kesimler üçin olaryň ululygy düşünje girizilýär. $\overline{\mathrm{AB}}$ kesimiň uzynlygyny $|AB|$ bilen belgilàliň.Ondan $|AB| \geq 0$. $\overline{\mathrm{AB}}$ ugrukdyrylan kesimiň ululygyny bolsa AB bilen belgiläliň. Kesgitlemä görä

$$AB = \begin{cases} |AB| \;, \; eger \; \overline{AB} \uparrow\uparrow q \; bolsa \\ -|AB| \;, \; eger \; \overline{AB} \uparrow\downarrow q \; bolsa \end{cases}$$

bu ýerde $\overline{AB} \uparrow\uparrow$q ýazgy $\overline{AB}$ ugrukdyrylan kesimiň ugry q okuň ugry bilen gabat gelýär,diýmek AB>0 we $\overline{AB} \uparrow\downarrow$q olaryň ugurlary garşylykly diýmekdir. Meselem $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{BA}$. Kesgitlemä görä AB = -BA.

1 çyzgyda saýlanan masştaba görä $|AB|$=4 , $|DC|$=5.

AB=2 DC=-5

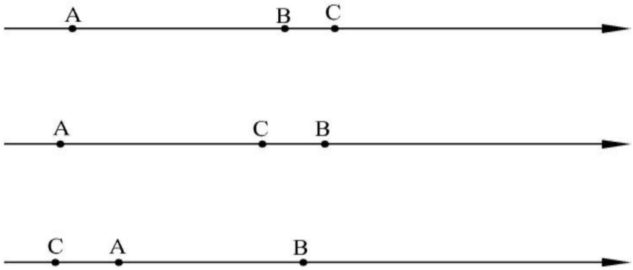
BA=-2 CD=5.

Teorema: A,B,C nokatlaryň q okda nähili ýerleşendigine baglanşyksyz

$$AB+BC=AC \qquad (1)$$

deňlik dogrudyr.

Bu toždestwa esasy toždestwo diýilýär.



2-nji çyzgy

1) AC=AB+BC
2) AB=AC+CB, AC=AB-CB=AB+BC.
3) CB=CA+AB; -BC=-AC+AB$\Rightarrow$ AC=AB+BC.

II. San oky. Gönide koordinatalar

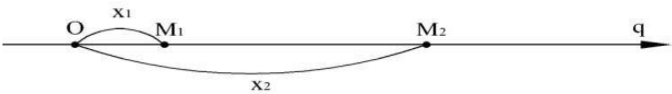
3-nji çyzgy

Goý q ok we birlik ε masştab berlen bolsun. Bu okda bir nokat alyp, ony O harp bilen belgiläliň. O nokatdan q oka ugurdaş bolan ugry položitel we garşysyna bolan ugry otrisatel hasap edeliň.O nokada okuň başlangyç nokady diýilýär. Eger okda masştab saýlanyp, başlangyç nokat kesgitlenen bolsa, onda oňa san oky diýilýär.q okda erkin M nokat alalyň. $\overline{OM}$ kesimiň ululygyna M nokadyň (q okda saýlanan masştab birliginde) koordinatasy diýilýär.O nokadyň koordinatasy nola deň M nokadyň q okda ýerleşen orny onuň koordinatasy bilen doly kesgitlenýär.Şunlukda eger M nokadyň koordinatasy položitel bolsa ol O nokatdan sagda ýerleşýär we otrisatel bolsa O nokatdan çepde ýerleşýär. q okdaky islendik nokada bir san - onuň koordinatasy degişli we tersine, her bir sana q okda bir nokat degişli.

Eger $\overline{\overline{OM = x_1}}$ bolsa, onda $\overline{\overline{M(x_1)}}$ belgi bilen ýazylýar. Meselem M(5) ýazgy M nokadyň koordinatynyň 5-e deňdigini, N(-3) ýazgy N nokadyň koordinatynyň (-3)-e deňdigini aňladýar.

Teorema 1. Eger $M_1(x_1), M_2(x_2)$ bolsa,onda

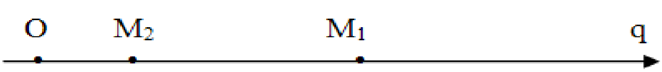
$$M_1 M_2 = x_2 - x_1. \qquad (2)$$



Hakykatdanda nokatlaryň okda ýerleşişine görä, esasy toždostwony ulanyp tapýarys:

1) OM_2=O$M_1 + M_1 M_2$;

$x_2 = x_1 + M_1 M_2$. $\qquad M_1 M_2 = x_2 - x_1$



2) OM_1= O$M_2 + M_2 M_1$;

$x_1 = x_2 - M_1 M_2$

$M_1 M_2 = x_2 - x_1$.

3) $M_2 M_1 = M_2$O+OM_1

$-M_1 M_2 = -x_2 + x_1;$

$M_1 M_2 = x_2 - x_1.$

Teorema 2. Eger $M_1(x_1)$ we $M_2(x_2)$ bolsa , d=$|M_1 M_2|$ belgilesek,onda

$$d=|x_2 - x_1| \qquad (3)$$

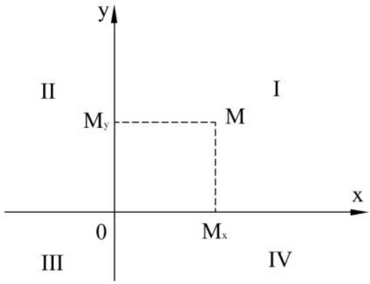
Dogrudan hem 1-nji teorema görä

$$M_1 M_2 = x_2 - x_1.$$

Emma d=$|M_1 M_2|$, diýmek d=$|x_2 - x_1|$.

III.Tekizlikde göniburçly dekart koordinatalar sistemasy

Tekizlikde özara perpendikulýar iki ok alalyň we birlik masştab saýlalyň.Oklaryň kesişme nokadyny O harp bilen belgiläliň we ony oklaryň ikisi üçin hem başlangyç nokat diýip hasap edeliň.Bu oklaryň birini birinji nomer we beýlekisini ikinji nomer diýip hasap edeliň. Şunlukda oklar tertipleşdirilýär. Kesgitlemä görä bu oklar-koordinatalar oklary. Şeýle tertipleşdirilen iki oklar sistemanyna göniburçly dekart koordinatalar sistemasy diýilýär, şunlukda O nokada koordinatalar başlangyjy diýilýär,oklara bolsa koordinat oklary diýilýär.Olaryň birinjisine absissa oky, ikinjisine ordinata oky diýilýär.



4-nji çyzgy

Absissa okuny Ox we ordinata okuny Oy bilen belgiläliň.Çyzgyda x,y harplar položitel ugra degişli oklarynyň ýanynda,onuň şekiliniň gutaran ýerinde goýulýar.Şunlukda O we x nokatlaryň ýerlerişişi absissa okuň ugruny, O we y nokatlaryň ýerlerişişi ordinata okunyň ugruny görkezýär. Şonuň üçin hem bu oklaryň ujunda peýkam görnüşli belgini ýazmak zerur däl.Şol sebäpli ol ýazgy käbir kitaplarda ýazylmaýar.

Tekizlikde erkin M nokat alalyň. M nokatdan Ox we Oy oklara perpendikulýar geçireliň. Perpendikulýaryň esaslaryny degişlilikde M_x we M_y harplar bilen belgiläliň. M_x nokadyň koordinatasyny x we M_y nokadyň koordinatasyny y bilen belgiläliň:

$$O M_x = x \ , \quad O M_y = y$$

x,y sanlara berlen koordinatalar sistemanynda M nokadyň koordinatalary diýilýär; x-sana M nokadyň birinji koordinatasy ýa-da absissasy , y-sana M nokadyň ikinji koordinatasy ýa-da ordinatasy diýilýär.M nokadyň absissasynyň x, ordinatasynyň y bolýandygyny ýazgyda M (x,y) görnüşde ýazyp görkezýärler.Mysal üçin $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ we ş.m M(-2;3), A(5,4) ýazgylarda M nokadyň absissasy -2 we ordinatasy 3; A nokadyň absissasy 5 ordinatasy 4.Diýmek,tekizlikde her bir nokada tertipleşdirilen iki (x,y) san (onuň koordinatalary) degişli. Tersine, islendik tertipleşdirilen iki (x,y) sana tekizligiň bir nokady degişli.

Koordinatalar oklary tekizligi dört bölege bölýär.Tekizligiň oklary položitel ugrlary bilen çäklenen bölegine koordinatalaryň birinji çärýegi diýilýär. Birinji çärýekden sagadyň diliniň hereketiniň tersine tarap aýlanyp I,II,III,IV çärýekler kesgitlenýärler.

Şunlukda M(x,y) bolsa, onda:

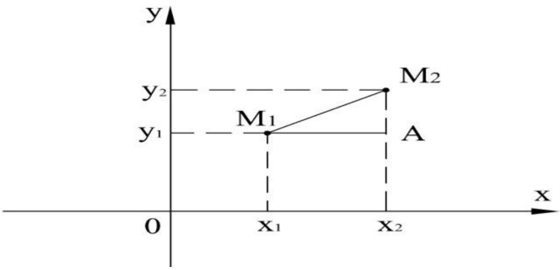
Eger $x>0, y>0$ M nokat I çärýekde ýerleşen;

Eger $x<0, y>0$ M nokat II çärýekde ýerleşen;

Eger $x<0, y<0$ M nokat III çärýekde ýerleşen;

Eger $x>0, y<0$ M nokat IV çärýekde ýerleşen.

Iki $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ nokatlary alalyň we M_1 M_2 kesimiň $|M_1M_2|$ uzynlygyny tapalyň.



5-nji çyzgy

Iki $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nokatlary alalyñ we M_1M_2 kesimiñ $|M_1M_2|$ uzynlygyny tapalyñ. Ozal okda ýerleşen kesimiň uzynlygyny tapypdyk.Çyzgydan görnüşine görä

$$|M_1A| = |x_2 - x_1|, \quad |AM_2| = |y_2 - y_1|$$

$\Delta\, M_1 A M_2$ göniburçy.Pifagoryň teoremasyna görä

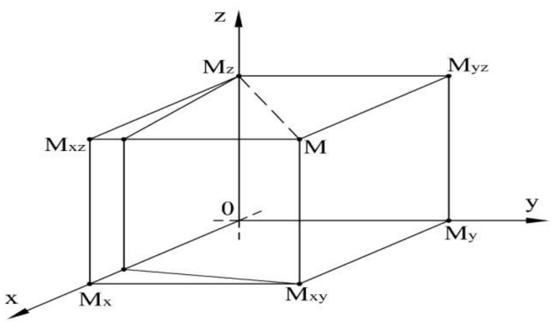
$$|M_1M_2| = \sqrt{(|M_1A|)^2 + |AM_2|^2}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

tekizlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmagyň formulasy.

IV.Giňişlikde dekart koordinatalar sistemasy

Giňişlikde üç sany özara perpendikulýar, bir nokatda kesişýän oklary alalyň. Olaryň kesişme nokadyny O harp bilen belgiläliň we bu oklary nomerläp tertipleşdireliň. Oklaryň birinjisini Ox , ikinjisini Oy we üçinjisini Oz bilen belgiläliň. Çyzykda harplaryň goýulşy tekizlikdäki ýaly.Şeýle tertipleşdirilen üç koordinatalar oklary giňişlikde dekart koordinatalar sistemasyny düzýär.Şunlukda Ox-oka absissa,Oy-oka ordinata we Oz oka applikata diýilýär.



6-njy çyzgy

Giňişlikde M nokat alalyň.M nokatdan Ox,Oy,Oz oklara perpendikulýar geçireliň.Perpendikulýarlaryň esaslaryny degişlilikde M_x, M_y, M_z bilen belgiläliň.(Tekizliklerde M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} belgiler)

Goý, OM_x=x, OM_y= y , OM_z=z bolsun, çyzgyda M_{xy} M nokatdan Oxy tekizlige geçirilen perpendikulýaryň esasy. M_{xz}, M_{yz} hem degişlilikde Oxz,Oyz tekizliklere M nokatdan geçirilen perpendikulýarlaryň esaslary. Onda x,y,z –sanlara M nokadyň berilen koordinatalar sistemasyndaky koordinatalary diýilýär. x-sana M nokadyň birinji koordinatasy ýa-da absissasy, y-sana M nokadyň ikinji koordinatasy ýa-da ordinatasy,z-sana M nokadyň üçünji koordinatasy ýa-da applikatasy diýilýär.M nokadyň absissasynyň x sandygy we ordinatasynyň y sandygy, applikatasynyň z sandygy M(x,y,z) görnüşde ýazylyp görkezilýär. Meselem M(5,-2,3) ýazgy M nokadyň absissasynyň 5, ordinatasynyň -2 we applikatasynyň 3 bolýandygyny görkezýär.

Oxy, Oxz we Oyz tekizlikler giňişligi 8 bölege bölýär. Ol böleklere koordinatalar oktantalary diýilýär we kesgitli tertip boýunça nomerlenýär. Goý M(x,y,z) bolsun.

Eger x>0, y>0 ,z>0, M nokat birinji oktantda ýerleşýär.

Eger x<0, y>0 ,z>0, M nokat ikinji oktantda ýerleşýär.

Eger x<0, y<0 ,z>0, M nokat üçinji oktantda ýerleşýär.

Eger x>0, y<0 ,z>0, M nokat dördunji oktantda ýerleşýär.

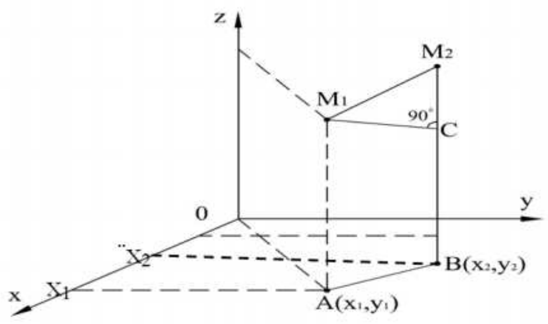
Eger x>0, y>0 ,z<0, M nokat bäşinji oktantda ýerleşýär.

Eger x<0, y>0 ,z<0, M nokat altynjy oktantda ýerleşýär.

Eger x<0, y>0 ,z<0, M nokat ýedinji oktantda ýerleşýär.

Eger x>0, y<0 ,z<0, M nokat sekizinji oktantda ýerleşýär.

Iki $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlary alalyň we $M_1 M_2$ kesimiň $|M_1M_2|$ uzynlygyny tapalyň.



7-nji çyzgy

(1) nokatdan Oxy tekizlige parallel tekizlik geçireriň. Goý, M_1B çyzyk bilen bu tekizligiň kesişme nokady C bolsun. Onda $|CM_2| = |z_2 - z_1|$, $|MC| = |AB|$. Ozal tapan formulamyza görä

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\Delta\, M_1 M_2$C-den alýarys

$$|M_1M_2| = \sqrt{|MC|^2 + |CM_2|^2}$$

Emma

$$|M_1C| = |AB| \quad \text{we} \quad |CM_2| = |z_2 - z_1|$$

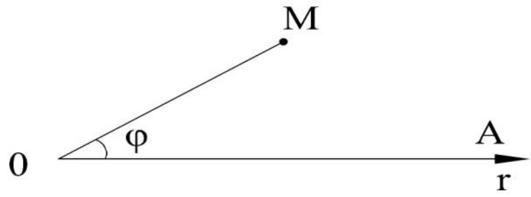
Diýmek

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

giňişlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklygyny tapmak formulasy.

V. Polýar koordinatalar sistemasy

Polýar koordinatalar sistemasy köp hasaplamalarda örän amatly we iş ýüzünde örän ýygy ulanylýar. Tekizlikde käbir O nokat we ol nokatdan çykýan OA şöhle alalyň. O nokada polýus we OA şöhlä polýar oky diýilýär. O nokadyň daşynda sagat diliniň hereketiniň tersine bolan aýlawy položitel diýip kabul edeliň.(Elbetde, başga aýlawy položitel hasap etmek hem bolar, emma köplenç şeýle aýlaw položitel hasap edilýär).



8-nji çyzgy

Erkin M nokat alalyň. $|0M| = r$ bilen belgiläliň we OA şöhläni OM şöhle bilen gabat getirmek üçin položitel ugra aýlamaly bolan burçy φ bilen belgiläliň, $(\varphi = \angle AOM)$. φ burç trigonometriýadaky ýaly kabul edilýär, ýagny $\pm 2k\pi$ goşulyjy takyklykda. r, φ sanlara M nokadyň polýar koordinatalary diýilýär, şunlukda r-sana birinji koordinatasy ýa-da polýar radiusy, φ-sana ikinji koordinatasy ýa-da polýar burçy diýilýär.

φ burçuň mümkin bolan bahalaryndan,kesgitlilik üçin

$$-\pi < \varphi \le \pi$$

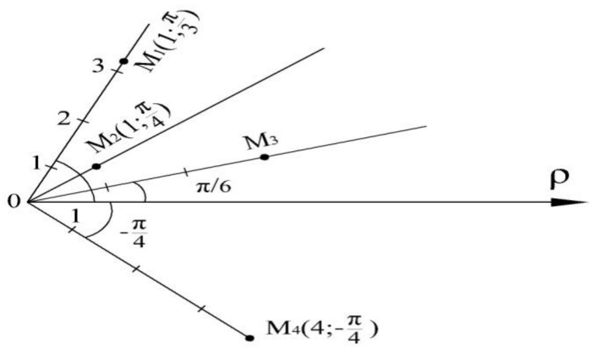
deňsizligi kanagatlandyrýanlary aýratyn alýarlar.

Mysal.

$$M_1\left(3,\frac{\pi}{3}\right),\ M_2\left(1,\frac{\pi}{6}\right),\ M_3\left(2\frac{\pi}{4}\right),\ M_4\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$$

nokatlary gurmaly.

M_1 nokady gurmak üçin $O\rho$ ok bilen $\frac{\pi}{3}$ burç emele getirýän şöhle geçirýäris. Soňra ol şöhlede $OM_1=3$ kesim alyp goýýarys. Beýleki nokatlaryň gurluşy hem şonuň ýaly.

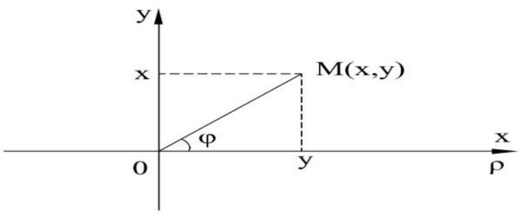


9-njy surat

Nokadyň dekart kordinatalary we polýar kordinatalarynyň arasyndaky baglylygy görkezeliň. Munuň üçin polýus we dekart kordinatalar sistemanynyň başlangyç nokady hem-de polýar ok Ox oky bilen gabat gelýär diýip hasap edeliň. 10-njy çyzgydan alarys:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad r = |OM|$$

$$\varphi = \arccos\frac{x}{r} \qquad \varphi = \arcsin\frac{y}{r} \qquad r^2 = x^2 + y^2. \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



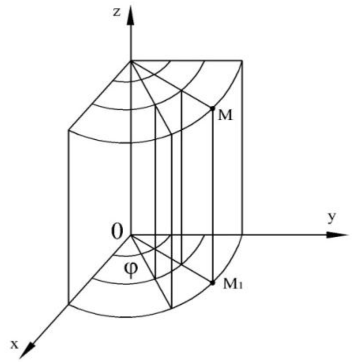
10-njy çyzgy

VI. Silindrik kordinatalar sistemasy

Nokadyň (x,y,z) göniburçly dekart kordinatalar sistemasyndaky kordinatalary bilen

$x = r\sin\varphi,\ y = r\cos\varphi,\ z = z;$

$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$ formulalar boýunça baglanyşýan (r,φ,z) sanlara nokadyň silindrik kordinatalary diýilýär. Silindrik kordinatalar sistemasynda r-birinji, φ-ikinji, we z-üçünji. Kordinataly üstler: r=const tegelek silindr, φ=const ýarymtekizlik, z=const tekizlik. M(r,φ,z) nokatda (r,φ) M nokadyň Oxy tekizlige proeksiýasy bolan M nokadyň polýar kordinatalary, z bolsa M nokadyň göniburçly dekart koordinatasy.



11-nji çyzgy

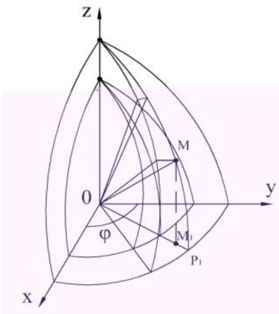
VII. Sferiki koordinatalar sistemasy

Goý, M(x,y,z) nokadyň göniburçly dekart koordinatalar sistemasyndaky koordinatalary

$$x = r\cos\varphi\sin\psi,\quad y = r\sin\varphi\sin\psi,\quad z = r\cos\varphi$$

formulular bilen baglanyşýan r,φ,ψ sanlara nokadyň sferiki koordinatalary diýilýär.

Bu ýerde $0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \psi \le \pi.$



12-nji çyzgy

r-birinji, φ-ikinji, ψ-üçünji koordinat.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$r = \left|\vec{OM}\right|$ -M nokadyň O nokada çenli uzaklygy. $\varphi - O\vec{M}$ wektoryň Oxy tekizlige proeksiýasy bolan $O\vec{M}_1$ wektor bilen Ox okuň arasyndaky burç, $\psi \approx O\vec{M}$ wektor bilen Oz okuň arasyndaky burç.

Koordinatalar üstleri.

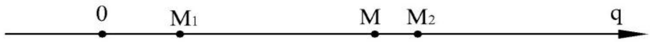
r=*const* sfera, r-iň dürli bahalary üçin konsentrik sferalar.

φ=*const* –*Oz* okuň üsti bilen geçýän we *xOz* koordinatalar tekizligi bilen φ burç emele getirýän ýarymtekizlik.

ψ=*const* depesi *O* nokatda we emele getirjisi *Oz* oky bilen ψ burç emele getirýän tegelek konus.

2. Kesimi berlen gatnaşykda bölmek

q san oky alalyň we ol okda üç nokat alalyň.



13-nji çyzgy

Bu ýerde M_1 we M_2 berlen üýtgemeýän dürli nokatlar, M nokat erkin islendik ýerde bolup bilýär, diňe M_2 nokat bilen gabat gelmeýär diýip hasap edeliň. Goý

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \tag{4}$$

san berlen bolsun.

$M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ we λ san berlen (4) gatnaşygy kanahatlandyrýan M nokadyň koordinatasyny tapmaly. $M(x)$ hasap edeliň . Onda

$$M_1M = x - x_1, \quad MM_2 = x_2 - x$$

Diýmek,

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad \text{ýa-da} \quad \lambda(x_2 - x) = x - x_1$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Eger $\lambda>0$ bolsa M nokat M_1M_2 kesimiň içinde ýerleşen, $\lambda<0$ bolsa M nokat M_1M_2 kesimiň daşynda ýerleşen. M nokat M_2 nokat bilen gabat gelse $\lambda=\infty$ kabul edilýär.

Eger $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M(x,y,z)$ bolsa, onda

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{5}$$

Bu formulalar dürli inžener meseleler çözülende ulanylýar.

Bu ýerde $\lambda\neq-1$. Eger $\frac{M_1M}{MM_2}=-1\Rightarrow M_1M=-MM_2$ we $M_1M+MM_2=M_1M_2=0$. bu mümkin däl, çünki M_1 we M_2 dürli nokatlar.

Eger M nokat M_1M_2 kesimiň ortasynda bolsa, onda $\lambda=1$, diýmek

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{5′}$$

Mysal.

$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ nokatlarda m_1,m_2,m_3 massalar ýerleşen. Bu sistemanyň agyrlyk merkezini tapmaly.

Çözülişi:

Ilki m_1 we m_2 iki massa sistemanynyň agyrlyk merkezi bolan $M'(x',y')$ nokady tapalyň.mehanikanyň belli düzgünine laýyklykda bu iki massa sistemanynyň agyrlyk merkezi M_1M_2 kesimi $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$ gatnaşyga bölýär. (5) formulalara laýyklykda

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

Goý, $M(x,y)$ üç m_1, m_2, m_3 massalar sistemasynyň merkezi. Eger m_1 we m_2 massalar M' nokada toplanan diýip hasap edenimiz bilen M nokadyň ýagdaýy üýtgemez. Diýmek $M(x,y)$ nokat $M'M_3$ kesimi

$\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2}$ gatnaşyga bölýär. Onda

$$x = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}} =$$

$$= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1 + m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{\frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{m}{m_1 + m_2} y_3}{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2}} =$$

$$= \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Eger degişlilikde $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,...,$M_k(x_k,y_k)$ nokatlarda ýerleşen $m_1,m_2,...m_k$ massalar sistemasy berlen bolsa, onda bu sistemanyň agyrlyk merkeziniň koordinatalary aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k}$$

$$y = \frac{y_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + y_k m_k}{m_1 + m_2 + ... + m_k}.$$

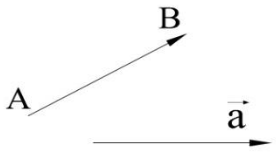
Muny subut etmek üçin matematiki induksiýa usulyny ulanmaly.

3. Wektorlar

I. Wektorlar we olar bilen geçirilýän çyzykly amallar

Tehnikada, fizikada birnäçe ululuklar üçin olaryň diňe ululygyny (möçberini) bilmek ýeterlik bolmaýar. Ol ululyklar üçin olaryň ugruny bilmek hem gerek. Şeýle ululyklara mysal edip tizlik, güýç we ş.m. ululyklary getirmek bolar. Bu ululyklara wektor ululyklar diýilýär.

Geometriýada ugrukdyrlan kesime wektor diýilýär. Eger A kesimiň başlangyç nokady we B onuň ahyrky nokady bolsa, onda ol $\overrightarrow{AB}$ ýazgy bilen ýazylýar. A nokada $\overrightarrow{AB}$ wektoryň goýma nokady diýilýär. Wektorlar diňe bir harp bilen hem belgilenilýär; $\vec{a}, \vec{b},...$ Çyzgyda wektoryň ahyrky nokady peýkam şekili bilen görkezilýär.



