TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI

MAGTYMGULY ADYNDAKY
TÜRKMEN DÖWLET UNIWERSITETI

Ç. Halmyradow, G. Gurbangulyýew,
S. Halmyradow, B. Ýazlyýewa

WEKTOR WE TENZOR ANALIZINIŇ ESASLARY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin
okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat – 2010

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

**Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.**

**Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!**

**Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.**

**Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!**

SÖZBAŞY

“Wektor we tenzor analiziniň esaslary” okuw kitaby okuw maksatnamasyna laýyklykda ýazylandyr. ol egriçyzykly we üst integrallary, wektor analiziniň esaslary bölümlerden ybaratdyr. Bu bölümleriň her birinde nazary maglumatlary berkitmek üçin anyk mysallar işlenip görkezilýär. Okuw kitabynda özbaşdak işlemek üçin gönükmeler getirilendir.

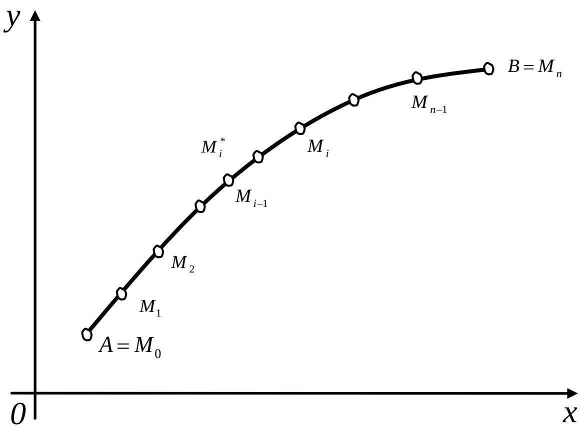
“Wektor we tenzor analiziniň esaslary” okuw kitaby fizika, radiofizika we elektronika hünäri boýunça okaýan talyplara niýetlenendir. bu okuw kitapdan tehniki ýokary okuw mekdepleriniň talyplary hem peýdalanyp bilerler.

§1. Birinji görnüşli egriçyzykly integrallar

Haçanda integrirleme aralygy tekizlikdäki egriniň dugasy bolanda kesgitli integraly umumylaşdyralyň. Şeýle integrallara egriçyzykly integrallar diýilýär. Olar matematikanyň we fizikanyň köp bölümlerinde giňden ulanylýar. Egriçyzykly integrallar iki görnüşe eýe: birinji görnüşli we ikinji görnüşli egriçyzykly integrallar.

1. Birinji görnüşli egriçyzykly integralyň kesgitlenişi. *Oxy* tekizlikde käbir endigan ýa-da bölek endigan *AB* egrä garalyň we *AB* egride $z = f(x, y)$ funksiýa kesgitlenen hem-de çäkli bolsun.

$A = M_0, M_1, .., M_{i-1}, M_i, .., M_{n-1}, M_n = B$ nokatlar arkaly *AB*



1-nji surat

egrini böleklere böleliň we duganyň her bir $M_{i-1}M_i$ böleginden N_i nokady saýlap alyp, $M_{i-1}M_i$ duganyň uzynlygyny Δl_i bilen belläp,

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i \quad (1)$$

jemi düzeliň.

(1) jeme *Z=f(x,y)=f(M)* funksiýanyň *AB* egri boýunça integral jemi diýilýär. Duganyň $M_{i-1}M_i$ bölekleriniň iň uly

böleginiň uzynlygyny λ ($\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}|\Delta l_i|$) bilen belläliň.

<u>Kesgitleme:</u> Eger $\lambda \to 0$ bolanda (1) integral jemiň *AB* duganyň böleklere bölünmegine we bu böleklerden N_i nokatlaryň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli I predeli bar bolsa, onda ol predele $f(x, y)$ funksiýadan *AB* egriniň boýuna birinji görnüşli çyzykly integral diýilýär we aşakdaky simwollaryň haýsy hem bolsa biri bilen bellenýär.

$$I = \int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{AB} f(x,y)dl$$

Bu ýagdaýda $f(x, y)$ funksiýa AB egriniň boýuna integrirlenýär. *AB* egriniň özüne bolsa inetegrirlenme kontury diýilýär. *A*-integrirlenmäniň başlangyç, *B*-bolsa gutarýan nokadydyr.

Birinji görnüşli egriçyzykly integral aňsatlyk bilen kesgitli integrala getirilýär. Hakykatdan hem *AB* egride parametr hökmünde egriniň *A* nokadyndan başlap hasaplanýan *l* uzynlygyny alsak onda egriniň parametrik deňlemesini $x=x(l)$, $y=y(l)$, $(0 \le l \le L)$ görnüşde aňladyp bileris. Şunlukda *AB* egriniň boýuna berlen *f(x,y)* funksiýa *l* parametre görä $f[x(l), y(l)]$ çylşyrymly funksiýa bolar.

l parametriň N_i nokada degişli bahasyny $\tilde{l}_i$ bilen, M_i nokada degişli bahasyny bolsa l_i bilen belgiläp (1) integral jemi

$$\sum_{i=1}^{n} f\left[x(\tilde{l}_i), y(\tilde{l}_i)\right]\Delta l_i \qquad (2)$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$ we $l_{i-1} \le \tilde{l}_i \le l_i$ görnüşde ýazyp bileris. (2) jem $f[x(l), y(l)]$ funksiýadan $[0, L]$ kesimde alnan kesgitli integral üçin integral jemdir. (1) we (2) integral jemleriň özara deň bolanlygy üçin olara degişli integrallar hem deňdirler, başgaça aýdanymyzda

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{o}^{L} f[x(l), y(l)]dl \qquad (3)$$

