N. Gurbanow, H. Öwezdurdyýew

Geometriýada koordinatalar we wektorlar usullary

Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi

AŞGABAT. YLYM. 2008

UOK 000
G 00

G 00 N. Gurbanow, H. Öwezdurdyýew. Geometriýada koordinatalar we wektorlar usullary. Okuw gollanmasy. Aşgabat: Ylym, 2008. - 88 sah.

"Geometriýada koordinatalar we wektorlar usullary" atly okuw gollanmasy geometriýanyň häzirki zaman derňew usullaryna, koordinatarlar we wektorlar usullaryna bagyşlanyp, ol iki bapdan ybarat. Bu okuw gollanma geometriýa dersinden 10-njy synp okuwçylary we mekdepleriň matematika mugallymlary üçin niýetlenen.

TDKP № 000 **KBK № 00.00 00**

Giriş

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyň tagallasy bilen bilim ulgamynyň özgerdilmegi halkymyzda uly kanagatlanma duýgusyny döretdi. Gysga wagtyň içinde şeýle uly özgertmeleri durmuşa geçirmek bilim ulgamynyň işgärleriniň öňünde gaýragoýulmazdan ýerine ýetirilmeli işleri ýüze çykardy.

Şeýle meseleleriň esasylarynyň biri-de 10-njy synpda okuwlaryny dowam etdirjek okuwçylary degişli okuw kitaplary bilen, şol synplarda okuw, terbiýeçilik işlerini alyp barýan mugallymlary okuw gollanmalary bilen üpjün etmekden ybaratdyr.

Geometriýa dersinden 10-njy synp okuwçylary we mekdepleriň matematika mugallymlary üçin niýetlenip ýazylan bu okuw gollanma geometriýanyň häzirki zaman derňew usullaryna, koordinatalar we wektorlar usullaryna bagyşlanyp, ol iki bapdan ybarat.

Kitabyň birinji baby "Tekizlikde dekart koordinatalary we wektorlar" diýip, ikinji baby "Giňişlikde dekart koordinatalary we wektorlar" diýip atlandyrylýar. Baplaryň her birinde 16 tema bolup, olaryň ahyrynda temalara degişli gönükmeler ýerleşdirilendir. Bu getirilen gönükmeler gollanmanyň mazmunyna doly laýyk gelýär we geomertriýa dersinde koordinatalar we wektorlar usulyny has giňeldip, çuňlaşdyryp öwretmeklige niýetlenendir.

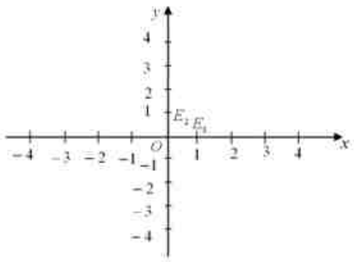
I bap. Tekizlikde dekart koordinatalary we wektorlar

§1. Tekizlikde dekart koordinatalary

1.1 Göni çyzykda nokadyň koordinatasy

Erkin alnan a gönüde O nokady alalyň. Bu gönüniň ýene-de bir E nokadyny alalyň. O nokat a gönini iki sany şöhlä bölýär. Bu şöhleleriň her haýsynda O nokatdan başlap, OE kesimi yzygider alyp goýalyň. Bu kesimleriň uçlaryna O nokatdan sag tarapa $1, 2, 3, \ldots$ ýaly položitel sanlary, çep tarapa bolsa $-1, -2, -3, \ldots$ ýaly otrisatel sanlary ýazalyň. OE kesime birlik kesim diýilýär. Birlik kesimlere bölünen göni çyzyga bolsa san oky diýilýär (1-nji surat). Netijede, biz a göni çyzygyň her bir nokadyna bir sany degişli edip goýup bilýäris. Meselem, A nokada 3; B nokada $4,5$; C nokada -2 sanlar degişlidir.

1-nji surat



2-nji surat

Nokatlara degişli sanlara göni çyzykdaky nokatlaryň koordinatalary diýilýär we ol $A(3)$, $B(4,5)$, $C(-2)$ ýaly ýazylýar. Şeýlelikde, O nokatdan çepdäki nokatlaryň koordinatalary otrisatel sandyr.

Goý, bize san okunda $M(x_1)$ we $N(x_2)$ iki nokat berlen bolsun. Onda MN kesimiň uzynlygy diýip $|x_2-x_1|$ sana aýdylýar. Meselem, AB kesimiň uzynlygy $|4,5-3|=1,5$ deňdir, dogrudan hem B nokat A nokatdan $1,5$

birlik uzaklykda ýatýar. Ony gysgaça $AB=|x_2-x_1|$ ýaly ýazýarlar. Edil şunuň ýaly $BC=|-2-4,5|=6,5$; $AC=|-2-3|=5$. Islendik x sana san okunda bir nokat degişlidir. Meselem, 1 sana E nokat degişli we ş.m. O nokada 0 (nol) san degişli bolup, oňa koordinatalar başlangyjy diýilýär. Nokatlaryň koordinatalary bu nokadyň O nokatdan uzaklygyny we haýsy tarapda ýerleşendigini aňladýar.

1. 2. Tekizlikde dekart koordinatalary

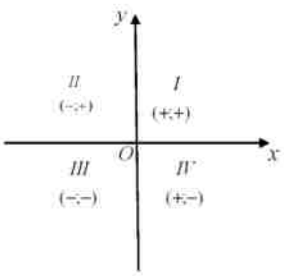
Tekizlikde O nokatda kesişýän x we y iki sany özara perpendikulýar göni çyzyk alalyň (2-nji surat). Goý, bu gönüler O nokatda koordinata başlangyçlary bolan san oklary bolsunlar. Bu san oklarynyň birlik kesimleri OE_1, OE_2 deň bolsun. Adat boýunça x okuna (2-nji suratdaky ýaly gorizontal çyzyk) absissa oky diýilýär. y okuna (wertikal çyzyk) ordinata oky diýilýär. Özara deň bölünmeleri bilen berlen şeýle iki san okuna bilelikde tekizlikde koordinatalar sistemasy diýilýär. Ilkinji gezek öz ylmy işlerinde şeýle koordinatalar sistemasyny fransuz alymy Rene Dekart (1596-1660) ulanypdyr. Oňa görä-de bu alymyň hatyrasyna ýokarda görkezilen koordinatalar sistemasyna dekart koordinatalar sistemasy diýilýär.

Dekart koordinatalar sistemasy nämä gerek? Onuň wezipesi nämeden ybarat? Jogap: Tekizlikde dekart koordinatalar sistemasy tekizlikdäki her bir nokada tertipleşdirilen iki sany degişli edip goýýar we tersine, islendik tertipleşdirilen iki sany tekizligiň diňe bir nokadyna degişli edip goýýar.

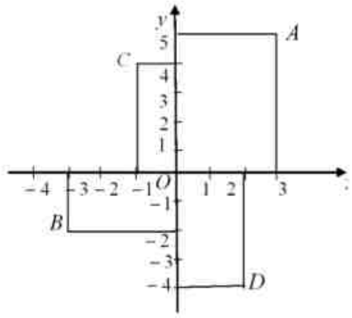
Ol nähili amala aşyrylýar? Tekizlikde erkin A nokady alyp, onuň üsti bilen Oy okuna parallel geçirýäris. Bu parallel Ox okuny koordinatasy x sana deň bolan A_1 nokatda kesýär. Ox okundaky A_1 nokadyň koordinatasyna A nokadyň absisasy diýilýär. Edil şoňa meňzeş A nokatdan Ox okuna parallel geçirip, biz Oy okunda A_2 nokady alarys. A_2 nokadyň Oy okundaky koordinatasyna A nokadyň ordinatasy diýilýär. Bu ýagdaýda ony $A(x;y)$ ýaly ýazýarys. Skobkada birinji orunda nokadyň absisasy, ikinji orunda bolsa onuň ordinatasy ýazylýar. Tersine, (a,b)

sanlar berlen bolsa alamatyna laýyklykda Ox okundan a sany , Oy okundan b sany alyp, biz A_1 we A_2 nokatlary gurýarys. Bu nokatlardan Oy we Ox oklaryna parallel geçirýäris. Bu paralleleriň kesişme nokady berlen a,b sanlara degişli nokat bolýar.

Adat boýunça Ox okunyň O nokatdan sag tarapynda we Oy okunyň ýokary tarapynda položitel koordinatalary ýerleşdirilýär. Netijede, Ox, Oy oklar bir tekizligi dört çärýege bölýär. Her çärýekdäki nokatlar üçin koordinatalaryň alamaty üýtgemeýär (3-nji surat).



3-nji surat



4-nji surat

Koordinatalar sistemasy berlen tekizlige xOy tekizlik diýilýär. Ox- okundaky nokatlaryň ordinatasy nola deňdir, Oy – okundaky nokatlaryň bolsa absisasy nola deňdir. Koordinata başlangyjy bolan O nokadyň koordinatalarynyň ikisi-de nola dendir (3-nji surat).

Koordinatalary $A(3;5)$, $B(-3;-2)$, $C(-1;4)$, $D(2;-4)$ nokatlaryň gurluşy 4-nji suratda görkezilendir.

1-nji mesele. $M(5;2)$ we $N(-1;3)$ nokatlar berlipdir. MN kesimiň, Oy okuny kesýändigini, we Ox okuny kesmeýändigini subut etmeli. MN kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. Ox oky xOy tekizligini iki ýarym tekizlige bölýär. 3-nji suratdaky ýaly ýokarky ýarym tekizlikdäki nokatlaryň ordinatasy bilen aşaky ýarym tekizlikdäki nokatlarynyň ordinatalary dürli alamatly. Bize berlen M, N nokatlaryň ordinatalarynyň bolsa ikisi hem položitel sanlardyr. Diýmek, MN kesim Ox okuny kesmeýär. Oy okunyň kesgitleýän ýarymtekizliklerinde bolsa nokatlaryň absisalarynyň alamatlary dürlüdir.

Berlen M, N nokatlaryň absisalarynyň alamatlary dürli bolany üçin, olar dürli ýarymtekizliklere degişlidir. Diýmek, MN kesim Oy okuny kesýär.

Berlen kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapalyň.

Goý, AB kesimiň uçlarynyň koordinatalary $A(x_1, y_1)$, $B(x_2; y_2)$ bolsun. Bu kesimiň ortasy bolan C nokadyň koordinatalaryny $C(x;y)$ diýip belläp, x we y koordinatalary kesgitläliň.

Ilki bilen AB kesimiň Ox, Oy oklarynyň hiç haýsyna parallel däl ýagdaýyna seredeliň (5-nji surat, I-çärýek). A, B, C nokatlardan Oy okuna parallel geçirsek, biz Ox okunda A_1, B_1, C_1 nokatlary alarys. Olaryň koordinatalary $A_1(x_1, 0)$ $B(x_2, 0)$, $C_1(x; 0)$ bolar, çünki olar Ox okuna degişlidirler. Falesiň teoremasy boýunça $AC=CB$ deňlikden $A_1C_1=C_1B_1$ gelip çykýar. Diýmek, $|x-x_1|=|x_2-x|$. Bu ýerde iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

1) $x-x_1=x_2-x$
2) $x-x_1=-x_2+x$

Birinji ýagdaýda biz $2x=x_1+x_2$ ýa-da

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad (1)$$

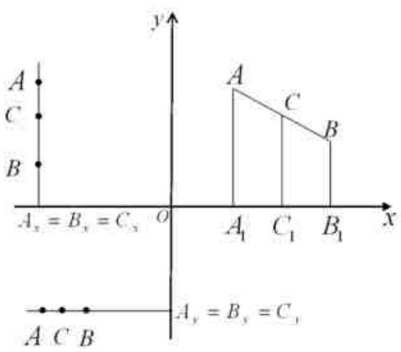
formulany alarys.

Ikinji ýagdaýda $x_1=x_2$ bolar. Munuň bolsa bolmagy mümkin däl, çünki A,B nokatlar gabat gelmeýär we AB kesim Oy oka parallel däldir.

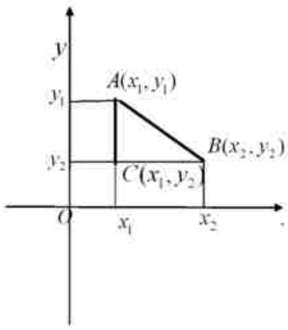
Edil şuňa meňzeşlikde A, B, C, nokatlardan Ox okuna parallel geçirip, biz

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

formulany alarys. (1), (2) formulalar kesimiň ortasynyň koordinatalaryny onuň uçlarynyň koordinatalarynyň kömegi bilen kesgitleýär.



5-nji surat



6-njy surat

Eger-de AB kesim Oy okuna parallel bolsa (5-nji surat, II-çärýek), onda A, B, C üç nokadyň hem Ox okuna proýeksiýasy bir nokada düşýär. Oňa görä-de $x_1 = x_2 = x$. Bu ýagdaý üçin hem (1) formula dogrudyr. Edil şuňa meňzeş AB kesim Ox okuna parallel bolsa, onda biz $y_1 = y_2 = y$ deňligi alýarys. Bu ýagdaý üçin hem (2) deňlik dogrudyr.(1) we (2) deňlikleri peýdalanyp, MN kesimiň ortasynyň koordinatalaryny alarys:

$$x = \frac{5 + (-1)}{2} = 2\,, \qquad y = \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5\,.$$

2-nji mesele. ABC üçburçlugyň depeleriniň koordinatalary berlen: $A(2;5)$, $B(3;8)$, $C(6;9)$. Bu üçburçlugyň medianalarynyň esaslarynyň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. Üçburçlugyň B depesinden çykýan BB_1 medianany esasy bolan $B_1(x;y)$ nokat AC kesimiň ortasydyr. Oňa görä-de, (1) we (2) deňliklerden onuň koordinatalary aşakdaky ýaly kesgitlenýär.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_1}{2}; \end{cases} \qquad B_1(x;y): \begin{cases} x = \dfrac{2+6}{2}, \\ y = \dfrac{5+9}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 7; \end{cases} \qquad B_1(4;7)$$

A_1 we C_1 nokatlaryň koordinatalary hem edil şeýle tapylýar.

1.3. Tekizlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklyk

Tekizlikde erkin alnan $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ iki nokadyň arasyndaky $d=AB$ uzaklygy tapalyň. A we B nokatlardan koordinata oklaryna parallel geçireliň we olaryň kesişme nokadyny 6-njy suratdaky ýaly C bilen belläliň.

Bu ýerde C we A nokatlaryň şol bir x_1 absissasy hem-de C we B nokatlaryň şol bir y_2 ordinatasy bardyr. Ýagny $AC=|y_2-y_1|$; $BC=|x_2-x_1|$, onda ABC gönüburçly üçburçluk üçin Pifagoryň teoremasyny ulansak, onda $d^2=AB^2=AC^2+BC^2$. Bu ýerden

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \quad \text{ýa-da} \quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

formulany alarys.

Bu formula $x_1=x_2$ ýa-da $y_1=y_2$ ýagdaýlar üçin hem dogrudyr. Eger bu formulany peýdalansak, koordinata başlangyjyndan A nokada çenli uzaklyk $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ýaly bolar.

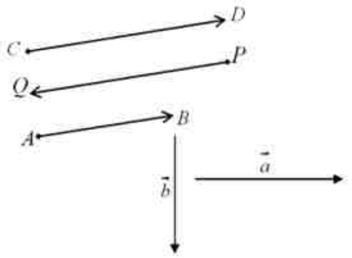
§2. Wektorlar

2.1. Wektor, onuň ugry we moduly

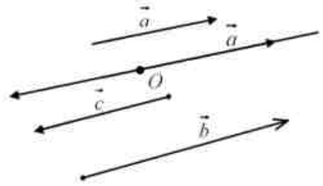
Köp ululuklary (uzynlyk, burç, agram, temperatura we ş.m.) diňe bir san bilen aňladyp bolýar. Şeýle ululyklara skalýar ululyklar diýilýär. Käbir ululyklary (hereket edýän jisimiň tizligi, tizlenmesi, güýç ýaly ululyklary) doly häsiýetlendirmek üçin olaryň san ululygyndan başga-da ugruny görkezmeli bolýar. Şeýle ululyklar ugrukdyrylan kesimleriň üsti bilen aňladylýar. Eger-de kesimiň uçlarynyň tertibi belli bolsa, oňa ugrukdyrylan kesim diýilýär. Meselem, AB kesimiň A nokady başlangyjy (ýa-da birinji), B nokat ikinji ujy bolsa, onda ol ugrukdyrylan kesim bolýar we ol $\overrightarrow{AB}$ ýaly bellenýär. Bu ýerde $AB=BA$ bolsa-da, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Gysgaça ugrukdyrylan kesime wektor diýilýär. Köplenç wektorlary kiçi latyn harplary bilen $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$,... ýaly belleýärler. Wektorlary peýkam ýaly şekillendirýärler (7-nji surat) ýa-da $\overrightarrow{AB}$, ýaly ýazýarlar. Her bir wektor, başlangyjy wektoryň başlangyjynda bolan şöhläni (ýa-da bu wektor boýunça ugrukdyrylan gönini) kesgitleýär. Eger bir şöhläni beýleki şöhlä geçirýän parallel göçürme bar bolsa, bu şöhlelere ugurdaş şöhleler diýilýär. Eger-de parallel göçürme bilen şöhleleriň depeleri gabat gelende, olar bir-birini göni çyzyga doldurýan bolsalar, olara garşylykly şöhleler diýilýär. 7-nji suratda $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ wektorlar ugurdaş, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ bolsa garşylykly wektorlardyr. Eger-de iki wektoryň kesgitleýän şöhleleri ugurdaş bolsa, onda wektorlara-da ugurdaş diýilýär. Garşylykly şöhleleriň wektorlaryna-da garşylykly wektorlar diýilýär.

8-nji suratdaky ýaly $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlary başlangyjy O nokatda bolar ýaly parallel göçüreliň. Bu ýerde $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektorlar ugurdaş $\vec{a}$, $\vec{c}$ wektorlar bolsa garşylykly wektorlardyr.



7-nji surat



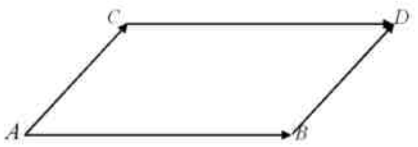
8-nji surat

Wektorlary şekillendirýän kesimiň uzynlygyna wektoryň moduly ýa-da absolýut ululygy diýilýär we ol $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ ýaly bellenilýär. Eger iki wektoryň modullary (käwagt biz uzynlygy diýip hem aýdýarys) deň we ugurdaş bolsalar, bu wektorlara deň wektorlar diýilýär we ony $\vec{a}=\vec{b}$ ýaly ýazýarlar. Eger $\vec{a}=\vec{b}$ bolsa, $\vec{a}$ wektory $\vec{b}$ wektora geçirýän parallel göçürme bardyr. Dogrudan hem, $\vec{a}=\vec{b}$ deňlikden olaryň ugurdaşlygy gelip çykýar. Eger olar ugurdaş bolsalar, olaryň kesgitleýän şöhleleriniň birini beýlekisine geçirýän parallel göçürme bardyr. Olaryň uzynlyklarynyň deňligine görä başlangyçlary we ahyrky uçlary gabat gelýändirler (9-njy surat).