14-nji çyzgy

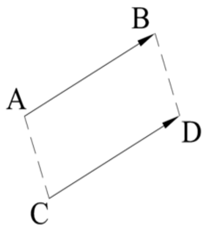
AB kesimiň uzynlygyna $\overrightarrow{AB}$ wektoryň moduly diýilýär we $|\overrightarrow{AB}|$ belgi bilen belgilenilýär.

Eger

1) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

2) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

bolsa, onda $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{CD}$ wektorlar deň hasaplanylýar: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



15-nji çyzgy

Şunlukda wektoryň goýma nokady hiç hili rol oýnamaýar. Şonuň üçin şeýle wektorlara azat wektorlar diýilýär.

1. Wektory sana köpeltmek

Eger $\vec{e}$ wektoryň uzynlygy bire deň bolsa; $\left|\vec{e}\right| = 1$, onda oňa ort wektor diýilýär.

$\vec{a}$ wektory käbir α=*const* sana köpeltmek şeýle kesgitlenilýär:

16-njy çyzgy

1) $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $eger\, \alpha > 0\, bolsa$

2) $\alpha\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ *, eger* $\alpha < 0$ *bolsa*

3) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$

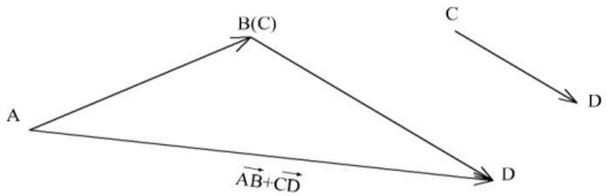
Goý, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{e}| = 1$, *we* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}$ Onda $\vec{a} = a\vec{e}$, çünki *a>0* bolýanlygy sebäpli $\vec{a} = a\vec{e}$ we $|\vec{a}| = |a||\vec{e}| = a \cdot 1 = a$

$\vec{a}$ *we* - $\vec{a}$ wektorlar garşylykly wektorlar.

2. Wektorlary goşmak

$\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{CD}$ ektorlary goşmak üçin $\overrightarrow{CD}$ wektory *B* nokada geçirýäris, soňra *A* we *D* nokatlary birikdirýäris:

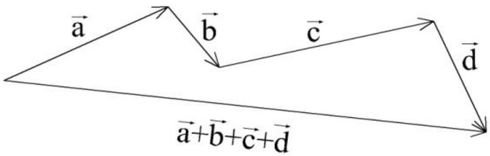
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$



17-nji çyzgy

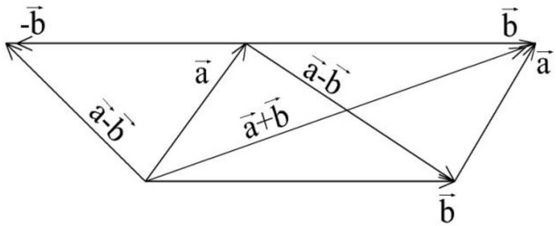
Üç $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlary goşmak üçin $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

deňligi ulanmak bolar. Şeýlelik bilen islendik $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$... tükenikli sandaky wektorlary goşup bilers.



18-nji çyzgy

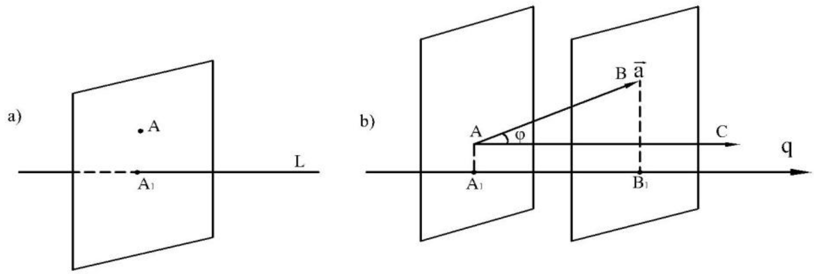
$\vec{a}$ wektordan $\vec{b}$ wektory aýyrmak üçin $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$ deňlik ulanylýar.



19-njy çyzgy

II. Wektoryň oka proeksiýasy

A nokat arkaly we *L* gönä perpendikulýar geçýän tekizligiň *L* göni bilen kesişýän *A′* nokadyna *A* nokadyň *L* gönä proeksiýasy diýilýär. (20-nji çyzgy).



20-nji çyzgy

Goý, q ok we $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ wektor berlen bolsun. Eger A nokadyň q oka proeksiýasy A_1,B nokadyň q oka proeksiýasy B_1 bolsa, onda A_1B_1 kesime ($\overline{AB}$ ugrukdurlan kesimiň ululygy) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ wektoryň q oka bolan proeksiýasy diýilýär, we $A_1B_1 = pr_q\overrightarrow{AB}$ görnüşde ýazylýar.

Bellik. $\overrightarrow{AB}$ wektoryň q oka proeksiýasy hökmünde $\overrightarrow{A_1B_1}$ wektory kabul etmek bolar. Onda A_1B_1 ululyga wektoryň san proeksiýasy diýilýär.

A nokatdan q okuň ugry bilen gabat gelýän $\overrightarrow{AC}$ wektory geçireliň;(20-nji çyzgy) $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\vec{q}$. Onda φ burç $\overrightarrow{AB}$ wektor bilen q okuň arasyndaky burç bolar. 19-njy çyzgydan alýarys.

$$pr_q\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos(\overrightarrow{AB}\wedge q)=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$$

Eger $\vec{a}=\vec{0}$ ýa-da $a\wedge\varphi=\frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $pr_q\vec{a}=0$;

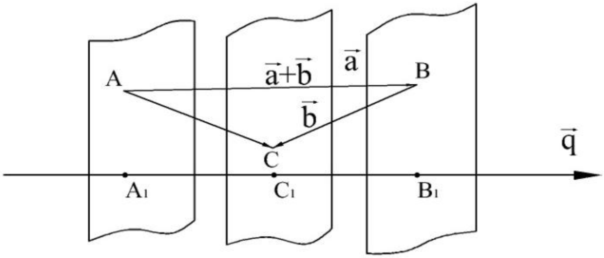
Eger $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $pr_q\vec{a}>0$. Eger $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{q}$; bolsa, onda $A_1B_1=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ $\frac{\pi}{2}<\varphi\le\pi$ bolsa, onda $pr_q\vec{a}<0$.

Eger $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow\vec{q}$ bolsa, onda $A_1B_1=-|AB|$

Wektoryň oka bolan proeksiýasynyň häsýetleri

$$1.\ pr_q(\vec{a}+\vec{b})=pr_q\vec{a}+pr_q\vec{b}. \qquad (6)$$

$$2.\ pr_q(\lambda\vec{a})=\lambda\, pr_q\vec{a}. \qquad (7)$$



21-nji çyzgy

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

21-çyzgydan görnüşine görä

$$pr_q \overrightarrow{AB} = A_1B_1, \qquad pr_q \overrightarrow{BC} = B_1C_1$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \qquad we \qquad pr_q \overrightarrow{AC} = A_1C_1$$

Esasy toždestwa görä

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1,$$

diýmek,

$$pr_q(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = pr_q \overrightarrow{AB} + pr_q \overrightarrow{BC},$$

(6) deňlik subut edildi.

(7) formulany subut edeliň. $\vec{a}$ wektor bilen q okuň arasyndaky burçy φ, $\lambda > 0$ bolanda bilen belgiläliň.

$$pr_q(\lambda\vec{a}) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\, pr_q \vec{a}$$

$\lambda < 0$ bolanda

$$pr_q(\lambda\vec{a}) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda\left|\vec{a}\right|\cos(\pi-\varphi) = \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\ pr_q\vec{a},$$

çünki $|\lambda| = -\lambda$.

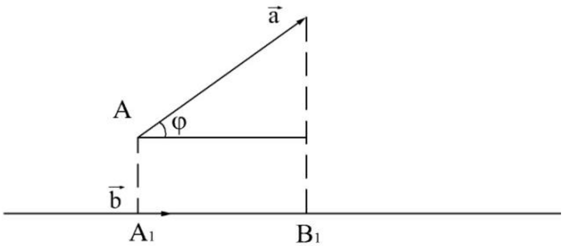
$\lambda<0$ bolanda $\lambda\vec{a}$ wektor we $\vec{a}$ wektor garşylykly ugrukdyrlan.; $\vec{a}\uparrow\downarrow\lambda\vec{a}$.

$\lambda=0$ bolanda (7) deňligiň iki tarapy hem 0.

Biz häzir wektoryň oka bolan proeksiýasyny öwrendik.

Her bir wektory onuň ugry boýunça gabat gelýän ok hökmünde seredip bileris. Şunlukda $\vec{a}$ wektoryň başga $\vec{b}$ wektora bolan proeksiýasyny kesgitläp bolýar.

$$pr_b\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi.$$



22-nji çyzgy

Eger $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ sanlaryň hiç bolmanda biri nola deň däl bolsa we $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = 0$, onda $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ wektorlar sistemasyna çyzykly bagly sistema diýilýär.

Eger $\overrightarrow{a_1}$ *we* $\overrightarrow{a}$ parallel gönilerde ýatýan bolsalar ony $\overrightarrow{a_1} \| \overrightarrow{a_2}$ belgi bilen aňladarys.

Eger $\vec{a}_1 \, || \, \vec{a}_2$ bolsa, onda olara kollinear wektorlar diýilýär.

Üç wektor $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ parallel tekizlikde ýatsalar olara komplanar wektorlar diýilýär.

Tekizlikde iki wektoryň çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň kollinear bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Diýmek, tekizlikde islendik üç wektor çyzykly bagly.

Giňişlikde üç wektoryň çyzykly bagly bolmagy üçin olaryň komplanar bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Diýmek, giňişlikde islendik dört wektor çyzykly bagly. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ wektorlar sistemany alalyň.Goý, bu sistemanyň $\overrightarrow{a_{i_1}}, \overrightarrow{a_{i_2}}, ..., \overrightarrow{a_{i_k}}$ wektorlary çyzykly bagly däl we islendik *k+1* wektorlar toplumy çyzykly bagly bolsun. Onda $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, ..., \vec{a}_{i_k}$ wektorlara bu sistemanyň bazisi diýilýär we islendik $\overrightarrow{a_p}$ wektor üçin

$$\vec{a}_p = a_1 \vec{a}_{i_1} + a_2 \vec{a}_{i_2} + ... + a_k \vec{a}_{i_k}$$

deňligi kanagatlandyrýan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sanlar tapylýar, bu ýerde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_k^2 \neq 0$. Şunlukda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sanlara $\overrightarrow{a_p}$ wektoryň $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, ..., \vec{a}_{i_k}$ bazisdäki koordinatalary diýilýär. Başga bazis wektorlary alsak $\overrightarrow{a_p}$ wektoryň koordinatalary hem başga bolar.

Tekizlikde islendik iki kollinear däl wektorlar bazis düzýärler.

Giňişlikde (adaty giňişlikde) islendik üç komplanar däl wektorlar bazis düzýärler.

Eger $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_k}$ bazis bolsa, onda islendik $\vec{\alpha}$ wektoryň $\vec{a} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \lambda_k \overrightarrow{e_k}$ görnüşde ýazylyşy ýeke-täkdir.

Dogrydan-da, eger başgaça, $\vec{a} = \mu_1 \overrightarrow{e_1} + \mu_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \mu_k \overrightarrow{e_k}$ ýazylan bolsa, onda

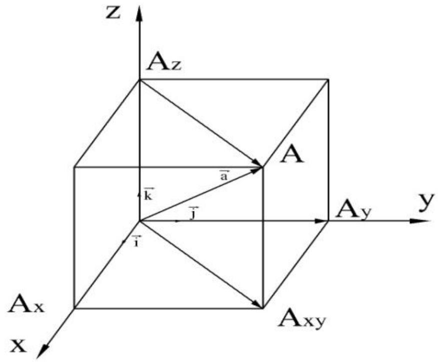
$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)\overrightarrow{e_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\overrightarrow{e_2} + ... + (\lambda_k - \mu_k)\overrightarrow{e_k} \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1,$$
$$\lambda_2 = \mu_2, ..., \lambda_k = \mu_k.$$

Giňişlikde göniburçly dekart koordinatalar sistemany alalyň. Goý, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ özara perpendikulýar wektorlar bolsun we $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$ $\vec{i}$ wektory Ox okunda ugry okuň ugryna gabat bolar ýaly, $\vec{j}$ wektory Oy okunda ugry okuň ugryna gabat bolar ýaly we $\vec{k}$ wektory hem Oz okda ugry okuň ugryna gabat bolar ýaly ýerleşdireliň. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wektorlar giňişlikde bazis emele getirýärler. Diýmek islendik $\vec{a}$ wektory

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k} \qquad (8)$$

görnüşde ýazyp bilýäris.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Goý A_x, A_y, A_z A nokadyň, degişlilikde ,



23-nji çyzgy

O_x , O_y , O_z oklara bolan proeksiýasy. Onda

$$OA_x = pr_{Ox}\vec{a},\ OA_y = pr_{Oy}\vec{a},\ OA_z = pr_{Oz}\vec{a}$$

Biz $\overrightarrow{OA_x} = OA_x\vec{i}$ boýandygyny subut edeliň.

$$\left|\overrightarrow{OA_x}\right| = |OA_x| \cdot \left|\vec{i}\right| = |OA_x|.$$ Belgileme girizeliň.

Indi $\overrightarrow{OA_x} \uparrow\uparrow OA_x\vec{i}$ bolýandygyny subut etmek ýeterlik. Eger $OA_x>0$ bolsa, onda $\overrightarrow{OA_x}$ wektoryň ugry Ox okuň ugruna gabat gelýär. Diýmek $OA_x \cdot \vec{i}$ wektoryň ugry hem Ox okuň ugruna gabat gelýär. Eger $OA_x<0$ bolsa, onda $\overrightarrow{OA_x}$ wektor we Ox ok ugurlary boýunça garşylykly. Onda $OA_x \cdot \vec{i}$ wektor hem Ox oka garşy ugrukdyrlan, diýmek

$$\overrightarrow{OA_x} = OA_x \cdot \vec{i}\ .$$

Şunuň ýaly aşakdaky deňlikleriň hem dogrydygyna göz ýetirip bilýäris.

$$\overrightarrow{OA_y} = OA_y \vec{j}, \ \overrightarrow{OA_z} = OA_z \vec{k}.$$

23-çyzgydan alarys:

$$\overrightarrow{OA_{xy}} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} \ ; \ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_z} + \overrightarrow{A_z A};$$

Emma

$$\overrightarrow{A_z A} = \overrightarrow{OA_{xy}}.$$

Diýmek,

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_z} + \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} \ .$$

Ýa-da

$$\overrightarrow{OA} = OA_x \vec{i} + OA_y \vec{j} + OA_z \vec{k}$$

$OA_x = X$, $OA_y = Y$, $OA_z = Z$ belgileri girizip alýarys.

$$\overrightarrow{OA} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad (9)$$

(8) we (9) deňliklerden wektorlaryň (8) formula boýunça dargadylyşynyň ýeke-täkdiginden alýarys:

$$\alpha_1 = X, \ \alpha_2 = Y, \ \alpha_3 = Z$$

Eger $\vec{a}$ wektor berlen bolsa, onda onuň $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisdäki koordinatalary, degişlilikde, $\vec{a}$ wektoryň ox,oy,oz oklara bolan proeksiýalaryna deň. Ol

$\vec{a}$ =(x,y,z), $\vec{a} = \{ \ x, y, \text{z} \ \}$, $\vec{a}$ (x,y,z) görnüşlerde ýazylýar.

$\overrightarrow{OA}$ wektor üçin (23-çyzgy) (x,y,z) sanlaryň A nokadyň koordinatalary bolýandygy anyk.Eger $\vec{AB}$ wektoryň başlangyç nokady A$(x_{1ş}, y_1, z_1)$,soňky nokady B(x_2, y_2, z_2) bolsa,onda

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Eger $\vec{AB} = (x_{1ş}, y_1, z_1)$ bolsa,onda

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,.$$

Goý $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ bolsun, onda

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y_1, \lambda z_1), \qquad \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2).$$

$\vec{a}$ wektoryň we OX okuň arasyndaky burçy α, $\vec{a}$ wektoryň we OY okuň arasyndaky burçy β, $\vec{a}$ wektoryň we OZ okuň arasyndaky burçy γ bilen belgiläliň.Onda

$$x_1 = \|\vec{a}\|\cos\alpha,, \; y_1 = \|\vec{a}\|cos\,\beta,, z_1 = \|\vec{a}\|cos\,\gamma\,.$$

ýa-da

$$cos\,\alpha = \frac{x_1}{\|\vec{a}\|}, cos\,\beta = \frac{y_1}{\|\vec{a}\|}, \; cos\,\gamma = \frac{z_1}{\|\vec{a}\|},$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ululyklata $\vec{a}$ wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary diýilýär:

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1.$$

III. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Biz wektorlar bilen geçirilýän goşmak, aýyrmak, olary sana köpeltmek operasiýalaryny gördük. Wektory wektora köpeltmek operasiýasy iki dürli bolýar. Ilki iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyna seredeliň.

I. **Kesgitleme.** $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň modullarynyň olaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeletmek hasylyndan alnan sana $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýär we ol $\vec{a}\,\vec{b}$, $\left(\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\right)$, $\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$ belgiler bilen aňladylýar.

Şunlukda

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}||\vec{b}|\,cos\,\varphi,$$

bu ýerde $\varphi-\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç: $\varphi=\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$ Wektorlaryň wektora bolan proýeksiýasyny ýatlasak $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=np_a\,\vec{b},$ onda

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\,\vec{b} \qquad (11)$$

Şonuň ýaly-da $\left|\vec{a}\right|\cos\varphi=np_b\,\vec{a},$ bolýandygy sebäpli

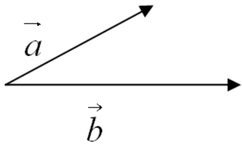
$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=|\vec{b}|np_{\vec{b}}\,\vec{a}\,.$$

Şeýlelik bilen iki wektoryň biriniň modulynyň beýlekisiniň oňa bolan proýeksiýasyna köpeltmek hasyly ol wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly bolýar. Skalýar köpeltmek hasyly mehaniki meseleler çözülende ýüze çykýar. Goý, $\vec{a}$ wektor goýulana nokady $\vec{b}$

wektoryň başlangyjy O nokada ýerleşen material nokady ornundan $\vec{b}$ wektoryň soňky nokadyna çenli geçiren güýji aňladýan bolsun.Onda bu güýjiň ýerine ýetiren W işi

$$W = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi \ .$$

formula boýunça tapylýar.



24-nji çyzgy

Skalýar köpeltmek hasylynyň häsiýetleri

1) Eger köpeldijileriň ornuny çalşyrsak, onda skalýar köpeltmek hasyly üýtgemeýär:

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\,\vec{a}\right).$$

Dogrudan-da

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \qquad \left(\vec{b}\,\vec{a}\right) = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\varphi,$$

emma iki sanyň köpeltmek hasyly hökmünde $|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{a}|$,

diýmek, $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

2) $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right).$

(11) formula görä

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|np_b\left(\lambda\vec{a}\right).$$

Wektoryň oka proýeksiýanyň häsiýetine görä

$$np_b\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda np_b\vec{a}.$$

Onda

$$\left|\vec{b}\right|np_b\left(\lambda\vec{a}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\lambda np_b\vec{a}=\lambda\left|\vec{b}\right|np_b\vec{a}=\lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

3) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\vec{c}\right).$

(11) formula görä

$$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|np_a\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

proýeksiýasynyň häsiýetine görä

$$np_a\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=np_a\vec{a}+np_a\vec{c},\text{ diýmek,}$$

$$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|np_a\vec{b}+\vec{a}\,np_a\vec{c}=\left(\vec{a}\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right),$$

çünki (11) formula görä

$$\left|\vec{a}\right| np_a \vec{b} = \left(\vec{a}\,\vec{b}\right), \qquad \vec{a}\, np_a \vec{c} = \left(\vec{a}\,\vec{c}\right).$$

4) Eger $\left|\vec{a}\right| \neq 0,\quad \left|\vec{b}\right| \neq 0;$ Onda $\vec{a}\,\vec{b} = 0$

deňlik $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň ortogonal (perpendikulýar) bolmagynyň zerur we ýeterlik şertidir.

$$0 = \vec{a}\,\vec{b} = \left|\vec{a}\vec{b}\right| \cos\varphi, \qquad \cos\varphi = 0,\ \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Eger $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda

$$\vec{a}\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\frac{\pi}{2} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cdot 0 = 0.$$

5) Eger $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) > 0.$

Eger $\varphi > \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) < 0.$

b) $\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2.$

IV. Skalýar köpeltmek hasylyny köpeldijileriň koordinatalary arkaly aňlatmak

Goý, $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ $\quad \vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$ bolsun, ýagny

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} \quad , \quad \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}\,.$$

Skalýar köpeltmek hasylyň häsiýetlerini ulanyp tapýarys:

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = (X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k})(X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k}) =$$

$$= X_1X_2(\vec{i}\,\vec{i}) + X_1Y_2(\vec{i}\,\vec{j}) + X_1Z_2(\vec{i},\vec{k}) +$$

$$Y_1X_2(\vec{j}\,\vec{i}) + Y_1Y_2(\vec{j}\,\vec{j}) + Y_1Z_2(\vec{j},\vec{k}) +$$

$$+ Z_1X_2(\vec{k}\,\vec{i}) + Z_1Y_2(\vec{k}\,\vec{j}) + Z_1Z_2(\vec{k},\vec{k}).$$

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ wektorlaryň özara perpendikulýar birlik wektorlardygyny ýatlap alýarys:

$$(\vec{i},\vec{i}) = 1, \quad (\vec{j},\vec{j}) = 1, \quad (\vec{k},\vec{k}) = 1.$$

$$(\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{i}) = 0, \quad (\vec{i},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{i}) = 0, \quad (\vec{j},\vec{k}) = (\vec{k}\,\vec{j}) = 0.$$

Diýmek ,

$$(\vec{a},\vec{b}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

Şeýlelik bilen: Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly olaryň bir atly koordinatalarynyň köpeldilip jemlenmegine deň.Bu ýerden biz iki wektoryň (ortogonallygynyň) perpendikulýarlygynyň zerur we ýeterlik şertini alýarys.

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$$

emma

$$|\vec{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$$

onda

$$cos\varphi = \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Mysal.

1. $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4$, $\left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$ deňlikleri ulanyp,

(3$\vec{a}$-)$\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$ köpeltmek hasyly hasaplamaly.

Çözülişi: Wektorlary skalýar köpeltmek hasylyň häsiýetleri esasynda köpeldip alýarys.

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 3\left(\vec{a}\vec{a}\right) + 6\left(\vec{a}\vec{b}\right) - 2\left(\vec{b}\vec{a}\right) - 4\left(\vec{b}\vec{b}\right) =$$

$$= 3\left|\vec{a}\right|^2 + 4\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi}{3} - 4\left|\vec{b}\right|^2 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 16 = -61$$

2. Material nokady A(-1;2;0) nokatdaky ýagdaýyndan B(2,1,3) nokada geçiren $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ güýjiniň ýerine ýetiren işini hsaplamaly.

Çözülişi: $\vec{AB}$ wektory tapalyň:

$$\vec{AB} = (3;-1;3) = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

işi W bilen belgiläp alarys.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = 3-2+3=4$$

Mysallar.

1. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ we $\overrightarrow{CF}$ wektorlar ABC üçbürçlugyň medianalary. $\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=0$ deňligi subut etmeli.

2.ABCDEF–dogry altyburçluk we $\vec{AD}=\vec{p}$, $\vec{BC}=\vec{q}$. $\vec{CD}, \vec{DE}$,. $\vec{EF}, \vec{FA}, \vec{AC}, \vec{AD}$ we $\vec{AE}$ wektorlary $\vec{p}$ we $\vec{q}$ wektor arkaly aňlatmaly.

3. $\vec{a}= 2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}= -3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ berlen wektorlar boýunça

a) $\vec{a}^0$ -ortuň koordinatalaryny tapmaly $(|\vec{a}^0|=1)$.

b) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ wektoryň koordinatalaryny tapmaly.

ç) $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ wektory $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ bazise dagytmaly.

d) $np_j(\vec{a}-\vec{b})$ -tapmaly.

4. A (2,2) we B (5,-2) nakatlar berilen.Abssisa okunda $\angle$AMB $=\frac{\pi}{2}$ bolar ýaly M nokady tapmaly.

5. $\vec{a}_1$=(2,3,-1) we $\vec{a}_2$=(1,-2,-1) wektorlara perpendikulýar we $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$ =-6 şerti kanagatlandyrýan. $\vec{x}$ wektory tapmaly.

V. Wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly

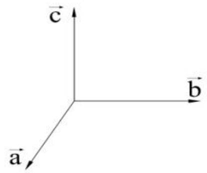
1). Kesgitlemeler.

1. Kesgitleme. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar däl wektorlaryň haýsynyň birinji, haýsynyň ikinji we haýsynyň üçünjidigi belli kesgitlenen bolsa , olara tertipleşdirilen üçlük diýilýär.

Tertipleşdirilen üçlik ýazylanda sagdan çepe öz tertip nomeri boýunça ýazylýar.Meselem , $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üçlükde $\vec{a}$ birinji $\vec{b}$ ikinji $\vec{c}$ üçünji wektor.

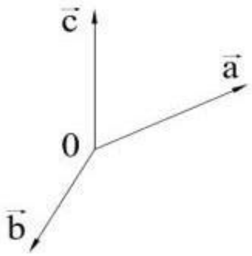
2. Kesgitleme. Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üçlükde $\vec{c}$ wektoryň ujyndan $\vec{a}, \vec{b}$ wektorlaryň tekizligine seredilende $\vec{a}$ wektory $\vec{b}$ wektor bilen gabat getirmek üçin kiçi burç boýunça aýlanýan hereket sagat diliniň herketiniň tersine bolýan bolsa, onda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üçlüge sag üçlük diýilýär.

Meselem $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koordinatalar ortlary sag üçlük.