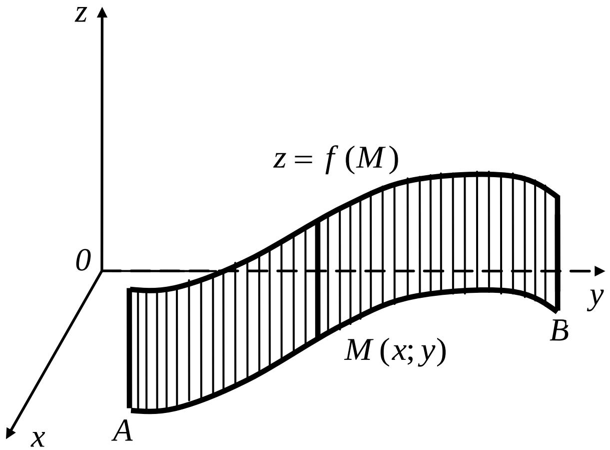
(3) formula diňe bir egriçyzykly integraly kesgitli integralyň üsti bilen aňlatman, eýsem ol garalýan *AB* egriniň boýuna üznüksiz bolan *f(x,y)* funksiýadan egriçyzykly integralyň bardygyny hem subut edýär. Ýokarda görkezilişi ýaly, birinji görnüşli egriçyzykly integral gönüden-göni kesgitli integrala getirildi, ýöne bu

integrallaryň arasynda aşakdaky tapawut bar. (1) integral jemde Δl_i ululyklar *AB* egriniň haýsy nokadyny başlangyç, haýsysyny ahyrky nokat diýip alanmyza garamazdan, hökman položitel bolýar, başgaça aýdanymyzda

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$$

Ýöne şol wagtda $\int_a^b f(x)dx$ kesgitli integralda integrirlemäniň predelini çalşyranymyzda onuň alamaty üýtgeýär. Beýleki ýagdaýlarda birinji görnüşli egriçyzykly integral kesgitli integralyň häsiýetlerini özünde saklaýar. Onuň şeýledigi (3) formuladan göni gelip çykýar.

Egriçyzykly integral hem edil kesgitli integral ýaly geometrik häsiýete eýedir. Haçanda $f(x) \geq 0$ bolanda $\int_a^b f(x)dx$ kesgitli integral egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny aňladýan bolsa, $f(M) \geq 0$ bolanda $\int_{AB} f(M)dl$ egriçyzykly integral *M(x,y)* nikadyndan *oxy* tekizlige perpendikulýar galdyrylan we üýtgeýän *f(M)* beýikligi bolan silindrik üstüň meýdanyna san taýdan deňdir.



2-nji surat

Hususy ýagdaýda, eger *AB* egri bolman, *Ox* okda ýerleşen gönüniň $[a,b]$ kesimi bolsa, onda *f(x,y)=f(x)*, $\Delta l_i = \Delta x_i$ we egriçyzykly integral adaty kesgitli integrala öwrüler.

Eger $f(M) \equiv 1$ diýsek, onda $\int\limits_{AB} dl$ egriçyzykly integraly alarys. Bu integral *AB* egriniň dugasynyň uzynlygyny aňladýar. Şeýlelikde birinji görnüşli egriçyzykly integralyň kömegi bilen silindrik üstleriň meýdanyny we dugalaryň uzynlygyny hasaplap bolýar. Bulardan başga-da birinji görnüşli egriçyzykly integral fizikada giňden peýdalanylýar. Onuň kömegi bilen material egriniň dykyzlygynyň üsti bilen onuň massasyny, koordinata oklaryna görä inersiýa momentlerini, şeýle egrileriň massasynyň merkeziniň koordinatalaryny kesgitläp bolýar.

2. Birinji görnüşli egriçyzykly integralyň hasaplanyşy.

Haçanda $\varphi(t), \psi(t)$ funksiýalar özleriniň $\varphi'(t), \psi'(t)$ önümleri bilen $[\alpha, \beta]$ kesimde üznüksiz bolanda, *AB* egri $x = \varphi(t), y = \psi(t), (\alpha \le t \le \beta)$ parametrik görnüşde berlen bolsun. Şunlukda *f(x,y)* funksiýa bu egriniň boýuna üznüksiz we kesgitlilik üçin *A* nokada $t = \alpha$, *B* nokada bolsa $t = \beta$ degişli hasap edeliň. Onda *AB* egriniň islendik M($\varphi(t), \psi(t)$) nokady üçin *AM* duganyň *l* uzynlygyna *t* parametre bagly *l=l(t)* funksiýa hökmünde garamak bolar we ol $l = l(t) = \int\limits_o^t \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$ formula arkaly hasaplanýar.

Bu integrala ýokary çägi üýtgeýänli integraly differensirlemäniň düzgünini peýdalanyp alarys:

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \qquad (4)$$

(30 deňligiň sag bölegindäki kesgitli integralda l=l(t) diýip üýtgeýäni çalşyryp (4) deňligi göz öňünde tutup alarys:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{o}^{L} f[x(l), y(l)]dl = \qquad (5)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

<u>Mysal 1.</u> Haçanda *AB* duga $x = a\cos t, y = a\sin t, o \le t \le \pi/2$ töweregiň bölegi bolanda $\int_{AB} y^2 dl$ egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi: $y^2 = a^2\sin^2 t,\quad dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\quad dt = a\cdot dt$ bolýanlygy üçin (5) formuladan peýdalanyp alarys.

$$\int_{AB} y^2 dl = \int_{o}^{\pi/2} a^2\sin^2 t a dt = \frac{a^3}{2}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3\pi}{4}$$

Hususy ýagdaýda, eger *AB* egri $y = y(x)$, $a \le x \le b$, bu ýerde $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa, onda x-y parametr $(t = x)$ hökmünde kabul edip (5) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{a}^{b} f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \qquad (6)$$

Mysal 2. Haçanda *AB* egri $y^2 = 2x$ parabolanyň *(0,0)* nokatdan *(2,2)* nokada çenli dugasy bolanda $\int\limits_{AB} ydl$ egriçyzykly integraly hasaplamaly