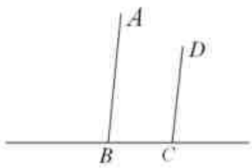
Paralellogramyň häsiýetine laýyklykda: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Şeýlelikde, tekizlikde alnan islendik *A, B* iki nokat $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}$ iki garşylykly wektorlary kesgitleýär. Eger-de *AB* kesimiň uçlary gabat gelýän bolsa $(A=B)$, onda $\overrightarrow{AA}$ wektory alarys. Bu wektora nol wektor diýilýär we ol $\vec{0}$ ýaly bellenilýär. Nol wektoryň moduly nola deň, ugry kesgitsiz hasaplanýar. Islendik wektory islendik nokatdan alyp goýmak bolýar. Onuň üçin berlen wektory başlangyjy berlen nokada geçer ýaly parallel göçürmek ýeterlikdir. Netijede, tekizlikdäki bir nokatda ähli wektory gurup bolýar.

3-nji mesele. $AB||CD$ gönüler berlipdir. A we D nokatlar BC göniniň bir tarapynda ýatýan bolsa BA, CD şöhleleriň ugurdaşdygyny subut ediň.

Çözülişi. B nokat C nokada gabat geler ýaly edip, AB gönini parallel göçüreliň (10-njy surat). Onda BA göni çyzyk CD bilen gabat geler. A nokat BC gönä görä şol bir ýarymtekizlikde galar. Diýmek, BA, CD şöhleler ugurdaşdyrlar.



9-njy surat



10-njy surat

2.2. Wektorlaryň koordinatalary

$\vec{AB} = \vec{a}$ wektoryň başlangyjynyň koordinatasy $A(x_1;y_1)$, ujunyň koordinatasy $B(x_2;y_2)$ bolsa, onda $a_1=x_2-x_1$; $a_2=y_2-y_1$ sanlara $\vec{a}$ wektoryň koordinatalary diýilýär we ony $\vec{a}(a_1, a_2)$ ýaly ýazýarys.

Iki nokadyň arasyndaky uzaklygy tapmagyň formulasy boýunça

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Soňky formula $\vec{a}$ wektoryň modulyny aňladýar.

1-nji TEOREMA. Deň wektorlaryň biratly koordinatalary deňdir we tersine, iki wektoryň biratly koordinatalary deň bolsa, onda ol wektorlar deňdir.

Subudy. Goý, $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy $A(x_1; y_1)$, ujy $B(x_2; y_2)$ bolsun.

Eger $\vec{a'} = \vec{a}$ boljak bolsa, onda $\vec{a'}$ wektor $\vec{a}$ wektoryň parallel göçürmesi bolmaly. Parallel göçürmäniň deňlemesi

$x^| = x+a$ $y^| = y+b$ formulalary boýunça $\vec{a'}$ wektoryň başlangyjy $A^|(x_1+a; y_1+b)$, ujy bolsa $B^|(x_2+a; y_2+b)$ bolar. Onda:

$\vec{a} = (x_2-x_1; y_2-y_1)$; $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$ $(x_2-x_1; y_2-y_1)$; ýaly bolup, olaryň biratly kooordinatalary deňdirler.

Tersine, goý, $\vec{a}$ we $\vec{a'}$ wektorlaryň koordinatalary deň bolsunlar, ýagny

$x_2-x_1=x^|_2-x^|_1$; $y_2-y_1=y^|_2-y^|_1$. Bu ýerde $\vec{a'}$ $(x^|_2-x^|_1; y^|_2-y^|_1)$, onda $x_2=x^|_2+(x_1-x^|)$; $y_2=y^|_2+(y_1-y^|)$.

Diýmek, $x^|=x+(x_1-x^|_1)$; $y^|=y+(y_1-y^|_1)$ parallel göçürme $\vec{a}$ wektory $\vec{a'}$ wektory wektora göçürýär. Netijede, $\vec{a}=\vec{a'}$. Teorema subut edildi.

4-nji mesele. Bir gönüde ýatmaýan $A(1;-2)$; $B(0;5)$; $C(5;1)$ nokatlar berlen bolsa, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ bolar ýaly $D(x;y)$ nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

Çözülişi. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ deňlikden $\overrightarrow{AB}(0-1; 5-(-2))$, $\overrightarrow{CD}(x-5; y-1)$ wektorlaryň koordinatalary deň bolmaly, ýagny $x-5=-1$; $y-1=7$ ýa-da $x=4$; $y=8$.

Diýmek, $D(4;8)$.

2.3. Wektorlary goşmak we aýyrmak

$\vec{a}(a_1;a_2)$ we (b_1,b_2) wektorlaryň jemi diýip, koordinatalary $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$ ýaly bolan $\vec{c}\,(c_1;c_2)$ wektora aýdylýar. Diýmek, iki wektoryň jemi ýene-de wektordyr. Jem bolup durýan wektoryň koordinatalary goşulýan wektorlaryň bir atly koordinatalarynyň jemine deňdir. Wektoryň jeminiň aşakdaky ýaly häsiýetleri bardyr:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{a})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Eger-de bu deňlikleriň sag tarapyndaky we çep tarapyndaky wektorlaryň bir atly koordinatalaryny jemlesek, biz şol bir sanlary alarys. Diýmek, deňlikler dogrudyr.

$A(x_1;y_1)$ we $B(x_2;y_2)$ nokatlaryň kesgitleýän $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{BA}$ wektorlary modullary boýunça deň, ýagny

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\left|\overrightarrow{BA}\right| ,$$

ugurlary boýunça garşylyklydyr. $\overrightarrow{AB}$ $(x_2-x_1;y_2-y_1)$ bolsa $\overrightarrow{BA}$ $(x_1-x_2;y_1-y_2)$ ýa-da $\overrightarrow{BA}$ $(-(x_2-x_1);-(y_2-y_1))$. Oňa görä-de $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ýaly ýazylýar. Diýmek, modullary boýunça deň, garşylykly wektorlar koordinatalarynyň alamatlary boýunça tapawutlanýar. Oňa görä-de $\vec{a}$ (a_1,a_2) wektordan $\vec{b}$ (b_1,b_2) wektory aýyrmak üçin $\vec{a}$ wektoryň

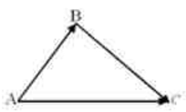
üstüne $-\vec{b}$ wektory goşmak ýeterlikdir $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$.

Eger bu tapawudy $\vec{c}\,(c_1;c_2)$ bilen bellesek, onda wektorlary goşmagyň düzgüni boýunça $c_1 = a_1 - b_1$; $c_2 = a_2 - b_2$ ýaly bolar.

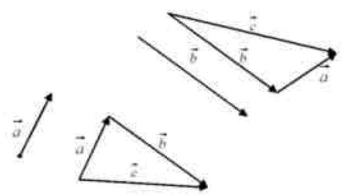
Diýmek, iki wektoryň tapawudy hem wektor bolup, onuň koordinatalary berlen wektorlaryň biratly koordinatalarynyň tapawudyna deňdir.

2-nji TEOREMA. Islendik A, B, C üç nokat üçin $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ deňlik dogrudyr.

Subudy. Goý, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ erkin nokatlar berlen bolsun. Onda $\overrightarrow{AB}$ $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC}$ $(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}$ $(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$ wektorlary alarys. Wektorlary goşmagyň düzgüni boýunça $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ wektorlaryň biratly koordinatalaryny goşsak, $\overrightarrow{AC}$ wektoryň koordinatalaryny alarys. Bu teorema tekizlikde iki wektoryň şekillerini goşup, üçünji wektor almagyň usulyny öwredýär (11-nji surat).



11-nji surat



12-nji surat

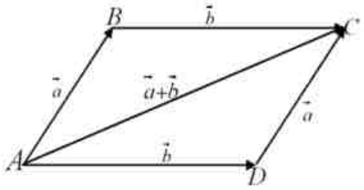
Wektorlary goşmak üçin onuň biriniň başlangyjyny beýlekisiniň ujuna düşer ýaly edip parallel göçürmeli. Birinji wektoryň başlangyjy jem bolup durýan wektoryň başlangyjy, ikinji wektoryň ujy hem jem wektoryň ujy bolup durýar. Wektorlaryň ornuny çalyşmak bilen olaryň jemi üýtgemeýär (12-nji surat). Bu usula wektorlary goşmagyň üçburçluk düzgüni diýilýär. Ondan başga-da wektorlary goşmagyň parallellogram usuly-da bardyr. Bu usul boýunça iki wektoryň jemini gurmak üçin olaryň ikisini-de şol bir A nokatdan gurmaly. Onda taraplary $\vec{a}, \vec{b}$ wektorlar bolan parallelogramyň A nokatdan geçýän diagonaly olaryň jemidir. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ bolany üçin $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (13-nji surat). Eger-de birnäçe $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ wektorlar berlen bolsa, bu wektorlaryň jemini tapmak üçin olary yzygider $\overrightarrow{a_2}$ wektory $\overrightarrow{a_1}$ -iň ujundan, $\overrightarrow{a_3}$ - wektory $\overrightarrow{a_2}$ -iň ujundan we ş.m. edip, $\overrightarrow{a_n}$ – wektory $\overrightarrow{a_{n-1}}$ wektoryň ujundan alyp goýmaly. Soňra $\overrightarrow{a_1}$ wektoryň başlangyjy bilen ahyrky $\overrightarrow{a_n}$ wektoryň ujuny birleşdirmeli. Başlangyjy $\overrightarrow{a_1}$ -iň başlangyjy bilen gabat gelýän ujy bolsa $\overrightarrow{a_n}$ -iň ujy bilen gabat gelýän $\vec{b}$ wektora bu wektorlaryň jemi diýilýär we aşakdaky ýaly bellenýär

$$\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n .$$

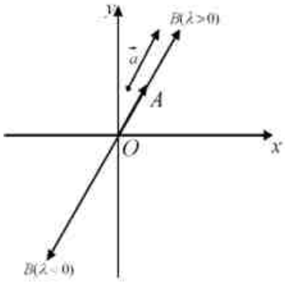
Bu jem wektorlaryň alnyp goýluş tertibine bagly däldir, ýagny:

$$\overline{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_4} + ... + \overrightarrow{a_{n-3}} + \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_{n-2}} + \overrightarrow{a_{n-1}}.$$

ABC üçburçlukda $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = 0$, çünki bu wektorlaryň başlangyjy bilen ahyry gabat gelýär. Şeýlelikde, islendik köpburçlugyň taraplaryny kesgitleýän yzygider wektorlaryň jemi nola deňdir.



13-nji surat



14-nji surat

2.4. Wektorlary sana köpeltmek

$\vec{a}(a_1;a_2)$ wektoryň λ sana köpeltmek hasyly diýip, $\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\lambda a_2)$ wektora aýdylýar. Diýmek, $\vec{a}$ wektor λ sana köpeldilende, onuň koordinatalary hem şol sana köpeldilýär. Netijede, sany wektora köpeldip, biz ýene-de wektor alarys. Wektory sana köpeltmegiň aşakdaky iki häsiýeti bar:

1. Islendik λ, μ iki san we bir $\vec{a}$ wektor üçin $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ deňlik ýerine ýetýär.

2. Islendik $\vec{a},\vec{b}$ wektorlar we λ san üçin $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ deňlik ýerine ýetýär.

Bu häsiýetleri subut etmek üçin deňlikleriň sagyndaky we çepindäki wektorlaryň bir atly koordinatalarynyň deňdigini görkezmek ýeterlikdir.

3-nji TEOREMA. Eger λ>0 bolsa, $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar ugurdaşdyrlar. Eger-de λ< 0 bolsa, $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar garşylyklydyrlar. Islendik ýagdaýda $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.

Subudy. Erkin $\vec{a}$ wektory koordinata başlangyjyndan alyp goýalyň. Eger bu wektoryň ujy $A\ (a_1;a_2)$ nokatda bolsa, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}(a_1;a_2)$ bolar.

Koordinata başlangyjyndan geçýän göni çyzygyň umumy deňlemesi

$$ax+by=0 \qquad (1)$$

görnüşde bolar. Bu deňleme OA göniniň deňlemesi bolsa, onda $A(a_1;a_2)$ nokadyň koordinatalary ony kanagatlandyrmalydyr, ýagny

$$aa_1+ba_2=0. \qquad (2)$$

Bu deňlige görä (1) deňlemäni $\lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}(\lambda a_1;\lambda a_2)$ wektoryň koordinatalary hem kanagatlandyrýar:

$$a(\lambda a_1)+b(\lambda a_2)=\lambda(aa_1+ba_2)=0. \qquad (3)$$

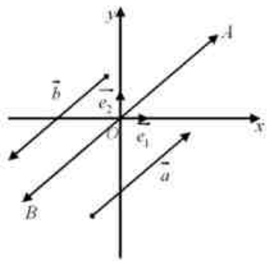
Diýmek, $B\ (\lambda a_1;\lambda a_2)$ nokat hem OA gönä degişlidir. Eger-de λ>0 bolsa A, B nokatlar O nokatdan bir ýarymgönä degişlidirler, diýmek, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ wektorlar ugurdaşdyrlar. Eger λ<0 bolsa A, B nokatlar dürli ýarymgönä degişlidirler, ýagny $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ wektorlar ugurdaş däldirler.

(14-nji surat) $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{a}$ wektoryň modulyny hasaplalyň

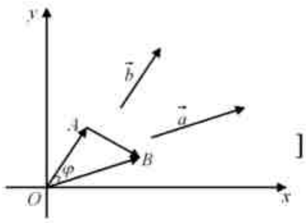
$$|\lambda\vec{a}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2} = |\lambda||\vec{a}|.$$

Netijede, $|\lambda|=|\lambda|\,|\vec{a}|$ deňligi alarys. Eger-de $\lambda=0$ ýa-da $\vec{a}=0$ bolsa, onda $\lambda\vec{a}=0$.
Teorema subut edildi.

Şol bir gönä parallel bolan wektorlara kollinear wektorlar diýilýär we ony $\vec{a}\ ||\ \vec{b}$ ýaly belleýärler. Diýmek, ugurdaş ýa-da garşylykly wektorlar kollineardyrlar.



15-nji surat



16-njy surat

2.5. Kollinear wektorlaryň häsiýetleri

4-nji TEOREMA. Eger-de iki wektor kollinear bolsa, onda olaryň bir atly koordinatalary proporsionaldyr. Tersine, iki wektoryň bir atly koordinatalary proporsional bolsa, onda olar kollineardyrlar.

Subudy. Goý, $\vec{a}\ (a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$ wektorlar kollinear bolsunlar. Olaryň ikisini-de koordinata başlangyjyndan alyp goýalyň. Goý, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ bolsun (15-nji surat). Bu wektorlar kollinear bolany üçin O,A,B nokatlar bir gönä degişlidirler, ýagny olaryň $A(a_1;a_2)$ $B(b_1;b_2)$ koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrýarlar.

Onda $aa_1+ba_2=0;$ $ab_1+bb_2=0$ deňliklerden $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ ýa-da

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ proporsiany alarys. Indi tersine, goý, $\vec{a}(a_1;a_2)$,

$\vec{b}(b_1;b_2)$ wektorlaryň biratly koordinatalary proporsional bolsunlar.

Bu gatnaşygy λ bilen belläliň $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\lambda$. Bu ýerden $a_1=\lambda b_1$;

$a_2=\lambda b_2$ deňlikleri alarys. Diýmek, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Onda 3-nji teorema görä bu wektorlar kollineardyrlar. Teorema subut edildi.

Moduly 1-e deň bolan wektorlara birlik wektorlar diýilýär.

$\vec{e}_1(1;0)$; $\vec{e}_2(0;1)$ wektorlar birlik wektorlardyr, çünki:

$$|\vec{e}_1|=\sqrt{1^2+0^2}=1, \qquad |\vec{e}_2|=\sqrt{0^2+1^2}=1 .$$

Bu wektorlary koordinatalar başlangyjyndan alyp goýsak, $\vec{e}_1$ wektor Ox okuň $\vec{e}_2$ wektor bolsa Oy okunyň položitel tarapyna gönükdirilendir (15-nji surat). Bu wektorlara Ox,Oy oklaryň orty hem diýilýär. Şeýlelikde, islendik $\vec{a}(a_1;a_2)$ wektory

$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ ýaly edip, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ birlik wektorlara dagadyp bolar.

Dogrudan hem

$$\vec{a}(a_1,a_2)=\overline{(a_1;0)}+\overline{(0;a_2)}=a_1\overline{(1;0)}+a_2\overline{(0,1)}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$$

ýaly ýazyp bolýar.

5-nji mesele. $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(3,-1)$; $\vec{c}(7,0)$ wektorlaryň arasynda $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ deňlik ýerine ýeter ýaly λ, μ sanlary tapmaly.

Çözülişi. Berlen deňlige $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň ilki birinji koordinatalaryny, soňra ikinji koordinatalaryny goýalyň: $7 = 1\lambda + 3\mu$, $0 = 2\lambda + (-1)\mu$. Bu deňlemeleri bilelikde çözeliň:

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda - \mu = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda - 6\mu = -14, \\ 2\lambda - \mu = 0. \end{cases}$$

Bu deňlemeleri goşup alarys:

$$-7\ \mu = -14 \quad , \quad \mu = 2.$$

Bu bahany birinji deňlemede goýup, $\lambda = 1$ bolýandygyny görmek kyň däl.

Netijede, $\lambda = 1$, $\mu = 2$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ýaly bolar.

2.6. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Goý, $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1; b_2)$ wektorlar berlen bolsun. Olary koordinata başlangyjyndan alyp goýalyň. Bu wektorlaryň arasyndaky burçy φ bilen belläliň (16-njy surat). Eger iki wektor ugurdaş bolsa, olaryň arasyndaky burç $\varphi = 0^0$ hasaplanýar. Eger-de iki wektor garşydaş bolsa, onda $\varphi = 180^0$. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly diýip $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ ýaly kesgitlenýän sana aýdylýar we ony $\vec{a}\vec{b}$ ýaly belleýärler. Diýmek, iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly sandyr. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň aşakdaky ýaly häsiýetleri bar.

1. $\vec{a}\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Bu $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ sana wektoryň skalýar kwadraty diýilýär.

2. $\vec{a}=\vec{0}$ ýa-da $\vec{b}=\vec{0}$ bolsa, bu wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir.

3. Eger-de $\vec{a}\perp\vec{b}$ bolsa, $\varphi=90^0$ ýa-da $\cos 90^0$ bolany üçin $\vec{a}\vec{b}=0$. Diýmek, eger noldan tapawutly wektorlar perpendikulýär bolsalar, olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir we tersine, wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolsa, olar özara perpendikulýardyr.

5-nji TEOREMA. Islendik iki $\vec{a}(a_1;a_2),\vec{b}(b_1;b_2)$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly olaryň koordinatalarynyň üsti bilen $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ ýaly aňladylýar.

Subudy. $\vec{a}-\vec{b}$ wektoryň skalýar kwadratyna seredeliň:

$(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$, bu ýerden

$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}^2+\vec{b}^2-(\overrightarrow{a-b})^2)$ deňligi alarys. Biz wektoryň modulyny koordinatalary bilen aňlatsak, onda subut edilmeli deňligi alarys. Teorema subut edildi.

Ýokarda wektorlary skalýar köpeltmegiň häsiýeti peýdalanyldy. Indi bu häsiýeti subut etmek üçin, deňlikdäki wektorlaryń biratly koordinatalaryny ýerine goýmaklyk ýeterlikdir. Ondan başga-da wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ *we* $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$ hasiýetlerini özbaşdak derňäp bilersiňiz.