25-nji çyzgy. Sag üçlük

Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sag üçlük bolsa,onda $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ we $\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$ üçlükler hem sag üçlüklerdir



26-njy çyzgy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ çep üçlik

Eger $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ çep üçlik bolsa,onda $\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}$ we $\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$ üçlikler hem çep üçlükler.

3. Kesgitleme. Eger

1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üçlük sag üçlik bolsa

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$, ýagny $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ hem $\vec{b}$ wektorlaryň ýatan tekizligine perpendikulýar.

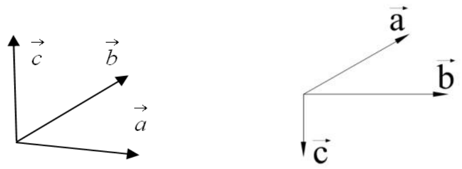
3) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \varphi$, $\varphi = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$,

onda $\vec{c}$ wektora $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora wektor köpeltmek hasyly diýilýär we

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \ \vec{c} = [\vec{a}\ \vec{b}]$$

belgiler bilen aňladylýar.

$\vec{c} = [\vec{a}\ \vec{b}]$ $\vec{c} = [\vec{a}\ \vec{b}]$



27-nji çyzgy

2). Wektor köpeltmek hasylynyň häsiýetleri

1) Eger $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bolsa, onda $[\vec{a}\ \vec{b}]=0$, çünki φ=0 ýa-da $\varphi = \pi$

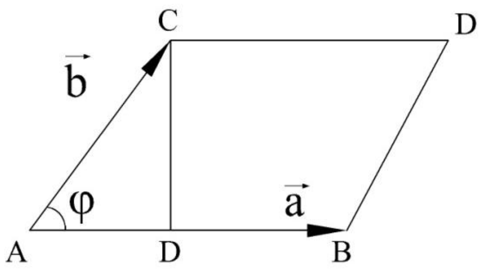
$|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin 0=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot 0 = 0;$ $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\pi = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cdot 0 = 0$

netijede $[\vec{a}\ \vec{b}]=0$.

2) $\vec{c}$ wektoryň $|\vec{c}|$ moduly $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlarda gurlan parallelogramyň S meýdanyna deň:

$|\vec{c}|=S=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$

ΔA D C göniburçly, CD=h üçburçlugyň beýikligi (28-nji çyzgy)



28-nji çyzgy

$$h = \left|\vec{b}\right| \sin\varphi, \vec{b} = \left|\overline{AC}\right|$$

Diýmek ,

$$S=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi,\ \vec{a} = \left|\vec{AB}\right|$$

3) $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$.

Goý, $\vec{c} = \left[\vec{a}\quad \vec{b}\right]$ $\vec{d} = \left[\vec{b}\quad \vec{a}\right]$ bolsun, onda $|\vec{c}|=|\vec{d}|$ we $\vec{c}\parallel\vec{d}$, çünki ikisi hem bir tekizlige perpendikulýar. Diýmek ,

$$\vec{c} = \vec{d} \text{ ýa-da } \vec{c} =- \vec{d}.$$

Eger $\vec{c} = \vec{d}$ bolsa ,onda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ we $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ sag üçlük bolmaly, emma ol mümkin däl, (25-nji çyzga seret)

diýmek, $\vec{c} \neq \vec{d}$ onda $\vec{c} =- \vec{d}$.

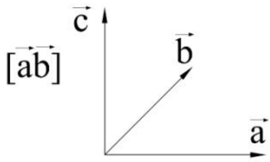
4) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}]=\lambda[\vec{a}\ \vec{b}]$.

1) $\lambda>0$ .Eger $\vec{a}$ wektory položitel λ sana köpeltsek $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlarda gurlan parallelogramyň S meýdanyny λ gezek artdyrarys, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora wektor köpeltmek hasylynyň ugry ozalkylygyna galýar.

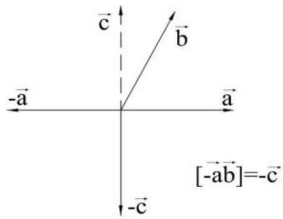
2) $\lambda<0$

$[\lambda \vec{a}, \vec{b}]=[-|\lambda| \vec{a}\ \vec{b}]=|\lambda|[-\vec{a}\ \vec{b}]$

$[\vec{a}, \vec{b}]$ we $[-\vec{a}\ \vec{b}]$ wektorlar 28-nji hemde 29-nji çyzgylarda görkezilen



29-njy çyzgy



30-njy çyzgy

$$\left[-\vec{a}\,\vec{b}\right]=-\left[\vec{a}\,\vec{b}\right].$$

Diýmek ,

$$\left[\lambda\,\vec{a},\vec{b}\right]=\left[-|\lambda|\,\vec{a}\,\vec{b}\right]=|\lambda|\left[-\vec{a}\,\vec{b}\right]=-|\lambda|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$$

3-nji we 4-nji häsiýetlerden alýarys.

$$\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=-\left[\lambda\vec{b},\vec{a}\right]=-\lambda\left[\vec{b},\vec{a}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

5) Aşakdaky deňlikler anykdyr.

$$\left[\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]+\left[\vec{a}\,\vec{c}\right]$$

$$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\,\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\,\vec{c}\right].$$

3). Iki wektoryň wektor köpeltmek hasylyny olaryň koordinatalary arkaly aňladylyşy

Goý,

$$\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k} \quad , \quad \vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}.$$

Onda

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=[\,(\,X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\,)(\,X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\,)\,].$$

Wektor köpeltmek hasylynyň 4) we 5) häsiýetlerine görä

$$[\,\vec{a}\,\vec{b}\,]=X_1X_2[\,\vec{i}\,\vec{i}\,]+X_1Y_2[\,\vec{i}\,\vec{j}\,]+X_1Z_2[\,\vec{i},\vec{k}\,]+$$

$$+Y_1X_2[\,\vec{j}\,\vec{i}\,]+Y_1Y_2[\,\vec{j}\,\vec{j}\,]+Y_1\check{Z}_2[\,\vec{j},\vec{k}\,]+$$

$$+Z_1X_2[\,\vec{k}\,\vec{i}\,]+Z_1Y_2[\,\vec{k}\,\vec{j}\,]+Z_1Z_2[\,\vec{k},\vec{k}\,].$$

Indi koordinatalar ortlaryň köpeltmek hasylyny tapalyň:

$$[\,\vec{i},\vec{i}\,]=0,\quad [\,\vec{j},\vec{j}\,]=0,\quad [\,\vec{k},\vec{k}\,]=0.$$

$$[\vec{i},\vec{j}]=\vec{k}\quad [\vec{j},\vec{k}]=\vec{i},\ [\vec{k},\vec{i}]=\vec{j},$$

$$[\vec{j},\vec{i}]=-\vec{k}\ [\vec{k}\,\vec{j}]=-\vec{i}\,.[\vec{i},\vec{k}]=-\vec{j}\ ,$$

Diýmek,

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=X_1Y_2\,\vec{k}-X_1\,Z_2\,\vec{j}\,-$$

$$-Y_1X_2\,\vec{k}+Y_1\,Z_2\,\vec{i}+Z_1X_2\,\vec{j}-Z_1Y_2\,\vec{i}=$$

$$=\left(Y_1Z_2-Y_2Z_1\right)\vec{i}+\left(X_2Z_1-X_1Z_2\right)\vec{j}+\left(X_1Y_2-X_2Y_1\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Şunlukda

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right)$$

Eger $\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y\right)$ bolsa, onda

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\left(0{,}0,\ \begin{vmatrix}a_xa_y\\ b_xb_y\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}a_xa_y\\ b_xb_y\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Bu deňlikden alarys:

$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right)^2=\left(\begin{vmatrix}a_xa_y\\ b_xb_y\end{vmatrix}\right)^2=S^2.$$

Onda

$$S = \pm\begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix}$$

Ikinji tertipli kesgitleýjiniň geometrik manysy:

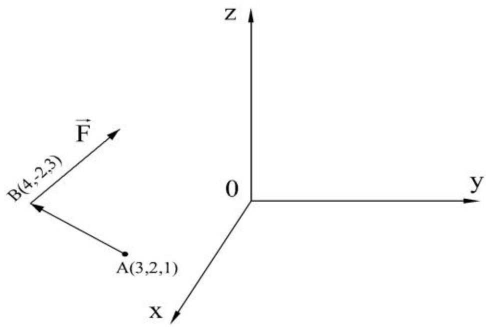
Ikinji tertipli kesgitleýjiniň absolýut ululygy eger onyň setirleri $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň koordinatalary bolsa,onda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlarda gurlan parallelogramyň meýdanyna deň.

(kesgitleýjiň setirleri $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň koordinatalary).

Mysal. Goý, A we B nokatlar berlen bolsun. $\vec{F}$ wektoryň kesgitlän güýji B nokada goýlan. Goý, $\vec{a} = \vec{AB}$ bolsun

$\vec{a}$ wektoryň $\vec{F}$ wektora $\vec{b} = [\vec{a}\vec{F}]$ wektor köpeltmek hasylyna $\vec{F}$ güýjüň A nokada görä momenti diýiýär.

$\vec{F}$ güýjüň momenti $\vec{b}$ wektor $\vec{a}$ hem-de $\vec{F}$ wektorlara perpendikulýar.



31-nji çyzgy

Goý,

$$\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \text{B(4,-2.-,3)}, \qquad \text{A(3,2,-1)}.$$

$$\vec{a} = \vec{AB} = (1,-4;4)$$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Mysallar.

1. Aňlatmalary ýönekeýleşdirmeli.

a) $\left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}-\vec{c}, \vec{a}\right]$

b) $\left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}-\vec{a}\right] + \left[\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}\right]$

ç) $2\vec{i}\left[\vec{j}, \vec{k}\right] + 3\vec{j}\left[\vec{i}, \vec{k}\right] + 4\vec{k}\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$

2. Islendik $\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}$ we $\vec{r}$ wektorlar üçin $\left[\vec{a}, \vec{p}\right], \left[\vec{a}, \vec{q}\right]$ we $\left[\vec{a}, \vec{r}\right]$ wektorlaryň komplanar bolýandygyny subut etmeli.

3. $\vec{a}_1 = (3,-1,2)$ we $\vec{a}_2 = (1,2,-1)$ wektorlar berlen.

1) $\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]$;

2) $\left[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_2\right]$;

3) $\left[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right]$

wektorlaryň koordinatalaryny tapmaly.

4. A(-1,4,-2) nokada goýlan $\vec{F}_1 = (2,-1,-3), \vec{F}_2 = (3,2,-1) we \vec{F}_3 = (-4,1,3)$ üç güýç berlen.

Bu güýçleriň deň täsir ediji güýjüniň O(2,3,-1) nokada görä momentiniň ululygyny we ugrukdyryjy kosinuslaryny tapmaly.

VI. Üç wektoryň gatyşyk (wektor-skalýar) köpeltmek hasyly

Kesgitleme

$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ wektoryň $\vec{c}$ wektora $\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right)$ skalýar köpeltmek hasylyna $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üç wektoryň gatyşyk (wektor-skalýar) köpeltmek hasyly diýilýär.

Ozal mälim bolşy ýaly eger $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{b} = (X_2, Y_2 Z_2)$ bolsa, onda

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Goý, $\vec{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$ bolsun, onda

$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} Y_1 Z_1 \\ Y_2 Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 Z_1 \\ X_2 Z_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 Y_1 \\ X_2 Y_2 \end{vmatrix} Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Skalýar köpeltmek hasylyň kesgitlemesine görä

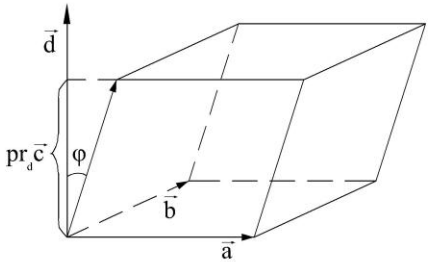
$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \left|\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| \left|\vec{c}\right| \cos\varphi \qquad \varphi = \left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]^{\wedge}\vec{c}\right)$$

ýa-da $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \vec{d}$ belgiläp,alýarys

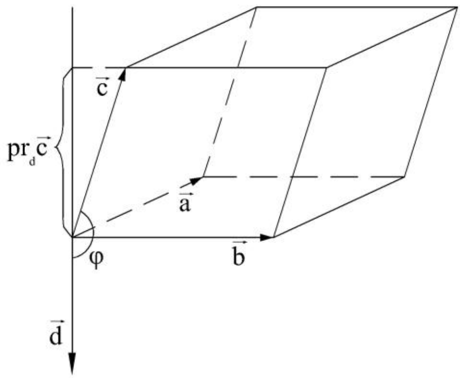
$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \left|\vec{d}\right| np_d\, \vec{c} = \left(\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\psi\right) \cdot np_d\, \vec{c}\,,\ \psi = \left(\vec{a}^{\wedge}\vec{b}\right).$$

$\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\psi = S - \vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlarda gurlan parallelogramyň meýdany, $\left|np_d\, \vec{c}\right|$ bolsa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlarda gurlan parallelepipediň beýikligi. Diýmek, komplanar däl $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlar üçin $\left|\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right)\right|$- köpeltmek hasyly bu wektorlarda gurlan parallelepipediň göwrümine deň. Şunlukda, eger parallelepipediň göwrümini V bilen belgilesek, onda

$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \begin{cases} V & \text{eger } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{sag üçlük bolsa,} \\ -V & \text{eger } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{çep üçlük bolsa.} \end{cases}$$



32-nji çyzgy



33-nji çyzgy

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ birmeňzeş üçlükler (eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sag üçlük bolsa, onda üçüsi hem sag, (eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ çep üçlük bolsa, onda üçüsi hem çep) şonuň üçin hem

$$\left(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\vec{b}\right) = \left(\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\vec{a}\right)$$

Şuňa görä hem gatyşyk köpeltmek hasyly

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,,\ \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\,,\ \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

görnüşde ýazylýar.

Eger $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ wektorlar komplanar bolsalar, onda $np_d\,\vec{c}=0$, diýmek $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$. Tersine, eger $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, bolsa $\vec{d}=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=0$ ýa-da $\left(\vec{d},\vec{c}\right)=0$, onda $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ýagny $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ - komplanar wektorlar. Şunlukda

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$$

deňlik, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - wektorlaryň komplanar bolmagynyň zerur we ýeterlik şerti.Bu şerti koordinatalar görnüşinde hem ýazalyň:

$$\begin{vmatrix} X_1Y_1Z_1 \\ X_2Y_2Z_2 \\ X_3Y_3Z_3 \end{vmatrix}=0\,.$$

Mysal.

1. $\vec{a}_1=(1,-1,3)$, $\vec{a}_2=(-2,2,1)$, $\vec{a}_3=(3,-2,5)$ wektorlar berlen. $\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3$ $\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3$ -tapmaly. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ -nähili üçlük?

Çözülişi:

$$\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=10+12-3-18+2-10=-9\quad.$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ -çep üçlük.

2. $\vec{a}_1 = (2,3,-1),\ \vec{a}_2 = (1,-1,3),\ \vec{a}_3 = (1,9,-11)$ wektorlar bazisi düzýärmi?

Çözülişi. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wektorlaryň bazis bolmagy üçin olaryň komplanar bolmazlygy zerur we ýeterlik. Şonuň üçin hem $\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3$ tapýarys:

$$\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 10 & -14 \end{vmatrix} = 0.$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wektorlar komplanar, şonuň üçin hem bazis bolup bilmeýärler.

Mysallar.

1. $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\right)\left(4\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}\right)=0$

toždestwony subut etmeli.

2. Eger $\vec{OA} = 3\vec{i}+4\vec{j},\ \vec{OB} = -3\vec{j}+\vec{k},\ \vec{OC} = 2\vec{j}+5\vec{k},$
Bolsalar, onda OABC tetraedriň göwrümini tapmaly.

3. $\vec{a}_1 = (3,-2,1),\ \vec{a}_2 = (2,1,2),\ \vec{a}_3 = (3,-1,-2).$
wektorlar bazis düzüp bilýärmi?

4. A(1,2,-1), B(0,1,5) , C(-1,2,1) we D(2,1,3)

dört nokadyň bir tekizlikde ýatýandygyny subut etmeli.

5. $\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\vec{b}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$

toždestwony subut etmeli.

4. Çyzyklaryň tekizlikdäki deňlemeleri

I. Umumy düşünjeler.

Kesgitleme. Goý, tekizlikde gönibur çly dekart koordinatalar sistemasy berlen we F(x,y) x we y özünde saklaýan käbir aňlatma bolsun. Eger

$$F(x,y)=0 \qquad (12)$$

deňlemäni diňe L çyzygyň ähli nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyryp,tekizligiň L çyzykda ýatmaýan hiç bir nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrmaýan bolsa, onda bu deňlemä L çyzygyň deňlemesi diýilýär.

Şeýlelik bilen, eger (12)-nji deňleme berlen bolsa, onda M(x_1, y_1) nokadyň L çyzykda ýatýandygyny ýa-da ýatmaýandygyny bilmek üçin F (x_1, y_1) aňlatmanyň nola deňdigini ýa-da deň däldigini barlamaly.

Radiusy R we merkezi (a,b) nokatda bolan töweregiň deňlemesiniň

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

boljakdygyny göz ýetirmek aňsat.Eger töweregiň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa,onda

$$x^2+y^2=R^2.$$

Eger tekizlikde polýar koordinatalar sistemany alnan bolsa,onda merkezi polýusda we radusy R bolan töweregiň deňlemesi

$$r = R$$

görnüşde bolýar.

Umuman iki mesele duş gelýär:

1) L çyzyk berlen, onuň deňlemesini tapmaly.

2) Deňleme berlen (käbir koordinatalar sistemasyndan), bu deňlemäniň nähilli çyzyk bolýandygyny bilmeli.

2-nji meseläni çözmek üçin kesgitlemäni şeýle görnüşde getirmek amatly bolýar: Tekizligiň koordinatalary berlen deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlarynyň geometrik orny bu deňlemäniň kesgitleýän çyzygy bolýar.

Goý,

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \quad \alpha \le t \le \beta \tag{13}$$

t dürli bahalar alanda M(x(t),y(t)) nokat tekizlikde ornuny üýtgeýär we onuň yzy käbir L çyzyk emele getirýär.(13) deňlemelere L çyzygyň parametrik deňlemeleri diýilýär; t üýtgeýän ululyga parametr diýilýär.

Çyzygyň parametrik deňlemeleri mehanikada örän uly rol oýnaýar. Olar material nokadynyň hereketiniň deňlemesi hökmünde ulanylýar.

Eger L çyzygyň deňlemesi x,y üýtgeýänlere görä n derejeli algebraik köpagza bolsa, onda L çyzyga n tertipli algebraik çyzyk diýilýär.

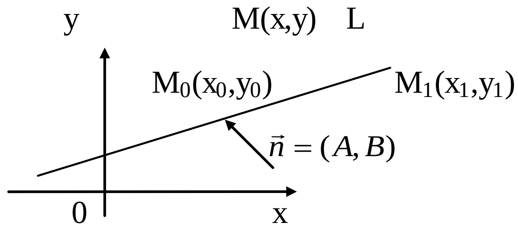
Algebraik däl çyzyklara transsendent çyzyklar diýilýär (meselem, trigonometrik funksiýallaryň, görkezijili funksiýanyň grafigi-transsendent çyzyklar).

II. Göni çyzyk

1. Mekdep geometriýasyndan belli bolşy ýaly M_1 we M_2 nokatlar dürli bolsalar, onda olar arkaly diňe bir göni çyzyk geçýär,şeýle hem berlen nokatdan berlen gönä ýeke-täk perpendikulýar geçirip bolýar.

Goý $\vec{n} = (A, B), \left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ wektor berlen bolsun. L göni $M_0(x_0, y_0)$ nokat arkaly geçýär we $\vec{n}$ wektora perpendikulýar. $M_0(x_0, y_0)$ nokat arkaly $\vec{n}$ wektora perpendikulýar diňe bir göni geçýär ol hem α göni. Goý, M(x,y) L göniniň erkin nokady, onda $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ wektor $\vec{n}$=(A,B) wektora perpendikulýar. Diýmek

$$(\vec{n}\ \overrightarrow{M_0M})=0 \qquad (14)$$



34-nji çyzgy

bu deňlemäni diňe L gönide ýatýan ähli nokatlaryň koordinatalary kanagatlandyrýar.Diýmek,(14) L göniniň deňlemesi. Wektor görnüşden koordinatalar görnüşe geçip alarys:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \qquad (14')$$

ýa-da

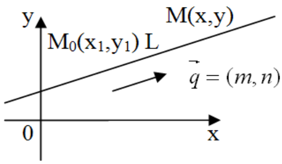
$$Ax+By+C=0, \quad C=-Ax_0-By_0 \qquad (15)$$

(15)deňlemä göniniň umumy deňlemesi diýilýär,

$$\vec{n}=(A,B)(A^2+B^2\neq 0)$$

wektora gönininiň normal wektory diýilýär.

2. Eger $\vec{q}$=(m,n) $(m^2+n^2)\neq 0)$ wektor L gönä parallel ýa-da onda ýatýan bolsa,onda oňa gönininiň ugrukdyryjy wektory diýilýär. Goý, göni $M_0(x_0,y_0)$ nokatyň üstünden geçsin.Gönide M(x,y) erkin nokat alalyň.Onda $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{q}$, diýmek,



35-nji çyzgy

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (16)$$

Bu deňlemä gönininiň kanonik deňlemesi diýilýär.Eger (15) deňleme berlen bolsa,onda $\vec{q}$=(-B,A) L gönininiň ugrukdyryjy wektory bolar.Şu sebäpli hem

$$\frac{x-x_0}{-B}=\frac{y-y_0}{A} \qquad (16')$$

Goý,göni $M_1(x_1,y_1)$ we $M_0(x_0,y_0)$ nokatlaryň üstünden geçýän bolsun.Onda $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ wektor ugrukdyryjy wektordyr, diýmek

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \qquad (17)$$

Bu deňlemä berlen iki nokadyň üstünden geçýän göniniň deňlemesi diýilýär. (17) deňlemäni $(x_1 \neq x_2)$

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x_0+y_0$$

görnüşde, ýa-da

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=k, \quad y_0-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x_0=b$$

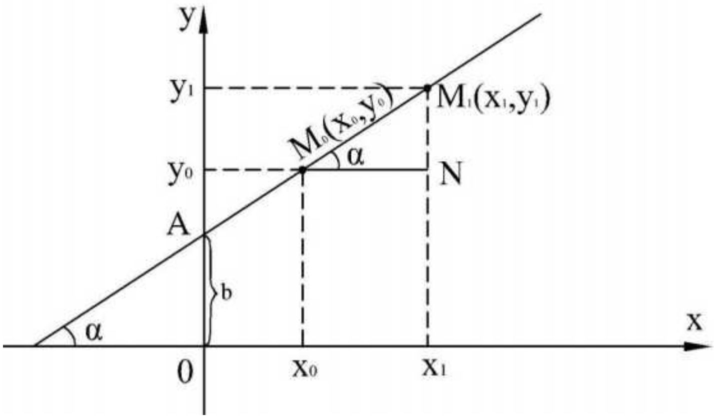
belgi girizip alarys:

$$y=kx+b \qquad (18)$$

Muňa göniniň burç koeffisientli deňlemesi diýilýär.

36-njy çyzgydan alýarys :

$$M_0N=x_1-x_0,\ NM_1=y_1-y_0,\ tg\alpha=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},b=0A$$



36-njy çyzgy

L gönüniň 0x oky bilen emele getirýän burçuna gönüniň ýapgyt burçy diýilýär.

$k=tg\alpha$- gönüniň burç koeffisienti diýilýär.

Eger $x_1 = x_0$ bolsa,onda göni oy okuna parallel we onuň deňlemesi

$$x = x_0 \,.$$

(16) deňlemeden alarys:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + my \\ y &= y_0 + nt \end{aligned}\right\} \quad -\infty < t < \infty \qquad (19)$$

Bu deňlemä gönüniň parametrik deňlemesi diýilýär,t- parametr.

Goý, (15) deňlemede A≠0, B≠0,C≠0.Onda (15) deňlemä gönüniň doly deňlemesi diýilýär.Ony

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (20)$$

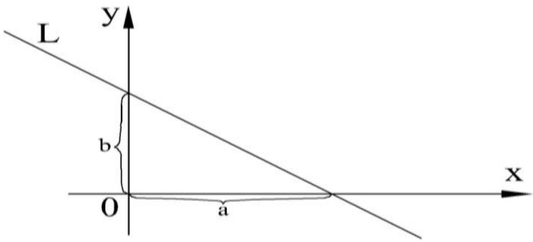
görnüşde ýazyp bolar, bu ýerde a=- $-\frac{c}{A}$, b= $-\frac{c}{B}$.

(19) deňlemä gönüniň kesimlerdäki deňlemesi diýilýär. Bu ýerde a,b L gönüniň ox,oy oklardan kesýän ugrukdyrlan kesimleriň ululygy.

Goý , A≠0, B≠0,C=0 bolsun, onda

$$Ax+By=0$$

bolar. Ol koordinatalar başlangyjyndan geçýän gönüniň deňlemesi.



37-nji çyzgy

Goý, A≠0, B=0bolsun, onda

$$By+C=0$$

bolar. Ol $0x$ okuna parallel gönüniň deňlemesi.

Goý , A=0, B≠0 onda

bu oy oka parallel gönüniň deňlemesi.

III. Iki göniniň arasyndaky burç.Gönleriň parallelik we perpendikulýarlyk şertleri.

1) Goý, L_1 we L_2 göniler, degişlilikde

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ , \quad \vec{n_1} = (A_1, B_1)$$

$$L_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \vec{n_2} = (A_1, B_2)$$

deňlemeler bilen berlen bolsun. L_1 we L_2 gönileriň arasyndaky burçy α bilen belgiläliň. Onda

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

çünki $\alpha = (\vec{n_1} \hat{\ } \vec{n_2})$.

Eger $L_1 \perp L_2$ bolsa, onda $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

iki göniniň perpendikulýarlyk şerti.