Çözülişi: Alarys

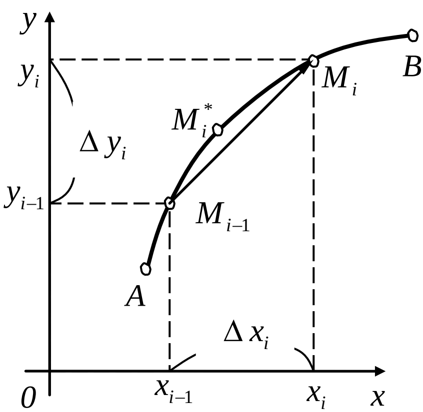
$$y = \sqrt{2x}\,, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}\,, \quad dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx \qquad (6)$$

formula esasynda

$$\int\limits_{AB} ydl = \int\limits_0^2 \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx = \int\limits_0^2 \sqrt{2x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

Bellik: (4) formula özboluşly gyzyklanma döredýär. Kwadrata göterip alarys:



3-nji surat

$$(dl)^2 = [\varphi'(t)dt]^2 + [\psi'(t)dt]^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Bu deňlik dl duganyň diggerensiýalyna ýönekeý geometrik düşündiriş berýär. $y = y(x)$ funksiýanyň differensiýaly galtaşýanyň ordinatasynyň artdyrmasy bolýandygyny göz öňünde tutsak, onda *dl* duganyň differensiýalynyň, *AB* duganyň absissasy *x* bolan nokadyna geçirilen galtaşýanyň, galtaşma nokady bilen $(x + dx, y + dy)$ nokatlarynyň arasyndaky uzaklygyna, başgaça aýdanymyzda katetleri $|dx|$ we $|dy|$ bolan gönüburçly üçburçlygyň gipetenuzasyna deňdir, $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ deňlik bolsa özünde Pifagor teoremasyny saklaýandyr.

§2. Ikinji görnüşli egriçyzykly integrallar

1. Ikinji görnüşli egriçyzykly integralyň kesgitlenişi. Goý *AB* egride iki sany $P(x, y)$ we $Q(x, y)$ çäkli funksiýalar kesgitlenen bolsun.

$A = M_0, M_1, .., M_{i-1}, M_i, .., M_{n-1}, M_n = B$ nokatlar arkaly *AB* egrini *n* bölege böleliň. $M_{i-1}\vec{M}_i$ wektoryň koordinata oklaryna proýeksiýalaryny Δx_i we Δy_i bilen belläliň, duganyň her bir $M_{i-1}M_i$ böleginden erkin N_i nokady saýlap alalyň we *P(x,y)* $[Q(x, y)]$ funksiýa üçin

$$\sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i \quad \left[\sum_{i=1}^{n} Q(N_i)\Delta y_i\right] \qquad (1)$$

jemi guralyň

Kesgitleme: Eger $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta l_i\}$, Δl_i bolsa $M_{i-1}M_i$ duganyň uzynlygy) bolanda (1) integral jemiň, *AB* duganyň böleklere bölünmegine we bu böleklerden N_i nokatlaryň saýlanyp alynmagyna bagly bolmadyk tükenikli *I* predeli bar bolsa, onda ol predele $P(x,y)$ $[Q(x,y)]$ funksiýadan *AB* egri boýunça ikinji görnüşli egriçyzykly integral diýilýär we ol

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \ \left[\int Q(x,y)dy\right]$$

simwollar bilen belgilenýär. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ jeme ikinji görnüşli umumy egriçyzykly integral diýilýär we $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ simwol bilen bellenilýär.

Edil birinji görnüşli egriçyzykly integralda bolşy ýaly ikinji görnüşli egriçyzykly integral hem aňsatlyk bilen kesgitli integrala getirilýär.

Hakykatdan hem, haçanda $[\alpha,\beta]$ kesimde $\varphi(t),\psi(t)$ funksiýalar özleriniň $\varphi'(t),\psi'(t)$ önümleri bilen üznüksiz bolanda *AB* egri $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ parametrik görnüşde berlen bolsa, şunlukda *A* nokada parametriň $t=\alpha$, *B* nokada bolsa parametriň $t=\beta$ bahasy degişli hem-de $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$ diýeliň. Goý $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalar *AB* egriniň boýuna üznüksiz bolsun. Onda egriçyzykly integraly kesgitli integrala getirýän

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt \quad (2)$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\}dt$$

formulalar ýerine ýetýändir
(2) formulalaryň birinjisini ýagny

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

formulany subut edeliň. Ikinjisi edil şoňa meňzeşlikde subut edilýär, üçünjisi bolsa birinji we ikinji goşulyp alynýar.

Goý AB egrini bölýän M_i nokatlara t parametriň t_i bahalary, N_i nokatlara bolsa $\tilde{t}_i$ bahalary degişli bolsun, başgaça aýdanymyzda M_i nokatlar $[\varphi(t_i),\psi(t_i)]$ koordinatalara, N_i nokatlar bolsa $[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]$ $(\mathrm{i}=1,2,..,\mathrm{n})$ koordinatalara eýe bolsun $\mathrm{P(x,y)}$ funksiýa egride t parametre görä çylşyrymly funksiýa bolýar:

$P[\varphi(t_i),\psi(t_i)]$, $x=\varphi(t)$ we $y=\psi(t)$ funksiýalaryň $[\alpha,\beta]$ kesimde $P(x,y)$funksiýanyň bolsa AB egride üznüksiz bolany üçin çylşyrymly funksiýanyň üznüksizligi baradaky teorema esasynda $P[\varphi(t_i),\Psi(t_i)]$ funksiýa $[\alpha,\beta]$ kesimde üznüksizdir

$P(x,y)$funksiýa üçin integral jemi guralyň:

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}P(N_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]\Delta x_i$$

$\Delta x_i=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})$ bolany üçin Nýuton-Leýbnis formulasy esasynda $\Delta x_i=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt$

Şonuň üçin hem

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi'(t)dt=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]\varphi'(t)dt$$