6-njy mesele. Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny peýdalanyp, Pifagoryň teoremasyny subut ediň.

Çözülişi. Pifagoryň teoremasy ABC gönüburçly üçburçlukda ($\angle C = 90^0$) $AB^2 = AC^2 + CB^2$ görnüşe eýe bolar (17-nji surat). Bu deňligi subut etmek üçin, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ wektorlaryň skalýar kwadratyny alalyň:

$$(\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = (\overrightarrow{AC})^2 + 2\overrightarrow{AC}\overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{CB})^2 .$$

$AC \perp CB$ bolany üçin $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$ deňlik alynýar we bu deňlikden bolsa Pifagoryň deňligi alynýar.

Eger $\vec{a}(a_1; a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ wektorlar koordinatalary bilen berlen bolsa, olaryň arasyndaky burçy skalýar köpeltmek hasylynyň formulasyndan aşakdaky ýaly kesgitlemek mümkin:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} .$$

7-nji mesele. $\vec{a}(2;-2)$, we $\vec{b}(3;0)$ wektorlaryň arasyndaky burçy hasaplamaly.

Çözülişi. Ýokardaky formuladan peýdalanyp alarys:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 6 + 0 = 6; \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{9 + 0} = 3,$$

$$\cos\varphi = \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi = 45^0.$$

Eger iki wektor kollinear bolsalar (ugurdaş ýa-da garşylykly), onda $\varphi = 0^0$ ýa-da $\varphi = 180^0$ bolýar. Eger-de $\vec{a}$, $\vec{b}$ wektorlar ugurdaş ýa-da $\varphi = 0^0$ bolsa, bu ýagdaýda skalýar köpeltmek hasyly

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}||\vec{b}|$ deň bolup, $a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{a_1^{\,2} + a_1^{\,2}} \cdot \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}$ deňlik ýerine ýetýär.

Eger-de $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektor garşylykly ugrukdyrlan bolsalar, onda $\varphi = 180^0 \Rightarrow \cos\varphi = -1$, bu ýagdaýda $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$, ýagny $a_1b_1 + a_2b_2 + \sqrt{a_1^{\,2} + a_1^{\,2}} \cdot \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}} = 0$ bolar.
Bu iki wektoryň garşylykly ugrukdyrylandygynyň şerti bolup durýar.

8-nji mesele. $\vec{a}(2;-1), \vec{b}(-6;3)$ wektorlar ugurdaşmy ýa-da garşylykly?

Çözülişi. $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, diýmek, bu wektorlar kollinear

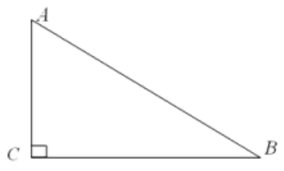
$$a_1b_1 + a_2b_2 = \sqrt{a_1^{\,2} + a_1^{\,2}} \cdot \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}};$$

$$2\cdot(-6) + (-1)\cdot 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 3^2},$$

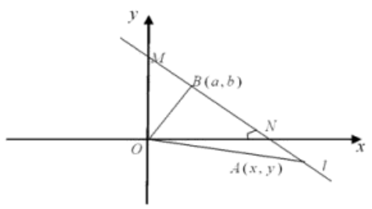
$$-12 - 3 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{45},$$

$$-15 = \sqrt{225}\ ,\ -15 = 15\,.$$

Diýmek, bu iki wektor garşylykly ugrukdyrylandyr.



17-nji surat



18-nji surat

§3. Göni çyzygyň deňlemesi

3.1. Göni çyzygyň umumy deňlemesi

6-njy TEOREMA. Dekart koordinata sistemasynda göni çyzygyň deňlemesi $ax+by+c=0$ görnüşdedir.

Subudy. Tekizlikde koordinatalar başlangyjyndan geçmeýän l göni çyzygy alalyň. Bu gönä koordinatalar başlangyjyndan perpendikulýar indereliň. Goý, bu perpendikulýaryň esasy $B(a;b)$ bolsun (18-nji surat). l göni çyzygyň erkin $A(x;y)$ nokadyny alalyň. Onda AOB gönüburçly üçburçluk üçin Pifagoryň teoremasyny ulansak, $(OA)^2=(OB)^2+(AB)^2$ bolar. Bu deňligi $x^2+y^2=a^2+b^2+(x-a)^2+(y-b)^2$ ýaly ýazyp bolýar. Skobkalary açyp, meňzeş agzalary toparlap, ählisini deňligiň çep tarapyna geçirsek we 2-ä gysgaltsak, $ax+by+a^2+b^2=0$ görnüşe geler. $a^2+b^2=c$ diýip bellesek, onda biz l göni çyzygyň deňlemesini görnüşde ýazyp bileris:

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

Bu deňlemä göni çyzygyň umumy deňlemesi diýilýär. Tersine, eger käbir nokadyň koordinatasy (1) deňlemäni kanagatlandyrýan bolsa, onda O,B nokatlar bilen gönüburçly üçburçluk döredilýändir, ýagny ol OB gönä B nokatda perpendikulýar bolan l gönä degişlidir. Teorema subut edildi.

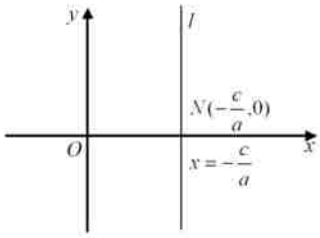
Eger-de göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýän bolsa, onda (1) deňleme $x=0;\ y=0$ şertleri kanagatlandyrmaly. (1) deňlemede $x=y=0$ goýsak, onda $c=0$ deňligi alarys.

Netijede, bu ýagdaýda (1) deňleme:

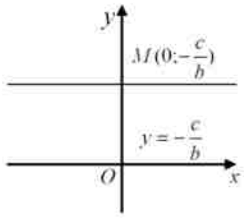
$$ax+by=0 \qquad (2)$$

görnüşi alýar.

Eger-de O nokadyň deregine islendik başga bir l gönä degişli bolmadyk nokatdan l gönä perpendikulýar geçirsek hem biz (1) deňlemäni alarys.



19-njy surat



20-nji surat

l gönüniň koordinata oklaryny kesýän nokatlaryny tapalyň. Ox okunyň nokatlary üçin $y=0$. y-iň bu bahasyny (1) deňlemede ýerine goýsak $ax+c=0$. Bu ýerden $x=-\frac{c}{a}$ alarys. Şeýlelikde, l göni x okuny $N(-\frac{c}{a};0)$ nokatda kesýär (19-njy surat). Şuňa meňzeşlikde, (1) deňlemede $x=0$ goýsak, biz $by+c=0$ alarys, bu ýerden bolsa $y=-\frac{c}{b}$. Şeýlelikde, l göni Oy okuny $M(0;-\frac{c}{b})$ nokatda kesýär (20-nji surat).

Göni çyzygyň köp görnüşli deňlemeleri bar. Olaryň biri-de burç koeffisiýentli deňlemesidir. Eger-de $b\neq0$ bolsa, (1) deňlemäniň ähli agzalaryny b bölsek, onda

$$y=-\frac{ax}{b}-\frac{c}{b} \qquad (3)$$

görnüşli deňleme alarys. NOM gönüburçly üçburçlukdan (18-nji surat) $tg\alpha=\frac{OM}{ON}=(-c)/b:(-c/a)=a/b$ deňligi alarys. Diýmek, ýokardaky (3) deňlemedäki $a\ b$ drobyň geometrik manysy l göni çyzygyň Ox

oky bilen emele getirýän ýiti burçunyň tangensine deňdiginden ybaratdyr. $-\frac{a}{b}=-tg\alpha=K; \quad -\frac{c}{b}=L$ diýip bellesek onda (3) deňleme

$$y=Kx+L \qquad (4)$$

görnüşe gelýär.

Bu deňlemä göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi diýilýär. K-sana bolsa l gönüniň burç koeffisiýenti diýilýär.

9-njy mesele. $A(-1;3)$ we $B(2;-3)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. A we B nokatlar käbir l gönä degişli bolsa, onda bu nokatlaryň koordinatalary $ax+by+c=0$ deňlemäni kanagatlandyrmaly, ýagny $-a+3b+c=0; \quad 2a-3b+c=0.$

Bulary goşsak $a=-2c$ alarys, a-nyň bahasyny deňlemeleriň birine goýup $b=-c$ alarys. a, b sanlaryň bahalaryny umumy deňlemä goýsak, $-2cx-cy+c=0$ we gysgaldyp $2x+y-1=0$ deňligi alarys. Bu A we B nokatlaryň üstünden geçýän gönüniň deňlemesidir.

3.2. Göni çyzygyň koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi

Goý, l göni $ax+by+c=0$ umumy deňlemesi bilen berlen bolsun. Göni çyzygyň koordinatalar sistemasynda ýerleşişi a, b, c koeffisiýentleriň bahalaryna baglydyr.

1. $a=0$, $b\neq0$, $c\neq0$. Bu ýagdaýda göni çyzygyň umumy deňlemesi $by+c=0$ görnüşi alar. Bu ýerden $y=-\frac{c}{b}$ alarys. Diýmek, l göni çyzygyň ähli nokatlarynyň ordinatasy $-\frac{c}{b}$ deň. Onda l göni çyzyk Ox okuna paralleldir (20-nji surat).

2. $a\neq0$, $b=0$, $c\neq0$ ýagdaýda göni çyzygyň umumy deňlemesi $ax+c=0$ görnüşi alar. Bu ýerden $x=-c/a$ bolar. Diýmek, l göni çyzygyň ähli

nokatlarynyň absissasy $-\frac{c}{a}$ deň. Şeýlelikde, bu ýagdaýda l göni çyzyk Oy okuna paralleldir (19-njy surat).

3. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0,$ bu ýagdaýda göni çyzygyň umumy deňlemesi $ax+by=0$ görnüşi alar we ony $O(0;0)$ nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Oňa görä-de bu ýagdaýda l göni koordinatalar başlangyjyndan geçýär.

4. $a=c=0,\ \ b \neq 0.$ Bu ýagdaýda $a=0$ bolany üçin l göni Ox okuna parallel, $c=0$ bolany üçin hem l göni koordinata başlangyjyndan geçýär. Diýmek, l göni Ox oky bilen gabat gelýär.

5. $b=c=0,\ \ a \neq 0$ ýagdaýda l göni Oy oky bilen gabat gelýär.

3.3. Göni çyzygyň kanonik we parametrik deňlemeleri

Goý, l gönüde $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ nokatlar berlen we $N(x;y)$ bu göni çyzygyň erkin nokady bolsun.

$\vec{AN}$ we $\vec{AB}$ wektorlaryň bir göni çyzyga degişlidigine görä, olar özara kollineardyrlar, ýagny $\overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AB}$. Kollinear wektorlaryň birini beýlekisiniň üsti bilen aňladyp bolýandygyny nazarda tutsak,

$$\overrightarrow{AN} = t\,\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

deňlik dogrudyr (t hakyky san). Bu wektorlaryň koordinatalary $\overrightarrow{AN}$ $(x-x_1;\ y-y_1)$, $\overrightarrow{AB}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ ýaly bolýar. (1) deňlige görä, olaryň biratly koordinatalaryny deňlesek, aşakdaky deňligi alarys.

$$\begin{cases} x-x_1 = t(x_2-x_1) \\ y-y_1 = t(y_2-y_1) \end{cases} \quad (2) \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t(x_2-x_1)+x_1 \\ y = t(y_2-y_1)+y_1 \end{cases}.$$

Bu deňlemä göni çyzygyň parametrik deňlemesi diýilýär. Bu ýerde t-sana göni çyzygyň parametri diýilýär we onuň her bir bahasyna l gönüde diňe bir nokat degişlidir.

Göni çyzygyň iki nokadyndan geçýän kanonik deňlemesini almak üçin (2) sistemadan t-ni tapalyň we bahasyny deňläliň.

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Bu deňlemä iki nokadyň üstünden geçýän göniniň kanonik deňlemesi diýilýär.

$\overrightarrow{AB}$ wektora göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory diýilýär. Onuň koordinatalaryny $a=x_2-x_1$; $b=y_2-y_1$ ýaly bellesek, göni çyzygyň kanonik deňlemesi aşakdaky görnüşi alar

$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$, *parametrik denlemesi bolsa* $\begin{cases} x - x_1 = ta \\ y - y_1 = tb \end{cases}$ ýaly bolar.

Bellik. Göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory dürli hili bolup bilýär, başgaça l göni çyzyga parallel islendik wektory onuň ugrukdyryjy wektory hökmünde kabul edip bolýär. Oňa görä-de göni çyzygyň parametrik we kanonik deňlemesi dürli görnüşde berilmegi mümkin.

3.4. Iki göni çyzygyň arasyndaky burç

Kesgitleme. Iki göni çyzygyň arasyndaky burç diýip, olaryň ugrukdyryjy wektorlarynyň arasyndaky burça aýdylýar.

Goý, a we b gönüleriň ugrukdyryjy wektorlarynyň koordinatalary $\vec{a}(a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$ we olaryň degişli parametrlerini t we p diýip alalyň. Goý, a göni $A(x_1;y_1)$ we b göni $B(x_2;y_2)$ nokatdan geçýän bolsun, onda olaryň parametrik deňlemesi aşakdaky görnüşde bolar:

$$a:\begin{cases} x = ta_1 + x_1 \\ y = ta_2 + y_1 \end{cases} \quad (1) \qquad b:\begin{cases} x = pb_1 + x_2 \\ y = pb_2 + y_2 \end{cases} \quad (2)$$

wektorlaryň arasyndaky burçlary aşakdaky formuladan taparys:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Eger-de göni çyzygyň deňlemesi $ax+by+c=0$ ýaly berlen bolsa, onda onuň ugrukdyryjy wektorlary $\vec{m}(-b;a)$ ýaly, oňa perpendikulýar $\vec{n}$ wektoryň koordinatasy $\vec{n}(a;b)$ ýaly kesgitlenýär.

Goý, l_1 we l_2 gönüleriň umumy deňlemeleri berlen bolsun

$$l_1:\ a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$l_2:\ a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Onda olaryň ugrukdyryjy wektorlary $\overrightarrow{m_1}$ $(-b_1;\ a_1)$, $\overrightarrow{m_2}$ $(-b_2;a_2)$ bolar, olaryň arasyndaky burç bolsa

$$\cos\varphi = \frac{\vec{m}_1\,\vec{m}_2}{|\vec{m}_1|\,|\vec{m}_2|} = \frac{b_1b_2 + a_1a_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ýaly kesgitlenýär.

I. Eger $l_1 \perp l_2$ bolsa, onda olaryň arasyndaky burç ugrukdyryjy wektorlaryň arasyndaky burça deň bolup, $\overrightarrow{m_1}\overrightarrow{m_2} = 0$ we netijede

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \qquad (3)$$

bolar. Muňa iki gönüniň perpendikulýarlyk şerti diýilýär.

II. Eger-de $l_1 || l_2$ bolsa, onda $\overrightarrow{m_1} || \overrightarrow{m_2}$ we netijede olaryň koordinatalary proporsionaldyr, ýagny $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. (4)

Muňa iki gönüniń paralellik şerti diýilýär.

10-njy mesele. $x+y-5=0;\ x-y-3=0$ gönüleriň arasyndaky burçy hasaplamaly.

Çözülişi. Bu gönüleriň ugrukdyryjy wektorlarynyň koordinatalary $\vec{m}_1(-1;1)$, $\vec{m}_2(1;1)$ ýaly bolar.

Bu ýerden $\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2=-1+1=0 \Rightarrow \cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi=90^0$.

3.5. Iki göni çyzygyň kesişme nokady

Umuman, iki çyzygyň kesişme nokatlaryny tapmak üçin olaryň deňlemelerini bilelikde bir sistemada çözmelidir.

Goý, bize l_1 we l_2 iki göni çyzyklar umumy deňlemeleri bilen berlen bolsun: $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$. $A(x_0,y_0)$ nokat bu gönüleriň kesişme nokady bolsa, onda A nokadyň koordinatalary ýokarky iki deňlemäni hem kanagatlandyrmaly, ýagny

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0 \end{cases} \qquad (1)$$

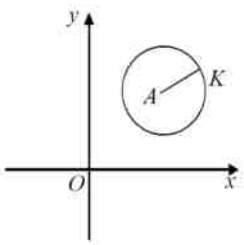
Haçan (1) deňlemäniň köki bar? Bu ýerde iki ýagdaýyň bolmagy mümkin.

1. Deňlemelerde näbellileriň koeffisiýentleri proporsional däl, ýagny $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

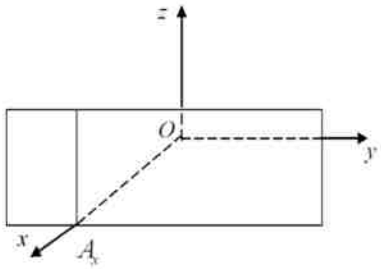
Bu ýagdaýda (1) sistemanyň ýeke-täk çözülişi bar we ol aşakdaky ýaly tapylýar:

$$x_0=(b_1c_2-b_2c_1)/(a_1b_2-a_2b_1),$$
$$y_0=(a_2c_1-a_1c_2)/(a_1b_2-a_2b_1). \qquad (2)$$

2. Eger-de $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ bolsa, onda (2) deňlemelerdäki droblaryň maýdalawjysy nol bolýar we netijede x_0, y_0 tapyp bolmaýar. Bu ýagdaýda l_1 we l_2 göni çyzyklar paralleldirler.



21-nji surat



22-nji surat

3.6. Töweregiň deňlemesi

Eger-de x, y iki näbellili bir deňlemäni berlen figuranyň islendik nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrýan bolsa hem-de tersine bu deňlemäni kanagatlandyrýan islendik x, y sanlar berlen figura degişli nokadyň koordinatalary bolsa, onda bu deňlemä berlen figuranyň deňlemesi diýilýär.

Töweregiň deňlemesini tapalyň. Goý, R radiusly töweregiň merkezi $A(a;b)$ nokatda bolsun. Bu töweregiň erkin nokadyny $K(x;y)$ bilen bellesek, onda töweregiň kesgitlemesine görä $R=AK$. AK kesimiň uzynlygy öňki temadaky formula boýunça $(AK)^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, ýagny

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

deňlemäni alarys (21-nji surat).

Bu deňlemäni kanagatlandyrýan $K(x;y)$ nokat A nokatdan R uzaklykdadyr. Diýmek, bu nokat töwerege degişlidir. Şeýlelikde, (1) deňleme R radiusly, merkezi $A(a;b)$ nokatda bolan töweregiň deňlemesidir. Eger-de, töweregiň merkezi koordinata başlangyjynda bolsa, onda $a=b=0$ bolup, (1) deňleme

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (2)$$

görnüşi alar.

3.7. Göni çyzyk bilen töweregiň özara ýerleşişi

Ýönekeýlik üçin merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan R radiusly töweregi we Ox okuna perpendikulýar l gönini alalyň. Onda olaryň deňlemeleri $x^2+y^2=R^2$, $x=d$ ýaly bolar.

Bu deňlemeleri bilelikde çözüp

$$x = d; \quad y = \pm\sqrt{R^2 - d^2} \qquad (1)$$

deňlikleri alarys.

Bu ýerde üç ýagdaýyň bolmagy mümkin.