Goý, $L_1 \ || \ L_2$ bolsun, onda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

iki göniniň parallelik şerti.

2) Goý, $L_1 \ || \ L_2$ göniler ,degişlilikde

$$L_1: \quad \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1}:$$

$$L_2 : \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} :$$

$\vec{q}_1 = (m_1, n_1)$ $\vec{q}_2 = (m_2, n_2)$ φ=($\vec{q}_1 \hat{\ } \vec{q}_2$).

deňlemeler bilen berlen bolsun.Onda

$$Cos\ \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$$

we

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

iki gönüniň perpendikulýarlyk şerti.

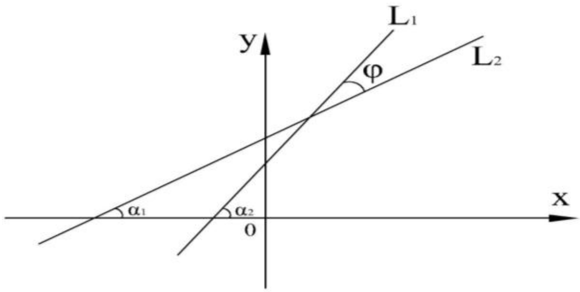
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

iki gönüniň parallelik şerti.

3) Goý, $L_1 \ || \ L_2$ göniler, degişlilikde

$L_1 \ : y = k_1 x + b_1$ $L_2 \ : y = k_2 x + b_2$

deňlemeler bilen berlen bolsun.



38-nji çyzgy

38-nji çyzgydan alýarys: φ= $\alpha_2 - \alpha_1$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 * tg\alpha_2}$$

bu ýerde $k_1 = tg\ \alpha_1$, $k_2 = tg\ \alpha_2$. Onda

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \ ,$$

şunlukda

$$k_1 = k_2$$

iki göniniň parallelik şerti we

$$k_1 k_2 + 1 = 0$$

iki göniniň perpendikulýarlyk şerti.

Mysal. $M_0(x_0, y_0)$ nokat we

$$Ax+By+C=0 \qquad (21)$$

göni berilen. M_0 nokadyň üstünden geçýän we berlen gönä

a) parallel gönininiň;

b) perpendikulýar gönininiň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi: a) Deňlemesi gözlenýän göni berlen gönä parallel. Diýmek, $\vec{n}$ =(A,B) wektor oňa normal wektor. Onda (14) formula görä

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{22}$$

Bu $M_0(x_0,y_0)$ nokadyň üstünden geçýän we (21) gönä parallel gönininiň deňlemesi.

b) Bu halda, şerte görä $\vec{n_1}$ =(B,-A)($\vec{n_1}$ =(-B,A)) wektor $\vec{n}$ =(A,B) wektora perpendikulýar. Diýmek, $\vec{n_1}$ wektor deňlemesini düzmeli gönimize normal wektor. Onda

$$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0 \tag{23}$$

Bu $M_0(x_0,y_0)$ nokadyň üstünden geçýän we (21) gönä perpendikulýar gönininiň deňlemesi.

IV. Berlen göniden berlen nokada çenli uzaklyk

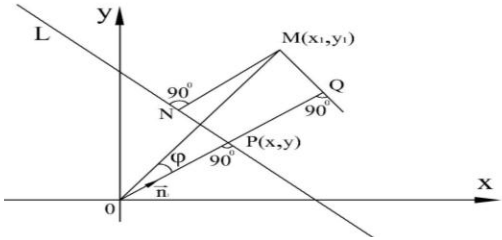
Goý, L göni

$$Ax+By+C=0 \qquad (A^2+B^2\neq 0) \tag{24}$$

deňleme bilen berlen bolsun. Käbir $M(x_1, y_1)$ nokat berlen we M nokadan (24) gönä çenli uzaklygy aralygy tapmaly.

1-kesgitleme. Berlen $M(x_1, y_1)$ nokatdan (24) gönä inderilen perpendikulýaryň d uzynlygyna berlen $M(x_1, y_1)$ nokatdan (24) gönä çenli uzaklyk diýilýär.

2-kesgitleme. $M(x_1, y_1)$ nokat we koordinatalar başlangyjy L göni çyzygyň dürli taraplarynda ýatýan halynda +d deň we $M(x_1, y_1)$ nokat hem-de koordinatolar başlangyjy L göniden bir tarapda ýatýan halynda –d deň bolan δ ululyga berlen $M(x_1, y_1)$ nokadyň L göniden gyşarmasy diýilýär.



39-njy çyzgy

Şunlukda, d=$|\delta|$ we meseläni çözmek üçin bize δ-ni tapmak ýeterlik.

Goý, $\vec{n}$ ort bolsun,ýagny $|\vec{n}|$=1 we $\vec{n}_1 \perp$ L.Onda

$$\vec{n}_1=(\lambda A, \lambda B),$$

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1 \text{ we } \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Diýmek,

$$\vec{n} = \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

biz hasap $\vec{n_1} \uparrow\uparrow OP$ edeliň. Çyzgyda d=|MN|=|PQ|. $\vec{OM} = (x_1, y_1)$ we

$$\left(\vec{OM}, \vec{n_1}\right) = \frac{Ax_1 + By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = np_{n_1}\vec{OM} = OQ \tag{25}$$

OQ=OP+PQ, *PQ=δ.* Onda

$$\delta = OQ\text{-}OP \tag{26}$$

Emma

$$\text{OP}=(\vec{OP}, \vec{n}_1) = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} > 0,$$

Bu deňsizlik bolmagy üçin radikalyň öňünde C-iň alamatyna garşylykly alamat almaly, ýagny bolsa c>0 we c<0 +.

Indi (25) we (26) deňliklerden alýarys:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{27}$$

Bu formulada radikalyň öňünde C-iň alamatyna garşy alamat almaly.

Mysal. Berlen iki parallel gönileriň arasyndaky d uzaklygy tapmaly.(Iki parallel gönä perpendikulýar kesimiň d uzynlygyna bu iki parallel gönileriň arasyndaky uzaklyk diýilýär).

Çözülişi: Iki parallel gönileriň deňlemelerini

$$Ax+By+C_1=0 \qquad\qquad Ax+By+C_2=0$$

görnüşde ýazyp bolar.

Goý , $M(x_1, y_1)$ bu gönileriň birinde, meselem

$$A_1x + B_1y + C_1=0$$

ýatýan bolsun.Onda

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad . \qquad (27')$$

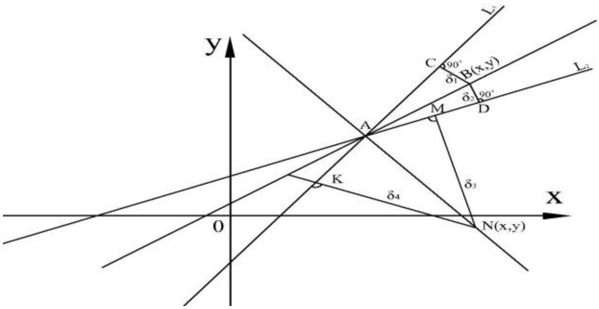
$$A_1x_1 + B_1y + C_1 = 0 \qquad (L_1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (L_2)$$

göniler berlen.Bu gönileriň kesişmesinden emele gelen burçlaryň bissektrisasynyň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi:

Burçuň bissektrisasy-onuň taraplaryndan deň uzaklykda ýatan nokatlar köplügidir. Iki göniniň kesişmesinden çatyk burçlar emele gelip,olaryň bissektrisalary özara perpendikulýardyrlar.



40-njy çyzgy

C nokadyň we D nokadyň AB bissektrisadan gyşarmasyny degişlilikde δ_1 we δ_2 bilen belgiläliň we AB bissektrisanyň deňlemesini düzeliň. Goý, göni çyzyklar 40-njy çyzgydaky ýaly ýerleşen bolsunlar. $\delta_2 = -\delta_1$, 40-njy çyzgydan (26) formula görä alarys:

$$\frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = -\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

AN bissektrisanyň deňlemesini $\delta_3 = \delta_4$ deňlemeden alýarys:

$$\frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

Şeýlelik bilen iki bissektrisanyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$\frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \pm\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

3. Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesi

$$x+y-1=0, \qquad \text{(AB)}$$

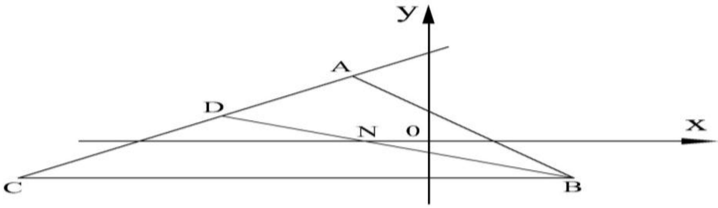
$$y+1=0 \qquad \text{(BC)}$$

we onuň medianalarynyň kesişme N(-1;0) nokady berlen.Onuň üçünji (AC) taraplarynyň deňlemesini tapmaly (41-nji çyzgy).

Biz bu ýerde we geljekde haýsy-da bolsa bir kesimiň deňlemesi diýip,ol kesimiň üstünde ýatan göni çyzygynyň deňlemesine düşünjekdiris.

Çözülişi: Çözülişini aşakdaky tertipde alyp baralyň:

1) B nokadyň koordinatalaryny tapýarys.
2) D nokadyň koordinatalaryny tapýarys.
3) A nokadyň koordinatalaryny tapýarys.
4) AC tarapyň deňlemesini düzýäris.



41-nji çyzgy

1) $$\begin{cases} x_B + y_B - 1 = 0 \\ y_B + 1 = 0 \end{cases}$$

y_B=-1, x_B=2 B(2;-1)

2) D nokadyň koordinatalaryny (5) (III bap, §3) formulalar boýunça tapýarys.N nokat medianalaryň kesişme nokady bolany üçin:

$$\lambda = \frac{BN}{ND} = 2,$$

-1=$\frac{2+2x_D}{3}$, $x_D = -\frac{5}{2}$; $y_D = \frac{1}{2}$. D$\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$;

3) (5')(III bap, §3) formulany ulanyp alýarys:

y_C=-1, $\frac{y_C + y_A}{2} = y_D$, $\frac{-1 + y_A}{2} = \frac{1}{2}$, $y_A = 2$

$$x_A = 1 - y_A = 1\text{-}2 = \text{-}1 \quad A(-1;2).$$

4) Indi, AC tarapyň deňlemesini düzüp bileris:

$$\frac{x+\frac{5}{2}}{-1+\frac{5}{2}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}$$

ýa-da

$$x-y+3=0$$

4.ABCD parallellogramyň diagonallary N(1,2) nokatda kesişýär.Onuň iki tarapynyň

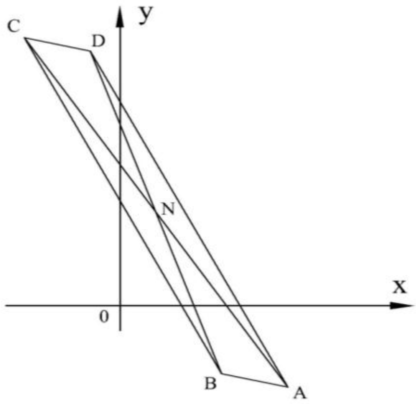
$$x+2y+1=0, \qquad (AB)$$

$$2x+y-3=0 \qquad (BC)$$

deňlemesi berlen.Parallellogramyň beýleki iki tarapynyň deňlemesini we B nokatdan geçmeýän diagonalynyň deňlemesini tapmaly.(40-nji surat).

Çözülişi:

1) AB we BC taraplar parallell däldir.Şonuň üçin hem ilki B nokadynyň koordinatalaryny tapalyň.



42-nji çyzgy

$$\begin{cases} x_A + 2y_B + 1 = 0 \\ 2x_B + y_B - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x_B = \frac{7}{3},\ \ y_B = -\frac{5}{3} \qquad B(\frac{7}{3};-\frac{5}{3}).$$

2)D nokadyň koordinatalaryny tapalyň.

(5) (III bap, §3) formulany ulanýarys,onda:

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2}, y_N = \frac{y_B + y_D}{2};\ D\left(-\frac{1}{3};\frac{17}{3}\right).$$

3) CD tarapyň deňlemesini düzeliň. Onda (22)-nji formulany ulanyp taparys:

$$x + \frac{1}{3} + 2(y - \frac{17}{3}) = 0,$$
$$x + 2y - 11 = 0.$$

4) AD tarapyň deňlemesini hem (22)-nji formula boýunça tapýarys 2x+y-5=0.

5) AC diagonalyň deňlemesini tapmak üçin A ýa-da C nokadyň koordinatalaryny tapýarys.Soňra (17) formula boýunça AC diagonalyň deňlemesini tapýarys:

$$A(\frac{11}{3};-\frac{7}{3}) \quad 13x+8y-29=0.$$

5. 2x+y-1=0.

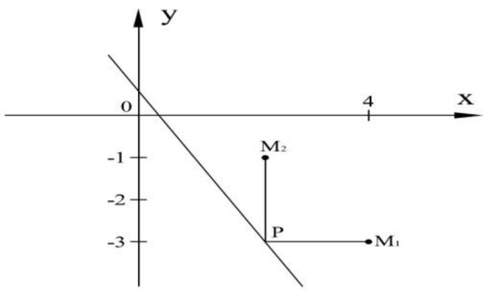
göni çyzykda M_1(4;-3) we M_2(2;-1) nokatlardan deň uzaklykda ýatýan P nokady tapmaly.

Çözülişi: Şerte görä: $|M_1P|=|M_2P|$ (43-nji çyzgy)

$$(x_p-4)^2+(y_p+3)^2=(x_p-2)^2+(y_p+1)^2,$$

P nokat berlen göni çyzygyň üstünde ýatyr. Diýmek,

$$2x_p-y_p-1=0$$



43-nji çyzgy

Indi

$$\begin{cases} 4x_p - 3y_p - 20 = 0 \ , \\ 2x_p + y_p - 1 = 0 \end{cases}$$

sistemany çözüp tapýarys:

$$x_p = 2.3; \quad y_p = -3.6; \qquad P(2.3;-3.6).$$

6. $M_1(-1,-1)$ nokadyň üstünden geçýän we

x+2y-1=0 ,

x+2y-3=0

parallel göni çyzyklaryň arasyndaky kesiminiň ortasy

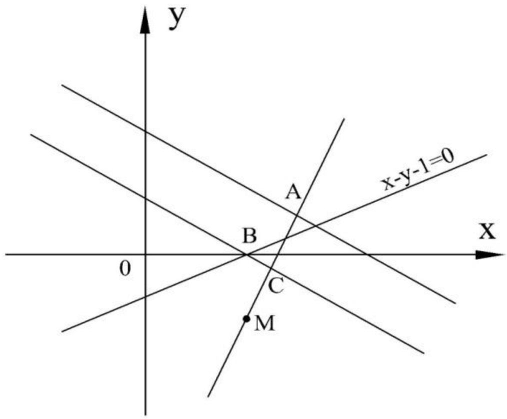
x-y-1=0

gönide ýatýan göniniň deňlemesini tapmaly. (44-nji çyzgy)

Çözülişi: Ilki B nokadyň koordinatalaryny tapalyň.B nokat AC kesimiň ortasy.Diýmek,(5) (III bap, 3) formula boýunça:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \ , \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} x_A + 2y_A = 3m \ , \\ x_C + 2y_C = 1. \end{cases}$$



44-nji çyzgy

Bu iki deňligi goşup, (28) deňlikler esasynda alýarys:

$$x_B + 2y_B = 2.$$

Bu deňlemäni

$$x_B - y_B - 1 = 0.$$

deňleme bilen bile çözup tapýarys:

$$x_B = \frac{4}{5}, \quad y_B = \frac{1}{3}; \qquad B(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}),$$

2)B hem-de M nokatlaryň koordinatolary boýunça (17) formulany ulanyp, gözlenýän deňlemäni tapýarys:

4x-y-5=0.

7.Üçburçlugyň bir depesi B(-4,-5) we onuň iki beýikliginiň deňlemesi

$$5x+3y-4=0 \qquad (29)$$

$$3x+8y+13=0 \qquad (30)$$

berlen.Bu üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesini tapmaly.

Çözülişi:B nokat (29) we (30)gönileriň üstünde ýatmaýar.(Muny bilmek üçin B nokadyň koordinatalaryny (29) we (30) deňlemelerde goýup görmeli). BC tarapyň deňlemesini B nokadyň üstünden geçýän we (29) gönä perpendikulýar göni çyzyk hökmünde (23) formulany ulanyp taparys:

$$-3(x+4)+5(y+5)=0\ ,\ 3x-5y-13=0.$$

Şeýle hem AB tarapyň deňlemesini tapýarys:

$$8x-3y+17=0$$

AC tarapyň deňlemesini tapmak üçin A hem-de C nokatlaryň koordinatalaryny tapmak ýeterlikdir.

A nokat üçin

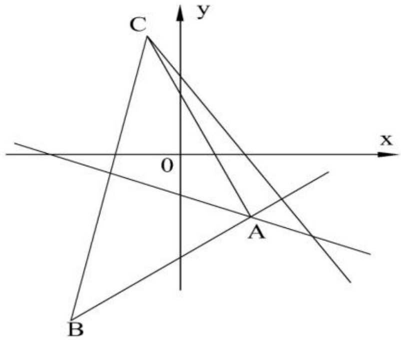
$$\begin{cases} 3x_A+8y_A+13=0, \\ 3x_A-5y_A-13=0 \end{cases}$$

sistemany we C nokat üçin:

$$\begin{cases} 5x_C+3y_C-4=0, \\ 8x_C-5y_C+17=0 \end{cases}$$

sistemany çözüp alarys:

A(1:-2) we C(-1:3).



45-nji çyzgy

Indi (17) formulany ulanyp, AC tarapyň deňlemesini tapýarys.

5x+2y-1=0.

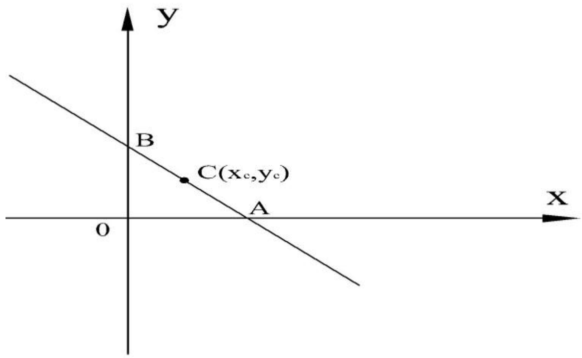
Üçburçlugyň taraplarynyň deňlemeleri:

$$3x-5y-13=0, \qquad 8x-3y-1=0, \qquad 5x+2y-1=0.$$

8). C (1;1) nokadyň üstünden geçýän we birinji koordinatalar burçundan meýdany 2 kw. birlik bolan üçburçluk kesýän göni çyzygyň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi:Goý , OA=a, OB=b (43-nji çyzgy) Onda (20) formula esasynda gözlenýän deňlemämiz şeýle

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ bolar. Şerte görä: $\frac{ab}{2}=2$



46-njy surat

_a_ hem-de _b_ näbellileri tapmak üçin:

$$\begin{cases} bx_C + ay_C = ab \ , \\ ab = 4 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} b + a = ab \ , \\ ab = 4 \end{cases}$$

sistemany çözmeli. Bu sistemany çözüp alýarys: a=2, b=2.

Dimek, gözlenýän göni çyzygyň deňlemesi:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$$

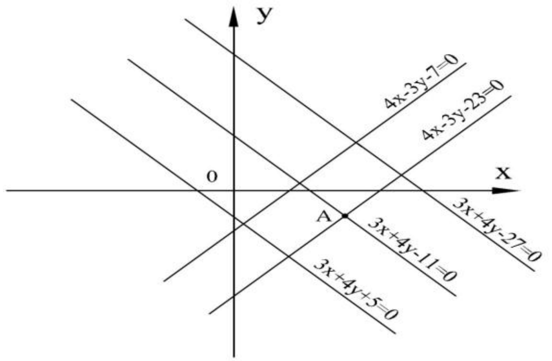
ýa-da

$$2x+2y-4=0$$

9) A (5;-1) nokat bir tarapy

$$4x-3y-7=0$$

göni çyzygyň üstünde ýatan kwadratyň depesi bolup hyzmat edýär.Ol kwadratyň beýleki taraplarynyň deňlemesini düzmeli.



47-nji çyzgy

Çözülişi: A nokat berlen göni çyzygyň üstünde ýatmaýar,çünki

$$4 \cdot 5+3 \cdot 1-7 \neq 16$$

Ol kwadratyň bir tarapy berlen gönä parallel we A(5,-1) nokadyň üstünden geçýär.(22) formula boýunça ol tarapyň deňlemesini tapýarys:

$$4(x-5)-3(y+1)=0$$

ýa-da

$$4x-3y-23=0$$

Kwadratyň A depesinden geçýän we deňlemeleri belli taraplaryna perpendikulýar tarapynyň deňlemesini (23) formula boýunça tapýarys:

$$3(x-5)+4(y+1)=0, \quad 3x+4y-11=0$$

Kwadratyň dördünji tarapynyň deňlemesini $3x+4y+C=0$

görnüşde ýazyp bileris.Bu deňlemede C näbelli.(27’) formulany we kwadratyň taraplarynyň deňligini ulanyp alarys:

$$\frac{|-7+23|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|C+11|}{\sqrt{16+9}}$$

ýa-da

$$C+11=\pm 16, \quad C=5; \qquad C=-27$$

Diýmek,

$$3x+4y+5=0$$

we

$$3x+4y-27=0$$

Meseläniň şertlerini iki kwadrat kanagatlandyrýar.Olaryň biriniň taraplarynyň deňlemeleri:

$4x-3y-23=0$, $\qquad$ $4x-3y-7=0$.

3x+4y-11=0,		3x+4y+5=0.

we beýlekisiniň taraplarynyň deňlemeleri

4x-3y-23=0 ,		4x-3y-7=0 ,

3x+4y-11=0 ,		3x+4y-27=0.

10) A(3,-4) we B(-1,-2) nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzyga görä M_2(8,-9) nokada simmetrik M_1 nokady tapmaly.

Çözülişi:A hem-da B nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzmeli.Ony (17) formulany ulanyp taparys:

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y+4}{-2+4}$$

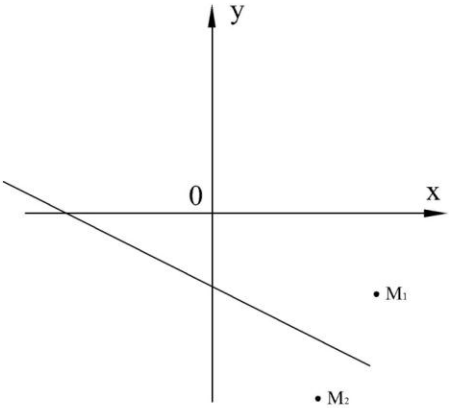
ýa-da

$$2x+4y+10=0 \qquad (31)$$

(23) formula boýunça M_2(8;-9) nokadyň üstünden geçýän we göni çyzyga perpendikulýar göni çyzygyň deňlemesini düzeliň:

4(x-8)-2(y+9)=0, 4x-2y-50=0

Bu deňlemäni (31) deňleme bilen bilelikde çözüp, C(x_C, y_C) nokadyň koordinatalaryny tapýarys:



48-nji çyzgy

(5’) (III bap, §3) formulany ulanyp, $M_1(x_{M_1}, y_{M_1})$ nokadyň koordinatalaryny tapmak üçin aşakdaky deňlemeleri:

$$x_C = 9ğ, ğğ y_C = -7,\ 9 = \frac{x_{M_1} + 8}{2}, -7 = \frac{y_{M_1} - 9}{2}$$

alarys.

$$x_{M_1} = 10ğ, ğğ y_{M_1} = -5.$$

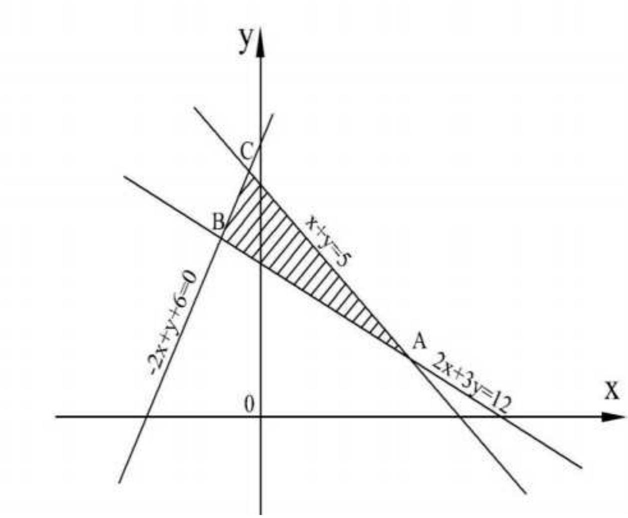
9. Tekizlikde aşakdaky deňsizlikleriň Çözülişiniň oblastyny gurmaly:

$$\begin{cases} -2x + y \le 6\ , \\ 2x + 3y \le 12\ , \\ x + y \ge 5 \end{cases}$$

Çözülişi: Ilki

$$\begin{cases} -2x + y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

göni çyzyklary guralyň.



49-njy çyzgy

Nokadyň göni çyzykdan gyşarmasynyň kesgitlemesine görä

$$-2x+y\leq 6$$

deňsizligi göni çyzykdan koordinatalar başlangyjy bilen bir tarapda ýerleşen nokatlar kanagatlandyrýarlar.Şonuň ýaly hem

$$2x+3y\leq 12$$

deňsizligi kanagatlandyrýan nokatlary tapýarys.

$$x+y \geq 5$$

deňsizligi

$$x+y = 5$$

göni çyzykdan koordinatalar başlangyjy ýerleşen tarapdan başga tarapda ýatýan nokatlar kanagatlandyrýarlar.

Deňsizlikleriň üçüsiniň hem ýerine ýetýän oblasty ΔABC-niň içi we onuň taraplarynyň nokatlary. Diýmek,deňsizlikler sistemasynyň Çözülişiniň oblasty ΔABC we onuň taraplary.