Beýleki tarapdan $[\alpha,\beta]$ kesimde $P[\varphi(t_i),\psi(t_i)]\varphi'(t)$ funksiýanyň üznüksiz bolany üçin (3) formulanyň sag böleginde duran, bu funksiýadan kesgitli integral bardyr Ol integraly $[t_{i-1},t_i]$ kesimlerdäki integrallaryň jemi görnüşinde ýazalyň:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\delta-I=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\{P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]-P[\varphi(t),\psi(t0]\}\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

tapawuda garalyň we ony bahalandyralyň $P[\varphi(t_i),\psi(t_i)]$ funksiýa $[\alpha,\beta]$ kesimde üznüksiz ,onda Kantor teoremasy esasynda ol funksiýa $[\alpha,\beta]$ kesimde deňölçegli üznüksizdir Bu bolsa islendik $\varepsilon\rangle 0$ san üçin $\delta\rangle 0$ san bar bolup, $\mu=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\langle\delta$ bolanda

$$\left|P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]-P[\varphi(t),\psi(t)]\right|\langle\varepsilon \qquad (5)$$

deňsizligiň ýerine ýetýändigini aňladýar $\varphi'(t)$ funksiýanyň $[\alpha,\beta]$ kesimde üznüksizliginden onuň $[\alpha,\beta]$ kesimde çäkliligi, başgaça aýdanymyzda şeýle bir $\kappa\rangle o$ san bar bolup

$$|\varphi'(t)|\le\kappa \qquad (6)$$

deňsizligiň ýerine ýetýänligi gelip çykýar
(5) we (6) deňsizliklerden peýdalanyp (4) tapawut üçin aşakdaky bahalandyrmany alarys:

$$|\delta-I|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|P[\varphi(\tilde{t}_i),\psi(\tilde{t}_i)]-P[\varphi(t),\psi(t)]\right||\varphi'(t)|dt\langle\varepsilon\kappa\sum_{i=1}^{n}|t_i-t_{i-1}|=\varepsilon\kappa$$

Bu ýerden ε sanyň erkinliginden

$$\lim_{\mu\to o}\delta=I \quad (7)$$

bolýanlygy gelip çykýar. Ýöne $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta l_i\}\to o$ bolanda $\mu=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\to 0 \quad (\Delta t_i=t_i-t_{i-1})$ we tersine. Hakykatdan hem $\Delta l_i=\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$. $[\alpha,\beta]$ kesimde $\varphi'(t)$ we $\psi'(t)$ funksiýalaryň üznüksizliginden

$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$ funksiýanyň hem $[\alpha,\beta]$ kesimde üznüksizligi gelip çykýar. Onda m we M degişlilikde $\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$ funksiýanyň $[\alpha,\beta]$ kesimdäki minimal we maksimal bahalary bolup, $m\rangle o, M\rangle o$ bolsa, onda $m\Delta t_i \le \Delta l_i \le M\Delta t_i$. Sebäbi $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq o$

Çep deňsizlikden $\lambda\to o$ bolanda $\mu\to o$ bolýanlygy, sag deňsizlikden bolsa $\mu\to o$ bolanda $\lambda\to o$ bolýanlygy gelip çykýar. Onda (7) deňlikden $\lim\limits_{\lambda\to o}\delta=I$, başgaça aýdanymyzda $\int\limits_{AB}P(x,y)dx$ egriçyzykly integral bar we (3) formula ýerine ýetýär.

Ikinji görnüşli egriçyzykly integral üçin kesgitli integralyň degişli häsiýetleri ýerine ýetýändir. Onuň şeýledigi (2) formulalardan gelip çykýar

Birinji görnüşli egriçyzykly integraldan tapawutlylykda ikinji görnüşli egriçyzykly integral integralyň haýsy ugur boýunça (*A*-dan *B* tarapa ýa-da *B*-dan *A* tarapa) geçilýändigine baglydyr we egriniň geçilmeli ugry üýtgese integralyň alamaty hem üýtgeýändir, başgaça aýdanymyzda $\int\limits_{AB}P(x,y)dx=-\int\limits_{BA}P(x,y)dx$,

$$\int\limits_{AB}Q(x,y)dy=-\int\limits_{BA}Q(x,y)dy$$

Hakykatdan hem egrini geçmeli ugrymyzy üýtgetsek, onda biz (1) jemlerdäki Δx_i we Δy_i proýeksiýalaryň alamatyny üýtgetmeli bolarys. Netijede jemleriň we olaryň predelleriniň alamaty üýtgär.

Şeýlelikde ikinji görnüşli egriçyzykly integrallar hasaplanylanda integrirlemäniň ugry göz öňünde tutulandyr. Haçanda L-ýapyk egri bolanda B nokat A nokat bilen gabat gelýär. Şunlukda egriniň boýuna iki ugur boýunça aýlanyp bolýar.
Eger L- ýapyk egriniň boýuna aýlanymyzda, onuň çäkleýän ýaýlasy elmydama çepimizde ýerleşýän bolsa onda ol ugry položitel ugur diýip hasap etjekdiris. Bu ugra garşylykly ugra otrisatel ugur diýilýär.
L ýapyk egriniň boýuna položitel ugur boýunça egriçyzykly integral köplenç $\oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ simwol bilen belgilenýär.

2. Ikinji görnüşli egriçyzykly integrallaryň hasaplanylyşy.

Ikinji görnüşli egriçyzykly integrallar hasaplanylanda (2) formulalardan peýdalanylýar we ol integrallar kesgitli integrallara getirilýär.
Hususy ýagdaýda, eger AB egri $y = y(x)$, $a \le x \le b$ deňleme arkaly berlen we $y(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýa bolsa, onda x - y $(t = x)$ parametr hökmünde kabul edip (2) formuladan alarys:

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P[x, y(x)]dx,$$

$$\int_{Ab} Q(x,y)dy = \int_a^b Q[x, y(x)]y'(x)dx \qquad (8)$$

$$\int_{Ab} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]\}dx$$

Haçanda AB egri $x = x(y)$ deňleme arkaly berlen bolsa, onda ýokardaka meňzeş formulalar ýerine ýetýändir

<u>Mysal 1.</u> Eger AB töweregiň dörtden biri bolup $x = \cos t, y = \sin t, o \le t \le \frac{\pi}{2}$ A nokada $t = o$, B nokada $t = \frac{\pi}{2}$ degişli bolsa, onda $\int_{AB} x^2 dx + xydy$ integraly hasaplamaly.