1. $R>d$. Bu ýagdaýda (1) sistemanyň iki çözülişi bardyr: $\left(d; \sqrt{R^2-d^2}\right)$ we $\left(d; -\sqrt{R^2-d^2}\right)$. Diýmek, l göni töweregi iki nokatda kesýär.

2. $R=d$. Bu ýagdaýda l göni bilen töweregiň diňe bir umumy nokady $(d;0)$ bardyr. Diýmek, l göni töwerege galtaşýar.

3. $R<d$ ýagdaýda bolsa, l göni çyzyk töwerek bilen kesişmeýär. Çünki (1) sistemanyň çözüwi ýokdur.

§4. Gönükmeler

1) Koordinatalar oklaryny geçiriň, oklarda uzynlyk birligini saýlap alyň we $(1;2)$, $(-2;1)$, $(-1;-3)$, $(2;-1)$ koordinataly nokatlary guruň.
2) xOy tekizlikde islendik dört nokady alyň. Bu nokatlaryň koordinatalaryny tapyň.
3) Ox oka parallel göni çyzykda iki nokat alnypdyr. Olaryň687 biriniň ordinatasy $y=2$. Beýleki nokadyň ordinatasy näçä deň? (J.: $y=2$).
4) Ox oka perpendikulýar göni çyzykda iki nokat alnypdyr. Olaryň biriniň absisasy $x=3$. Beýleki nokadyň absisasy näçä deň? (J.: $x=3$).
5) $A(2;3)$ nokatdan Ox oka perpendikulýar inderilipdir. Perpendikulýaryň esasynyň koordinatasyny tapyň (J.: $x=2; y=0$).

6) $A(2;3)$ nokatdan Ox oka parallel göni çyzyk geçirilipdir. Onuň Oy ok bilen kesişme nokadynyň koordinatalaryny tapyň. (J.: $x=0$, $y=3$).

7) xOy tekizligiň absissasy $x=3$ bolan nokatlarynyň geometrik ornuny tapyň. (J.: $x=3$ nokatda Ox oka perpendikulýar).

8) xOy tekizligiň absissasy $|x|=3$ bolan nokatlarynyň geometrik ornuny tapyň (J.: $x=3$; $x=-3$ nokatlardan Ox oka geçirilen perpendikulýarlar).

9) $A(-3;2)$ we $B(4;1)$ nokatlar berlipdir. AB kesimiň Oy oky kesýändigini, Ox oky bolsa kesmeýändigini subut ediň.

10) $M(-3;4)$ nokatdan: 1) Ox oka; 2) Oy oka çenli uzaklygy tapyň. (J.: $x=4$; $d=3$).

11) Eger: 1)$A(1;2)$, $B(5;6)$; 2)$A(-3;4)$, $B(1;2)$; 3)$A(5;7)$, $B(-3;5)$ bolsa, AB kesimiň ortasynyň koordinatalaryny tapyň. (J.: 1)$x=3$, $y=4$; 2)$x=-1$, $y=3$; 3)$x=1$, $y=6$).

12) C nokat AB kesimiň ortasy. Eger: 1)$A(0;1)$, $C(-1;2)$; 2)$A(-1;3)$, $C(1;-1)$; 3)$A(0;0)$, $C(-2;2)$ bolsa, AB kesimiň ikinji ujunyň koordinatalaryny tapyň. (J.: 1) $x=-2$, $y=3$; 2)$x=3$, $y=-5$; 3) $x=-4$, $y=4$).

13) Depeleri $A(-1;-2)$, $B(2;-5)$, $C(1;-2)$, $D(-2;1)$ nokatlarda bolan dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň. Onuň diagonallarynyň kesişme nokadyny tapyň. (J.: $O(0;-2)$).

14) Depeleri $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(-4;0)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň taraplarynyň ortalaryny tapyň. (J.: $(0;1)$, $(-2;0)$, $(-2;1)$).

15) Parallelogramyň üç depesi $A(1;0)$, $B(2;3)$ $C(3;2)$ berlipdir. Dördünji D depesiniň koordinatalaryny we diagonallarynyň kesişme nokadyny tapyň. Bu meseläniň näçe çözüwi bar? (J.: üç çözüwi bar.

$D_1(2;-1)$, $O_1(2;1)$, $D_2(4;5)$, $O_2(\frac{5}{2};\frac{5}{2})$, $D_3(0;1)$, $O_3(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$).

16) Tekizlikde $R=(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ umumy dekart koordinatalar sistemasynda aşakdaky wektorlary gurmaly:

1) $\overrightarrow{a_1}(1;2)$, 2) $\overrightarrow{a_2}(2;-1)$, 3) $\overrightarrow{a_3}(\sqrt{2};1)$, 4) $\overrightarrow{a_4}(-2;\frac{1}{2})$,

5) $\overrightarrow{a_5}(\frac{1}{5};0)$.

17) $\vec{a}(4;2)$, $\vec{b}(2;-3)$, $\vec{c}(-2;8)$, üç wektor berlipdir. Aşakdaky wektorlaryň koordinatalaryny tapyň: *1)* $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, *2)* $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, *3)* $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, *4)* $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. (J. : *1) (4;7), 2) (4;-3), 3) (8; -9) 4) (0;13))* .

18. Göni çyzykda ýatmaýan üç *A, B, C* nokat berlipdir, özem *B* nokat *A* we *C* nokatlaryň arasynda ýatýar. *AB, AC, BA* we *BC* wektorlaryň arasynda ugurdaş we garşylykly ugrukdyrylan wektorlary aýdyň.

19) *ABCD* dörtburçluk-parallellogram. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{DC}$ wektorlaryň deňdigini subut ediň.

20) $\overrightarrow{AB}$ wektor we *C* nokat berlipdir. Eger:

1) *C* nokat *AB* göni çyzykda ýatýan bolsa;

2) *C* nokat *AB* göni çyzykda ýatmaýan bolsa, onda *C* nokatdan bu wektora deň wektory alyp goýuň.

21) $\vec{a}(2;4)$, $\vec{b}(-1;2)$ we $\vec{c}(c_1;c_2)$ wektorlar koordinatalar başlangyjynda alnyp goýlupdyr. Olaryň uçlarynyň koordinatalary nämä deň? (J.: *A(2;4), B(-1;2),* $C(c_1;c_2)$).

22) $\vec{a}(5;m)$ wektoryň absolýut ululygy 13-e deň, $\vec{b}(n;24)$ wektoryň absolýut ululygy bolsa 25-e deň. *m* we *n* tapyň . (J. : *m=12; n=7*).

23) *A(0;1), B(1;0), C(1;2), D(2;1)* nokatlar berlipdir. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{CD}$ wektorlaryň deňdiklerini subut ediň.

24) $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$ üç nokat berlipdir. $\vec{AB}$ we $\vec{CD}$ wektorlar deň bolar ýaly $D(x;y)$ nokady tapyň (J. : $D(-2;0)$).

25) Eger: 1) $\vec{a}(1;-4)$, $\vec{b}(-4;8)$; 2) $\vec{a}(2;5)$, $\vec{b}(4;3)$; bolsa, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemine deň $\vec{c}$ wektory we bu wektoryň absolýut ululygyny tapyň.

(J.: 1) $\vec{c}(-3;4)$, $|\vec{c}|=5$, 2) $\vec{c}(6;8)$, $|\vec{c}|=10$).

26) ABC üçburçluk berlipdir. 1) $\vec{AC}$ we $\vec{CB}$, 2) $\vec{AB}$ we $\overline{BC}$; 3) $\vec{CA}$, $\vec{AB}$ wektorlaryň jemini tapyň.

27) $ABCD$ parallelogramyň diagonallary O nokatda kesişýärler. M, N, P, Q, nokatlar degişlilikde $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ kesimleriň ortalary bolsa aşakdaky wektorlary çyzgyda gurmaly.

1) $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}$, 2) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CD}$, 3) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{DQ}$.

28) Uzynlygy $|\vec{a}|=3$ deň bolan $\vec{a}$ -wektor berlipdir. $\vec{a}$ wektora garşylykly we uzynlygy $|\vec{b}|=5$ bolan wektory gurmaly.

29) O merkezli $ABCDEF$ - dogry altyburçluk berlipdir. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ wektorlaryň üsti bilen $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ wektorlary aňlatmaly.

30) Eger ABC üçburçlukda AK, BL, CM wektorlar medianalar bilen kesgitlenen bolsun, olary $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ wektorlaryň üsti bilen aňlatmaly. $\vec{a}(1;-4)$, $\vec{b}(-4;8)$; $\vec{a}(-2;7)$, $\vec{b}(4;-1)$ $\vec{a}-\vec{b}$

31) Eger: 1) $\bar{a}(1,-4), \bar{b}(-4;8)$; 2) $\bar{a}(-2;7)$, $\bar{b}(4;-1)$ bolsa, $(\bar{a}-\bar{b})$ wektory we onuň absolýut ululygyny tapyň

(J.: 1) $\vec{c}(5;-12)$, $|\vec{c}| = 13$, 2) $\vec{c}(-6;8)$, $|\vec{c}| = 10$).

32) Umumy başlangyjy bolan $\vec{AB}$ we $\vec{AC}$ wektorlar berlipdir. $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ bolýandygyny subut ediň.

33) $ABCD$ parallelogramyň diagonallary N nokatda kesişýärler. $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlary $\vec{a} = \vec{AN}$, $\vec{b} = \vec{BN}$ wektorlar arkaly aňladyň.

34) Erkin üç $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlary çyzyň we: 1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

2) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ wektorlara deň wektorlary guruň.

35) Erkin $\vec{a}$ wektor berlen bolsa, onda $\sqrt{7} \cdot \vec{a}$, $\sqrt{8}\,\vec{a}$; $\sqrt{17}\,\vec{a}$;

$-\sqrt{2}\vec{a}$, $\sqrt{10}\,\vec{a}$, $-\frac{2}{3}\vec{a}, -\frac{3}{2}\vec{a}$, $\frac{2}{5}\vec{a}$ wektorlary guruń.

36) 1) $\vec{AB}, \vec{BC}$ we $\vec{AC}$ wektorlar ьзin $|\vec{AC}| \le |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$ deňsizligiň ýerliklidigini subut ediň.

2) Islendik $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar ьзin $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ deňsizligiň ýerliklidigini subut ediň.

37) $A(x_1;y_1)$ we $B(x_2;y_2)$ nokatlar berlipdir. $\vec{AB}$ we $\vec{BA}$ wektorlaryň garşylykly ugrukdyrylandyklaryny subut ediň.

38) $\vec{a}\,(1;2)$ we $\vec{b}\,(0{,}5;1)$ wektorlaryň ugurdaşdyklaryny, $\vec{c}\,(-1;2)$ we $\vec{d}\,(0{,}5;-1)$ wektorlaryň bolsa garşylykly ugrukdyrylandyklaryny subut ediň.

39) $\vec{a}\,(3;2)$, we $\vec{b}\,(0;-1)$ wektorlar berlipdir. $\vec{c}=-2\vec{a}+4\vec{b}$ wektory we onuň absolýut ululygyny tapyň. (J.: 1) $\vec{c}(-6;-8)$, $|\vec{c}|=10$) .

40) $\lambda\vec{a}$ wektoryň absolýut ululygy 5-e deň. Eger: 1) $\vec{a}(-6;8)$; 2) $\vec{a}(3;-4)$; 3) $\vec{a}(5;12)$ bolsa, onda λ tapyň. (J.: 1) $\lambda=\frac{1}{2}$; 2) $\lambda=1$; 3) $\lambda=\frac{5}{13}$) .

41) ABC üçburçlukda AN mediana geçirilipdir. $\vec{AN}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$ bolýandygyny subut ediň.

42) M we N nokatlar degişlilikde AB we CD kesimleriň ortalarydyr. $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{BD})$ wektor deňligi subut ediň.

43) $ABCD$ parallelogram berlipdir, $\vec{AC}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$. $\vec{AB},\vec{CB},\vec{CD}$ we $\vec{AD}$ wektorlary $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar arkaly aňladyň.

44) Kollinear wektorlaryň degişli koordinatalarynyň proporsionaldyklaryny subut ediň. Tersine, eger nol däl iki wektoryň degişli koordinatalary proporsional bolsa, onda bu wektorlar kolleniardyrlar.

45) $\vec{a}\,(2;-4)$, $\vec{b}\,(1;11)$, $\vec{c}(1;-2)$, $\vec{d}(-2;4)$ wektorlar berlipdir.

Kollinear wektorlaryň jübütlerini görkeziň. Olaryň haýsylary ugurdaş, haýsylary garşylykly ugrukdyrylan?

$\left(J:\vec{a}\,\|\,\vec{c},\ \vec{a}\ ugurdaş\ \vec{c}\ bilen,\ \vec{a}\ we\ \vec{d}\quad garşylykly\right)$.

46) $\vec{a}(1;-1)$ we $\vec{b}(-2;m)$ wektorlaryň kollineardyklary belli. m-iň näçä deňdigini tapyň (J: m=2).

47) $\vec{a}(1;0)$ $\vec{b}(1;1)$ we $\vec{c}(-1;0)$ wektorlar berlipdir.

$\vec{c}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}$ deňlik ýerlikli bolar ýaly λ we μ sanlary tapyň.
(J: λ =-1; μ=0).

48) $\vec{a}(1;4)$ we $\vec{b}(-3;2)$ wektorlar berlen. $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ we $\vec{b}$

wektorlar perpendikulýar bolar ýaly λ sany tapmaly. *(J.: λ=- $-\frac{5}{13}$)*.

49) $\vec{a}(1;2)$ we $\vec{b}(-1;\frac{1}{2})$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

(J.: cosφ=0; $\varphi=\frac{\pi}{2}$).

50) $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlipdir. Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň .... 60^{o} deňdigi belli bolsa, $\vec{a}+\vec{b}$ wektoryň absolýut ululygyny tapyň.

$$(\text{J.}: \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 2).$$

51) Öňki meseledäki $\vec{a}$ we $\vec{a}+\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň. (J: φ=0).

52) Üçburçlugyň $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(4;5)$ depeleri berlipdir. Üçburçlugyň burçlarynyň kosinuslaryny tapyň.

$$(J.: \cos\angle A = \frac{3}{5};\quad \cos\angle B = 0;\quad \cos\angle C = \frac{4}{5}) \quad .$$

53) Depeleri $A(0;1), B(\sqrt{3};1), C(\sqrt{3};0)$ bolan üçburçlugyň burçlaryny tapyň. (J.: $\angle A = 30^{0}$, $\angle B = 90^{0}$, $\angle C = 60^{0}$).

54) $\vec{a}(m;n)$ we $\vec{b}(-n;m)$ wektorlaryň perpendikulýardyklaryny subut ediň.

55) $\vec{a}(1;0)$ we $\vec{b}(1;1)$ wektorlar berlipdir $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ wektor $\vec{a}$ wektora perpendikulýar bolar ýaly λ sany tapyň (J: λ = -1).

56) Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar birlik kollinear däl wektorlar bolsa, onda

$\vec{a}+\vec{b}$ we $\vec{a}-\vec{b}$ wektorlaryň noldan tapawutlydyklaryny subut ediň.

57) Parallelogramyň diagonallarynyň kwadratlarynyň jeminiň onuň taraplarynyň kwadratlarynyň jemine deňdigini subut ediň.

58) Üçburçlugyň $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ taraplary berlipdir. Onuň m_a, m_b, m_c medianalaryny tapyň.

$(J: \vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC}),\ \vec{m}_b = \frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC}),\ \ \vec{m}_c = \frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CB}))$.

59) Berlen iki nokada çenli uzaklyklarynyň kwadratlarynyň jemi hemişelik bolan nokatlary birikdirýän kesimiň, merkezi bu berlen nokatlary birikdirýän kesimiň ortasy bolan töwerekdigini subut ediň.

60) $\vec{a}+\vec{b}$ we $\vec{a}-\vec{b}$ wektorlar perpendikulýar. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ bolýandygyny subut ediň.

61) Rombuň diagonallarynyň perpendikulýardyklaryny wektorlaryň kömegi bilen subut ediň.

62) *A(1;1), B(2;3), C(0;4), D(-1;2)* dört nokat berlipdir. *ABCD* dörtburçlugyň göniburçlykdygyny subut ediň.

63) *A(0;0), B(1;1), C(0;2), D(-1;1)* dört nokat berlipdir. *ABCD* dörtburçlugyň kwadratdygyny subut ediň.

64) $\vec{a}(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}), \vec{b}(\frac{2}{3};\frac{2}{3}),\ \vec{c}(0;-1),\ \vec{d}(\frac{3}{5};-\frac{4}{5})$ wektorlaryň arasyndan birlik wektorlary tapyň we olaryň haýsylarynyň kollineardyklaryny subut ediň.

65) $A(-1;1)$, $B(1;0)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň. (J.: $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$).

66) Eger 1) $A(2;3)$, $B(3;2)$, 2) $A(4;-1)$, $B(-6;2)$; 3) $A(5;-3)$, $B(-1;-2)$ bolsa, AB göni çyzygyň deňlemesini düzüň. (J: 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$).

67) Depeleri $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(-4;0)$ nokatlarda bolan OAB üçburçlugyň
taraplaryny özünde saklaýan göni çyzyklaryň deňlemelerini düzüň. (J.: $x=0$; $y=0$; $x-2y+4=0$).

68) Eger $ax+by=1$ göni çyzygyň $(1;2)$ we $(2;1)$ nokatlardan geçýändigi belli bolsa, deňlemedäki a we b koordinatalar näçe deň? (J.: $a=b=\frac{1}{3}$).

69) 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$ deňleme bilen berlen göni çyzygyň koordinata oklary bilen kesişme nokatlaryny tapyň. (J.: 1) $(-3;0)$, $(0;\frac{-3}{2})$; 2) $(4;0)$, $(0;3)$; 3) $(-2;0)$, $(0;3)$; 4) $(2,5;0)$, $(0;-5)$).

70) Oy oka parallel we $(2;-3)$ nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň. (J.: $x=2$).

71) Ox oka parallel we $(2;3)$ nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň. (J.: $y=3$).

72) Koordinatalar başlangyjyndan we $(2;3)$ nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesini düzüň. (J: $3x-2y=0$).

73) 1) $x+2y+3=0$, 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$ deňleme bilen berlen göni çyzyklaryň burç koeffisiýentini tapyň.

(J.: 1) $k=-\frac{1}{2}$; 2) $k=-\frac{3}{4}$; 3) $k=\frac{3}{2}$; 4) $k=2$).

74) Berlen göni çyzygyň Ox ok bilen emele getirýän ýiti burçuny tapyň:

1)2y=2x+3; 2) $x\sqrt{3}-y+3=0;$ $3)\, y\sqrt{3}-x+1=0$

(J.: 1) 45^0, 2) 60^0; 3) 30^0).

75) 1) *2x-3=0,* *2)3y+5=0,* gönüler koordinata oklaryna görä nähili ýerleşýär ? (J.: 1) *Oy* oka parallel, 2) *Ox* oka parallel).

76) *1) x+4=0, 2) 4y+3=0* gönüleriň haýsysy *Ox* okuna perpendikulýar ? *(J.: x+4=0).*

77) 1) *3x+5=0*, 2) *5y+2=0*, 3) *3x+4y=0* gönüleriń haýsysy *Oy* okuna perpendikulýar ? *(J.:* 5y+2=0).

78) $\vec{a}(1;4)$ wektor A(2,3) nokatdan geçýän bolsa, ugrukdyrylan wektoryň kanonik deňlemesini ýazyň. *(J.:* $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{4}$).