5 . Ikinji tertipli çyzyklar

Tekizlikde göniburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen bolsun. Onda n tertipli algebraik çyzyklaryň kesgitlemesine laýyklykda

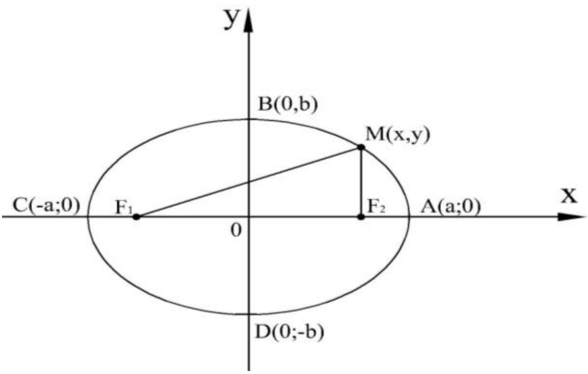
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{32}$$

deňleme ikinji tertipli egrileriň deňlemesidir. Bu ýerde $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ berlen sanlar we a_{11}, a_{12}, a_{22} bir wagtda nola deň bolup bilmeýärler, $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}$ koffisientleriň we a_{33} azat agzanyň bahalaryna baglylykda (32) deňleme dürli egrileri kesgitleýär. Biz bu deňlemäni derňäp ony ýönekeýleşdirip ol egrileriň kanonik (ýönekeý) deňlemelerini alyp bileris (2-nji mesele, §4). Emma biz egriniň kesgitlemesine görä onuň deňlemesini taparys. (32) deňlemäniň hiç hili hakyky köküniň bolmazlygy hem mümkündir. Meselem $x^2 + y^2$ +1=0.

I. ELLİPS

Kesgitleme.

Tekizlikde iki bellenen F_1 we F_2 nokatlara çenli bolan uzaklyklarynyň jemi hemişelik $2a$ sana deň bolan nokatlar köplügine ellips diýilýär. F_1we F_2 nokatlara ellipsiň fokuslary diýilýär.



50-nji çyzgy

Ellipsiň kanonik deňlemesini almak üçin göniburçly dekart koordinatalar sistemasyny ýörüte şeýle alalyň: Ox oky F_1 we F_2

nokatlaryň üstünden we Oy oky F_1F_2 kesimiň ortasyndan $|OF_1| = |OF_2|$ geçireliň. Goý, |F1F2|=2C bolsun. Onda F_1(c;0), F_2 (c;0). (50-nji çyzgy). Goý, M(x,y) ellipsde ýatýan nokat bolsun, onda | M F_1|+|M F_2 |=2a ýa-da

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (33)$$

(33)-nji deňleme - ellipsiň deňlemesi. Ýönekeýleşdirmek üçin ony radikaldan boşatmaly. Ilki ony

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

görnüşde ýazalyň. Bu deňligiň iki böleginde-de položitel ululyk dur, şonuň üçin hem ony kwadrata göterip alarys:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

ýa-da

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx\,. \qquad (34)$$

Bu deňligi hem kwadrata götereliň:

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2 = a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

ýa-da

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Indi a>c deňsizligi göz öňünde tutup,

$$b^2 = a^2-c^2, b=\sqrt{a^2-c^2}$$

belgileme girizip alarys.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\equiv 1. \qquad (35)$$

(35)-nji deňlemäniň ellipsiň deňlemesidigini subut edeliň. (35)-nji deňlik (33)-nji deňlikden gelip çykdy. (35)-nji deňlemäniň (33)-nji deňlemä ekwiwalentdigini subut etmek üçin (35)-nji deňlemeden (33)-nji deňlemäniň gelip çykýandygyny subut etmeli.

Goý, *(x,y)* (35)-nji deňlemäni kanagatlandyrýan käbir sanlar bolsun. (33)-den (35)-a gelmek üçin ýokarda geçiren işlerimizi tersine geçirip alarys

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=\left(a^2-cx\right)^2.$$

Bu deňligiň iki böleginden hem kök alyp taparys:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\left(a^2-cx\right). \qquad (36)$$

(35) deňlikden |x|≤a boljakdygy anyk. |x|≤a we $c<a$ bolýanlygy sebäpli |cx|<a^2, diýmek, a^2-cx>0. Şonuň üçin hem (36)-njy deňligiň sag böleginde plus alamatyny almaly. Netijede (34)-nji deňligi alýarys. (34)-nji deňligi ilki

$$(x+c)^2+y^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

görnüşde ýazalyň. Bu deňlikden alýarys:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right). \qquad (37)$$

Indi

$$\left(x-c\right)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2 \qquad (38)$$

ulylygy derňäliň. Ozal belleýşimiz ýaly $x^2 \le a^2$, $|cx|< a^2$, diýmek, -2cx sanyň absalýut ululygy

2a^2- dan kiçi. (35)-nji deňlikden $y^2 \le b^2$, ýagny $y^2 \le a^2 - c^2$ ýa-da $c^2 + y^2 \le a^2$ deňsizligi alýarys. Diýmek, (37)-nji deňligiň çep bölegindäki ýaýyň içindäki ululyk položitel. Şonuň üçin (37) deňlikde ýaýyň öňünde plus alamaty almaly:

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=2a-\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2} \;,$$

bu bolsa (33)-nji deňlik .

Şunlukda, (33)-nji deňlik (35)-nji deňlikden alynýar,edil şeýle hem (35)-nji deňleme (33)-nji deňlemeden alyndy. Bu bolsa (35)-nji we (33)-nji deňlikleriň ekwiwalentdigini görkezýär. Diýmek, (35)-nji deňlik ellipsiň deňlemesi. (35)-nji deňlemä ellipsiň kanonik deňlemesi diýilýär.

Eger (35)-nji deňlemede a=b bolsa, onda

$$x^2+y^2=a^2$$

alýarys. Bu deňleme radiusy a merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan töweregiň deňlemesidir. a we b sanlara ellipsiň ýarym oklary diýilýär. Eger a>b bolsa a-uly ýarym ok, b-kiçi ýarym ok diýilýär. (biziň şertimizde a>b).

Ellips çäklenen egri,çünki $|x| \le a$, $|y| \le b$. Diýmek ellips taraplary a we b bolan gönüburçlugyň içinde ýerleşen.

Eger (35)-nji deňlemede x-iň ornuna $-x$ goýsak, onda ol üýtgemez. Bu bolsa ellipsiň Oy okuň simmetrikdigini görkezýär. Şonuň ýaly-da ellipsi *Ox* okuna görä simmetrikdir.

Ellipsiň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyp bolýar.

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot cos\,\varphi, \\ y &= b \cdot sin\,\varphi \end{aligned}\right\} 0 \le \varphi \le 2\pi \qquad (39)$$

dogrudan-da

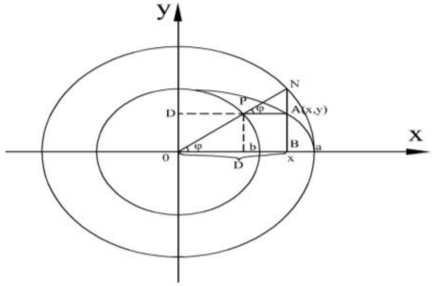
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \equiv cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

ýagny (39)-njy deňlemeler boýunça kesgitlenen *(x ,y)* nokatlar φ-iň islendik bahasynda (35)-nji ellipsde ýatýarlar.

A(a;0), B(0;b), C(-a;0), D(0;-b) nokatlara ellipsiň depeleri diýilýär.

Ellipsiň gurluşy

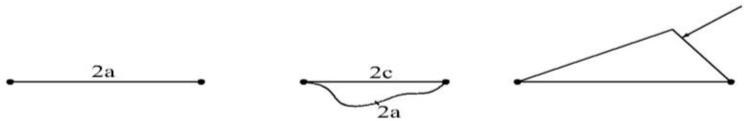
Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan *a* we *b* radiusly töwerekleri alalyň (a>b).



51-nji çyzgy

Soňra φ burçy bilen ON radius - wektory geçireliň. N nokatdan Oy okuna parallel, P nokatdan Ox oka parallel göni geçireliň. Ol gönileriň kesişme A nokady ellpse degişli. Dogrudan-da, Δ OBN-den we ΔOPD-dan alýarys.

$$\left.\begin{array}{ll} (x = OB) & x = ON\cos\varphi = a\cos\varphi \\ (y = PD) & y = OP\sin\varphi = b\sin\varphi \end{array}\right\}$$



52-nji çyzgy

Şunlukda, biz φ burçuň geometrik manysyny we ellipsi gurmak usulyny bildik.

Ellipsi gurmak üçin ýene bir usul:uzynlygy $2a$ bolan sapak almaly, onuň uçlaryny uzynlygy 2c deň bolan kesimiň uçlaryna berkitmeli.

Soňra sapagy galamyň ujuna ildirip çekdirip galamy aýlarys,netije-de galamyň ujy ellips çyzar.

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ ululyga ellipsiň ekssentrisiteti diýiýär. $a < c$, şonuň üçin hem ε<1 ýagny ellipsiň ekssentrisiteti birden kiçi.

Belli bolşy ýaly $c^2 = a^2 - b^2$, şonuň üçin hem

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} .$$

Eger $a=b$ bolsa , ellips töwerek bolýar we $\varepsilon=0$.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} , \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{40}$$

r_1, r_2 aralyklara(uzaklyklara) ellipsiň fokal raduslary diýilýär. (34)-nji deňlikden alýarys:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \equiv a - \frac{c}{a} x ,$$

bu deňlikden (40)-njy deňlikleriň ikinjisi üçin alýarys

$$r_2 = a - \varepsilon x .$$

Emma ellipsiň kesgitlemesine görä $r_1 + r_2 = 2a,$ onda $r_1 = 2a - r_2$ ýa-da $r_1 = a + \varepsilon x$.

$$x = \frac{a}{\varepsilon} ,$$

gönilere (35)-nji ellipsiň direktrisalary diýilýär.

Mysal. $A\left(\sqrt{5}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$, $B\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, 4\right)$ nokatlar we merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy $3\sqrt{2}$ deň töwerek berlen.

1) A we B nokatlaryň üstünden geçýän ellipsiň kanonik deňlemesini tapmaly.

2) Bu ellipsiň fokuslaryny we ekssentrisitetini tapmaly.

3) Berlen töwerek bilen ellipsiň kesişme nokatlaryny tapmaly.

Çözülişi:

1) Ellipsiň kanonik deňlemesini alalyň:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

we muňa A hem-de B nokatlaryň koordinatalaryny goýup, a we b sanlary tapalyň.

$$\left.\begin{aligned}\frac{5}{a^2}+\frac{64}{56^2}=1,\\ \frac{75}{4a^2}+\frac{16}{b^2}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=5; b=4$$

Diýmek, ellipsiň kanonik deňlemesi:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

2) Ellipsiň fokuslaryny we ekssentrisetini tapalyň

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9;$$

$$c=3.\ \varepsilon=\frac{a}{c}=\frac{5}{3}; \qquad F_1(-3;0),\ F_2(3;0)$$

3) Ellipsiň we töweregiň kesişme nokatlaryny tapalyň
Onuň üçin

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2=18\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\end{aligned}\right\}$$

sistemany çözüp tapýarys:

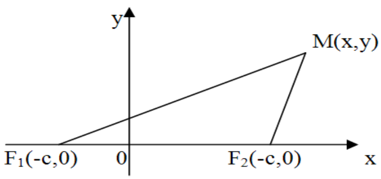
$$M_1(-5\sqrt{2},\frac{4\sqrt{7}}{3}),\quad M_2=(-5\sqrt{2},4\sqrt{7}),\quad M_3(-5\sqrt{2},-\frac{4\sqrt{7}}{3}),$$
$$M_4(-5\sqrt{2},-\frac{4\sqrt{7}}{3}).$$

$$c=3.\ \varepsilon=\frac{a}{c}=\frac{5}{3};\qquad F_1(-3;0),\ F_2(3;0)$$

2. Giperbola

Kesgitleme.Tekizlikde iki berkidilen F_1, F_2 nokatlara çenli uzaklyklarynyň tapawutlarynyň absolýut ululygy hemişelik $(2a)$ sana deň bolan nokatlar köplügine giperbola diýilýär. Şunlukda F_1 we F_2 nokatlara giperbolanyň fokuslary diýilýär.

Koordinatalar sistemasynyň Ox okuny F_1 *we* F_2 nokatlaryň üsti bilen geçireliň we *Oy* okuny *F₁ F₂* kesimiň ortasyndan geçireliň hem-de belgileme girizeliň.Onda $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. $|\ F_1F_2\ |=2c$.



54-nji çyzgy

Goý, M (x,y) giperbolada ýatan nokat bolsun. Onda

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

ýa-da

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a, \tag{41}$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \tag{42}$$

(41)-nji deňleme biziň seredýän giperbolamyzyň deňlemesi.

r_1 we r_2 -kesimlere onuň fokal radiuslary diýilýär.

Giperbolanyň kanonik deňlemesini almak üçin ellipsiň deňlemesiniň üstünde geçiren amallarymyzy geçirmeli. Biz ony geçirmegi okyjylara hödürleýäris we diňe netijäni ýazýarys:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = c^2 - a^2, \tag{43}$$

muňa giperbolanyň kanonik deňlemesi diýilýär.

(43)-nji deňlemeden görnüşi ýaly, giperbola Ox okuna hem-de Oy okuna simmetrik. Onuň birinji çärýekdäki böleginiň deňlemesi

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (a \le x < \infty) \tag{44}$$

Giperbola (a,0) we (-a,0) nokatlardan geçýär, olara giperbolanyň depeleri diýilýär. (43)-nji deňlemeden görnüşi ýaly giperbola *Oy* okuny kesmeýär: $-y^2=b^2$; deňlemäniň hakyky köki ýok.

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{45}$$

gönilere giperbolanyň asimptotalary diýilär.

Umuman eger y=f(x) egri berilen bolsa we

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda y=kx+b gönä y= f(x) egriniň asimptotatsy diýilär.

Giperbolanyň (44) deňleme bilen kesgitlenen bölegini alalyň we ony $y=\frac{b}{a}x$ göni bilen deňeşdereliň.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right]=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$$

Bu bolsa $y=\frac{b}{a}x$ gönininiň giperbolanyň asimptotydygyny görkezýär.

Şonuň ýaly-da, $y=\pm\frac{b}{a}x$ gönileriň koordinatalar oklaryna dörä simmetrikdigi sebäpli, bu gönileriň $x\to\infty$ hem-de $x\to-\infty$ giperbolanyň asimptotlary bolýandygyny aýtmak bolýar.

Giperbolanyň sag şahasynyň parametrik deňlemesini alalyň.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y &= \frac{b}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) \end{aligned}\right\} (-\infty < t < \infty),$$

bu ýerde

$$\text{cht}=\frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{sht}=\frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Bu funksiýalara, degişlilikde giperbolik kosinus we giperbolik sinus diýilýär. Bu formulalardan alýarys:

$$ch^2 t - sh^2 t = 1.$$

Diýmek,

$$\left.\begin{aligned} x &= acch, \\ y &= bsht \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ sana giperbolanyň eksentrisiteti diýilýär.c>a bolýandygy sebäpli giperbolanyň ekssentritetiniň $\varepsilon > 1$ bolýandygyny $c^2 = a^2 + b^2$ deňligiň esasynda alýarys.

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2};$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}; \;\; \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Fokal raduslar üçin formulalar:

eger *M(x,y)* nokat giperbolanyň sag şahasynda bolsa, onda

$$r_1 = a + \varepsilon x \qquad\qquad r_2 = -a + \varepsilon x$$

we eger *M(x,y)* nokat giperbolanyň çep şahasynda bolsa,

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \quad , \quad r_2 = -(\varepsilon x - a)$$

deňlemäni alýarys.

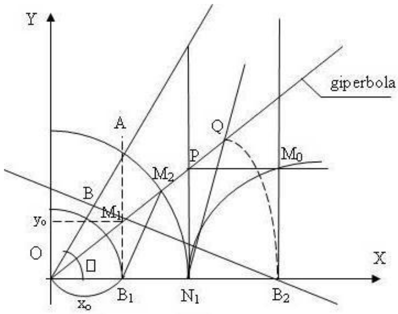
$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \;\; x = \frac{a}{\varepsilon}$$

gönilere (43) -nji giperbolanyň direktrisalary diýilýär.

II₁ Biz (46)-njy deňlemelerdäki *t* parametr bilen (39)-njy deňlemelerdäki φ parametriň arasyndaky baglylygy we giperbolany gurmagyň (sirkul we lineýka bilen) usulyny görkezeliň (54-nji çyzgy).

Koordinatalar sistemasynyň başlangyjynda merkezi bolan *a* we *b* radiusly iki töwerek guralyň. *Ox* oky bilen φ_0 burç emele getirýän şöhle geçireliň. Onuň uly töwerek bilen kesişme nokadyny *A* we kiçi töwerek bilen kesişme nokadyny *B* bilen belgiläliň. *OB=b*; *OA=a*. Soňra ýokarda aýdylşy ýaly ellipsiň nokadyny guralyň we ony M_1 harp bilen belgiläliň. Biz giperbolanyň diňe birinji çärýekdäki bölegini gurmak bilen çäklenýäris.

OM_1 şöhläni geçireliň ,onuň *a* radiusly töwerek bilen kesişmesiniM_2 harp bilen belgiläliň. M_2we B_1 nokatlary birleşdireliň. ellipsiň $N_1(a,0)$ nokadyndan *Oy* okuna parallel göni geçirip, onuň OM_1 şöhle bilen kesişme nokadyny *P* harp bilen belgiläliň. *OP* gönininiň deňlemesini ýazyp bilýäris, ol $y = \frac{y_0}{x_0} x$.



54-nji çyzgy

Bu ýerden P nokadynyň ordinatasyny tapýarys: $Y_0 = \frac{y_0}{x_0} a$.

$N_1(a,0)$ nokatdan $B_1 M_2$-ä parallel göni geçireliň we onuň OP göni bilen kesişme nokadyny Q bilen belgiläliň. OQ radiusly duga geçirip, onuň OX bilen kesişme nokadyny B_2 bilen belgiläliň. $\Delta\, \mathrm{O} M_2 B_1$ we $\Delta\, \mathrm{OQ} N_1$ meňzeş. Ondan alýarys

$$\frac{OQ}{OM_2} = \frac{ON_1}{OB_1} \Rightarrow OQ = \frac{a^2}{x_0},$$

onda $B_2\left(\frac{a^2}{x_0}, 0\right)$.

Indi P we B_2 nokatlardan degişlilikde Ox we Oy oklaryna parallel gönileri geçireliň. Bu gönileriň kesişme nokady $M_0(X_0, Y_0)$

(43) giperbolada ýatýan nokat , bu ýerde $X_0 = \frac{a^2}{x_0}$, $Y_0 = \frac{y_0}{x_0} \cdot a$.

Hakykatdan-da (x_0, y_0)-nokadyň (35) ellipsiň nokadydygyny ünse alyp hasaplalyň.

$$\frac{X_0^2}{a^2}-\frac{Y_0^2}{b^2}=\frac{a^4}{a^2x_0^2}-\frac{y_0^2a^2}{x_0^2b^2}=\frac{a^2}{x_0^2}\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=\frac{a^2}{x_0^2}\cdot\frac{x_0^2}{a^2}=1.$$

Diýmek, $M_0(x_0, y_0)$-(43) giperbolanyň nokady.

$B_2\left(\frac{a^2}{x_0},0\right)$ nokat ellipse M_1 nokatda geçirlen galtaşmanyň Ox oky bilen kesişme nokady. Dogrudan hem $M_1(x_0, y_0)$ nokatda ellipse geçirilen galtaşmanyň deňlemesi:

$$Y-y_0=\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-a^2}}\left(X-x_0\right).$$

Bu deňlemä B_2 nokadyň koordinatalaryny goýup alýarys:

$$-y_0=\frac{b}{a}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-a^2}}\left(\frac{a^2}{x_0^2}-x_0\right)=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x_0\left(x_0^2-a^2\right)}{x_0\sqrt{x_0^2-a^2}}=-\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2}$$

ýa-da

$$y_0=\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2-a^2}\ .$$

bu (44)-nji deňleme.

Indi, goý (35)nji ellips parametrik deňlemeleri bilen berlen bolsun.

$$x = a\cos\varphi$$

$$y = b\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi\,.$$

Giperbolada ýatýan nokadyň koordinatyny (X,Y) bilen belgiläliň. Onda

$$X=\frac{a^2}{x}=\frac{a}{cos\varphi}, \qquad Y=\frac{ay}{x}=btg\varphi .$$

Bu ýerden (46) deňlemeleriň esasynda, alýarys:

$$cht=\frac{X}{a}=\frac{1}{cos\varphi}, \qquad sht=\frac{Y}{b}=tg\varphi .$$

Ýene-de trigonometriýanyň formulalaryny ulanyp alýarys:

$$tg\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\varphi}{1+cos\varphi}}=\sqrt{\frac{cht-1}{cht+1}}=th\frac{t}{2},$$

$$e^t=cht+sht=\frac{1}{cos\varphi}+tg\varphi=\frac{1+\sin\varphi}{cos\varphi}=\frac{\left(cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}{cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}=$$

$$=\frac{cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

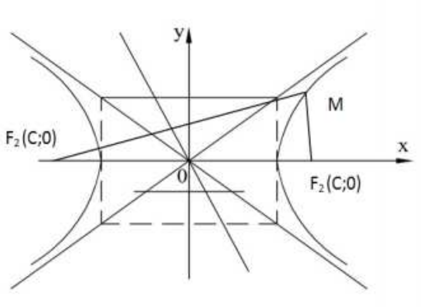
Bu deňlikden t-ni tapýarys:

$$t=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Mysal.

$\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ giperbolada 3x+2y+1=0 gönä golaý M nokady tapmaly we M nokatdan bu gönä çenli uzaklygy tapmaly.

Çözülişi:



55-nji çyzgy

Çyzgydan görnüşine M nokat giperbolanyň çep şahasynyň položitel böleginde bolmaly.

$$\delta(x) = \frac{3X + 2Y + 1}{\pm\sqrt{13}},$$

emma

$$Y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2 - 24}.$$

Onda

$$\delta(x) = \frac{3x + 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2 - 24}}{\pm\sqrt{13}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(3x + \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 24}).$$

Biz $\delta(x)$ funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly:

Şonuň üçin hem $\delta'(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3 - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2-24}}\right) = 0.$.

$$3\sqrt{x^2-24} = x\sqrt{3},$$
$$9(x^2-24) = 3x^2,$$
$$3x^2 - 24*3 = x^2,$$
$$x^2 = 36, \quad x = \pm 6$$

Diýmek, $x = -6$. $y = 3$; M_1 (-6;3) we M_2(6;3).Onda

$$d_1 = \frac{|3\cdot(-6)+2\cdot 3+1|}{\sqrt{13}} = \frac{11}{\sqrt{13}};$$
$$d_2 = \frac{|3\cdot(-6)+2\cdot 3+1|}{\sqrt{13}} = \frac{25}{\sqrt{13}}.$$

Jogap M_1 (-6;3) ; $d_1 = \frac{11}{\sqrt{13}}$.

3. Parabola

Kesgitleme. Tekizlikde berkidilen F nokada çenli aralygy berkidilen L gönä çenli bolan aralyga deň bolan nokatlar köplügine parabola diýilýär. F nokada parabolanyň fokusy we L gönä onuň direktrisasy diýilýär.

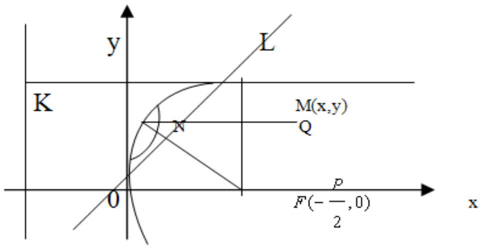
Ox okuny F nokadyň üstünden L gönä perpendikulýar geçireliň, *Oy* okuny F we L gönüniň ortasyndan geçireliň. Goý, L göni bilen F nokadyň aralygy p bolsun. Onda $F(\frac{p}{2},0)$ we L gönüniň deňlemesi

$$x = -\frac{p}{2} \qquad \text{(L)}$$

bolar. Goý, *M(x,y)* parabolada ýatýan nokat bolsun,onda

$$|MK| = |MF|$$

ýa-da $Q(-\frac{P}{2},0)$



56-njy çyzgy

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad (47)$$

parabolanyň deňlemesi.Bu deňlemäni radikaldan boşadyp alýarys

$$y^2 = 2px \qquad (48)$$

(48)deňlemäniň hem parabolanyň deňlemesi bolýandygyny,ýokarda ellipsiň deňlemesini görkezişimiz ýaly subut edip bolýar,ýagny (48)-den (47)-nji deňlemäni almaly.

(48) deňlemä parabolanyň kanonik deňlemesi diýilýär, p-sana parabolanyň parametri diýilýär. (48)-nji parabola Ox okuna görä simmetrik.Şonuň ýaly-da

$$x^2 = 2py$$

Oy okuna simmetrik parabolanyň deňlemesi.

Eger *Ox* oka parallel yşyk şöhlesi parabola *N* nokatda düşse, onda ol döwülip, *F* fokusyndan geçýär: Ýagny eger *ON* göni *N* nokatda parabola galtaşma bolsa, $\angle QNF = \angle DNQ$.

Mysal.

Fokusy F(4,3) we direktrisasy y+1=0 göni bilen parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi: Goý, *M(x,y)* parabolanyň nokady bolsun. Onda parabolanyň kesgitlemesine görä

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = y+1$$

ýa-da

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = y^2 + 2y + 1$$
$$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$$

parabolanyň deňlemesi.

Mysallar.

1. 1) *a*=3, b=2;

   2) *a*=5, c=4;

3) c=3, b=$\frac{3}{5}$;

4) b=5, b=$\frac{12}{13}$.

Berlenler boýunça ellipsleriň deňlemelerini ýazmaly.

2. $9x^2+25y^2=225$ ellipsde F_2 fokusdan F_1 fokusa çenli bolan aralykdan 4 esse uly bolan nokady tapmaly.