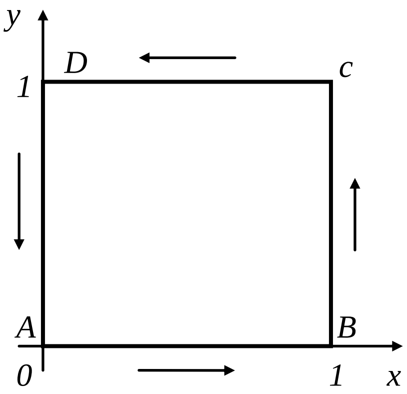
<u>Çözülişi:</u> Alarys:

$x^2 = \cos^2 t, dx = -\sin tdt, xy = \cos t \sin t, dy = \cos tdt$ (2)

formulalaryň üçünjisinden peýdalanyp alarys:

$$\int_{AB} x^2 dx + xydy = \int_o^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t)dt = 0$$

<u>Mysal 2.</u> Haçanda L ýapyk egri, $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ gönülerden ybarat bolsa $\oint_L (x + y)dy$ integraly hasaplamaly.



4-nji surat

<u>Çözülişi:</u>

4-nji suratda položitel ugur peýkamlar arkaly görkezilendir. Tutuş ýapyk kontury böleklere bölüp alarys:

$$\oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

AB we *CD* bölekleriň boýuna *y* hemişelik, şonuň üçin hem $dy = 0$ we ol bölekler boýunça integrallar nola deňdir. Şonuň üçin hem *BC* we *DA* bölekler boýunça integrallary hasaplamak galýar.

(8) formulalaryň birinjisine meňzeş formula boýunça [x - y y bilen we $y(x)$ - y $x(y)$ bilen çalşyryp] alarys.

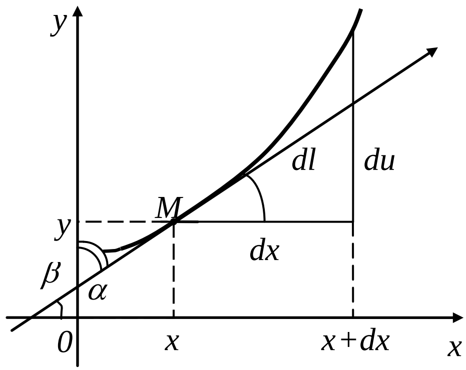
$$\int_{BC} (x+y)dy = \int_0^1 (1+y)dy = \left[y + \frac{y^2}{2} \right]_o^1 = \frac{3}{2}$$

$$\int_{DA}(x+y)dy=\int_{1}^{0}(0+y)dy=\frac{y^2}{2}\bigg|_1^0=-\frac{1}{2}$$

Onda $\oint_L (x+y)dy=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

3. **Birinji we ikinji görnüşli egriçyzykly integrallaryň arasyndaky baglanyşyk**

AB egrä $M(x,y)$ nokatda geçirilen ugrukdyrylan galtaşýanyň koordinata oklary bilen emele getirýän burçlaryny α we β bilen belgiläliň. (5-nji surat)
Galtaşýanyň položitel ugry diýip biz nokadyň *A*-dan *B* tarapa herekedine degişli ugry kabul etjekdiris.



5-nji surat

Onda $dx = \cos\alpha dl, dy = \cos\beta dl$ (9)

Ikinji görnüşli egriçyzykly integralda dx we dy olaryň (9) aňlatmalar arkaly kesgitlenýän bahalaryny çalşyryp, ol integraly birinji görnüşli egriçyzykly integrala özgerderis:

$$\int_{Ab} P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha dl$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)\cos\beta dl \qquad (10)$$

$$\int_{A} Q(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]dl$$

Şeýlelikde (10) formulalar ikinji görnüşli egriçyzykly integraly birinji görnüşli egriçyzykly integralyň üsti bilen aňladýar we olaryň baglanyşygyny döredýär.

Haçanda nokadyň egri boýunça herekediniň ugry garşylykyly ugra üýtgände $\cos\alpha, \cos\beta, dx, dy$ alamatyny üýtgedýär we (10) formulalar öz güýjünde galýar.

Biz egriçyzykly integrallara tekiz egriler üçin garadyk. Ýöne onuň kesgitlemesini we häsiýetlerini giňişlikdäki egriler üçin hem geçirip bolar.

Goý, AB giňilikdäki egri bolup bu egride $F(x,y,z), P(x,y,z), Q(x,y,z)$ we $R(x,y,z)$ funksiýalar kesgitlenen bolsun. Onda edil tekiz egrilerde bolşy ýaly

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx, \int_{AB} Q(x,y,z)dy, \int_{AB} R(x,y,z)dz$$

$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ ikinji görnüşli egriçyzykly integrallary kesgitläp bolýar. Bu integrallary hasaplamagyň düzgünleri hem tekiz egrilerde kesgitlenen integrallaryň hasaplanylyşyndan kän bir tapawutlanmaýar.

§3. Grin formulasy.

Grin formulasy egricyzykly integrallar bilen ikigat integrallary baglanyşdyrýar.Onda analizde we analiziň ulanylýan ýerlerinde giňden peýdalanylýar.Bu formulany koordinata oklaryna parallel göniler bilen kesemizde ikiden köp bolmadykkesişme nokatlary bolmadyk egriler bilen çäklenen ýapyk ýaýla üçin subut edeliň. Gysgalyk üçin bular ýaly ýaýlany ýönekeý ýaýla diýip atlandyrjakdyrys.

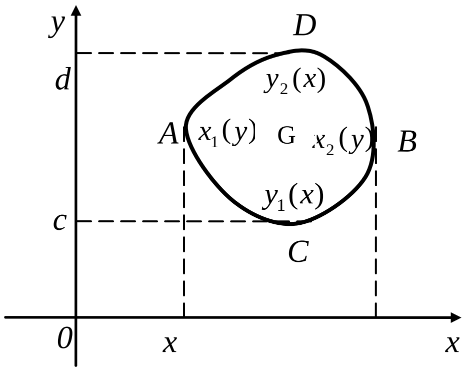
Ýaýlany çäkleýän egriler endigan ýa-da bölek endigan diýip hasap edeliň.