79) *A(3;5), B(1;6)* iki nokatdan geçýän göni çyzygyň kanoniki deňlemesini ýazyň. *(J. :* $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-5}{1}$).

80) $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{3}$ göni çyzygyň ugrukdyryjy wektoryny we oňa degişli bir nokadyň koordinatalaryny tapyň. *(J.: A (3;-1) ,* $\vec{a}(4;3)$).

81) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \end{cases}$ t-niň haýsy bahalarynda O*x* we O*y* oklaryny kesýär ?

(J.: t=$\frac{1}{3}$, $t=-\frac{1}{2}$).

82 *) t=1; t=-2; t=* $\sqrt{2}$ bolsa, degişli nokatlaryň koordinatalaryny tapyň: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-1 \end{cases}$.

(J.: (3;2), (-3;-7), (2 $\sqrt{2}$ *+1;3* $\sqrt{2}$ *-1)).*

83) $\frac{x-5}{6}=\frac{y+3}{2}$ kanonik görnüşde berlen çyzygyň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyň. (J.: $\begin{cases} x=6t+5 \\ y=2t-3 \end{cases}$).

84) Aşakdaky deňlemeler bilen berlen göni çyzyklaryň kesişme nokadyny tapyň:

1) $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$; (J.: (1;-2))

2) $3x-y-2=0$, $2x+y-8=0$; (J.: (2;4))

3) $4x+5y+8=0$,$4x-2y-6=0$; (J.: (0,5;-2)).

85) $x+2y=3$, $2x-y=1$ we *$3x+y=4$* göni çyzyklaryň bir nokatda kesişýän-diklerini subut ediň.

86) Depeleri (1;0), (2;3), (3;2) nokatlarda bolan üçburçlugyň medianalarynyň kesişme nokadynyň koordinatalaryny tapyň.

(J. : $(2;\frac{5}{3})$.

87) $\ell_1 \neq \ell_2$ bolanda $y=kx+\ell_1$, $y=kx+\ell_2$ deňlemeler bilen berlen göni çyzyklaryň paralleldiklerini subut ediň.

88) (1;2), (3;4), (-4;3), (0;5), (5;-1) nokatlaryň haýsylary $x^2+y^2=25$ deňleme bilen berlen töwerege degişli ? *(J.: (3;4), (-4;3), (0;5)).*

89) $x^2+y^2=169$ deňleme bilen berlen töwerekde: 1) absissasy 5; 2)ordinatasy -12deň bolan nokady tapyň. *(J.: (5;12) we (5;-12); (5;-12), (-5;-12)).*

90) $A(2;0)$ we $B(-2;6)$ nokatlar berlipdir. Diametri AB kesime deň bolan töweregiň deňlemesini düzüň. *(J.: $x^2+(y-3)^2=13$).*

91) $A(-1;-1)$ we $C(-4;3)$ nokatlar berlipdir. Merkezi C nokatda bolan we A nokat arkaly geçýän töweregiň deňlemesini düzüň.

(J.: $(x+4)^2+(y-3)^2=25$).

92) Eger töweregiň (1;4) nokatdan geçýändigi we töweregiň radiusynyň 5 deňdigi belli bolsa, Ox okda töweregiň merkezini tapyň. *(J.: (-2;0)* ýa-da *(4;0)).*

93) Merkezi *(1;2)* nokatda bolan we *Ox* oka galtaşýan töweregiň deňlemesini düzüň. *(J.: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$)*.
94) Merkezi (-3;4) nokatda bolan we koordinatalar başlangyjy arkaly geçýän töweregiň deňlemesini düzüň. *(J.: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$)*.

95) $x^2+y^2+ax+by+c=0, \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$ deňleme bilen nähili geometrik figura berlipdir? (J.: merkezi $(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$ nokatda bolan töwerek).
96) Iki $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x+y=0$ töwerekleriň kesişme nokatlarynyň koordinatalalaryny tapyň. (J.: (0;-1),.
97) $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ töweregiň *Ox* oky bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň. (J.: (7;0) (1;0)).
98) $x^2+y^2-2ax+1=0$, $|a|>1$ töweregiň *Oy* oky bilen kesişmeýändigini subut ediň.
99) $x^2+y^2-2ax=0$ töweregiň *Oy* oka galtaşýandygyny subut ediň.
100) $x^2+y^2=1$ töweregiň: $y=x+1$. göni çyzyk bilen kesişme nokadyny tapyň. (J.: (0;1) we (-1;0)).
101) *c*-niň haýsy bahalarynda $x+y+c=0$ göni çyzyk we $x^2+y^2=1$ töwerek:

a) kesişýärler, b) kesişmeýärler. (J.: c< $\sqrt{2}$ kesişýär; c> $\sqrt{2}$ kesişmeýär; c= $\sqrt{2}$ galtaşýar).

II bap. Giňişlikde dekart koordinatalary we wektorlar

§1. Giňişlikde dekart koordinatalary

1.1. Giňişlikde dekart koordinatalaryň kesgitlenişi

Iki sany özara perpendikulýar x, y göni çyzyklar tekizlikde dekart koordinatalar sistemasyny kesgitleýär. Eger-de x y gönüleriň kesişme O nokadyndan olaryň ikisine-de perpendikulýar (xOy tekizligine perpendikulýar) z göni çyzygyny geçirsek, biz giňişlikde gönüburçly dekart koordinatalar sistemasyny alarys. x, y, z gönüleri peýkamlaşdyryp, biz olary oka öwreris, çünki ugry belli bolan göni çyzyga ok diýilýär. O nokatda x, y, z oklar iki bölege bölünýärler. Olaryň O nokatdan peýkamly ugruny položitel, beýleki tarapyna hem otrisatel ugur diýip kabul edeliň.

Ox, Oy, Oz oklarynda şol bir uzynlyk birligi boýunça sanlary ýerleşdirsek, olar san oklaryna öwrüler.

Gurlan dekart koordinatalar sistemasynyň Ox okuna absissa, Oy okuna ordinata, Oz okuna aplikata oklary diýilýär; xOy, xOz, yOz tekizliklere bolsa onuň koordinatalar tekizlikleri diýilýär. O nokada bolsa koordinatalar sistemasynyň başlangyjy diýilýär.

Synp otagynyň her bir burçundan çykýan üç göni, iki diwar we otagyň poly özboluşly dekart koordinatalar sistemasyny döredýär.

Giňişlikde dekart koordinatalar sistemasy näme üçin gerek, onuň wezipesi nämeden ybarat? Bu soraga aşakdaky ýaly jogap bermek bolar. Dekart koordinatalar sistemasynyň kömegi bilen giňişlikde her bir nokada tertipleşdirilen üç sany degişli edip goýup bolýar. Tersine, tertipleşdirilen üç sana bir nokady degişli edip bolýar. Bu ýagdaý bolsa geometriýany arifmetikanyň we algebranyň kömegi bilen öwrenmäge mümkinçilik döredýär.

1. Goý, bize giňişlikde erkin A nokat berlen bolsun. Bu nokadyň üsti bilen yOz tekizlige parallel tekizlik geçireliň. Bu tekizlik Ox okuny käbir A_x nokatda keser. (22-nji surat). A_x nokadyň

Ox san okundaky koordinatasyna A nokadyň birinji koordinatasy diýilýär. Şuňa meňzeş edip A nokadyň üstünden xOz, xOy tekizliklere parallel tekizlikleri geçirip, biz Oy okundan A_y ,Oz okundan A_z nokatlary alarys. Olaryň Oy, Oz oklaryndaky koordinatalary A nokadyň ikinji we üçünji koordinatalaryny berýär. Ony gysgaça $A(x;y;z)$ ýaly belleýärler. Netijede, biz erkin A nokat üçin tertipleşdirilen $(x;y;z)$ sanlary alarys.

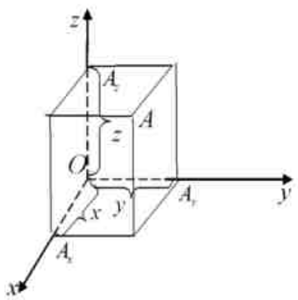
2. Tersine, goý, bize $(x;y;z)$ tertipleşdirilen üç sany san berlen bolsun. Onda absisada x koordinataly A_x, ordinatada y koordinataly A_y we aplikatada z koordinataly A_z nokatlary taparys. Bu nokatlardan yOz, xOz, xOy tekizliklerine parallel tekizlikleri geçirsek, olaryň hemmesine degişli bolan A nokady gurarys (23-nji surat).

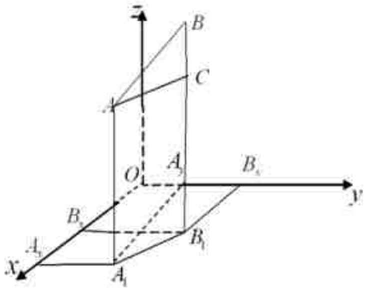
O nokatda kesişýän üç tekizlik giňişligi 8 bölege bölýär. Şol bir bölege degişli nokatlaryň biratly koordinatalarynyň alamaty meňzeşdir. Dürli böleklere degişli nokatlaryň koordinatalarynyň alamatlary dürlüdir. Eger koordinatalaryň biri nola deň bolsa, onda nokat koordinata tekizlikleriniň birine, ikisi nola deň bolsa koordinata oklaryň birine degişlidir.

1-nji mesele. $M_1(1;0;3)$, $M_2(0;3;1)$, $M_3(-1;3;4)$, $M_4(0;5;0)$, $M_5(-2;1;0)$, $M_6(3;0;0)$, $M_7(0;0;-3)$ nokatlaryň haýsysy koordinata oklarynda we haýsysy koordinata tekizliklerinde ýerleşýändigini kesgitläň.

Çözülişi. xOy tekizligine degişli nokatlar üçin $z=0$. Oňa görä-de M_4 ,M_5, M_6 nokatlar xOy tekizligine degişli. Edil şonuň ýaly xOz tekizliginiň nokatlary üçin $y=0$, yOz tekizliginiň nokatlary üçin $x=0$. Diýmek, M_1, M_6, M_7 nokatlar xOz tekizligine; M_2, M_4, M_7 nokatlar yOz tekizligine degişlidir. Ox okuna degişli nokatlar üçin $y=0$ $z=0$. Oňa görä-de M_6 nokat Ox okuna degişlidir. Edil şonuň ýaly Oy oka degişli nokatlar üçin $x=0$, $z=0$ we Oz oka degişli nokatlar üçin $x=0$, $y=0$. Diýmek, M_4 nokat Oy oka, M_7 nokat bolsa Oz oka degişlidir.

Ýokarda görşümiz ýaly, giňişlikde nokadyň ýagdaýyny kesgitleýän sanlara onuň koordinatalary diýilýär.





23-nji surat 24-nji surat

1.2. Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk

Iki nokadyň arasyndaky uzaklyk bu nokatlaryň koordinatalarynyň üsti bilen aňladylýar. Goý, bize $A(x_1;y_1;z_1)$; $B(x_2;y_2;z_2)$ nokatlar berlen bolsun. Goý, A_1, B_1 nokatlar A, B nokatlaryň xOy tekizligine proýeksiýasy bolsun. Goý, A_1 B_1 nokatlaryň A_x, B_x; A_y, B_y nokatlaryny öňki ýaly edip guralyň (24-nji surat), A_1B_1 kesim AB kesimiň xOy tekizligine proýeksiýasydyr. A_1, B_1 nokatlaryň xOy tekizligine degişli bolany üçin bu nokatlaryň $A_1(x_1;y_1;0)$; $B_1(x_2;y_2;0)$ ýaly koordinatalary bardyr. Tekizlikde iki nokadyň arasyndaky uzaklygy kesgitlemegiň formulasyna laýyklykda

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

A nokatdan A_1B_1 kesime parallel, hem deň bolan AC kesimi guralyň. ABC gönüburçly üçburçlukdan $(\angle C = 90^o)$ Pifagoryň teoremasy boýunça

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (1)$$

BC kesimiň Oz okuna parallel bolany üçin $BC = z_2 - z_1$. ACB_1A_1 dörtburçlugyň parallelogram bolany üçin $AC = A_1B_1$. Bu ýagdaýda (1) formuladan: $(AB)^2=(A_1B_1)^2+(BC)^2$. Görnüşi ýaly bu ýerden bolsa $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$ ýa-da

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (2)$$

formulany alarys. Bu formula boýunça giňişlikdäki iki nokadyň arasyndaky uzaklyk kesgitlenilýär. Eger-de $P(x;y;z)$ nokat AB kesimiň ortasy bolsa, onuň koordinatalary tekizlikdäkä meňzeşlikde

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}; \qquad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3)$$

ýaly kesgitlenilýär.

Goý, bize $A(x;y;z)$ nokat berlen bolsun. Bu nokatdan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklyk aşakdaky görnüşde tapylýar

$$OA=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

§2. Wektorlar

2.1. Giňişlikde wektorlar

Giňişlikde hem tekizlikdäki ýaly, ugrukdyrylan kesimlere wektorlar diýilýär. Wektorlaryň uzynlygy (moduly), ugry, olary goşmak we aýyrmak, sana köpeltmek, skalýar köpeltmek hasyllary edil tekizlikdäki ýaly kesgitlenýär. Giňişlikde olaryň koordinatalary üç sandan ybarat bolup durýar. Meselem, $A(x_1;y_1;z_1)$ nokatda başlangyjy, $B(x_2;y_2;z_2)$ nokatda ujy bolan wektoryň koordinatalary

$\vec{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ ýalydyr.

Wektorlaryň häsiýetlerini gysgajyk ýatlalyň. Eger

$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ we $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ wektorlar berlen bolsa, onda

1. $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$,

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$

2. $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

3. $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a_1}|\cdot|\vec{b_1}|\cdot\cos\varphi$, bu ýerde φ bilen $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç bellenendir.

5. *Ox, Oy, Oz* oklaryň birlik wektorlaryny $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ bilen bellesek, onda islendik $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ wektory $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$ ýaly ýazyp bolýar.

6. $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}$

7. Giňişlikde bir tekizlige parallel bolan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ üç wektora komplanar wektorlar diýilýär. Eger $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ üç wektorlar komplanar bolsa, onda olaryň islendigini beýleki ikisiniň üsti bilen aňladyp bolýar, ýagny $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ bolar ýaly λ, μ sanlar bardyr.

8. $\vec{a}=\vec{b}$ bolsa, onda $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$ we tersine.

9. Eger $a||b$ (kollinear) bolsalar, onda $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$ we tersine.

2-nji mesele. Depeleri *A(2;-1;3); B(4;-1;3); C(2;-1;5)* nokatlarda bolan *ABC* üçburçlugyň gönüburçludygyny subut ediň we onuň burçlaryny kesgitläň.

Çözülişi. $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$ wektoryň koordinatalaryny tapalyň:

$$\vec{AB}(4-2;-1-(-1);3-3) \Rightarrow \vec{AB}(2;0;0).\ ,$$

$$\vec{BC}(2-4;-1-(-1);5-3) \Rightarrow \vec{BC}(-2;0;2)\ ,$$

$$\vec{AC}(2-2;-1-(-1);5-3) \Rightarrow \vec{AC}(0;0;2)\ \cdot$$

Bu $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapyp, alarys

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0\ \cdot$$

Diýmek, $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, ýagny $\angle BAC = 90^0$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = -4\ ,$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4\ .$$

Iki wektoryň arasyndaky burçy $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ formula boýunça

kesgitläliň. $\vec{BC}(-2;0;2)$, $\vec{BA}(-2;0;0)$ wektorlaryň moduly

$|\vec{BA}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2} = 2$, $|\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, onda

$$\cos\varphi = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \varphi = 45^0.$$

2.2. Çyzykly baglanyşykly wektorlar

Kollinear, ýagny bir gönä parallel wektorlaryň birini beýlekisiniň üsti bilen aňladyp bolýar. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \alpha \vec{a}$ bolar ýaly α san bardyr.

Edil şoňa meňzeş komplanar, ýagny bir tekizlige parallel üç wektoryň birini beýlekileriniň üsti bilen aňladyp bolýar. Eger $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlar γ tekizlige parallel bolsalar, onda $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ bolar ýaly p,q sanlar bardyr.

Şeýle wektorlara çyzykly baglanyşykly wektorlar diýilýär. Ýagny haýsy-da bir wektory beýleki wektoryň üsti bilen aňladyp bolýan bolsa, onda şeýle wektorlar köplügine çyzykly baglanyşykly wektorlar diýilýär.

Giňişlikde islendik dört wektor çyzykly baglanyşyklydyr, ýagny $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ wektorlar berlen bolsalar, onda olaryň birini (meselem, $\vec{d}$ wektory)

$$\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + n\vec{c} \qquad (1)$$

ýaly edip , beýleki üçüsiniň üsti bilen aňladyp bolýar.

$\vec{a}$ wektora ugurdaş $\overrightarrow{a_0}$ birlik wektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ýaly kesgitlenilýär.

Meselem, $\vec{a}(4;3;\sqrt{11})$ wektora ugurdaş birlik wektor

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + \sqrt{11}^2}} = \frac{\vec{a}}{6}$$ ýaly kesgitlenilýär.

Birlik wektoryň uzynlygy bire deňdir, ýagny $|\vec{a_0}| = 1$.

Hakykatdan-da

$$|\vec{a_0}| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{||\vec{a}||} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1.$$

§3. Giňişlikde göni çyzyklar

3.1. Göni çyzygyň deňlemesi

1. Goý, bize $A(x_0, y_0, z_0)$ nokat we $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ wektor berlen bolsun. A nokatdan geçýän we $\vec{a}$ wektor boýunça ugrukdyrylan ýeke-täk l göni çyzyk bardyr. Onuň deňlemesini tapalyň . $\vec{a}$ wektora l göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory diýilýär.

Goý, $N(x, y, z)$ nokat l göni çyzygyň erkin nokady bolsun (25-surat). Onda $\overrightarrow{AN}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ wektor $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ wektora kolleniardyr, ýagny $\vec{a} \| \overrightarrow{AN}$. Onda $\overrightarrow{AN} = \lambda \vec{a}$. Başgaça kolleniar wektorlaryň koordinatalary proporsionaldyr.

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} = \lambda \quad (1)$$

Bu deňlemä göni çyzygyň kanoniki deňlemesi diýilýär.

Eger göni çyzyk Ox, Oy, Oz oklaryň birine parallel bolsa, onda $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ wektoryň koordinatalarynyň ikisi nola deňdir. Oňa görä-de (1) deňlemede şol koordinatly drobuň sanawjysyny hem nola deňlemeli. Meselem, Ox okuna parallel göni çyzyk üçin $a_2=a_3=0$. Oňa görä-de l gönüniň deňlemesi

$$y\text{-}y_0=0; \qquad z\text{-}z_0=0$$

ýaly ýazylýar. Göni çyzygyň deňlemesi oňa degişli $A(x_0, y_0, z_0)$ nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly däldir. l gönüniň ugrukdyryjysy bolup, $\vec{a}$ wektora kollinear bolan islendik wektor hyzmat edip bilýär.

3-nji mesele. $A(1;-2;3)$, $B(-4;0;2)$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. $\overrightarrow{AB}(-4-1;\,0-(-2);2-3)=\overrightarrow{AB}(-5;2;-1)$ wektor ugrukdyryjy wektordyr. (1) formula boýunça $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ ýaly bolar.