3. 1) *a*=2, b=3

2) *a*=4 c=5

3) c=3, b=$\frac{3}{2}$

4) a=8, b=$\frac{5}{4}$.

Berlenler boýunça giperbolalaryň deňlemelerini ýazmaly.

4. $\varepsilon=\sqrt{5}$ ekssentirisiteti, F(2,-3) fokusy we degişli direktrisasy 3x-y+3=0 göni bolan giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

5. 1) M(4,-8) nokadyň üstünden geçýän we *Oy* okuna simmetrik parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

2) Fokusy F(0,-3) bolan parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

6. Fokusy F(2,-1) we direktrisasy x-y+1=0 göni bolan parabolanyň deňlemesini ýazmaly.

6 Üstleriň we giňişlikdäki çyzyklaryň deňlemesi

Goý, giňişlikde gönibürçly dekart koordinatalar sistemasy we käbir S üst berlen bolsun. Eger

$$F(x,y,z)=0 \tag{49}$$

deňlemäni S üstde ýatýan islendik nokadyň $M(x,y,z)$ koordinatalary kanagatlandyryp we giňişligiň bu üstde ýatmaýan hiç bir nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrmaýan bolsa, onda (49)-njy deňlemä (saýlanan koordinatalar sistemasynda) S üstüň deňlemesi diýilýär.

Merkezi $C(a,b,c)$ nokatda we radiusy R bolan sferanyň deňlemesi

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

görnüşde boljakdygyny onuň kesgitlemesinden alýarys.Eger sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa,onda onuň deňlemesi

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Giňişlikde Γ çyzyk iki S_1 we S_2 üstleriň kesişmesi hökmünde kesgitlenýär (umuman ýeke-täk däl), ýagny

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

deňlemeler sistemasy bilen berilýär.

Meselem,

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+y^2+(z-\sqrt{R^2-1})^2=R^2, R>1 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasy Oxy tekizlikde ýatýan radiusy bire deň we merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan töweregiň deňlemesidir. Giňişlikde üstleriň deňlemesi

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,v), \\ y&=y(u,v), \\ z&=z(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

görnüşde hem berilýär. (51)-nji deňlemeler sistemasyna üstüň parametrik deňlemeleri diýilýär, u,v –parametrler.

Giňişlikde çyzyklaryň parametrik deňlemesi

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t) \\ y&=y(t) \\ z&=z(t) \end{aligned}\right\}$$

görnüşde bolýar,bu ýerde parametr t.

Meselem:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos\varphi\sin\psi, \\ y&=R\sin\varphi\sin\psi, \\ z&=R\cos\psi \end{aligned}\right\} \qquad o\le\varphi\le 2\pi \qquad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$$

merkezi koordinatalar başlangyjynda we radiusy R bolan sferanyň deňlemesi.

I. Ikinji tertipli üstler

Biz ýygy duş gelýän üstleriň deňlemerini belläp geçeliň.

1. Aýlanma üstler.

Eger

$$F(x,y)=0 \tag{52}$$

çyzygy käbir okunyň daşynda aýlasak, onda biz käbir üst alýarys. Ol üste aýlanma üst diýilýär.

Goý, (52)-nji çyzyk *oy* okunyň daşynda aýlanýan bolsun. Onda alnan üstüň deňlemesi

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0 \tag{53}$$

bolar we eger ol ox okunyň daşynda aýlansa, onda

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0 \tag{54}$$

deňleme ol üstüň deňlemesi bolar.

Diýmek, *Oxy* tekizlikde ýatan *L* çyzygyň *Ox(Oy)* okunyň daşynda aýlanmasyndan emele gelen üstüniň deňlemesini tapmak üçin, onuň (52)-nji deňlemesinde y-iň ornuna $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ (x-iň ornuna $\pm\sqrt{x^2+z^2}$) goýmaly.

Beýleki koordinatalar tekizliklerinde ýatan çyzyklaryň koordinatalar okunyň daşynda aýlanmasyndan alnan üstleriň hem deňlemesiniň tapylyşy ýokardaky ýalydyr.

2. Ikinji tertipli silindrler. Silindrik üstler

Eger S üstde ýatan islendik $M(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň üstünden oz okuna parallel bolan göni çyzyk tutuşlygyna S üstde ýatýan bolsa, onda bu üste emelegetirjisi Oz oka parallel bolan slindrik üst diýilýär.

1. Emelegetirjisi Oz okuna parallel bolan slindrik üst

$$F(x,y)=0 \tag{55}$$

deňleme bilen berilýär we (55)-nji deňlemäniň kesgitleýän çyzygyna slindriň ugrukdyryjysy diýilýär.

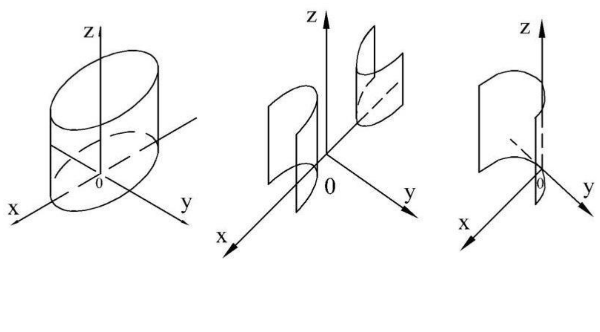
Şonuň ýaly

$$F_1(x,z)=0,\ F_2(y,z)=0$$

deňlemeler, degişlilikde,emele getirijisi Oy okuna we Ox-na oka parallel silindrik üstleriň deňlemelerdir.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=2px$$

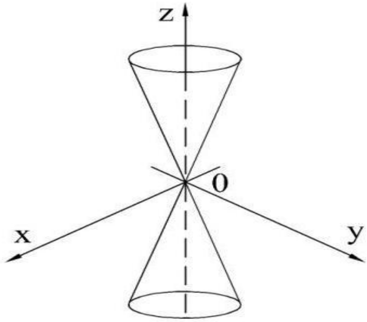
silindrik üstlere degişlilikde elliptik,giperbolik we parabolik silindrler diýilýär (57-nji çyzgy).



57-nji çyzgy

2. Käbir $Oxyz$ gönibürçly dekart koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



58-nji çyzgy. Konus.

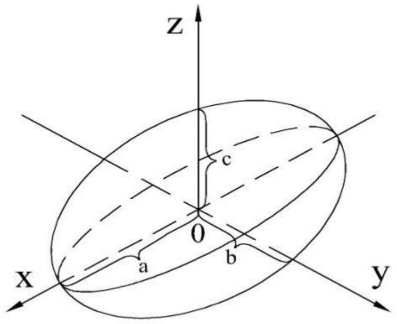
deňleme bilen kesgitlenýän üste ikinji derejeli konus diýilýär.

(56-njy çyzgy).

3. *Oxyz* käbir gönuburçly dekart koordinatalar sistemasynda deňlemesi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

bolan üste ellipsoid diýilýär. (Eger *a,b,c* sanlaryň haýsy bolsa-da ikisi deň bolsa, onda oňa aýlanma ellipsoid diýilýär); *a,b,c* ulylyklara ellipsoidiň ýarymoklary diýilýär.



59-njy çyzgy. Elipsoid.

4. Käbir gönuburçly dekart koordinatalar sistemasynda

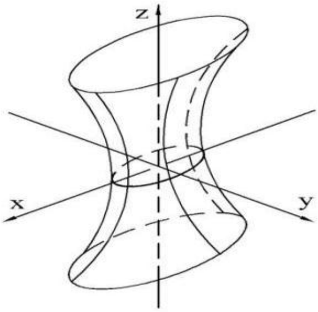
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

deňlemesi bolan üste bir boşlukly giperboloid diýilýär, (eger a=b bolsa, onda oňa bir boşlukly aýlanma giperboloid diýilýär). a,b,c- sanlara giperboloidiň ýarym oklary diýilýär.

5. Käbir gönuburçly dekart koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

deňlemesi bolan üste ikiboşlykly (a=b bolanda aýlanma) giperboloid we a,b,c ulylyklara onuň ýarymoklary diýilýär.



60-njy çyzgy. Bir boşlukly giperboloid.

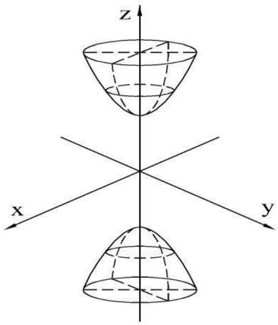
6. Paraboloidler. Käbir gönuburçly dekart koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{2pz}+\frac{y^2}{2qz}=1$$

ýa-da

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

deňlemesi bolan üste elliptik paraboloid diýilýär.

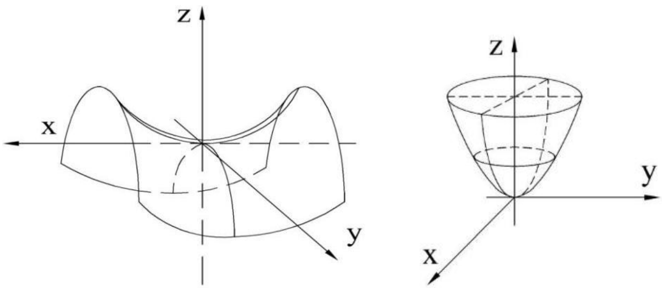


61-nji çyzgy

8. Käbir gönüburçly dekart koordinatalar sistemasynda

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

deňlemesi bolan üste giperboliki paraboloid diýilýär.



62-nji çyzgy

3. Tekizlik

1.Giňişlikde göniburçly dekart koordinatalar sistemanyny alalyň. Goý, π tekizlik we oňa perpendikulýar $\vec{n} = (A, B, C)$ wektor berlen boolsun A,B,C sanlaryň ähli̇si bir wagtda nol bolup bilmeýär, ýagny $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. $M_0(x_0\ , y_0, z_0)$ π tekizlikde berlen nokat . π tekizlikde erkin M(x,y,z) nokat alalyň.Onda

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ we $\vec{n}$ wektorlar ortogonal, diýmek

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \qquad (56)$$

Bu π tekizligiň deňlemesi.Koordinatalar görnüşinde

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (57)$$

ýa-da

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (58)$$

Görnüýde ýazmak bolar,

bu ýerde

$$D= -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

(58) deňlemä tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär, $\vec{n} = (A, B, C)$ wektora onuň normal wektory diýilýär.

(57) deňleme berlen $M_0(x_{0ş}, y_0, z_0)$ nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesi.

Islendik birinji tertipli derejesi

$$Ax+By+C+D=0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \qquad (59)$$

deňleme käbir tekizligiň deňlemesi bolýar. Hakykatdanda, bu deňlemäni kanagatlandyrýan $(x_0 \ , y_0, \check{z}_0)$ sanlary tapalyň:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \equiv 0 \qquad (60)$$

(59) deňlemeden (60)-njy tozdestwony aýryp alýarys.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

bu bolsa (57)-nji deňleme, ýagny $(x_0 \ , y_0, z_0)$ nokatdan geçýän we $\vec{n} = (A, B, C)$ wektora perpendikulýar tekizligiň deňlemesi.

Eger (58)-nji deňlemede *A≠0, B≠0, C≠0, D≠0* bolsa, onda oňa tekizligiň doly deňlemesi diýilýär.Bu halda ony

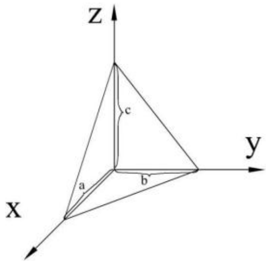
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (61)$$

görnüşde ýazyp bolýar, bu ýerde

$$a=-\frac{D}{A}\ ,b=-\frac{D}{B}\ ,c=-\frac{D}{C}$$

(61)-nji deňlemä tekizligiň kesimlerdäki deňlemesi diýilýär, çünki $a,b,\ c$ sanlar tekizligiň deňlemesinde Ox,Oy,Oz oklardan kesýän kesimleriniň ululyklary (63-nji çyzgy).

A,B,C,D sanlaryň hiç bolmanda biri nol bolsa, (58)-nji deňlemä tekizligiň doly däl deňlemesi diýilýär. Aşakdaky hallaryň bolmagy mümkin.



61-nji çyzgy

1) $D=0,\ A\neq 0, B\neq 0,\ C\neq 0$. Onda

$$Ax+By+C=0$$

deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän tekizligiň deňlemesi.

2) $D\neq 0\ \ A=0, B\neq 0, C\neq 0$

By +Cz +D=0, B≠0, C=0

Ox okuna parallel tekizliginiň deňlemesi.

1) Şonuň ýaly $D\neq 0$, $A\neq 0,$

$$Ax+D=0$$

Oz okuna parallel tekizligiň deňlemesi

2) $D\neq 0$, $A\neq 0, B=0,\ C\neq 0$

$$Ax+Cz+D=0$$

Oy okuna parallel tekizliginiň deňlemesi.

3) $A=0, B=0,\ C\neq 0, D\neq 0$, onda

$$Cz+D=0$$

bu Oxy tekizlige parallel tekizligiň deňlemesi.

6) Şonuň ýaly $A\neq 0, B=0, C=0,\ D\neq 0$

$$Ax+D=0$$

Oy tekizlige parallel tekizligiň deňlemesi.

7) $A=0,\ B\neq 0, C=0,\ D\neq 0$

$$By+D=0$$

Ox tekizlige parallel tekizligiň deňlemesi.

II. Iki tekizligiň arasyndaky burç.Iki tekizligiň parallelik we perpendikulýarlyk şerti

Goý, iki tekizlik

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \quad ,\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \qquad (\pi_1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D=0 \quad ,\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \qquad (\pi_2)$$

berlen bolsun.Bularyň kesişende emele getirýän çatyk ikigranly burçlarynyň İkısınden birini olaryň arasyndaky burçy hökmunde kabul edýärler. Goý, φ ol burçlaryň biri bolsun, onda

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

Çünki $\varphi = (\overrightarrow{n_1} \hat{\ } \overrightarrow{n_2})$.

Eger $\pi_1 \perp \pi_2$ bolsa,onda $\varphi = \frac{\pi}{2}$, diýmek

$$A_1A_2 + B_2B_2 + C_1C_2 = 0$$

iki tekizligiň perpendikulýarlyk şerti we eger $\pi_1 \parallel \pi_2$ bolsa, onda

$$\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2},$$

diýmek

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

iki tekizligiň parallelik şerti.

III. Berlen bir gönide ýatýan üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

Goý, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ we $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nokatlar dürli we bir gönide ýatmaýan bolsun.Bu üç nokadyň üstünden diňe bir tekizlik geçýär. Ol tekizlikde erkin $M(x, y, z)$ nokat alalyň.Onda

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$

wektorlar şol tekizlikde ýatan wektorlar, diýmek olaryň gatyşyk köpeltmek hasyly nola deň:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} = 0,$$

ýa-da

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (62)$$

Bu deňleme M_0, M_1, M_2 nokatlardan geçýän tekizligiň deňlemesi.

IV. Berlen nokatdan berlen tekizlige çenli uzaklyk (aralyk)

Goý,

$$Ax+By+C+D=0 \qquad (63)$$

π tekizlik we käbir $M\ (x_1\ , y_1, z_1)$ nokat berlen bolsun.M nokatdan π tekizlige geçirlen perpendikulýaryň uzynlygyny d bilen belgiläp, ony tapalyň.

Kesgitleme. M nokat we koordinatalar başlangyjy π tekizlikden dürli tarapda ýatýan bolsalar +d deň we M hem-de O nokatlar π tekizlikden bir tarapda ýatýan bolsalar –d deň bolan δ ululyga M nokadyň π tekizlikden gyşarmasy diýiýär.

Diýmek, $d = |\delta| \cdot$

Şonuň üçin hem M nokatdan π tekizlige çenli d aralygy bilmek üçin δ-ny tapmak ýeterlik.

δ -nyň tapylşy nokadyň göni çyzykdan gyşarmasynyň tapylyşy ýaly we

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{64}$$

bu formulada radikalyň öňünde D-iň alamatyna garşylykly alamat almaly.

V. Göni çyzyk giňişlikde

1. Göni çyzyga parallel ýa-da onda ýatan her bir noldan tapawutly wektora gönüniň ugrukdyryjy wektory diýilýändigini biz ozal belläpdik.

L göni onda ýatýan M_0 nokat we onuň ugrukdyryjy $\vec{q}$ wektory bilen doly kesgitlenýär.

deňleme L gönide erkin M(x,y,) nokat alalyň. Onda $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ wektor $\vec{q} = (m, n, p)$ wektora diňe M nokat L gönide ýatanda kollineardyr. Şonuň üçin hem

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \tag{65}$$

L gönüniň deňlemesi.Muňa L gönüniň kanonik deňlemesi diýiýär.Bu deňliklerde eger maýdalowjy nola deň bolsa, onda sanawjy hem nola deň diýip düşünilýär. Bu deňlemeden alýarys (proporsiýalary t deňläp):

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Bu deňlemeler sistemasyna gönininň parametrik deňlemeleri diýilýär, bu ýerde - ∞ < t < ∞.

Goý, göni $M_0(x_{0ş}, y_0, z_0)$ we $M_1(x_{1ş}, y_1, z_1)$ nokatlardan geçýän bolsun we M(x,y,z) onda ýatan erkin nokat bolsun. Onda $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ wektor gönininň ugrukdyryjy wektory bolýar, diýmek,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (67)$$

bu bolsa berlen iki nokadyň üstünden geçýän gönininň deňlemesi.

Iki tekizlik kesişende göni çyzyk emele gelýär. Şonuň üçin hem göni bu tekizlikleriň deňlemeleriniň sistemasy hökmünde berilýär:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

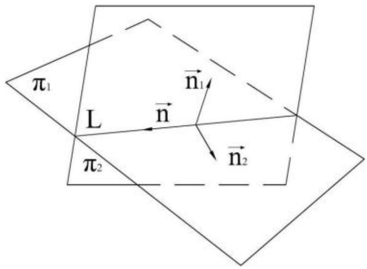
$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$
$$(A^2{}_1 + B^2{}_1 + C^2{}_1 \neq 0, A^2{}_2 + B^2{}_2 + C^2{}_2 \neq 0),$$

bu ýerde

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

kesgitleýjiler bir wagtda nola deň bolup bilmeýärler. (tersine bolsa $\pi_1 \| \pi_2$).

(68)-nji deňlemä gönüniň umumy deňlemesi hem diýilýär. Hakykatdan-da, bu deňlemeden gönüniň kanonik deňlemesini alyp bileris. Eger $\vec{n}_1 = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, onda $\vec{n}$ L gönüniň ugrukdyryjy wektory:



64-nji çyzgy

$$\vec{n} = \left[\vec{n}_1\,\vec{n}_2\right] = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Goý, (x_0, y_0, z_0) (68)-nji sistemanyň käbir çözülişi bolsun.

Onda

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

deňleme L gönüniň kanonik deňlemesidir.

2. Iki gönüniň parallelik we perpendikulýarlyk şerti

Goý, iki göni berlen bolsun:

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \qquad \vec{q}_1=(m_1,n_1,p_1) \quad , \qquad (41)$$

$$\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_1}{p_2} \qquad \vec{q}_2=(m_2,n_2,p_2) \ , \qquad (42)$$

Bularyň arasyndaky burçy φ bilen belgiläliň. Onda $\varphi=(\vec{q}_1\wedge\vec{q}_2)$ we

$$Cos\ \varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

Eger göniler parallel bolsalar $\vec{q}_1 \parallel \vec{q}_2$, diýmek

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

iki göniniň parallelik şerti.

Eger $L_1 \perp L_2$ bolsa, onda ($\vec{q}_1 \perp \vec{q}_2$), diýmek

$$m_1m_2+n_2n_2+p_1p_2=0,$$

Bu iki göniniň perpendikulýarlyk şerti.

3. Göni çyzyk we tekizlik.

Goý, L göni

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{q}=(m,n,p)$$

Deňleme bilen we π tekizlik

$$Ax+By+C+D=0$$

Deňlňmň bilen berlen bolsun.

$\varphi = (L^\wedge \pi)$ -belgi girizeliň.(63-nji çyzgy)

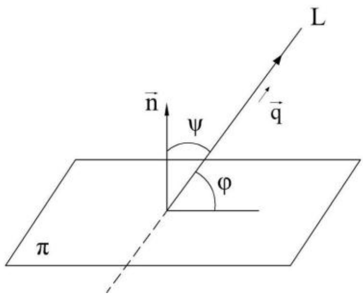
berlen bolsun.

Onda $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi = (\vec{n} \,^\wedge\, \vec{q})$ we

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + n^2}} \quad .$$

Diýmek,

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (69)$$



65-nji çyzgy

gönininiň we tekizligiň parallelik şerti we

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

gönininiň we tekizligiň perpendikulýarlyk şerti.

Mysallar.

1) Berlen $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň üstinden geçýän we π tekizlige

Ax+By+Cz+D=0

perpendikulýar L göniniň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi:Şerte görä L göni we $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ wektor parallel.Şonuň üçin hem $\overrightarrow{n}$ wektor L göniniň ugrukdyryjy wektory. Diýmek,

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

deňleme L göniniň deňlemesi.

2. Berlen Ax+By+C+D=0 tekizlik bilen L

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

göni çyzygyň kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi: Gözlenýän nokadyň koordinatalary

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$

sistemanyň Çözülişidir. Bu sistemanyň ikinji deňlemesinden alýarys.

$$x = m\lambda + x_0 \ , \ y = n\lambda + y_0 \ , z = p\lambda + z_0 \qquad (70)$$

x,y, z-iň bahalaryny π tekizligiň deňlemesine goýup alýarys:

A(mλ+ x_0)+B(nλ+ y_0)+C(pλ+ z_0)+D=0

Bu deňlemeden λ tapýarys :

$$\lambda = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} \quad .$$

Eger göni çyzyk we tekizlik kesişýän bolsa, onda (69)-njy formula görä Am+Bn+Cp≠0 λ bahasyny (70)-nji deňliklere goýup,

alýarys.

Göni çyzygyň we tekizligiň kesişme nokadyny tapmak üçin

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} m + x_0 \\ y &= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} n + y_0 \\ z &= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp} p + z_0 \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

formulany alarys.

3. $M(x_{0ş}, y_0, z_0)$ nokadyň üstünden geçýän we iki L_1 we L_2

$$L_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

göni çyzyklary kesýän L göni çyzygyň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi: $M(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Bu deňlemede m,n,p ululyklar näbelli.

L göni çyzyk bilen, L_1 göni çyzyk kesişýär, şonuň üçin hem olar käbir π tekizlikde ýatýarlar. Ýagny $\vec{q_1}=(m_1,n_1,p_1)$, $\vec{q}=(m,n,p)$ wektorlar π tekizlikde ýatýarlar. $\vec{r}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z-z_0)$

wektor hem π tekizlikde ýatýar. Diýmek $,\vec{q},\vec{q_1},\vec{r}$ komplanar wektorlar. Onda:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (72)$$

Şonuň ýaly L göni çyzyk bilen L_2 göni çyzygyň käbir π_1 tekizlikde ýatýandygyny ulanyp alýarys:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \qquad (73)$$

(72) we (73) deňlemeleri bileleikde çözüp, m:n:p gatnaşygy tapýarys.

Mysallar

1.Her bir nokadyndan $F_1(2,3,-5)$ we $F_2(2,-7,-5)$ nokatlara çenli uzaklyklarynyň kwadratlarynyň tapawudy B sana deň bolan üstüň deňlemesini düzmeli.

2. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10y\ , \\ x^2+2y+2z-19=0 \end{cases}$

töweregiň merkezini we radiusyny tapmaly.

3. $M_1(1,2,0), M_2(2,1,1)$ nokatlaryň üstünden geçýän we –x+y-1=0 tekizlige perpendikulýar tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

4. $M_1(1,2,0), M_2(2,1,1)$ we $M_3(3,0,1)$ nokatlardan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

5. -x+2y-+1=0 we y+3-1=0

tekizlikleriň arasyndaky burçy tapmaly.

6. 2x-y+-1=0 -4x+2y-2-1=0
tekizlikleriň aralygyny tapmaly.

7.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{we} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

gönileriň bir tekizlikde ýatýandygyny subut etmeli.

IV BAP

1. Çyzykly (wektorly) giňişlikler

I. Kesgitlemeler, mysallar

Biz wektorlar bilen çyzykly amallar (olary goşmak we sana köpeltmek) geçirilende, ýene wektor alynýandygyny berýändigini bilýäris. Şeýle amallar başga-da birnäçe zatlar bilen geçirilse, ýene-de şol zatlary berer. Muňa mysal edip, köpagzalary görkezmek bolýar. Çyzyky amallary haýsy zat üçin ulananymyza garamazdan, olaryň ählisi üçin umumy bolan bir häsiýet bardyr. Ol häsiýetleri wektorlar üçin hem-de matrisalar üçin biz ozal belläpdik.

Indi biz islendik bir R köplük alyp, şol köplügiň elementleri çyzykly amallary kesgitläliň. Bu köplügiň elementlerini wektorlaryň belgilenişi ýaly belgiläliň.

Goý, R köplük üçin aşakdaky iki aksioma ýerine ýetsin.

I. Goşmak aksiomasy.

Islendik $\vec{x} \in R,\ \vec{y} \in R$ elementler üçin goşmak amaly-olaryň jemi $\vec{x} + \vec{y}$ kesgitlenen we $\vec{x} + \vec{y} \in R.$

Goşmak amaly aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly.

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x};$

2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z});$

3. R köplükde nolluk element diýip atlandyrylýan $\vec{0}$ element bar bolup, onuň üçin $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ şert ýerine ýetýär;

4. Islendik $\vec{x} \in R$ üçin oňa garşylykly $-\vec{x}$ element bar bolup, onuň üçin:

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

II. Islendik $\vec{x} \in R$ üçin ony islendik hakyky λ sana köpeltmek $\lambda\vec{x}$ kesgitlenen we $\lambda\vec{x} \in R$.
Sana köpeltmek amaly aşakdaky şertleri kanagatlandyrmaly:

1. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x};$

2. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y};$

3. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x};$

4. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x},$

onda R köplüge çyzykly giňişlik diýilýär.