Teorema Goý G- käbir ýönekeý ýaýla L- kontur bilen çäklenen bolsun we goý $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funksiýalar özleriniň $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ hususy önümleri bilen berlen ýaýlada üznüksiz bolsun.Onda Grin formulasy atlandyrylýan

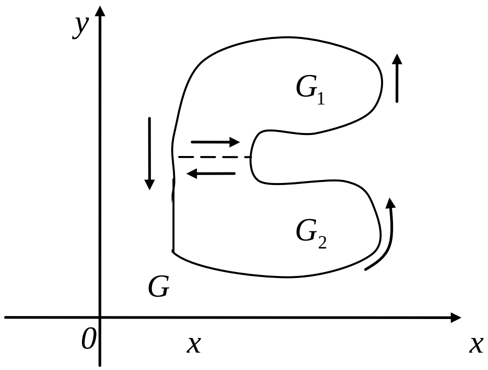
$$\iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy \qquad (1)$$

formula ýerine ýetýändir.

Subudy. Goý G ýaýlany çäklenen L- kontur $x = x_1(y),\ x = x_2(y)\ (c \le y \le d),\ x_1(y) \le x_2(y)$ deňlemeler arkaly, şonuň ýaly-da $y = y_1(x),\ y = y_2(x)\ (a \le x \le b),\ y_1(x) \le y_2(x)$ deňlemeler arkalyaňladylýan bolsun (7-nji surat).
Öňürti $(a \le x \le b),\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$ deňsizlikler arkaly kesgitlenen ýaýla garalyň we
`1



6-njy surat



7-nji surat

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

integraly egriçyzykly integrala özgedeliň.Onuň üçin. Ony gaýtalanýan integrala getireliň we Nýuton-Leýbnisiň formulasyndan peýdalanyp y-e görä integrirläliň. Alarys:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_{1(x)}}^{y_{2(x)}} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right] dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx.$$

Bu iki kesgitli integralyň her biri degişli egrä görä alnan ikinji görnüşli egriçyzykly integrala deňdir:

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{ADB} P(x, y) dx = -\int_{BDA} P(x, y) dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{ACB} P(x, y) dx.$$

Şeýlelikde

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\left[\int_{BDA} P(x, y) dx + \int_{ACB} P(x, y) dx\right]$$

ýa-da

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L P(x, y)dx \qquad (2)$$

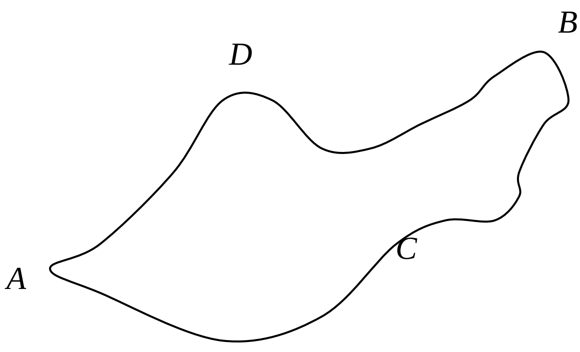
Edil şuňa meňzeşlikde

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x, y)dy \qquad (3)$$

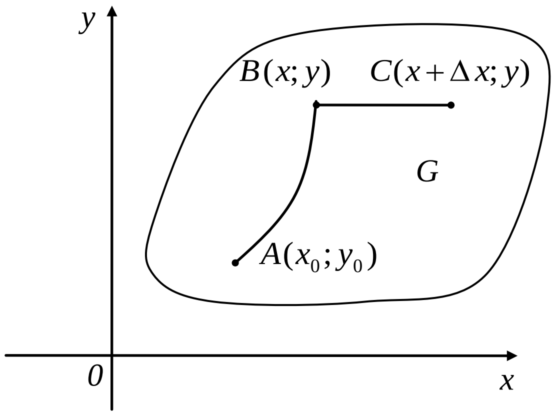
formula hem subut edilýär.(şunlukda G–ýaýla . $(c \le y \le d)$, $x_1(y) \le x \le x_2(y)$ deňsizlikler arkaly kesgitlenýär).

(3) deňlikden (2)deňligi aýyryp alarys.

<u>Bellik.</u> Eger ýapyk G ýaýlany goşmaça çyzyklary geçirmek arkaly tükenikli sany ýönekeý ýaýlalara bölüp bolýan bilsa, onda bu ýaýla üçin hem Grin formulasy ýerine ýetýändir.Hakykatdan hem , goý L çägi bolan G-ýaýla 8-nji suratdaky görnüşe eýe bolsun.



8-nji surat



9-njy surat

Ony iki sany ýönekeý ýaýla böleliň: G_1 we G_2 ýaýlalar üçin (1) formula ýerine ýetýär. G_1 we G_2 ýaýla üçin Grin formulasyny ulanyp alnan deňlikleri agzama-agza goşalyň. Çep tarapda tutuş G ýaýla boýunça ikigat integraly alarys – sag böleginde bolsa G ýaýlanyň L kontury boýunça egriçyzykly integral alarys, şunlukda kömekçi egri boýunça integral iki gezek garşylykly ugur boýunça alynýar we goşulanda biri-birini ýok edýär.

Mysal. L egri $x^2+y^2=R^2$ töwerek bolanda Grin formulasyndan peýdalanyp

$$\oint_L (x-y)dx+(x+y)dy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=x+y\ \ we\ \frac{\partial P}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

funksiýalar ýapyk $x^2 + y^2 = R^2$ töwerekde üznüksiz. Diýmek teorema 1 esasynda berilen integrala Grin formulasyny ulanmak bolar. Alarys:

$$\oint_L (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_G [1-(-1)]dxdy = 2\iint_G dxdy = 2S = 2\pi R^2.$$

Berlen integraly göniden-göni hasaplamak arkaly alnan netijäniň dogrulygyna göz ýetirmek bolar.

§4. Egriçyzykly integralyň integrirlemäniň ýoluna bagly dällik şertleri.