2. Ýokarda alnan (1) deňlikden x, y, z koordinatalary tapyp,

$$\begin{cases} x=\lambda a_1+x_0\,, \\ y=\lambda a_2+y_0\,, \\ z=\lambda a_3+z_0 \end{cases} \qquad (2)$$

deňlemeleri alarys. Bu deňlemelere gönüniň parametrik deňlemesi diýilýär. λ sana gönüniň parametri diýilýär. Onuň her bir bahasyna gönüniň bir nokady degişlidir.

4-nji mesele. A(1;2;3) nokat we $\vec{a}(-2;4;-1)$ ugrukdyryjy wektor berlen bolsa, A nokatdan geçýän göni çyzygyň parametrik deňlemesini ýazmaly.

Çözülişi. (2) formulalar esasynda gözlenýän deňleme

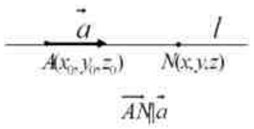
$$\begin{cases} x=-2\lambda+1\,, \\ y=4\lambda+2\,, \\ z=-\lambda+3 \end{cases}$$

ýaly bolýar

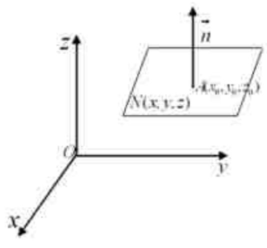
3. Giňişlikde iki nokatdan geçýän gönüniň deňlemesini tapmak üçin, bu nokatlaryň kesgitleýän wektoryny ugrukdyryjy wektor hökmünde almak ýeterlikdir.

Goý, l göniniň iki nokady $A(x_1;y_1;z_1)$ we $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ berlen bolsun. Onda ugrukdyryjy wektory $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ ýaly bolar. Eger başlangyç nokady A nokat diýip kabul etsek, onda (1) formula laýyklykda aşakdaky deňlemäni alarys:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3)$$



25-nji surat



26-njy surat

3.2. Göni çyzygyň koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi

Göni çyzygyň ugrukdyryjy wektorynyň koordinatalaryna baglylykda, olaryň koordinatalar sistemasyna we tekizliklerine görä ýerleşişini kesgitlemek bolýar.

1. Eger ugrukdyryjy $\overrightarrow{AB}$ $(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$ wektoryň koordinatalarynyň biri nola deň bolsa, onda ol koordinata tekizliginiň birine paralleldir. Meselem, $z_2 - z_1 = 0$ bolsa, $\overline{AB}$ wektor we derňelýän göni çyzyk xOy tekizlige paralleldir. Çünki, bu göniniň ähli nokatlary üçin aplikatalary $z = z_1 = z_2$ bolýar, ýagny onuň aplikatasy gönä görä üýtgemeýär.

2. Edil şonuň ýaly, y_2-y_1=0 bolsa, onda y_2=y_1 bolar, oňa görä-de göni çyzyk xOz tekizlige paralleldir.

3. Eger x_2-x_1=0 bolsa, onda x_1=x_2 bolar we göni çyzyk yOz tekizlige paralleldir.

Şuňa meňzeşlikde ugrukdyryjy $\overrightarrow{AB}$ wektoryň iki koordinatasy nola deň bolsa, onda ol koordinata oklarynyň haýsy hem bolsa birine paralleldir.

4. Eger y_2-y_1=0, z_2-z_1=$0 \Rightarrow y_2$=y_1, z_2=z_1 bolup, göni çyzygyň nokatlary üçin onuň ordinatasy we aplikatasy üýtgemeýär, ol Ox okuna paralleldir.

5. Eger-de x_2-x_1=0, y_2-y_1=$0 \Rightarrow x_2$=x_1, y_2=y_1 bolsa, onda bu ýagdaýda göni çyzyk Oz okuna paralledir.

6. Eger-de x_2-x_1=0, z_2-z_1=$0 \Rightarrow x_2$=x_1, z_2=z_1 bolsa , onda göni çyzyk Oy okuna paralleldir.

7. Eger göni çyzygyň başlangyç nokadynyň koordinatalary nol (ýagny $A(0;0;0)$) bolsa, onda göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýär.

8. Eger göni çyzygyň ugrukdyryjy wektorynyň koordinatalarynyň hiç biri nola deň bolmasa, onda ol hiç bir koordinatalar okuna we tekizligine parallel däldir. Şeýle hem bu göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçmeýär.

Meselem, $A(1;2;2)$ $B(2;4;3)$ bolsa, onda göni çyzygyň ugrukdyryjy wektory

$\overrightarrow{AB}(2-1;4-2;3-2)$ ýa-da $\overrightarrow{AB}(1;2;1)$ bolup, göni çyzyk hiç bir koordinata tekizligine parallel bolmaýar.

3.3. Göni çyzyklaryň özara ýerleşişi

Giňişlikde l_1 we l_2 iki gönüleriň kanonik deňlemesini alalyň. Goý, l_1 göni çyzyk $A(x_1;y_1;z_1)$ nokatdan geçýän we $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ wektor boýunça ugrukdyrylan bolsun. l_2 göni $B(x_2;y_2;z_2)$ nokatdan geçýän we $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ wektor boýunça ugrukdyrylan bolsun, onda olaryň kanonik deňlemeleri aşakdaky görnüşde bolar:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3},$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}.$$

1. Eger bu gönüleriň ugrukdyryjy wektorlary kolleniar, ýagny $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ bolsa, onda bu gönüler paralleldir, ýagny $l_1\,||\,l_2$. Wektorlaryň kolleniarlyk şertinden alarys:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=t \qquad (1)$$

Bu deňlige iki göni çyzygyň parallelik şerti diýilýär.

2. Eger-de l_1 we l_2 göni çyzyklaryň ugrukdyryjy wektorlarynyň skalýar köpeltmek hasyly nola deň bolsa, onda bu göni çyzyklar perpendikulýardyrlar, ýagny $l_1 \perp l_2$. Skalýar köpeltmegiň düzgüni boýunça

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \quad . \quad (2)$$

Bu deňlige iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şerti diýilýär. Giňişlikde gönüleriň kesişmegi talap edilmeýär, atanak ýerleşýän göni çyzyklar hem özara perpendikulýar bolup bilýärler.

3. Eger-de l_1 we l_2 göni çyzyk kesişýän bolsalar, onda olar bir tekizlige degişlidir. Bu ýagdaýda l_1 we l_2 gönüleriň ugrukdyryjy $\vec{a}, \vec{b}$ wektorlary we başlangyç nokatlarynyň kesgitleýän $\overrightarrow{AB}$ wektory komplanardyrlar. Bu ýagdaýda $\overrightarrow{AB}$ wektory $\vec{a}, \vec{b}$ wektorlaryň üsti bilen aňlatmak mümkin. Goý, l_1 we l_2 gönüler parametrik görnüşde berlen bolsunlar :

$$l_1: \begin{cases} x = pa_1 + x_1, \\ y = pa_2 + y_1, \\ z = pa_3 + z_1; \end{cases} \quad (3) \qquad l_2: \begin{cases} x = qb_1 + x_2, \\ y = qb_2 + y_2, \\ z = qb_3 + z_2. \end{cases} \quad (4)$$

Eger-de bu gönüleriň umumy nokadyny $M(x;y;z)$ diýip bellesek, onda (3), (4) deňlikleriň sag taraplaryny deňläp

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = pa_1 - qb_1, \\ y_2 - y_1 = pa_2 - qb_2, \\ z_2 - z_1 = pa_3 - qb_3 \end{cases} \quad (5)$$

baglanyşyklary alarys. Bu deňliklerden p we q parametrleriň bahalaryny tapyp, (3) ýa-da (4) deňlemeleriň birinde ýerine goýup, $M(x;y;z)$ kesişme nokadyň koordinatalaryny taparys.

Diýmek, iki göni çyzygyň parallel bolmagy üçin olaryň ugurkdyryjy wektorlarynyň kolleniar bolmagy gerek, perpendikulýar bolmagy üçin ugrukdyryjy wektorlarynyň skalýar köpeltmek hasylynyň nola deň bolmagy gerek, bu gönüleriň kesişmegi üçin bolsa $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ wektorlaryň komplanar bolmagy zerurdyr.

5-nji mesele. $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(0;-3;2)$, $A(5;4;6)$, $B(3;6;4)$ bolanda (3) we (4) gönüleriň özara nähili ýerleşýänligini kesgitlemeli.

Çözülişi. Bu gönüleriň ugrukdyryjy wektorlarynyň koordinatalary proporsional däldir. Diýmek, olar parallel däldir. Ugrukdyryjy wektorlarynyň skalýar köpeltmek hasyly 0·1-2·3+2·3=0. Diýmek, bu gönüler özara perpendikulýardyr, onda (5) formula boýunça:

$$\begin{cases} 3-5=p, \\ 6-4=2p+3q, \\ 4-6=3p-2q, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-2, \\ q=2, \\ q=-2. \end{cases}$$

Bu hem gönüleriň umumy nokadynyň ýokdugyny aňladýar.

§4. Giňişlikde tekizlikler

4.1. Tekizligiň deňlemesi

$A(x_0;y_0;z_0)$ nokatdan geçýän, $\vec{n}(a;b;c)$ wektora perpendikulýar tekizligiň erkin nokady $N(x;y;z)$ bolsa (26-njy surat), onda $\overrightarrow{AN}$ $(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ wektor bilen $\vec{n}(a;b;c)$ wektor perpendikulýardyr, ýagny olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir, ýagny $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AN}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Bu ýagdaýda $\vec{n}(a;b;c)$ wektora tekizligiň normal wektory diýilýär. Ýaýlary açsak, bu deňleme:

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

görnüşi alar. Soňky deňlikde $-(ax_0+by_0+cz_0)=d$ diýip belläp, ýokarky deňlemäni $ax+by+cz+d=0$ görnüşde ýazyp bolar. Bu deňlemä tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär. Tekizligiň deňlemesi oňa degişli A nokadyň we oňa perpendikulýar $\vec{n}$ wektoryň saýlanyp alynmagyna bagly däldir. Tekizligiň deňlemesindäki a, b, c koeffisiýentler oňa perpendikulýar bolan wektoryň koordinatalarydyr. Eger tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýän bolsa, onda onuň deňlemesinde $d=0$ bolýar. Dogrudan hem koordinata başlangyjynyň $x=0$, $y=0$, $z=0$ koordinatalaryny deňlemede ýerine goýsak, biz $d=0$ alarys.

Eger-de tekizligiň deňlemesinde näbellileriň biri ýok bolsa, onda ol şol näbelliniň koordinata okuna paralleldir. Meselem, $by+cz+d=0$ tekizlik Ox okuna paralleldir.

6-njy mesele. $A(1;2;3)$, $B(-1;0;4)$ nokatlar berlipdir. A nokatdan geçýän $\overrightarrow{AB}$ wektora perpendikulýar tekizligiň deňlemesini düzmeli.

Çözülişi. $N(x;y;z)$ bilen tekizligiň erkin nokadyny belläliň. Onda

$$\overrightarrow{AN}(x-1;y-2;z-3),$$

$$\overrightarrow{AB}(-1-1;0-2;4-3)=\overrightarrow{AB}(-2;-2;1)$$

wektorlaryň perpendikulýarlygyndan $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AN}=0$, başgaça

$$-2(x-1)-2(y-2)+(z-3)=0,$$

$$-2x-2y+z+3=0$$

ýa-da $2x+2y-z-3=0$ deňlemäni alarys. Bu deňleme gözleňýän tekizligiň deňlemesidir.

4.2.Giňişlikde tekizligiň koordinatalar sistemasyna görä ýerleşişi

Goý, giňişlikde tekizlik $ax+by+cz+d=0$ umumy deňlemesi bilen berlen bolsun. Bu tekizligiň koordinata oklaryna we koordinata tekizliklerine görä ýerleşiş ýagdaýlaryny derňäliň.

Ilki bilen a, b, c, d koeffisiýentleriniň diňe biriniň nola deň ýagdaýyna seredeliň.

1. $a=0$ bolanda tekizligiň umumy deňlemesi $by+cz+d=0$ görnüşi alar. Bu tekizligiň normal $\vec{n}$ $(0,b,c)$ wektory bilen Ox okunyň birlik $\vec{e}$ $(1,0,0)$ wektoryň skalýar köpeltmek hasylyny alalyň:

$$\vec{n}\ \vec{e}=1\cdot 0+0\cdot b+0\cdot c=0.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly $\vec{n}$ normal wektor Ox okuna perpendikulýardyr. Şeýlelikde, berlen tekizlik bilen Ox oky şol bir $\vec{n}$ wektora perpendikulýardyrlar. Şöňa görä-de, berlen tekizlik Ox okuna paralleldir.

2. $b=0$ bolsa tekizligiň umumy deňlemesi $ax+cz+d=0$ görnüşi alar. Onuň normal $\vec{n}$ $(a,0,c)$ wektory Oy okunyň birlik $\vec{e_1}(0,1,0)$ wektoryna perpendikulýardyr, ýagny

$$\vec{n}\ \vec{e}=0\cdot a+1\cdot 0+0\cdot c=0.$$

Bu ýagdaýda berlen tekizlik Oy okuna paralleldir.

3. $c=0$ bolanda tekizligiň umumy deňlemesi $ax+by+d=0$ görnüşi alar. Onüň normal $\vec{n}$ $(a,b,0)$ wektory Oz okunyň birlik $\vec{e_1}(0,0,1)$ wektoryna perpendikulýardyr, ýagny $\vec{n}\ \vec{e}=0a+0b+01=0$. Bu ýagdaýda berlen tekizlik Oz okuna paralleldir.

Ýokarky ýagdaýlardan görnüşi ýaly, tekizligiň deňlemesinde haýsy näbelli ýok bolsa, ol şol näbelliniň koordinata okuna paralleldir.

4. $d=0$ bolsa tekizligiň umumy deňlemesi $ax+by+cz=0$ görnüşi alar. Bu deňlemäni $x=y=z=0$ bahalar kanagatlandyrýarlar. Diýmek, ol koordinata başlangyjyndan geçýän tekizlikdir.

Indi a, b, c, d koeffisiýentleriň ikisiniň nola deň ýagdaýlaryna seredeliň.

5. $a=b=0$ bolanda, tekizligiň umumy deňlemesi $cz+d=0$ görňüşi alar we $z=-\frac{d}{c}$ bolar.

Bu ýerde $a=0$ bolany üçin berlen tekizlik Ox okuna, $b=0$ bolany üçin hem Oy okuna-da parallerdir. Netijede, ol xOy tekizligine parallel bolup, $M(0, 0, -\frac{d}{c})$ nokatdan geçýändir.

6) $a=c=0$ bolanda tekizligiň umumy deňlemesi $by+d=0$ görnüşi alar we $y=-\frac{d}{b}$ bolar. $a=0$ we $c=0$ bolýanlygy üçin tekizlik xOz tekizlige paralleldir we ol $M(0; -\frac{d}{b}; 0)$ nokatdan geçýär.

7) $b=c=0$ bolanda tekizligiň umumy deňlemesi $ax+d=0$ görnüşi alar we $x=-\frac{d}{a}$ bolar. $b=0$ we $c=0$ bolany üçin, berlen tekizlik yOz tekizlige paralleldir we ol $M(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ nokatdan geçýär.

8) $a=d=0$ bolsa tekizligiň umumy deňlemesi $by+cz=0$ görnüşi alýar. Bu ýagdaýda tekizlik Ox okuna paralleldir we koordinata baglanyjyndan geçýär. Diýmek, ol Ox okuň üstünden geçýän tekizlikdir.

9) $b=d=0$ bolsa tekizligiň umumy deňlemesi $ax+cz=0$ görnüşi alar. Bu ýagdaýda $b=0$ bolany üçin berlen tekizlik Oy okuna parallel, $d=0$ bolany üçin hem ol koordinatalar başlangyjyndan geçýär. Diýmek, berlen tekizlik Oy okunyň üstünden geçýän tekizlikdir.

10) $c=d=0$ bolanda tekizligiň umumy deňlemesi $ax+by=0$ görnüşi alar. Bu ýagdaýda berlen tekizlik Oz okunyň üstünden geçýän tekizlikdir.

Eger koeffisiýentleriň üçüsi hem nola deň bolsa, onda biz koordinata tekizlikleriniň deňlemelerini alarys.

11) $a=b=d=0$ bolsa, tekizligiň umumy deňlemesi $cz=0$ we ondan $z=0$ alynýar. Bu bolsa xOz tekizligiň deňlemesidir.

12) $b=c=d=0$ bolsa, onda $x=0$ deňleme yOz tekizligi aňladýar.

13) $a=c=d=0$ bolsa, onda $y=0$ deňleme xOz tekizligi aňladýär.

Şeýlelikde, tekizligiň deňlemesine laýyklykda, onuň koordinatalar sistemasyna görä nähili ýerleşýändigini aýdyp bolýar.

4.3. Giňişlikde iki tekizligiň özara ýerleşişi

Parallel tekizlikleriň arasyndaky burç 0^0, perpendikulýar tekizlikleriň arasyndaky burç 90^0 deň hasaplanýar. Goý, α we β tekizlikler parallel ýa-da perpendikulýar bolmasynlar. Onda olar käbir c göni çyzyk boýunça kesişýändirler. c göni çyzygyň käbir O nokadyndan oňa perpendikulýar bolan γ tekizligi geçireliň (27-nji surat), α, γ tekizlikler käbir OA göni boýunça, β,γ tekizlikler bolsa OB göni boýunça kesişýärler. OA, OB gönüleriň arasyndaky AOB burça α, β tekizlikleriň arasyndaky burç diýilýär. Bu burç c göni çyzykdan O nokadyň saýlanyp alynmagyna bagly däldir.

Eger α, β tekizlikleriň deňlemeleri

$$\alpha: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \quad \beta: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

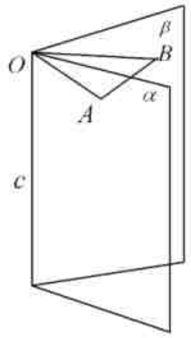
ýaly bolsa, onda olaryň arasyndaky burçy olara perpendikulýar bolan $\vec{n}_1(a_1;b_1;c_1)$, $\vec{n}_2(a_2;b_2;c_2)$ wektorlaryň arasyndaky burç hökmünde hasaplamak mümkin.

7-nji mesele. $4x+2y+4z-5=0;\ x+y+2=0$ deňlemeler bilen berlen tekizlikleriň arasyndaky burçy hasaplamaly.

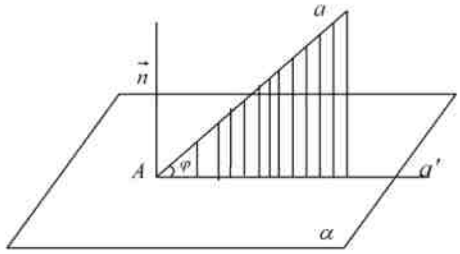
Çözülişi. Bu tekizliklere $\vec{n}_1(4;2;4)$ we $\vec{n}_2(1;1;0)$ wektorlar perpendikulýardyrlar.

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6 \qquad |\vec{n}_2| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 6; \qquad \cos\varphi = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = 45^0$.



27-nji surat



28-nji surat

4.4. Göni çyzyk bilen tekizligiň özara ýerleşişi

Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa ýa-da oňa degişli bolsa, onda olaryň arasyndaky burç 0^0, eger göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolsa, onda olaryň arasyndaky burç 90^0 deň hasaplanýar.