R çyzykly giňişlik üçin kesgitlenen çyzykly amallaryň häsiýetleriniň wektorlar üçin kesgitlenen amallaryň häsiýetleri bilen laýyk gelýändigini görýäris. Şonuň üçin hem çyzykly giňişligiň elementlerine wektorlar diýilýär we olar üçin wektor belgisi ulanylýar, olaryň özleri bolsa wektor giňişlikleri diýip hem atlandyrylýar.

Ỳokarda getirilen aksiomalara (wektorly) çyzykly giňişligiň aksiomalary diýilýär. Bu aksiomalardan gelip çykýan birnäçe netijeleri belläliň.

1. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0};$

2. $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0};$

3. $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x};$

4. Eger $\lambda\vec{x} = \mu\vec{x}$ *we* $\vec{x} \neq \vec{0}$ bolsa, onda $\lambda = \mu.$

Mysallar

1. Adaty giňişlikdäki ähli wektorlaryň köplügi, tekizlikdäki ähli wektorlaryň köplügi, bir göniniň üstünde ýatýan ähli wektorlaryň köplügi çyzykly giňişlikdirler.

2. Derejesi n-den uly bolmadyk ähli köpçlenleriň köplügi çyzykly giňişlikdir.

3. Derejesi n-e deň bolan ähli köpagzalaryň köplügi çyzykly giňişlik däldir, çünki iki n derejeli köpagzalaryň jeminiň ýene n derejeli köpçlen bolmazlygy mümkin. Meselem

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n; \qquad Q_n(x) = -a_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n.}$$

bolsa, onda $P_n(x) + Q_n(x)$ n-1 derejeli köpagzalar.

4.Ỳewkild giňişligi çyzykly giňişlikdir.

R çyzykly giňişlik üçin onuň elementleriniň (wektorlarynyň) çyzykly kombinasiýasy we çyzykly bagkanyşygy adaty wektorlaryňky ýaly kesgitlenýär. Eger R çyzykly giňişlikde n sany çyzykly baglanyşyksyz wektorlar sistemasy tapylyp, her bir n+1 wektor sistemasy çyzykly baglanyşykly bolsa, onda bu giňişlige n ölçegli giňişlik diýilýär. Eger R n ölçegli çyzykly giňişlik bolsa we $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ wektorlar çyzykly baglanyşyksyz bolsa, onda islendik $\vec{x} \in R$ üçin

$$\vec{x} = \vec{x}_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + \vec{x}_n\vec{e}_n$$

deňlik ýerine ýetirýän $x_1, x_2, ..., x_n$ sanlar bardyr. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$

wektorlar sistemasyna R çyzykly giňişligiň bazisi we $x_1, x_2, ..., x_n$ sanlara $\vec{x}$ wektoryň şu bazisdäki koordinatalary diýilýär.

Eger-de R çyzykly giňişlikde islendik sanda çyzykly baglanyşyksyz wektorlar sistemasyny tapyp bolsa, onda oňa tükeniksiz ölçegli giňişlik diýilýär.

II. Çyzykly giňişligiň bölek giňişligi

Eger R_1, R çyzykly giňişlikler bolsalar we $R_1 \in R$ bolsa, onda R_1 çyzykly giňişlige R çyzykly giňişligiň bölek giňişligi diýilýär.

Islendik bölek giňişligiň ölçegi onuň girýän çyzykly giňişliginiň ölçeginden uly däldir.

Birnäçe mysal getireliň.

Adaty üçölçegli giňişlikde ýatýan wektorlar köplügi, koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzyklaryň üstünde ýatýan wektorlar köplügi bölek giňişliklerdir.

Goý, P_n- derejesi n-den uly bolmadyk köpagzanyň köplügi bolsun. Onda P_n çyzykly giňişlikdir we P_k, $k \leq n$ bolanda P_n giňişligiň bölek giňişligidir.

Her bir çyzykly giňişlik özüniň bölek giňişligidir.

n näbellili birjynsly çyzykly deňlemeler sistemasyny alalyň.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Goý, onuň koeffisiýentlerinden düzülen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \;\; a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangy r-e deň bolsun. Onda bu sistemanyň çözüwler köplügi n ölçegli giňişligiň n-r ölçegli bölek giňişligini düzýär. Bu n-r ölçegli bölek giňişligiň bazisiniň tapylyşyny aşakdaky mysalda görkezeliň.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1\text{-}11\text{-}1 \\ 1\ 1\ 2\ \ 3 \\ 2\ 4\ 5\ 10 \\ 2\text{-}4\ 1\ \text{-}6 \end{pmatrix}$$

A matrisanyň rangyny tapalyň.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diýmek, r(A)=2. Bazis minory D çep ýokarky burçda ýerleşen. Şonuň üçin hem soňky iki deňlemäni taşlap alarys:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4, \\ x_1 + x_2 = -2x_3 - 3x. \end{cases}$$

Bu sistemadan bazis näbellileri x_1 *we* x_2 tapalyň.

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_3 - x_4; \qquad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \tag{2}$$

Sistemanyň islendik $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ çözülişini (2) formulada x_3 *we* x_4 azat näbellilere käbir anyk baha berip alyp bileris.

(1)-nji sistemanyň iki sany çyzykly baglanyşyksyz çözülişi bardyr. Ol ikisini (2)-nji formuladan ilki $x_3 = 1, \quad x_4 = 0$ we $x_3 = 0, \quad x_4 = 1$

goýup alarys:

$$\vec{X}_1 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \qquad \vec{X}_2 = (-1, -2, 0, -1)$$

(1)-nji sistemanyň islendik $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$- cözüm şu iki çözülişiň çyzykly kombinasiýasy arkaly aňladylyp bilner. Ỳagny

$$\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2$$

(1) sistemanyň umumy çözülişidir, bu ýerde c_1, c_2 erkin sanlardyr.

Hakykatdan-da, goý, $\vec{X}_3 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4)$ berlen sistemanyň käbir Çözülişi bolsun. Onda:

$$c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 = \vec{X}_3 \qquad (3)$$

deňligi kanagatlandyrýan c_1 we c_2 sanlar bardyr. wektorlary sana köpeltmek we goşmak düzgünini ulanyp, (3)-nji deňligi şeýle ýazmak bolar:

$$\left(-\frac{3}{2}\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2, -\frac{1}{2}c_1 - 2c_2,\ c_1,\ c_2\right) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \qquad (4)$$

bu ýerden $c_1 = \tilde{x}_3,\ c_2 = \tilde{x}_4$ bolanda, (4) deňligiň dogrudygy görünýär.

$\vec{X}_1$ *we* $\vec{X}_2$ wektorlaryň çyzykly baglanyşyksyzdygy hem (4) deňlikden görünýär, çünki $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0, \tilde{x}_4 = 0$ bolanda $c_1 = 0,\ c_2 = 0.$

Diýmek, (1) sistemanyň çözüwler köplügi iki ölçegli çyzykly giňişlik emele getirýär. $\vec{X}_1$ *we* $\vec{X}_2$ bu giňişligiň bazis wektorlary bolup, ol giňişlik dörtölçegli çyzykly giňişligiň bölek giňişligidir.

2. Çyzykly özgertmeler

Goý, V hem-de W çyzykly giňişlikler bolsun. V giňişligiň her bir $\vec{x}$ wektoryna W giňişligiň käbir $\vec{y} = \overline{A}\vec{x}$ wektoryny degişli edýän $\overline{A}$ kanunyna ýa-da düzgünine V giňişligi W giňişlige özgertme diýilýär. Eger-de $\forall(\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V)$ *we* $\forall\lambda$ san üçin:

1. $\overline{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \overline{A}\vec{x}_1 + \overline{A}\vec{x}_2;$
2. $\overline{A}(\lambda\vec{x}_1) = \lambda\overline{A}\vec{x}_1.$

şert ýerine ýetse, onda $\overline{A}$ özgertmä çyzykly özgertme diýilýär.

Goý, V n ölçegli we W m ölçegli çyzykly giňişlikler bolsun. V giňişlikde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n$ bazis alalyň. Onda $\forall\vec{x} \in V$ üçin:

$$\vec{x} = \vec{x}_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + \vec{x}_n\vec{e}_n$$

$\overline{A}$ özgertmäniň çyzykly özgertme bolany üçin:

$$\overline{A}\vec{x} = \overline{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n) = x_1\overline{A}\vec{e}_1 + x_2\overline{A}\vec{e}_2 + ... + x_n\overline{A}\vec{e}_n$$

bu ýerde $\overline{A}e_i \in W(i = 1,2,...,n)$. Eger W giňişlikde $\vec{q}_1, \vec{q}_2, ..., \vec{q}_m$ bazis alnan bolsa, onda:

$$\overline{A}\vec{e}_i = a_{1i}\vec{q}_1 + a_{2i}\vec{q}_2 + ... + a_{mi}\vec{q}_m, \qquad (i = 1,2,...,n)$$

Diýmek,

$$\overline{A}\vec{x} = x_1(a_{11}\vec{q}_1 + a_{21}\vec{q}_2 + ... + a_{m1}\vec{q}_m) + x_2(a_{12}\vec{q}_1 + a_{22}\vec{q}_2 + ... + a_{m2}\vec{q}_m) +$$
$$+ ... + x_n(a_{1n}\vec{q}_1 + a_{2n}\vec{q}_2 + ... + a_{mn}\vec{q}_m) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)\vec{q}_1 +$$
$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)\vec{q}_2 + ... + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)\vec{q}_m.$$

Eger $\overline{A}\vec{x} = \vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ bolsa, onda

$$\overline{A}\vec{x} = y_1\vec{q}_1 + \vec{y}_2\vec{q}_2 + ... + \vec{y}_m\vec{q}_m.$$

Wektoryň bazis boýunça dargadylyşynyň ýeke-täkliginden alarys:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Şeýlelik bilen, biz çyzykly özgertmede özgerdilip alnan wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin formula aldyk. Eger:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

belgileme girizsek, onda matrisalary köpeltmak düzgünini ulanyp, (1) formulany şeýle ýazmak bolar:

$$Y = AX .$$

A matrisa $\overline{A}$ özgertmäniň alnan $\vec{e}_i, \vec{q}_j$ bazisdäki matrisasy diýilýär. Bu matrisanyň ı sütüni $\overline{A}\vec{e}_i$ wektoryň koordinatasydyr. A matrisa diňe özgertmäniň özüne bagly bolman, eýsem giňişliklerde alnan bazislere hem baglydyr. Diýmek saýlanan $\vec{e}_i, \vec{q}_j$ bazislerde her bir V giňişligiň W giňişlige çyzykly özgertmesine mxn ölçegli matrisa degişlidir.

Şeýle hem, eger V, W giňişliklerde bazis berlen bolsa, onda her bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa käbir $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň matrisasy bolup hyzmat edýär.

Eger-de $\overline{C}$ çyzykly özgertme $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň we soňra $\overline{B}$ çyzykly özgertmäniň netijesi bolsa, onda $\overline{C}$ özgertmä $\overline{A}$ hem-de $\overline{B}$ özgertmeleriň köpeltmek hasyly diýilýär we ol

$$\overline{C} = \overline{B} \cdot \overline{A}$$

görnüşde belgilenýär.

Eger-de $\overline{A}$ özgertmäniň matrisasy A bolsa we $\overline{B}$ özgertmäniň matrisasy B bolsa, onda $\overline{B} \cdot \overline{A}$ özgertmäniň matrisasy $B \cdot A$ matrisadyr.

Diýmek, eger $Y = AX \quad Z = BY$

bolsa, onda: $Z = BAX$

Birnäçe mysallara seredeliň.

1. Oxy tekizlikde hemme wektory koordinatalarynyň başlangyjynyň /0 nokadyň/ daşynda φ burça aýlamak ($\overline{A}$) çyzykly özgertmedir.

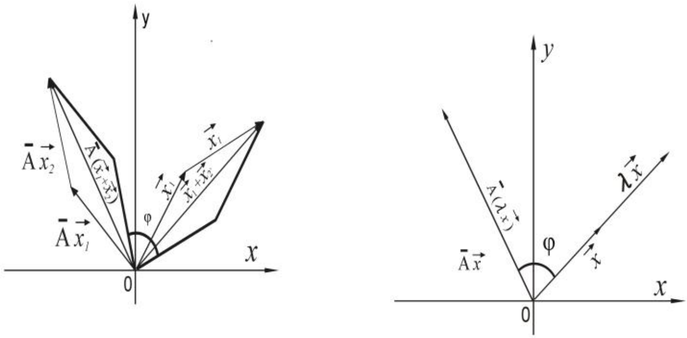
$\overline{A}$ özgertmäniň matrisasyny tapmaly.

Çözülişi:

Ilki biz $\forall(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$ wektor üçin:

$$\overline{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\overline{A}\vec{x}_1+\overline{A}\vec{x}_2$$

deňligiň ýerine ýetýändigini subut edeliň. Iki wektoryň jemi olarda gurlan parallelogrmyň diagonalyna deňdir. Aýlanma wagtynda her bir parallelogram bir bitin ýaly aýlanýar we şonuň üçin onuň diagonaly hem üýtgemeýär.(1 surata seret).



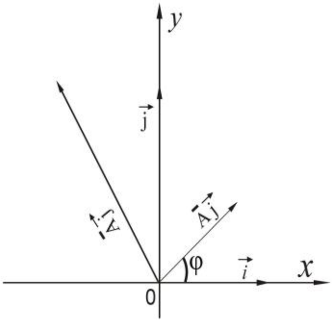
1-nji surat

Aýlanma wagtynda wektoryň uzynlygy üýtgemeýär. Diýmek wektory ilki λ sana köpeldip, soňra φ burça aýlap alnan wektor bilen ony ilki φ burça aýlap, soňra λ sana köpeldilip alnan wektor deňdir. Ỳagny:

$$\overline{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\overline{A}\vec{x}.$$

Biz $\overline{A}$ özgertmäniň çyzykly özgertmedigini subut etdik. Indi bu özgertmäniň matrisasyny tapalyň.

Munuň üçin $\vec{i}$ *we* $\vec{j}$ wektorlary φ burça aýlalyň. Netijede alnan $\overline{A}\vec{i}$ *we* $\overline{A}\vec{j}$ wektorlary $\vec{i}, \vec{j}$ bazislerde dagydalyň.



2-nji surat

$\overline{A}\vec{i}$ wektor birlik wektordyr, 2-nji suratdan tapýarys:

$$\overline{A}\vec{i} = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Şunuň ýaly-da A_j wektor üçin tapýarys:

$$\overline{A}\vec{j} = (-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Diýmek,

$$\overline{A}\vec{i} = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$$
$$\overline{A}\vec{j} = (-\sin\varphi)\vec{i} + (\cos\varphi)\vec{j}.$$

Goý, $\vec{x} = (x_1, y_1)$ bolsun. Onda:

$$\overline{A}\vec{x} = x_1\overline{A}\vec{i} + y_1\overline{A}\vec{j} = x_1[(\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}\,] + y_1[-(\sin\varphi)\vec{i} +$$
$$+(\cos\varphi)\vec{j}\,] = (x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)\vec{i} + (x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)\vec{j}\,.$$

Eger $\overline{A}\vec{x} = (x_1', y_1')$ bolsa, onda:

$$x_1' = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi$$
$$y_1' = y_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi$$

we

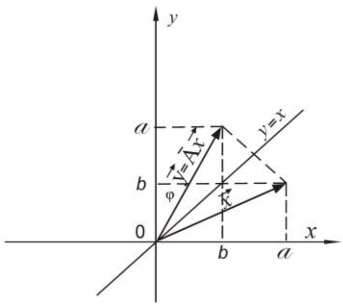
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisa berlen. Bu matrisanyň Oxy tekizlikde nähili çyzykly özgertme kesgitleýändigini tapmaly.

Çözülişi: Goý, $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j}$ Oxy tekizlikde ýatýan islendik wektor bolsun. Bize $\overline{A}$ özgertmäni tapmak üçin, $\vec{y} = \overline{A}\vec{x}$ wektory tapmak gerek. (3) formula görä

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}; \qquad b\vec{i} + a\vec{j} = \vec{y}.$$

Diýmek, $\overline{A}$ özgertme her bir wektoryň koordinatalarynyň ornuny çalşyrýar.



3-nji surat

$\vec{y}$ wektor $\vec{x}$ wektoryň $y = x$ göni çyzyga görä zerkal şekili bolýar. Şeýlelik bilen A matrisa $y = x$ göni çyzyga görä zerkal şekillendirmäniň matrisasy bolup hyzmat edýär.

3. Goý, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ giňişlikde berkidilen bir wektor bolsun. Her bir wektora $\vec{y} = [\vec{a}\,\vec{x}]$ wektory degişli edeliň. Seýle gurlan degişliligiň çyzykly $\overline{A}$ özgertmedigini subut etmeli we onuň matrisasyny tapmaly.

Çözülişi: Şerte görä Iki wektoryň wektor köpeltmek hasylyň häsiýetlerine görä:

$$\overline{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{a}(\vec{x} + \vec{y})] = [\vec{a}\,\vec{x}] + [\vec{a}\,\vec{y}] = \overline{A}\vec{x} + \overline{A}\vec{y}$$
$$\overline{A}(\lambda\vec{x}) = [\vec{a} \cdot (\lambda\vec{x})] = \lambda[\vec{a}\,\vec{x}] = \lambda\overline{A}\vec{x}.$$

Bu deňlikler $\overline{A}$ özgertmäniň çyzykly özgertmedigini görkezýär. $\overline{A}$ özgertmäniň matrisasyny tapmak üçin $\overline{A}\vec{i}, \overline{A}\vec{j}, \overline{A}\vec{k}$ wektorlary hasaplalyň:

$$\overline{A\vec{i}} = [\vec{a}\,\vec{i}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + a_3\vec{j} + a_2\vec{k}$$

$$\overline{A\vec{j}} = [\vec{a}\,\vec{j}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + a_1\vec{k}$$

$$\overline{A\vec{k}} = [\vec{a}\,\vec{k}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2\vec{i} - a_1\vec{j} + 0\cdot\vec{k}.$$

Bu ýerden (2) formula görä, $\overline{A\vec{i}}, \overline{A\vec{j}}, \overline{A\vec{k}}$ wektorlaryň koordinatalaryny sütün boýunça ýerleşdirip, A matrisany alarys:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Iki çyzykly özgertme berlen:

$$Y = AX \quad , \qquad Z = BY\,.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

z_1, z_2, z_3 ululyklary x_1, x_2, x_3 ullyklaryň üsti bilen aňladýan çyzykly özgertmäni tapmaly.

Çözülişi: (4) formula görä

$$Z = BAX.$$

Matrisalary köpeltmek düzgünini ulanyp tapýarys.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 11 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Diýmek,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & 1 \\ 11 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 11x_1 - x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

ýa-da

$$z_1 = 7x_1 + 5x_2 + 7x_3$$
$$z_2 = -2x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$z_3 11x_1 - x_2 + 7x_3.$$

3. Çyzykly özgertmäniň hususy bahalary we hususy wektorlary

Eger $\vec{x} \neq \vec{0}$ wektor $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň täsiri netijesinde käbir λ sana köpeldilse:

$$\overline{A}\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

onda $\vec{x}$ wektora $\overline{A}$ özgertmäniň hususy λ bahasyna degişli hususy wektory diýilýär. Dürli hususy bahalara degişli hususy wektorlar çyzykly baglanyşyksyzdyr, ýagny:

$$\overline{A}\vec{x}_k = \lambda_k \vec{x}_k \qquad (k = 1,2,...,n)$$

bolsa we $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ onda $\vec{x}_1, \vec{x}_2,..., \vec{x}_n$ wektorlar çyzykly baglanyşyksyzdyrlar.

Goý, V n ölçegli giňişlik, $\vec{x} \in V$ $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň hususy λ bahasyna degişli hususy wektory we V giňişlikde bazis berlen bolsun. $\overline{A}\vec{x} \in V$ bolýandygyna görä, $\overline{A}$ özgertmäniň A matrisasy nxn kwadrat matrisadyr. Goý, $\vec{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(1)-nji deňlik esasynda şeýle:

$$AX = \lambda X \tag{1'}$$

λX (1′) deňligiň çep bölegine geçirip alarys:

$$(A - \lambda E)X = 0 \tag{2}$$

Bu ýerde E birlik matrisa. (2)-nji deňleme-birjynsly deňlemeler sistemasy. Bu sistemanyň noldan tapawutly Çözülişiniň bolmagy üçin, onuň kesgitleýjisiniň nola deň bolmagy zerur hem ýeterlikdir:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

ýa-da

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

(3) deňligiň çep bölegi λ görä n derejeli köpagzadyr. Bu köpagza V giňişlikde saýlanan bazise bagly däldir we oňa $\overline{A}$ özgertmäniň (A matrisanyň) häsiýetlendiriji köpagza diýilýär. $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň her bir hususy bahasy onuň häsiýetlendiriji köpagzanyň köküdir we tersine, $\overline{A}$ özgertmäniň häsiýetlendiriji köpagzanyň her bir köki onuň hususy bahasydyr. (3) deňlemäniň köklerine A matrisanyň hususy ýa-da häsiýetlendiriji bahasy diýilýär.

Şeýlelik bilen, $\overline{A}$ çyzykly özgertmäniň hususy bahalaryny tapmak üçin, oňa degişli A matrisanyň hususy bahalaryny, ýagny (3) deňlemäniň köklerini tapmaly. Soňra ol bahalary (2) sistema goýup, ol sistemanyň noldan tapawutly çözüwlerini $X_1, X_2, ..., X_m$ $(m < n)$ tapýarys:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix}. \qquad (i = 1,2,...,m),$$

bu ýerden hususy wektorlary $\vec{x} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, ..., x_n^{(i)})$ $(i = 1,2,...,m)$ alýarys.

Mysallara seredeliň.

1. Matrisasy

$$A=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

deň bolan $\overline{A}$ özgertmäniň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapmaly.

Çözülişi: $\overline{A}$ özgertmäniň häsiýetlendiriji köpagzany düzeliň:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -3 & 2\\ 6 & -4-\lambda & 4\\ 4 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$$

häsiýetlendiriji deňlemäni çözüp tapýarys: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3.$

Indi, hususy wektorlary tapalyň. Onuň üçin (2) deňlemede λ onuň bahalary bilen çalşyryp, onuň noldan tapawutly çozüwlerini tapmaly.

1) $\lambda=\lambda_i=1$

$$\begin{cases}4x_1-3x_2+2x_3=0,\\ 6x_1-5x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-4x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}6 & -5\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-4$$

bolýandygy üçin, birinji deňlemäni taşlap, x_3 azat näbelli hasap edip alýarys (biz üçinji deňlemäni 4-e gysgaltdyk).

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 = -4x_3, \\ x_1 - x_2 = x_3. \end{cases}$$

Ikinji deňlemäni -5-e köpeldip, soňra birinji deňleme bilen goşup alýarys: $x_1 = x_3$.

Indi, ikinji deňlemeden tapýarys: $x_2 = 2x_3$

$x_3 = \alpha$ hasap etsek, onda:

$$X_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diýmek, $\lambda = 1$ sana degişli hususy wektorlar $\vec{x} = \alpha(1,2,1)$.

2. Indi $\lambda = \lambda_2 = 2$. Onda:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu ýerde:

$$\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

bolany üçin, sistemanyň birinji deňlemesini taşlap, x_1 azat näbelli diýip hasap edip alýarys:

$$\begin{cases} -6x_2 + 4x_3 = -6x_1, \\ -4x_2 + 3x_3 = -4x_1. \end{cases}$$

Birinji deňlemäni -3-e köpeldip we ikinji deňlemäni 4-e köpeldip, soňra ikisini goşup alýarys:

$$2x_2 = 2x_1, \qquad x_2 = x_1.$$

Diýmek, $x_3 = 0$. $x_1 = \beta$ (β islendik san) hasap etsek, onda:

$$X_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 2$ hususy baha degişli hususy wektorlar $\vec{x} = \beta(1,1,0)$.

3. $\lambda = \lambda_3 = 3$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu ýerde:

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 4$$

bolany üçin, birinji deňlemäni taşlap, x_3 azat näbelli hasap etmek bolar:

$$\begin{cases} 6x_1 - 7x_2 = -4x_3, \\ 4x_1 - 4x_2 = -4x_3. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp tapýarys:

$$x_2 = x_3, \quad x_1 = \frac{1}{2} x_3$$

$x_3 = \gamma$ (γ-islendik san)

$$X_3 = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diýmek, $\vec{x} = \gamma\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Mysalyň jogabyny aşakdaky tablisa boýunça ýerleşdireliň:

λ hususy baha	$\vec{x}$ degişli hususy wektor
1	$\alpha(1, 2, 1)$
2	$\beta(1, 1, 0)$
3	$\gamma(\frac{1}{2}, 1,1)$

2.Goý, $\overline{A}$ özgertme-tekizligi φ burça aýlamak bolsun. Bu özgertmäniň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapmaly.

Çözülişi: Biz ozal (§2) $\overline{A}$ özgertmäniň matrisasyny tapypdyk. Ol

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

häsiýetlendiriji köpagza:

$$\begin{vmatrix}\cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(2\cos\varphi)\lambda+1.$$

Häsiýetlendiriji deňlemäniň

$$\lambda^2-(2\cos\varphi)\lambda+1=0$$

kökleri $\lambda_{1,2}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi.$ Eger $\varphi\neq k\Pi$ (k=1,2,…) bolsa, onda bu deňlemäniň hakyky köki ýok. Aşakdaky iki hala seredeliň:

a) Eger $\varphi=2k\Pi$ bolsa, $\lambda_{1,2=1.}$ Bu halda $\overline{A}$ özgertmä toždestwolaýyn özgertme diýilýär.

$$\overline{A}\vec{x}=\vec{x}$$

her bir wektor-hususy wektor (A=E-birlik matrisa).

b) Eger $\varphi=(2k+1)\Pi,$ $\lambda_{1,2}=-1.$bolsa, onda bu halda $\overline{A}$ özgertme merkezi simmetrik özgertmedir. Tekizlikde ýatýan her bir wektor bu özgertmäniň $\lambda=-1$ hususy bahasyna degişli hususy wektorydyr.