1. Egriçyzykly integralyň integrirlemäniň ýoluna bagly dällik şertleri.

Mysala garalyň:

<u>Mysal.</u> $\int_{AB} 3x^2 ydx + (x^3+1)dy$ integraly hasaplamaly, eger:

a) $(0;0)$ *we* $(1;1)$ nokatlary birikdirýän $y = x$ göni bolsa:

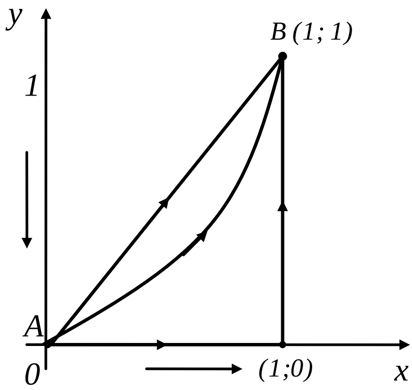
b) AB-şol nokatlary birikdirýän $y = x^2$ parabola bolsa;

ç) AB-$(0;0),(1;0)$ *we* $(1;1)$ nokatlary birikdirýän döwük çyzyk bolsa (10-njy surat) <u>Çözülişi.</u> alarys:

a) $\int_{AB} 3x^2 ydx + (x^3+1)dy = \int_0^1 (4x^3+1)dx = 2;$

b) $\int\limits_{AB} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 \left(5x^4+2x\right)dx = 2;$

ç) $\int\limits_{AB} 3x^2ydx + \left(x^3+1\right)dy = \int\limits_0^1 3x^2\cdot 0\cdot dx + \int\limits_0^1 \left(1+1\right)dy = \int\limits_0^1 2dy = .2;$



10-njy surat

Görüşimiz ýaly şol bir nokatlary birikdirýän dürli üç ýol arkaly alnan integral şol bir netijäni berdi.

Käbir ýagdaýlarda $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ integralyň ululygy integrirlemäniň ýoluna bagly bolban ol ýoluň başlangyç *A* we gutarýan *B* nokatlaryň ýerleşişine bagly bolar.Haýsy ertlerde şular ýaly baglylygyň bolup bilýändigini anyklalyň. Bu soragy derňemekde Grin formulasy peýdalanylar.

Gelejekde garaljak ýagdaýlary anyklalyň.

Kesgitleme. Eger tekiz G ýaýlada alnan islendik ýapyk L kontur arkaly çäklenen ýaýla tutuşlygyna G ýaýla degişli bolsa, onda G ýaýla birbagly ýaýla diýilýär.

Birbagly ýaýla mysal edip tegelegiň, ellipsiň, köpburçlugyň içini getirmek bolar.

$x^2 + y^2 = 1$ *we* $x^2 + y^2 = 4$ töwerekleriň aralygynda ýerleşen ýaýla birbagly ýaýla däldir.Sebäbi $x^2 + y^2 = 2$ töweregiň içi berlen ýaýla degişli däldir, mysal üçin $(0;0)$ koordinatalar başlangyjy mysal getirilen ýaýla degişli däldir.

Teorema Goý $P(x;y)$, $Q(x;y)$ funksiýalar we olaryň $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ hususy önümleri birbagly G ýaýlada üznüksiz bolsun. Onda aşakdaky dört şert ekwiwalentdir, başgaça aýdanymyzda ol şertleriň islendik biriniň ýerine ýetmeginden beýleki üçüsiniň ýerine ýetýänligi gelip çykýar:

1. G ýaýlada ýerleşýän islendik bölek-endigan L egri üçin $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$;
2. G ýaýlada alnan islendik A we B nokatlar üçin $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ integralyň bahasy G ýaýlada ýerleşen ýoluň saýlanyp alynşyna bagly däl.
3. $Pdx + Qdy$ aňlatma G ýaýlada kesgitlenen käbir funksiýanyň doly differensialy.Başgaça

aýdanymymyzda G ýaýlada kesgitlenen $F(x,y)$ funksiýa bar bolup $dF = Pdx + Qdy$;

4. G ýaýlanyň ähli ýerinde $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Subudy. Teoremanyň subudyny

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1,$$

shema boýunça amala aşyrarys, başgaça aýdanymyzda birinji şertden ikinji şertiň gelip çykýandygyny, ikinjiden-üçünjiniň, üçünjiden-dördünjiniň we dördünjiden ýene birinjiniň gelip çykýandygyny görkezeliň. Netijede ähli şertleriň ekwiwalentligi subut ediler.

Birinji etap: $1 \to 2$. A we B nokatlary birikdirýän tutuşlugyna G ýaýlada ýerleşýän iki erkin ýola garalyň: AÇB we ADB-erkin bölek endigan egri (9-njy surat). Olaryň $L - ACB + DDA$ jemi G ýaýlada ýerleşen ýapyk egridir. 1) şerte görä

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0,$$

ýöne

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{BDA} Pdx + Qdy.$$

netijede $$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{BDA} Pdx + Qdy.$$

diýmek 2) şert ýerine ýetýär.

Ikinji etap: $2 \to 3$. Goý, $\int_a^b Pdx + Qdy$ integral integrirlemäniň ýoluna bagly däl bolup A we B nokatlara bagly bolsun. Eger A nokady bellesek : $A = A(x_0, y_0)$, onda integral $B = B01(x, y)$ nokatlaryň x *we* y koordinatalaryna görä käbir funksiýalar:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = F(x, y)$$

$F(x, y)$ funksiýanyň differensirlenýändigini we

$$dF = Pdx + Qdy; \qquad (1)$$

Bolýandygyny görkezeliň. Onuň üçin G ýaýlanyň her bir B nokadynda $\frac{\partial F}{\partial x}$ *we* $\frac{\partial P}{\partial y}$ hususy önümleriniň bardygyny we

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (2)$$

bolýandygyny görkezmek ýeterlikdir.Sebäbi $P(x, y)$ we $Q(x, y)$ funksiýalar G ýaýlada üznüksiz, onda (2) deňlikden $F(x, y)$ funksiýanyň differensirlenýänligi we (1) deňlik gelip çykýar.