Goý, a göni çyzyk α tekizlige parallel ýa-da perpendikulýar bolmasyn, olar A nokatda kesişýän bolsun. a göni çyzygyň her bir nokadyndan α tekizlige perpendikulýar indereliň (28-nji surat). Bu perpendikulýaryň esasy käbir a' göni çyzyga degişlidir; a' göni çyzyga a göniniň α tekizlige proýeksiýasy diýilýär.

Göni çyzyk bilen tekizligiň arasyndaky burç diýlende, bu göni bilen onuň tekizlige proýeksiýasynyň arasyndaky burça düşünilýär.

Eger α tekizlik we l göni çyzyk

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \qquad l: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

deňlemeler bilen berlen bolsa, onda α tekizlige perpendikulýar bolan $\vec{n}(a;b;c)$; wektor bilen l göni çyzygyň ugrukdyryjy $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ wektorynyň arasyndaky burç, l göni bilen α tekizligiň arasyndaky burçy 90^0 doldurýar (28-nji surat).

8-nji mesele. α : $4x+2y+4z-1=0$, l: $x+y=0$, ($z=0$) deňlemeler bilen berlen α tekizlik bilen l göni çyzygyň arasyndaky burçy hasaplamaly.

Çözülişi. $\vec{n}(4;2;4)$ wektor α tekizlige perpendikulýar we $\vec{a}(1;1;0)$ wektor l göni çyzygyň ugrukdyryjysy . Onda

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 6; \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = 45^0 \quad .$$

l göni çyzyk bilen α tekizligiň arasyndaky burçy β bilen bellesek, onda

$$\varphi + \beta = 90^0 \quad \beta = 90^0 - \varphi = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

§5. Sfera

5.1. Sferanyň deňlemesi

Kesgitleme. Giňişlikde berlen nokatdan berlen uzaklykda ýerleşýän nokatlaryň köplügine sfera diýilýär. Berlen nokada sferanyň merkezi, berlen uzaklyga bolsa sferanyň radiusy diýilýär.

Goý, $C(x_0;y_0;z_0)$ nokat sferanyň merkezi, $M(x;y;z)$ erkin nokat we R radius bolsun.

Onda sferanyň kesgitlemesine laýyklykda $MC=R$. Bu ýerde iki nokadyň arasyndaky uzaklygyň formulasy boýunça

$$MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Bu deňligi kwadrata götersek, sferanyň deňlemesini alarys.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \quad (1)$$

Eger $M(x;y;z)$ nokat sferanyň içinde ýerleşýän bolsa, onda $CM<R$ we

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<R^2 \quad (2)$$

(2) deňsizlik sferanyň içki nokatlaryny ýa-da sfera bilen çäklenen şaryň içki nokatlaryny kesgitleýär.

Eger-de $M(x;y;z)$ nokat sferanyň daşynda ýerleşse, onda $CM>R$ we

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2>R^2 \quad (3)$$

bolar. Bu deňsizlik sfera bilen çäklenen şaryň daşynda ýerleşýän giňişligiň nokatlar köplügini kesgitleýär.

Eger-de sferanyň merkezi koordinatalar başlangyjynda bolsa, onda $x_0=y_0=z_0=0$ bolar we sferanyň deňlemesi

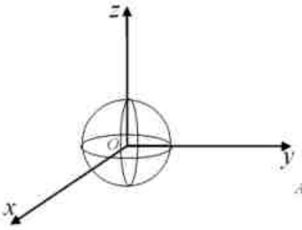
$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (4)$$

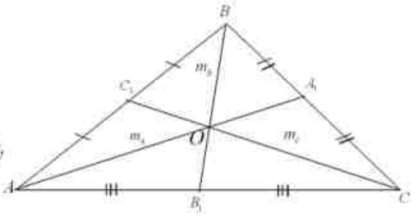
görnüşi alar (29-njy surat).

Sfera merkezine görä simmetrikdir. Ondan başga-da ol merkezden geçýän islendik gönä görä we tekizlige görä simmetrikdir.

Koordinatalar başlangyjynda merkezi bolan sfera, koordinatalar oklaryna görä, koordinatalar başlagyjyna görä, koordinatalar tekizliklerine görä simmetrikdir.

Netijede, $M(x;y;z)$ nokat sfera degişli bolsa, onda $M_1(-x;-y;-z)$, $M_2(-x;-y;z)$, $M_3(-x;y;-z)$, $M_4(x;-y;-z)$, $M_5(-x;y;z)$, $M_6(x;-y;z)$, $M_7(x;y;-z)$ nokatlar hem bu sfera degişlidirler.





29-njy surat

30-njy surat

5.2. Sfera bilen göni çyzygyň özara ýerleşişi

Goý, bize merkezi koordinatalar başlangyjynda radiusy R deň bolan

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (1)$$

sfera berlen bolsun.

Giňişlikde erkin $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ wektor boýunça ugrukdyrylan l gönini alalyň. Sferanyň merkezinden l gönä perpendikulýar geçireliň. Bu perpendikulýaryň esasy $D(x_0;y_0;z_0)$ bolsun. OD kesimiň uzynlygyny d bilen belläliň, $OD=d$. Oňa D nokatdan l gönä çenli uzaklyk diýilýär.

$$OD = d = \sqrt{z_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \quad . \quad (2)$$

Bu ýerde $\overrightarrow{OD}$ wektor $\vec{a}$ wektora perpendikulýardyr. Oňa görä-de olaryň skalýar köpeltmek hasyly nola deňdir:

$$\overrightarrow{OD} \cdot \vec{a} = a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 = 0 \quad (3)$$

D nokatdan geçýän $\vec{a}$ boýunça ugrukdyrylan l göni çyzygyň parametrik deňlemesi

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_0 \quad , \\ y = a_2 t + y_0 \quad , \\ z = a_3 t + z_0 \end{cases} \qquad (4)$$

ýaly bolar.

Berlen sfera bilen l göniniň umumy nokadyny tapmak üçin olaryň deňlemelerini bir sistemada çözmeli.

l göniniň deňlemesinden x, y, z bahalaryny sferanyň deňlemesinde ýerine goэalyň

$$(a_1 t + x_0)^2 + (a_2 t + y_0)^2 + (a_3 t + z_0)^2 = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) t^2 + 2t(a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3 z_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2. \quad (5)$$

Bu ýerde | $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Ondan başga-da (2) we (3) deňlikleri göz öňünde tutsak, (5) deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$|\vec{a}|^2 t^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow t^2 = \frac{R^2 - d^2}{|\vec{a}|^2} \quad . \quad (6)$$

Bu ýerde üç ýagdaýyň bolmagy mümkin.

I. d>R bolanda (6) deňligiň çep tarapy položitel, sag tarapy otrisateldir. Bu bolsa mümkin däldir. Ýagny bu ýagdaýda sfera bilen göniniň umumy nokady ýokdur.

II. d=R bolanda (6) deňlikden $t^2=0 \Rightarrow t_1=t_2=0$
Bu ýagdaýda l göni bilen sferanyň bir sany umumy nokady bar, oňa-da galtaşma nokady diýilýär. (4) deňlemede t=0 bolanda

$$\begin{cases} x = z_0 \quad , \\ y = y_0 \quad , \\ z = z_0 \end{cases}$$

bolup, l göni sfera D nokatda galtaşýar.

III. d<R bolanda (6) deňlikden

$$t = \pm\sqrt{\frac{R^2 - d^2}{\left|\vec{a}\right|^2}}$$

ýaly t iki hakyky köki bardyr. Bu ýagdaýda l göni bilen sferanyň iki sany umumy nokady bardyr.

5.3. Tekizlik bilen sferanyň özara ýerleşişi

Goý, bize merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan sfera we xOy tekizlige parallel bolan α tekizlik berlen bolsun. Olaryň deňlemeleri aşakdaky görnüşde bolar.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = d \end{cases} \qquad (1)$$

$z=d$ deňleme á tekizligiň koordinatalar başlangyjyndan d uzaklykda ýatýandygyny aňladýar. Bu ýerde üç ýagdaýyň bolmagy mümkin.

1. $z=d>R$. Sferanyň deňlemesinde z bahasyny ýerine goýsak, biz aşakdaky deňlemäni alarys.

$$x^2+y^2+d^2=R^2 \Longrightarrow \quad x^2+y^2=R^2-d^2.$$

Bu deňligiň çep tarapy položitel, sag tarapy otrisatel sandyr, çünki $d>R$. Bu ýagdaý mümkin däl. Diýmek, $d>R$ ýagdaýda tekizlik bilen sferanyň umumy nokady ýok, ýagny (1) sistemanyň hakyky köki ýokdur, ýagny tekizlik sferany kesmeýär.

2. $z=d=R$ bolsa, onda z bahasyny sferanyň deňlemesinde ýerine goýsak

$$x^2+y^2+R^2=R^2 \Longrightarrow \quad x^2+y^2=0.$$

Bu deňlik $x=0$, $y=0$ ýagdaýda ýerine ýetýär. Şeýlelikde, biz $M(0;0;d)$ nokady alarys. α tekizlik bilen sferanyň diňe bir umumy nokady bar. Bu ýagdaýda tekizlik sfera $M(0;0;R)$ nokatda galtaşýar.

3. $d<R$ bolsa, sferanyň deňlemesi $x^2+y^2=R^2-d^2$ görnüşi alar. $R^2-d^2=h^2$ bilen bellesek, sferanyň deňlemesi $x^2+y^2=h^2$ görnüşi alar.

Bu töweregiň deňlemesidir. Diýmek, bu ýagdaýda sfera bilen tekizligiň umumy töweregi bardyr. Ýagny tekizlik sferany töwerek boýunça kesýär.

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan sferany koordinata tekizlikleri uly töwerekler boýunça kesýärler.

5.4. Sfera galtaşýan tekizlik

Amaly meseleler çözülende sfera bilen tekizligiň galtaşýan ýagdaýyna örän köp duş gelinýär. Oňa görä-de bu sorag giňişleýin seredilmegini talap edýär.

Ýokarda belleýşimiz ýaly, α tekizlik bilen sferanyň merkezine çenli uzaklyk sferanyň radiusyna deň bolsa, onda α tekizlik sfera galtaşýan tekizlik bolýar. Sfera galtaşýan tekizlik barada aşakdaky teoremalara seredeliň.

1-nji teorema. Galtaşma nokadyny sferanyň merkezi bilen birleşdirýän radius galtaşýan tekizlige perpendikulýardyr.

Subudy. Goý, O nokat sferanyň merkezi, A nokat α tekizligiň sfera galtaşma nokady bolsun. $OA \perp \alpha$ gatnaşygy subut edeliň. Goý, OA radius α tekizlik bilen perpendikulýar däldir diýip güman edeliň. Bu ýagdaýda O nokatdan α tekizlige perpendikulýar bolan h kesim bardyr. Tekizlige geçirilen perpendikulýar ýapgytlardan kiçidir. Ýagny $h<OA$ ýa-da $h<R$. Bu ýagdaýda α tekizlik sferany töwerek boýunça kesýär. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek, güman etmämiz nädogry,oňa görä-de $OA \perp \alpha$.

Bu teorema ters teoremany aşakdaky ýaly beýan edip bolar.

2-nji teorema. Eger sferanyň A nokadyndan geçýän α tekizlik sferanyň OA radiusyna perpendikulýar bolsa, onda α tekizlik sfera A nokatda galtaşýandyr.

§6. Üçburçlugyň mediýanalary üçin kosinuslar teoremasy

Mekdep geometriýasynyň esasy bölegini Ýewklid geometriýasy tutýar. Ýewklid b.e.öň III asyrda ýaşap geçen grek matematigidir. Giometriýanyň köp teoremalary Hindi we Hytaý matematikleri tarapyndan Ýewklidden öň hem seredilip geçilipdir. Ýewklid olardan tapawutlylykda, geometriýany ylym hökmünde esaslandyran alymdyr. Ol figuralaryň käbir häsiýetlerini subutsyz kabul edýär we olary aksiomalar diýip atlandyrýar. Beýleki islendik tassyklamany şolaryň üsti bilen subut etmegi teklip edýär. Ýewklid Aleksandriýa şäherindäki öz döwründe iň baý kitaphananyň müdiri bolup işläpdir. Onuň geometriýasy örän ýörgünli bolany üçin şol döwrüň patyşasy Ptolemeý II geometriýany öwrenmegi maksat edýär, emma oňa onçakly bir düşünmeýär. Ptolemeý II Ýewklidi ýanyna çagyryp, ýazan zatlarynyň çylşyrymlydygyny, olary öwrenmegiň aňsat ýoly ýokmy diýip soraýar.

Ýewklid oňa: "Geometriýada şalar üçin aýratyn ýol ýok" diýip jogap beripdir.

Geometriýanyň ikinji bir aýratyn ösüş başlangyjy XVII asyrda ýaşap geçen fransuz matematigi Rene Dekartdan başlanýar. Biziň häzirki öwrenýän dekart koordinatalar sistemasyny ilkinji gezek şol girizipdir. Ýogsa-da dekart koordinatalary nähili ýeňillik berýär? Her bir ylmyň öz dili bardyr. Dürli ylymlaryň şol bir meseläni çözýän ýagdaýy mümkindir. Dekart koordinatalar sistemasy geometriki meseleleri algebranyň diline geçirýär we tersine algebranyň meselelerini geometriki usulda beýan edýär. Bu ýagdaý geometriýada algebranyň usullaryny, algebrada bolsa geometriýanyň usullaryny peýdalanmaga mümkinçilik berýär.

Geometriýanyň häzirki zaman usullarynyň biri-de wektorlar usulydyr. Onuň esasyny XIX asyrda ýaşan German Weýil tutupdyr. Wektorlar usuly arkaly geometriýanyň köp meseleleri ýeňillik bilen çözülýär we bu usul figuralaryň häsiýetini has çuňňur öwrenmäge, çalt netije almaga ýardam berýär. Aşakda biz Ýewklid geometriýasynda öwrenmegi örän kyn bolan, wektorlar usulynda bolsa aňsat netije alyp bolýan bir meselä seredeliň.

Goý, bize ABC erkin üçburçluk berlen bolsun. A_1, B_1, C_1 bolsa degişlilikde ABC nokatlaryň garşysyndaky taraplaryň ortalary bolsun, ýagny AA_1, BB_1, CC_1 bu üçburçlugyň medianalary we O bu medianalaryň kesişme nokady bolsun (30-njy surat). Gysgaça $\vec{AA_1} = \vec{m_a}$, $\vec{BB_1} = \vec{m_b}$, $\vec{CC_1} = \vec{m_c}$ diýip belläliň. ABA_1 we ACA_1 üçburçluklardan

$$\vec{AA_1} = \vec{AC} + \vec{CA_1},$$

$$\vec{AA_1} = \vec{AB} + \vec{BA_1}.$$

Bu wektorlary goşup, $2\vec{AA_1} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BA_1} + \vec{CA_1}$ deňligi alarys. Bu ýerde $\vec{BA_1}, \vec{CA_1}$ wektorlar garşylykly ugrukdyrylan wektorlar bolup, olaryň uzynlyklary özara deňdir. Oňa görä-de

$$\vec{BA_1} + \vec{CA_1} = \vec{0}.$$

Onda $\vec{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ ýa-da $\vec{m_a} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde

$$\vec{m_b} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$$

$$\vec{m_c} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB})$$

ýaly deňlikleri alarys.

Bu $\overline{m_a}, \overline{m_b}, \overline{m_c}$ wektorlary jemläp alarys.

$$\vec{m_a} + \vec{m_b} + \vec{m_c} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CA} + \vec{BC} + \vec{CB}) = 0.$$

Diýmek , $\vec{m}_a+\vec{m}_b+\vec{m}_c=\vec{0} \Rightarrow \vec{m}_a=-(\vec{m}_b+\vec{m}_c)$

Soňky deňligi kwadrata göterip, aşakdaky netijäni alarys.

$$\vec{m}_a^{\,2}=\vec{m}_b^{\,2}+\vec{m}_c^{\,2}+2\,\vec{m}_b\,\vec{m}_c$$

Skalýar köpeltmek hasylynyň düzgüni boýunça

$$\vec{m}_b\,\vec{m}_c=\left|\overrightarrow{m_b}\right|\left|\overrightarrow{m_c}\right|\cos\alpha \quad ,$$

bu ýerde α bilen $\vec{m}_b$ we $\vec{m}_c$ wektorlaryň arasyndaky burç bellelendir.

Netijede aşakdaky deňligi alarys.

$$\vec{m}_a^{\,2}=\vec{m}_b^{\,2}+\vec{m}_c^{\,2}+2\left|\vec{m}_b\right|\left|\vec{m}_c\right|\cos\alpha \ .$$

Wektorlaryň kwadratlary we skalýar köpeltmek hasyly san bolanlygy üçin ýokarky deňligi wektor alamatsyz hem ýazmak mümkindir.

$$m_a^2=m_b^2+m_c^2+2\,m_b\,m_c\cos\alpha$$

Bu formulany üçburçluklaryň medianalary üçin kosinuslar teoremasy diýip atlandyrmak dogry bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde üçburçlugyň beýleki medianalary üçin aşakdaky ýaly deňlikleri ýazyp bileris .

$$m_b^2=m_a^2+m_c^2+2\,m_a\,m_c\cos\beta \ ,$$

$$m_c^2=m_a^2+m_b^2+2\,m_a\,m_b\cos\gamma \ .$$

Eger $\vec{m}_b$ we $\vec{m}_c$ wektorlaryň arasyndaky burç 90^0, ýagny

$\vec{m}_b \perp \vec{m}_c$ bolsa, onda $m_a^2=m_b^2+m_c^2$.

$\frac{4}{9}m_a^2=\frac{4}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_c^2$ we netijede $a^2=\frac{4}{9}m_a^2$ bolmaly. Bu эerden hem

$m_a=\frac{3}{2}a$ deňligi alarys.

§7. Gönükmeler

1) Dekart koordinatalar sistemasynda *A(1;2;3), B(-1;2;3), C(-2;1;3),D(-3;1;2), E(-1;-2;-3), F(-3;-2;-1)* nokatlary guruň.
2) *A(0;3;6), B(0;4;5), C(0;2;7), K(1;0;3), L(2;0;4), M(3;0;5), D(1;2;0), F(3;6;0) E(2;4;0),* nokatlar haýsy koordinata tekizliginde ýatýar?
3) *A(0;0;4), B(0;0;2), C(0;1;0), D(0;5;0), E(3;0;0), M(5;0;0)* nokatlar haýsy koordinata oklarynda ýatýar ?
4) Giňişlikde x we y koordinatalary nola deň bolan nokatlar nirede ýatýar?
5) *A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0)* nokatlar berlipdir. Bu nokatlaryň haýsy: 1) xOy tekizliginde; 2) Oz okda; 3) yOz tekizliginde ýatýar?
6) *A(0;3;4), B(8;0;6), C(5;12;0)* nokatlar berlen. Bu nokatlardan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklygy tapyň. (*J.:* $|AO| = 5; |BO| = 10; |CO| = 13.$).
7) a) *A(2;4;6), B(4;8;2), b)A(1;3;5), B(3;5;7)* nokatlaryň ortasynyň koordinatasyny tapyň. (*J:* a) $O(3;6;4)$, b) $O(2;4;6)$).
8) xOy tekizlikde *A(0;1;-1), B(-1;0;1), C(0;-1;0)* üç nokatdan deňdaşlaşan *D(x;y;0)* nokady tapyň. (*J.:* $D(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};0)$).
9) *(0;0;1), (0;1;0), (1;0;0)* nokatlardan deňdaşlaşan we yOz tekizlikden $z=3$ uzaklykda duran nokady tapyň. (*J.: D (3;3;3)).*
10) Ox okda *A(1;2;3), B(-2;1;3)* nokatlardan deňdaşlaşan *C(x;0;0)* nokady tapyň. (*J.: C (0;0;0)).*
11) Depeleri: *a) A(0;2;-3), B(-1;1;1), C(2;-2;1), D(3;-1;-5); b)A(2;1;3), B(1;0;7), C(-2;1;5), D(-1;2;1)* nokatlarda bolan dörtburçlugyň parallelogramdygyny subut ediň.
12) Eger: *1)A(6;7;8), B(8;2;6), C(4;3;2), D(2;8;4); 2) A(0;2;0), B(1;0;0), C(2;0;2), D(1;2;2)* bolsa, onda ABCD dörtburçlugyň rombdygyny subut ediň.