Özbaşdak çözmek üçin mysallar.

1. Matrisasy $A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}$

bolan $\overline{A}$ özgertmäniň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapmaly.

Jogap:

λ_1=6 degişli hususy wektor $\vec{x}=\alpha(2,5)$

$\lambda_2=-1$ degişli hususy wektor $\vec{x}=\beta(1,-1)$, α,β islendik sanlar.

2. Matrisasy

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -3 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$$

bolan $\overline{A}$ hem-de $\overline{B}$ özgertmeleriň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapmaly.

Jogap: $\overline{B}$ üçin: $\overline{A}$ üçin:

$\lambda_1=2.\quad \vec{x}=\alpha(1,-1)$ $\qquad\lambda_1=-1.\quad \vec{x}=\alpha(3,1)$

$\lambda_2=3.\quad \vec{x}=\beta(1,-2)$ $\qquad\lambda_2=7.\quad \vec{x}=\beta(1,3)$

3. Matrisasy: $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$

bolan $\overline{A}$ hem-de $\overline{B}$ özgertmeleriň hususy bahalaryny we hususy wektorlaryny tapmaly.

Jogap:

$\overline{A}$ üçin: $\qquad\overline{B}$ üçin:

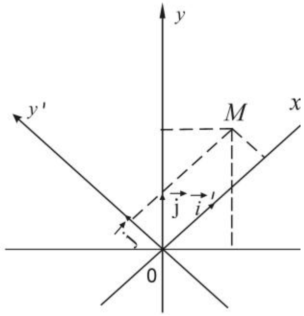
$\lambda_1=3.\quad \vec{x}=\alpha(1,2,2)$ $\qquad\lambda_1=0.\quad \vec{x}=\alpha(1,2,2)$

$\lambda_2=-1.\quad \vec{x}=\beta(1,2,1)$ $\qquad\lambda_2=1.\quad \vec{x}=\beta(1,1,1)$

($\overline{A}$ we $\overline{B}$ matrisalaryň häsiýetlendiriji deňlemeleriniň köki kratny).

4. Koordinatalar sistemasyny özgerdiş

Tekizlide göniburçly dekart koordinatalar sistemasy berlen. Ol sistemany Oxy bilen belgiläliň. Goý, Oxy sistemasyna 0 nokadyň daşynda käbir φ burça sagat diliniň hereketiniň tersine aýlanan bolsun (ýagny tekizlik 0 nokadyň daşynda φ burça aýlanýar). Täze alnan sistemany $Ox'y'$ bilen belgiläliň. 0 nokatdan tapawutly islendik M nokat alalyň. Onuň Oxy sistema görä koordinatalaryny (x, y) we $Ox'y'$ sistema görä koordinatalaryny (x', y') bilen belgiläliň. $\vec{i}$, $\vec{j}$ Oxy sistemasynyň ortlary we $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ $Ox'y'$ sistemanyň ortlary diýip hasap edeliň.



4-nji surat

Goý, $\overline{A}$ tekizligiň φ burça aýlanmakdan ybarat özgertmesi bolsun. Bu özgertmäniň çyzykly özgertmedigini we onuň matrisasynyň

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

bolýandygyny biz ýokarda subut edipdik (§2, 1 mysal):

$$\vec{i}\,' = \overline{A}\vec{i} = (\cos\varphi, \sin\varphi), \qquad \vec{j}\,' = \overline{A}\vec{j} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad \overrightarrow{OM} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,'.$$

Diýmek,

$$x\vec{i} + y\vec{j} = x'(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) + y'(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi) =$$
$$= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\vec{i} + (x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)\vec{j}.$$

Şeýlelik bilen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

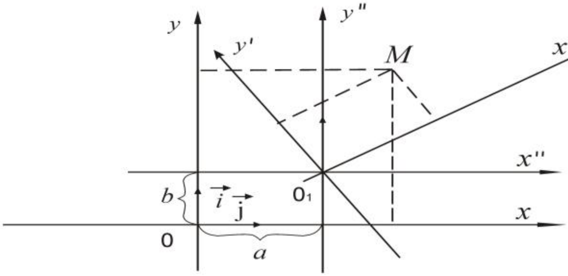
Goý,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Onda (1) formulany şeýle ýazmak bolar:

X=AY. (2)

Indi, koordinatalar sistemasynyň başlangyjy $O_1(a,b)$ nokada geçirilen we oklar ugruny üýtgetmedik bolsun:



5-nji surat

Bu halda:

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

$Ox''y''$ sistemasynyň käbir φ burça aýlasak, onda (x'', y'') we (x', y') (1)-nji formula boýunça baglanyşykda bolar we:

$$\left.\begin{array}{l} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b \end{array}\right\} \text{ ýa-da } \quad Y = AX + B, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

formulany alarys.

(4)-nji formula tekizlikde koordinatalar sistemasyny özgertmegiň umumy formulasy diýilýär.

Goý, R^n –nölçegli Ỳewklid giňişligi we $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ onda berlen bazis bolsun. Bu bazisiň kesgitleýän koordinatalar sistemasyny $(x_1, x_2, ..., x_n)$ bilen belgiläliň. $\overline{A}$ çyzykly özgertme koordinatalar başlangyjyny üýtgetmän, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ bazisi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ bazise geçirýän bolsun. $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ bazisiň kesgitleýän koordinatalar sistemasyny $(y_1, y_2, ..., y_n)$ bilen belgiläliň.

$M \in R^n$ islendik nokat bolup, 0 nokat bilen gabat gelmeýär, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ köne sistema görä we $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sistema görä onuň koordinatalary bolsun.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa $\overline{A}$ özgertmäniň matrisasy bolsun.

Onda:

$$X = AY, \qquad (3)$$

bu ýerde

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}; \quad \overline{A}\vec{e}_i = a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_n.$$

Eger indi $(y_1, y_2,..., y_n)$ koordinatalar sistemasy $\vec{e}_1', \vec{e}_2',..., \vec{e}_n'$ wektorlary üýtgetmän onuň başlangyjyny başga nokada geçirse, onda:

$$X = AY + B, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

(3) we (4) formulalara giňişlikde koordinatalary özgertme formulasy diýilýär.

5. Simmetrik çyzykly özgertmeler

R^n-Ỳewklid giňişligi we käbir $\overline{A}$ çyzykly özgertme berlen. Goý, $\vec{x} \in R^n$ we $\overline{A}\vec{x} \in R^n$ bolsun, ýagny $\overline{A}$ R^n giňşligi ýene R^n giňişlige özgerdýär.

Goý, $\vec{x}' \in \overline{A}\vec{x}, \quad \vec{y}' = \overline{A}\vec{y}.$

Eger-de: $(\vec{x}, \vec{y}') = (\vec{y}, \vec{x}')$

ýa-da: $(\vec{x}, \overline{A}\vec{y}) = (\vec{y}, \overline{A}\vec{x})$

deňlik ýerine ýetse, onda $\overline{A}$ çyzykly özgertmä simmetrik çyzykly özgertme diýilýär.

Simmetriki çyzykly özgertmeler algebrada, geometriýada we mehanikada giňden ulanylýar.

R^n giňişlikde ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ bazis berlen we $\overline{A}$ özgertmäniň bu bazisdäki matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bolsun. Onda $a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall (1 \le i, j \le n)$.

Goý, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *we* $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Onda

$$Y = AX, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Eger

$$\overline{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}, \quad \overline{A}\vec{y} = \mu \vec{y}, \quad \lambda \ne \mu$$

bolsa, onda $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Simmetrik özgertmäniň (matrisanyň) dürli hususy bahalaryna degişli hususy wektorlary ortogonaldyr.

A simmetrik matrisa üçin şeýle B matrisa bolup, ony

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

görnüşe getirýär. A matrisany diagonal görnüşe özgerdýän matrisa ýeke-täk däldir. Emma (3) deňligi kanagatlandyrýan ortogonal matrisa ýeke-täkdir.

Goý,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

we $\overline{B}$ oňa degişli özgertme bolsun. Onda $\overline{B}\vec{e}_i = \vec{e}_i\,'$ $(i = 1,2,...,n)$ bazisde $\overline{A}$ özgertmäniň matrisasy (3) matrisadyr.

B matrisany tapalyň. (3) deňligi çepden B köpeldip alarys:

$$AB = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

ýa-da

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk} = \lambda_k b_{ik}. \tag{6}$$

(4) matrisanyň k-njy sütünini kesgitlemek üçin n deňleme aldyk. Bu deňlemeleriň ähli agzalaryny çep tarapa geçirip alarys:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_k)b_{1k}+a_{12}b_{2k}+...+a_{1n}b_{nk}=0, \\ a_{21}b_{1k}+(a_{22}-\lambda_k)b_{2k}+...+a_{2n}b_{nk}=0, \\ .... \\ a_{n1}b_{1k}+a_{n2}b_{2k}+...+(a_{nn}-\lambda_k)b_{nk}=0. \end{cases} \tag{7}$$

Bu sistemanyň noldan tapawutly Çözülişi bolmagy üçin, onuň kesgitleýjisiniň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Bu bolsa A matrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesi.

Simmetrik matrisanyň häsiýetlendiriji köpagzanyň ähli kökleri hakyky sandyr. Şeýlelik bilen, A matrisany diagonal görnüşe getirmek üçin onuň hususy bahalaryny tapmak ýeterlik. B matrisany tapmak üçin (7) sistemany çözmeli.

Aşakdaky hallaryň bolmagy mümkindir.

1.(8) deňlemäniň ähli kökleri dürli we olar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. (7) sistemada $\lambda = \lambda_1$ goýup we ony çözüp alýarys.

$$V_1 = \alpha \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \text{ -islendik san.}$$

Wektor $\vec{b}_1 = \alpha(d_1, d_2, ..., d_m)$ A matrisanyň λ_1 hususy bahasyna degişli hususy wektory. Bu wektory normirläliň, ýagny ony $\frac{1}{|\vec{b}_1|}$-a köpeldeliň:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{d_1}{|\vec{b}_1|}, \frac{d_2}{|\vec{b}_1|}, ..., \frac{d_n}{|\vec{b}_1|} \right).$$

bu wektoryň koordinatalary B matrisanyň birinji sütünidir.

Soňra sistemada $\lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3, ..., \lambda = \lambda_n$ goýup, $\vec{e}_1'$ wektory tapyşymyz ýaly $\vec{e}_2', \vec{e}_3', ..., \vec{e}_n'$ wektorlary taparys. Bu wektorlar A matrisanyň dürli hususy bahalaryna degişli hususy wektorlarydyr. Şonuň üçin hem olar ortogonaldyrlar.

Diýmek, $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ bazis ortonormal bazis we B matrisa-ortogonal ($\overline{B}$ özgertme-ortogonal özgertme).

2. (9) deňlemäniň kratny köki bar.
Goý,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = \nu$$

Bu halda $A - \nu E$ matrisanyň rangy n - m deň bolmaly. Şonuň üçin hem (7) sistema n näbellili n - m deňlemeler sistemasyna geler. Onuň haýsy-da bolsa bir Çözülişini alalyň.

$$U_1 = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}.$$

$\vec{b}_1 = \alpha(u_1, u_2, ..., u_n)$ wektory ýokarda edişimiz ýaly normirläliň:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|} = \left(\frac{u_1}{|\vec{b}_1|}, \frac{u_2}{|\vec{b}_1|}, ..., \frac{u_n}{|\vec{b}_1|} \right).$$

Biz $\lambda = \nu$ köke degişli diňe bir wektory tapdyk. Ỳene $m-1$ wektor tapmaly.

Şerte görä $\vec{e}_2'$ wektor $\vec{e}_1'$ wektora ortogonal bolmaly. $n-m$ deňlemä

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2') = 0$$

deňlemäni goşup, biz $\vec{e}_2'$ wektoryň koordinatalaryny tapmak üçin $n-m+1$ deňleme alarys. Bu sistemanyň käbir Çözülişini alyp, ondan $\vec{e}_1'$ wektory alyşymyz ýaly $\vec{e}_2'$ wektory alarys.

Şerte görä $\vec{e}_3'$ wektor $\vec{e}_1'$ hem-de $\vec{e}_2'$ wektorlara ortogonal bolmaly. Biz $n-m$ deňlemä ýene iki deňleme:

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_3') = 0, \quad (\vec{e}_2', \vec{e}_3') = 0$$

berkidip, $\vec{e}_3'$ wektory kesgitlemek üçin $n-m+2$ deňleme alarys we ş.m. Biz bu prosesi tä m wektor alýançak dowam etdirmeli. Şeýlelik bilen, kratnosty m-e deň bolan köke m sany ortonormal wektor degişli bolýar.

Mysallar

1. $\overline{A}$ simmetrik özgertme berlen. Bu özgertmäniň $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisdäki matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ýagny $Y = AX$.

Täze ortonormirlenen bazise geçip, A matrisany diagonal görnüşe getirmeli.

Çözülişi: Häsiýetlendiriji deňleme düzeliň:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Bu deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$ Diýmek,

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Täze bazisi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilen belgiläliň we ony tapalyň. Onuň üçin biz B matrisany tapalyň. B matrisany tapmak üçin biz (7) sistemada $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$ bahalary goýup çözmeli.

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)b_{1k} + b_{2k} + 3b_{3k} = 0, \\ b_{1k} + (5-\lambda_k)b_{2k} + b_{3k} = 0, \\ 3b_{1k} + b_{2k} + (1-\lambda_k)b_{3k} = 0. \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2$. Onda

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} + 3b_{31} = 0, \\ b_{11} + 7b_{21} + b_{31} = 0, \\ 3b_{11} + b_{21} + b_{31} = 0. \end{cases}$$

Birinji deňlemäni taşlap, b_{21} näbellini deňlemäniň çep bölegine geçirip alýarys:

$$\begin{cases} b_{11} + b_{31} = -7b_{21}, \\ 3b_{11} + 3b_{31} = -b_{21}. \end{cases}$$

$b_{21} = 0,\ \ b_{11} = -b_{31}$, diýmek $\vec{b}_1 = \alpha(1,\ -1,\ 0)$.

$\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}$ formulasyny ulanyp tapýarys: $\vec{e}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

$\lambda_2 = 3$ bolanda alarys:

$$\begin{cases} -2b_{12} + b_{22} + 3b_{32} = 0, \\ b_{12} + 2b_{22} + b_{32} = 0, \\ 3b_{12} + b_{22} - 2b_{32} = 0. \end{cases}$$

Sistemanyň birinji deňlemesini taşlap (islendik bir deňlemesini taşlap bileris) we b_{32} näbellini sistemanyň çep bölegine geçirip alarys:

$$\begin{cases} b_{12}+2b_{22}=-b_{32}, \\ 3b_{12}+b_{22}=2b_{32}. \end{cases}$$

Bu ýerden $\vec{b}_2=\beta(1,\ -1,\ \ 1)$. Diýmek, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$\lambda_3=6$ bolanda, sistemany ýokardaky çözüşimiz ýaly çözüp taparys: $\vec{b}_3=\gamma(1,\ 2,\ 1)$. Diýmek, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Şeýlelik bilen, biz $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ortonormirlenen bazisi we B matrisany tapdyk:

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Goý, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bazisde $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ *we* $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$.

Onda berlene görä:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ wektoryň täze bazisdäki koordinatalaryny aşakdaky

$$X'=BX$$

deňlikden ýa-da

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

deňlikden tapyp bolar.

2. $\overline{A}$ simmetrik özgertme berlen. Bu özgertmäniň $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisdäki matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Täze ortonormirlenen bazise geçip, A matrisany diagonal görnüşe geçirmeli.

Çözülişi: Goý, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *we* $\vec{y} = \overline{\mathbf{A}}\vec{x} = (y_1, y_2, y_3)$.

Onda:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Häsiýetlendiriji deňleme düzeliň:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da:

$$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 12\lambda + 72 = 0.$$

Bu deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 6.$ Diýmek,

$$B'AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Täze bazisi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilen belgiläliň we ony tapalyň. Bu mysal üçin (7) sistemany ýazalyň:

$$\begin{cases} (2-\lambda_k)b_{1k} \qquad + 4b_{3k} = 0, \\ \qquad (6-\lambda_k)b_{2k} \qquad = 0, \\ 4b_{1k} \quad + \quad (2-\lambda_k)b_{3k} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Bu sistemada $\lambda_1 = -2$ goýup alarys:

$$b_{11} = -b_{31}, \quad b_{21} = 0$$

Diýmek, $\vec{b}_1 = \alpha(1,\ 0, -1)$ *we* $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Indi (9) sistemada $\lambda_2 = 6$ goýup alarys:

$$\begin{cases} -4b_{12} + 4b_{32} = 0, \\ 4b_{12} - 4b_{32} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Bu ýerden:

$$\vec{b}_2 = \beta(1,\ 0,\ 1), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\vec{b}_3$ wektory tapmak üçin bizde täze sistema ýok. Onuň koordinatalary (10) sistemany kanagatlandyrmaly we

$$(\vec{b}_2,\ \vec{b}_3) = 0.$$

Şeýleleik bilen, $\vec{b}_3 = (b_{13}, b_{23}, b_{33})$ wektory tapmak üçin

$$\begin{cases} -b_{13} + b_{33} = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} b_{13} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} b_{33} = 0. \end{cases}$$

sistemany çözmeli. Bu sistemany çözüp tapýarys $b_{13} = b_{33} = 0$, ýagny $\vec{b}_3 = \gamma(0,\ 1,\ 0)$. Diýmek, $\vec{e}_3 = (0,\ 1,\ 0)$.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Kwadrat formalar we olaryň kanonik görnüşe getirilişi

Goý, R^2 tekizlik we $\vec{i}, \vec{j}$ bazis saýlanan hem-de $\vec{x} = (x_1,\ x_2)$.

Şu wektory

$$\varphi(x_1,\ x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (1)$$

formula boýunça $\varphi(x_1, x_2)$ sana degişli edeliň.

(1) formula $x_1,\ x_2$ görä kwadrat forma diýilýär.

(1) formany aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\varphi(x_1,\ x_2) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2), \quad a_{12} = a_{21}. \qquad (2)$$

Bu deňligiň sag tarapynda birinji skobkadaky $x_1,\ x_2$-niň koeffisientlerini birinji setirde, ikinji skobkadaky $x_1,\ x_2$-niň koeffisientlerini ikinji setirde ýerleşdirip, matrisa düzeliň.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Bu matrisa (1)-nji kwadrat formanyň $\vec{i}, \vec{j}$ bazisdäki matrisasy diýilýär. Bu matrisa simmetrik matrisadyr (ser.(2)).

Goý,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad X' = (x_1, \quad x_2)$$

bolsun. Onda (1) formulany:

$$\varphi(x_1\ \ x_2) = X'AX$$

görnüşde ýazmak bolar (barlap görüň!).

Indi, umumy hala seredeliň. Goý, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ R^n giňişlikde alnan ortonormal bazis bolsun we $\vec{x} = (x_1,\ x_2, ..., x_n)$. Onda bu wektora degişli $\varphi(x_1,\ x_2, ..., x_n)$ kwadrat forma

$$\varphi(x_1,\ x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})\ (1 \le i,\ j \le n) \tag{4}$$

ýa-da açyp ýazsak:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2)$$

görnüşde bolýar. Onuň saýlanan $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ bazisdäki matrisasy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Eger:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

belgilemeleri girizsek, onda (4) formany:

$$\varphi(x_1,\ x_2, ..., x_n) = X'AX$$

görnüşde ýazmak bolar.

A matrisa simmetrik matrisa, şonuň üçin hem §5 görkezişimiz ýaly şeýle B ortogonal matrisa tapylyp, $C = B^{-1}AB$ matrisa diagonal matrisa.

$$X = BY, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad X' = Y'B'$$

B matrisanyň ortogonal matrisa bolany üçin $B' = B^{-1}$ (Bu ýerde B' B matrisanyň transponirlenen matrisasydyr).

Diýmek, täze $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ bazisde kwadrat forma şeýle görnüşi alar:

$$\Phi(y_1, y_2, ..., y_n) = Y'B^{-1}ABY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2, \qquad (6)$$

Bu ýerde (§5) λ_k A matrisanyň hususy bahalary. Kwadrat formanyň (6) görnüşine onuň kanonik formasy diýilýär.

Her bir kwadrat forma käbir bazisde kanonik görnüşe eýedir. Kwadrat formany kanonik görnüşe getirmek üçin onuň matrisasynyň hususy bahalaryny tapmaly. Eger-de kwadrat formany kanonik görnüşe getirýän B matrisany tapmak gerek bolsa, onda ony §5-de görkezilişi ýaly tapyp bolar.

Mysallar

1. Kwadrat formany:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

kanonik görnüşe getirmeli we B matrisany tapmaly.

Çözülişi: Kwadrat formanyň matrisasyny düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indi, bu matrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesini düzeliň:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Bu deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1.$ Diýmek, kwadrat formanyň kanonik görnüşi:

$$\Phi(y_1, y_2) = 3y_1^2 - y_2^2.$$

Bu matrisany tapalyň. Onuň üçin biz:

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)b_{1k} + 2b_{2k} = 0 \\ 2b_{1k} + (1-\lambda_k)b_{2k} = 0 \end{cases}$$

sistemany çözmeli. Bu sistemada $\lambda_1 = 3$ goýup alarys:

$$\begin{cases} -2b_{11} + 2b_{21} = 0, \\ \ \ 2b_{11} - 2b_{21} = 0. \end{cases}$$

Diýmek, $b_{11} = b_{21},\quad \vec{e}_1\,' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Ỳokardaky sistemada $\lambda_2 = -1$ goýup alarys:

$$\begin{cases} 2b_{12} + 2b_{22} = 0, \\ 2b_{11} - 2b_{22} = 0. \end{cases}$$

$$b_{12} = -b_{22}, \quad \vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Täze koordinatalar sistemasyna

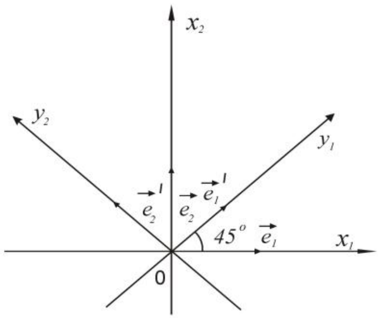
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ýa-da:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{cases}$$

formula boýunça geçilýär.

Bu formuladan şeýle netije gelýär: Täze koordinatalar sistemasyny köne koordinatalar sistemasyny 45^o aýlamakdan alynýar (ser.6-njy surat).



6-njy surat

2. Kwadrat formany:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2$$

kanonik görnüşe getirmeli we B matrisany tapmaly.

Çözülişi: Kwadrat formanyň matrisasyny düzeliň:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Indi bu matrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesini düzeliň:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Bu deňlemäniň kökleri $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2.$

Diýmek, kwadrat formanyň kanonik görnüşi

$$\phi(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_3^2.$$

B matrisany tapalyň. Onuň üçin:

$$\begin{cases} (1-\lambda_k)b_{1k} - 3b_{2k} + b_{3k} = 0, \\ -3\ b_{1k} + (1-\lambda_k)b_{2k} - b_{3k} = 0, \\ b_{1k} - b_{2k} + (5-\lambda_k)b_{3k} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

sistemada $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2,$ goýup ony çözmeli.

(7) sistemada $\lambda_1 = 6$ goýup alarys:

$$\begin{cases} -5b_{11} - 3b_{21} + b_{31} = 0, \\ -3b_{11} - 5b_{21} - b_{31} = 0, \\ b_{11} - b_{21} - b_{31} = 0. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp tapýarys:

$$b_{11} = -2b_{31},\ b_{12} = \frac{1}{2}b_{31}.$$

Diýmek,

$$\vec{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

(7) sistema $\lambda = 3$ goýup we ony çözüp alarys:

$$b_{12} = -b_{22},\ b_{32} = b_{22}.$$

Diýmek,

$$\vec{e}_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Şonuň ýaly hem (7) sistemadan $\lambda = -2$ bolanda tapýarys:

$$b_{33} = -b_{22}, \ b_{32} = b_{22}.$$

Diýmek,

$$\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad we$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bellik. $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ wektorlar tapylansoň, $\vec{e}_3'$ wektory tapmak üçin (7) sistemany peýdalanmak hökman däldir. $\vec{e}_3', \vec{e}_2', \vec{e}_1'$ ortonormal sistema bolmaly, şonuň üçin hem $\vec{e}_3' = [\vec{e}_1', \vec{e}_2']$.

Indi, täze sistema geçiş formulasyny hem ýazyp bileris:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Özbaşdak işlemäge mysallar.

Kwadrat formalary kanonik görnüşe getirmeli we B matrisany tapmaly.

1. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$

2. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

3. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

4. $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$

5. $\varphi(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2.$

Jogaplar.

1. $9y_1^2 - 9y_2^2 + 9y_3^2;$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2. $6y_1^2 + 6y_2^2$;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

3. $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. $9y_1^2 + 4y_2^2$;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

5. $9y_1^2 + y_2^2$;

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Edebiýatlar

1. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 128 sah.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 96 sah.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 44 sah.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 416 sah.
5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Umumy milli "Galkynyş" Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 48 sah.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 175 sah.
7. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 64 sah.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 133 sah.
9. Ахундов А.М.,Тораев А., Гаражаев А. Аналитик геометрия ве чызыклы алгебранын элементлери. (Гайбаначылар учин методики голланма) I болум, Ашгабат-1979й. 85 сах.
10. Ахундов А.М.,Тораев А., Гаражаев А. Аналитик геометрия ве чызыклы алгебранын элементлери.

11. (Гайбаначылар учин методики голланма) II болум, Ашгабат-1980й. 80 сах.
12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. Издательство «Наука», Москва, 1971 г., 232 стр.
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. Издательство «Наука», Москва, 1971 г., 431 стр.
14. Воеводин В.В. Линейная алгебра, Издательство «Наука», Москва, 1974 г., 336 стр.
15. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Издательство «Наука», Москва, 1970 г.
16. Клетеник Д.В. Сборник задач по Аналитической геометрии. Издательство «Наука», Москва, 1986 г.

Mazmuny