13) Kesimiň bir ujy $A(2;3;-1)$ we onuň ortasy $C(1;1;1)$ berlipdir. Kesimiň ikinji $B(x;y;z)$ ujuny tapyň. *(J.: $B(0;-1;3)$).*

14) Eger $ABCD$ parallelogramyň üç depesiniň koordinatalary: $1)A(2;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(4;1;0)$, $2)A(1;-1;0)$, $B(0;1;-1)$ $C(-1;0;1)$; $3)A(4;2;-1)$, $B(1;-3;2)$, $C(-4;2;1)$ belli bolsa, onda D depesiniň koordinatalaryny tapyň. *(J.: 1) D* nokadyň üç ýagdaýy bolmagy mümkin. $D_1(6;\ 2;\ -2)$, $D_2(-2;\ 4;\ 6)$, $D_3(2;\ 0;\ 2)$).

15) Uçlary $A(a;c;-b)$ we $B(-a;d;b)$ nokatlarda bolan kesimiň ortasynyň Oy oka degişlidigini subut ediň.

16) Uçlary $C(a;b;c)$ we $D(p;q;-c)$ nokatlarda bolan kesimiň ortasynyň xOy tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

17) $\vec{a}(5;7;8)$, $\vec{b}(1;3;5)$ wektorlaryň jeminiň we tapawudynyň koordinatalaryny tapyň. (*J.:* $\vec{a}+\vec{b}=(6;10;13)$).

18) $\vec{a}(1;3;4)$ wektor berlen. $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapyň.

(*J.:* 1) $\vec{a}(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};-2)$, 2) $\vec{a}(\sqrt{3}\,;3\sqrt{3}\,;4\sqrt{3})$).

19) $\vec{a}(7;2;3)$, $\vec{b}(3;5;2)$ *wektorlar berlen*. 1) $2\vec{a}+3\vec{b}$, 2) $4\vec{b}-2\vec{a}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapyň. *(J.: 1) (23;19;12), 2)(-2;16;2)).*

20) 1) $\vec{a}(1;3;0)$, $\vec{b}(2;0;3)$; 2) $\vec{a}(1;3;5)$, $\vec{b}(3;2;4)$ wektorlar berlen bolsa, olaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmaly. *(J.:* 1) $\vec{a}\vec{b}=2$; 2) $\vec{a}\vec{b}=29$).

21) 1) $\vec{a}(0;3;4)$; 2) $\vec{a}(6;0;8)$; 3) $\vec{a}(0;5;12)$ wektorlaryň modullaryny tapmaly.

(J.: 1) $|\vec{a}|=5$; 2) $|\vec{a}|=10$ 3) $|\vec{a}|=13$).

22) $\vec{a}(\frac{14}{5};\frac{12}{5};10)$, $\vec{b}(2;0;5)$, $\vec{c}(-2;4;0)$ wektorlar berlen bolsa, onda $\vec{a}=p\vec{b}+q\vec{c}$ bolar ýaly *p; q* sanlary tapmaly.

(J.: p=2; q=$\frac{3}{5}$).

23) $\vec{a}(-\frac{14}{5};3;2)$, $\vec{b}(0;0;1)$, $\vec{c}(0;2;5)$ wektorlar berlen bolsa, onda $\vec{a}=\vec{b}p+\vec{q}c$ bolar ýaly *p, q* sanlar barmy?

24) *A(2;7;-3), B(1;0;3), C(-3;-4;5), D(-2;3;-1)* dört nokat berlipdir. *AB, BC, DC, AD, AC we BD* wektorlaryň arasynda deň wektorlar barmy?

25) $\vec{a}$ (1;2;3) wektor berlipdir. Başlangyjy *A(1;1;1)* we ahyry *B(4,3,2)* nokatda bolan $\overline{AB}$ wektoryň $\vec{a}$ wektor bilen skalýar köpeltmek hasylyny tapyň *(J.:* 10).

26) n-iň haýsy bahalarynda berlen wektorlar perpendikulýardyr:
1) $\vec{a}$ *(2;-1;3),* $\vec{b}$ *(1;3;n);2) (n;-2;1), (n;-n;1); 3) (n;-2;1), (n;2n;4);4) (4;2n;-1), (-1;1;n)? (J.: 1)* $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$).

27) *A(1;0;1), B(-1;1;2),C(0;2;-1)* üç nokat berlipdir. *AB* we *CD* wektorlar perpendikulýar bolar ýaly, *Oz* okda şeýle *D(0;0;c)* nokat barmy?

28) $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar 60^0 burç emele getirýärler, $\vec{c}$ wektor

bolsa olara perpendikulýar. $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ wektoryň absolýut ululygyny tapyň. (J.: $\sqrt{a^2+b^2+|ab|}$).

29) *A(0;1;-1), B(1;-1;2), C(3;1;0), D(2;-3;1)* dört nokat berlipdir. $\overline{AB}$ we $\overline{CD}$ wektorlaryň arasyndaky φ burçuň kosinusyny tapyň.

(J.: $\cos\varphi=\frac{5}{3\sqrt{7}}$).

30) $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary saklaýan göni çyzyklaryň arasyndaky φ burçuň $|\vec{ab}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ deňlemeden kesgitlenýändigini subut ediň.

31) *A(2;3;-1)* nokatdan geçýän we $\vec{a}(1;3;5)$ wektor boýunça ugrukdyrlan göni çyzygyň kanonik deňlemesini ýazyň.

(J.: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{5}$).

32) *A(-2;3;5), B(3;6;-2)* nokatlardan geçýän göni çyzygyň kanonik deňlemesini ýazyň. *(J.:* $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-5}{-7}$).

33) *A(1;2;-1)* nokatdan geçýän we $\vec{a}(2;3;-1)$ wektor boýunça ugrukdyrylan göniniň parametrik deňlemesini ýazyň.

$$J.:\ \begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t+2 \\ z=-t-1.. \end{cases}$$

34) *A (2;4;6), B (-2;0; 3)* nokatlardan geçýän göni çyzygyň parametrik deňlemesini ýazyň. *J.:* $\begin{cases} x=-4t+2 \\ y=-4t+4 \\ z=-3t+6. \end{cases}$

35) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = t + 4 \end{cases}$ göni çyzyga degişli 3 sany nokadyň koordinatalaryny tapyň.

36) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{4}$ göni çyzygyň 5 sany erkin nokadynyň koordinatalaryny ýazyň.

37) $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t - 4, \\ z = 3t - 3 \end{cases}$ göni çyzygyň koordinatalar tekizligi bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň. *(J:(3;-2;0), (4;0;3), (0; -8;-9)).*

38) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{4}$ göni çyzygyň koordinatalar tekizligi bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň. *(J: (2;4;0), (0;0;-4), (0; 0;-4)).*

39) *A(2;5;4)* nokat we $\vec{a}(1;2;3)$ wektor berlen. *A* nokatdan geçýän we $\vec{a}$ wektor boýunça ugrukdyrylan hem-de *B(1;5;7)* nokatdan geçýän we $\vec{b}(2;4;6)$ wektor boýunça ugrukdyrylan göni çyzyklar parallelmidir?

40) *A(3;5;2), B(2;3;7), C(1;3;6), D(0;1;5)* nokatlar berlen. *AB* we *CD* gönüleriň paralleldigini ýa-da perpendikulýardygyny anyklamaly.

41) $\vec{a}(2;3;4)$, $\vec{b}(-3;2;0)$ wektorlar boýunça ugrukdyrlan we degişlilikde *A(1;2;3),B(2;4;-2)* nokatlardan geçýän gönüleriň perpendikulýardygyny ýa-da paralleldigini anyklamaly.

42) $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3 \end{cases}$ we $\begin{cases} x = 3, \\ z = 5. \end{cases}$ gönüleriň özara ýerleşişini kesgitlemeli.

43) $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ *we* $\begin{cases} y=5, \\ z=7 \end{cases}$ gönüleriń özara ýerleşişini kesgitlemeli.

44) $\ell_1: \begin{cases} x=2t+3, \\ y=t-1, \\ z=6t+2, \end{cases}$ $\ell_2: \begin{cases} x=t+3, \\ y=-3t+10, \\ z=3t+2 \end{cases}$ gönüleriň kesişýändigini subut ediň we kesişme nokadynyň koordinatalaryny tapyň.

(*J.:* $O\left(\frac{43}{7};\frac{4}{7};\frac{80}{7}\right)$).

45) $\begin{cases} \frac{x+1}{5}=t, \\ \frac{y-3}{1}=t, \\ \frac{z-4}{2}=t, \end{cases}$ $\begin{cases} x=5t-1, \\ y=t+3, \\ z=2t-4, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=4t+3 \\ z=5t-4 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x+1}{2}=t, \\ \frac{y-3}{4}=t, \\ \frac{z+4}{5}=t \end{cases}$

parametrik deňlemeleri bilen berlen gönüler özara nähili ýerleşer?

46) *A(3;2;1)* nokatdan geçýän we $\vec{a}(1;2;3)$ wektor boýunça ugrukdyrylan göni çyzyk bilen *B(0;4;2)* nokatdan geçýän we $\vec{b}(0;-3;2)$ wektor boýunça ugrukdyrylan göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň. (*J.:* $\varphi = 90^0$).

47) Berlen *3x-2y-4z-12=0* tekizlige degişli üç sany nokadyň koordinatalaryny tapyň. *(J. : (2;-1;-1), (0;0;-3), (0;-6;0)).*

48) Tekizlik *x-3y+5z-15=0* deňleme bilen berlipdir. *A(a;1;2), B(3;b;4), C(0;-2;c)* nokatlar *a, b, c* sanlaryň haýsy bahalarynda bu tekizlige degişlidir? (*J.: a=8;* $b=\frac{8}{3}$; $c=\frac{9}{5}$).

49) Berlen *3x-5y+2z-30=0* tekizligiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň. *(J.: (10;0;0));*

(0;-6;0); (0;0;15)).

50) Berlen $x+y+z=0$ tekizligiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň. *(J.: O(0;0;0)).*

51) *1)5y-z+15=0; 2)3x-2z-6=0; 3)2x-5y+10=0* tekizlikleriň haýsy koordinatalar oklaryna paralleldigini anyklaň.

52) *1)3z+y-1=0; 2)2x-y-4=0; 3)3y+z-1=0* tekizlikleriň haýsy koordinatalar tekizliklerine perpendikulýardygyny anyklaň.

53) *1) 2x-5=0; 2)3y+6=0; 3)z+5=0* tekizlikleriň haýsy koordinatalar oklaryna perpendikulýardygyny anyklaň.

54) *1) x-5=0; 2)3y-3=0; 3)4z-1=0* tekizlikleriň haýsy koordinatalar tekizliklerine paralleldigini anyklaň.

55) *A(1;2;3)* nokatdan geçýän we *xOy* tekizligine parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: z-3=0).*

56) Berlen *B(-3;1;2)* nokatdan geçýän we *xOz* tekizligine parallel tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: y-1=0).*

57) C(5;-1;2) nokatdan geçýän we *yOz* tekizligine parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: x-5=0).*

58) *1) x+y-2z-6=0; 2) 3x-2y-z-12=0; 3) 5x+2z-10=0* tekizlikleriň normal (perpendikulýar) wektorynyň koordinatalaryny tapyň.

59) Berlen *A(1;2;3)* nokatdan geçýän we $\vec{a}(3;2;1)$ wektora perpendikulýar tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: 3x+2y+z-10=0).*

60) *A(-1;3;2)* nokatdan geçýän, *Ox* okuny özünde saklaýan tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: -2y+3z=0).*

61) *A(-1;3;2)* nokatdan geçýän, *Oy* (*Oz* okuny) okuny özünde saklaýan tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: 1) 2x+z=0, 2) 3x+y=0).*

62) Berlen *B(-1;0;4)* nokatdan geçýän we $\vec{b}(-3;2;1)$ wektora perpendikulýar bolan tekizligiň deňlemesini ýazyň.
(J.: 3x-2y-z+7=0).

63) Berlen *A(1;2;3), B(1;-2;-3); C(1;6;4)* nokatlardan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: x-1=0).*

64) Berlen $2x-y+5z+3=0$, $2x-y+5z-7=0$ tekizlikleriň paralleldiklerini görkeziň.

65) Berlen $x+y+1=0$, $3z-6=0$ tekizlikleriň özara perpendikulýardyklaryny görkeziň.

66) Berlen $4x-6y-8z+12=0$, $x-3y-4z+16=0$ tekizlikleriň özara ýerleşiş ýagdaýyny anyklaň.

67) Berlen: 1) $x-z+2=0$, $2y-6=0$; 2) $x-3y-1=0$, $2x-6=0$; 3) $x-z+1=0$, $2x+2z=0$; 4) $5x-6=0$, $7x-12=0$ tekizlikleriň özara ýerleşiş ýagdaýlaryny seljeriň.

68) xOz tekizlige parallel we (+2;-5;+3) nokatdan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazyň. *(J.: $y+5=0$).*

69) Berlen $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ tekizligiň yOz tekizlik bilen emele getiren burçuny tapmaly. *(J.: $\varphi=\frac{\pi}{3}$).*

70) Berlen $x-2y+2z-4=0$, $3y-4z+12=0$ tekizlikleriň arasyndaky burçunyň kosinusyny tapyň. *(J.: $\cos\varphi=-\frac{14}{15}$).*

71) Berlen $x+2y+2z-6=0$, $x+y-5=0$ tekizlikleriň arasyndaky burçy tapyň. (*J.:* $\varphi=45^0$).

72) Berlen $x-z=0$, $5x-10=0$ tekizlikleriň arasyndaky burçy tapyň. *(J.: $\varphi=45^0$).*

73) Berlen $A(1;2;3)$ nokatdan geçýän we $\vec{a}(1;2;2)$ wektor boýunça ugrukdyrylan göni çyzyk bilen $2y-2z-4=0$ tekizligiň arasyndaky burçy tapyň. *(J.: $\varphi=0$).*

74) Berlen $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=t$ göni çyzyk bilen $4x-3z-12=0$ tekizligiň arasyndaky burçuň sinusyny tapyň.

(J.: $\sin\varphi=-\frac{4}{5\sqrt{29}}$).

75) Merkezi koordinatalar başlangyjynda, radiusy $R=5$ bolan sferanyň deňlemesini ýazyň. (J.: $x^2+y^2+z^2=25$).

76) Merkezi $A(1;2;3)$ nokatda bolan, radiusy $R=7$ deň sferanyň deňlemesini ýazyň. (J.: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49$).

77) Berlen $x^2+y^2+z^2=49$ sfera degişli bolan 5 sany nokadyň koordinatalaryny tapyň.

78) Merkezi $B(-1;1;3)$ nokatda bolan, radiusy $R=6$ deň bolan sferanyň koordinata oklary bilen kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.

(J.: 1) $x_{1,2}=\pm\sqrt{26}-1$; 2) $y_{1,2}=\pm\sqrt{26}+1$; 3) $z_{1,2}=\pm\sqrt{34}+3$).

79) Radiusy $R=7$ bolan sfera koordinata tekizlikleriniň üçüsine hem galtaşýar. Şeýle sferalaryň näçesi bar? Olaryň merkezleriniň koordinatalaryny tapyň.

(J.: 8 sanysy bar. 1) $O(7;7;7)$; 2) $O(-7;7;7)$; 3) $O(7;-7;7)$; 4) $O(7;7;-7)$) .

80) Merkezi $A(1;2;3)$ nokatda, radiusy $R=6$ deň bolan sferanyň koordinata tekizlikleri bilen kesişýän töwerekleriniň deňlemesini ýazmaly. (J.: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$, 1) $(x-1)^2+(y-2)^2=27$; 2) $(x-1)^2+(z-3)^2=32$; 3) $(y-2)^2+(z-3)^2=35$).

81) Berlen $x^2+y^2+z^2=49$ sferanyň: 1) $2x-4=0$; 2) $3y-15=0$; 3) $z-6=0$ tekizlik bilen kesişmesinde emele gelen töwerekleriň deňlemesini ýazmaly we olaryň radiuslaryny tapmaly.

(J.: 1) $y^2+z^2=45$, $R=\sqrt{45}$, 2) $x^2+z^2=24$ $R=2\sqrt{6}$ 3) $x^2+y^2=13$ $R=\sqrt{13}$).

82) Berlen $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-22=0$ deňlemäniň sferanyň deňlemesidigini görkezmeli. (J.: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$).

83) Berlen $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-35=0$ deňlemäniň sferanyň deňlemesidigini görkezmeli we onuň merkeziniň koordinatalaryny hem-de radiusyny tapmaly.

(J.: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49$).

84) Berlen $A(3;-1;2)$, $B(-5;1;0)$, $C(0;2;12)$, $D(1;10;2)$, $E(1;1;-3)$, $K(3;\sqrt{2};17)$ nokatlaryň haýsylarynyň $x^2+y^2+z^2=49$ sferanyň içki, haýsylarynyň daşky oblastyna degişlidigini anyklaň.

85) Berlen $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-40=0$ sferanyň merkeziniň koordinatalaryny we onuň uly töwereginiň radiusyny tapyň.
(J.: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49$; $O(1;2;2)$; $R=7$).

86) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=29$ sfera bilen $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=t$ göni çyzygyň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.
(J.: 1) $K(3;5;7)$, 2) $L(-1;-1;-1)$).

87) Berlen $x^2+y^2+z^2=100$ sfera bilen $\begin{cases} x-6=0 \\ y-8=0 \end{cases}$ göni çyzygyň galtaşýanlygyny subut ediň.

88) $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ dört nokatdan geçýän sferananyň deňlemesini düzüň we merkeziniň koordinatalaryny tapyň. *(J.: $(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2+(z+\frac{c}{2})^2=R^2$; $O(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2})$*

MAZMUNY

N. Gurbanow, H. Öwezdurdyýew

Geometriýada koordinatalar we wektorlar usullary

Redaktory Kakalyýewa N.
Operatory Klyçew M.

Ýygnamaga berildi 18.03.2008 ý. Çap etmäge rugsat edildi 27.06.2008 ý.
Ölçegi 60×84 $^1/_{16}$. Şertli çap listi 5,86. Hasap-neşir listi 2,167.
Neşir №-17. Sany 500. Sargyt №-00.

Türkmenistanyň Prezidentiniň ýanyndaky
Ylym we tehnika baradaky ýokary geňeşiň "Ylym" neşirýaty.
744000. Aşgabat, Bitarap Türkmenistan köç., 15.