$F(x, y)$ funksiýadan x görä hususy önümiň bardygyny we (2) deňlikleriň birinjisiniň ýerine ýetýändigini görkezmek üçin, $B(x, y)$ nokatda $F(x, y)$ funksiýanyň x-a görä hususy artdyrmasyny düzeliň:

$$\Delta_x F = F(x+\Delta x, y) - F(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx + Qdy,$$

bu ýerde C nokat $x+\Delta x$ *we* y koordinata eýe (10-njy surat). Şerte görä integral ýola bagly däl, şonuň üçin hem $B(x, y)$ nokatdan $C(x+\Delta x, y)$ nokada çenli göniçyzyk görnüşde alalyň.Onda

$$\Delta_x F = \int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx.$$

Soňky integrala orta baha baradaky teoremany ulanyp, alarys

$$\Delta_x F = F(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \qquad 0<\theta<1,$$

bu ýerden

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \qquad 0<\theta<1,$$

Netijede ,

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta\lambda\to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x, y),$$

Sebäbi şerte görä $P(x, y)$ üznüksiz. $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ bolýanlygy hem ýokardaka meňzeş subut edilýär. Diýmek 3) şert ýerine ýetýär.

<u>Üçünji etap:</u> $3 \to 4$ Goý, G ýaýlada $dF = Pdx + Qdy$ deňligi kanagatlandyrýan $F(x, y)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. Onda

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

we garyşyk önümiň deňligi baradaky teorema esasynda

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

Diýmek soralýan (1) deňlik ýerine ýetýär.

Dördünji etap: $4 \to 1.$ Goý, 4) şert ýerine ýetýän bolsun we G ýaýlada ýerleşýän L-bölek endigan egri G^* ýaýlany çäkleýän bolsun.Onda G^* ýaýla Grin formulasyny ulanyp (bu ýerde G ýaýlanyň birbaglylygy ulanylýar), alarys

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

4) şert esasynda sag tarapdaky integral nola deň. Netijede G ýaýlada ýerleşýän islendik ýapyk L egri üçin

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0$$

Bellik: Teoremanyň 1)-4) şertleriniň ekwiwalentliginden hususy ýagdaýda 3) şertiň ýerine ýetmegi egriçyzykly integralyň integrirlemäniň ýoluna bagly dälliginiň zerur we ýeterlik şertdigi gelip çykýar.Ýöne ulanmak üçin 4) şerti zerur we ýeterlik şert diýip almaklyk has amatly.

Mysal üçin: $\int_{AB} e^z dx - ydy$ integral islendik ýaýlada integrirlemäniň ýoluna baglydyr, çünki

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^z \neq 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Teoremanyň ähli şertleriniň ýerine ýetmegi wajypdyr. Mysal hökmünde L-merkezi koordinatalar başlangyjynda ýerleşen R radiusly töwerek bolanda

$$I = \oint_L \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

integrala garalyň. Alarys:

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Integralyň ýola bagly dällik şerti göräýmäge ýerine ýetýän ýaly, ýöne L-töwerek boýunça alnan integral nola deň däl. Hakykatdan hem töweregiň deňlemesini $x = R\cos t, \; y = R\sin t$ görnüşde aňladyp alarys:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-R\sin t\left(-R\sin t\right) + R\cos t + R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Hakykat ýüzünde bolsa teorema bilen hiç-hili garşylyk ýok. Ýöne teoremanyň bir şerti ýerine ýetmeýär: P *we* Q hem-de olaryň $\frac{\partial P}{\partial y}$ *we* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ hususy önümleri (0;0) nokatda kesgitlenmedik, ýöne L –töwerek bilen çäklenen we (0;0) nokady taşlanan tegelek bolsa birbagly ýaýla bolmaýar.

2. Doly differensial boýunça funksiýanyň dikeldilişi.

$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ egriçyzykly integralyň integrirlemäniň ýolunyň saýlanyp alynşyna bagly dällik şertinden, doly differensialy integrirlemek we doly differensialy boýunça funksiýanyňözüni tapmaklyk baradakyň meseläniň çözüwi alynýar.

Eger $P(x,y)$ *we* $Q(x,y)$ funksiýalar hem-de olaryň $\frac{\partial P}{\partial y}$ *we* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ hususy önümleri G ýapyk ýaýlada üznüksiz bolsunlar, onda

$$Pdx + Qdy \tag{3}$$

aňlatmanyň bu ýaýlada käbir funksiýanyň doly differensialy bolmagy üçin

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Deňligiň we diňe şu deňligiň ýerine ýetmelidigi subut edilipdi.

Soňra biz şu deňlik ýerine ýetende

$$F(x,y) = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy \tag{4}$$

funksiýanyň

$$dF = Pdx + Qdy$$

şerti kanagatlandyrýandygyny subut edipdik.

Indi , goý, (3) aňlatma käbir $\Phi(x,y)$ funksiýanyň doly differensialy bolsun.Onda

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = P,\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = Q$ we $\Phi(x,y) - F(x,y)$ tapawut

hemişelik ululykdyr. Onda

$$\Phi(x,y) = F(x,y) + c$$

(5)

bu ýerde $c-$ käbir hemişelik. (4) deňlikde

$x = x_0\,, y = y_0$ diýip $F(x_0, y_0) = 0$ deňligi alarys, (5) deňlikden bolsa $c-$hemişeligiň bahasyny taparys:

$c = \Phi(x_0, y_0)$. Onda (5) deňligi

$$F(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(x_0, y_0)$$

görnüşde , (4) deňligi bolsa

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \Phi(x,y) - \Phi(x_0, y_0)$$

görnüşde ýazyp bileris.

Eger, ýenede $x = x_1\,, y = y_1$ diýsek onda

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \qquad (6)$$

formulany alarys.

(6) formula Nýuton-Leýbnis formulasyna mwňzeş ýöne ol diňe egriçyzykly integral integrirlemegiň ýoluna bagly däl bolanda ýerine ýetýär.

Alnan netijelerden peýdalanyp doly differensialy (3) görnüşde aňladylan $F(x, y)$ funksiýany dikeltmegiň usulyny görkezmek bolar. (x_0, y_0) bellenen nokat, c-erkin hemişelik bolanda,

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy + c \qquad (7)$$

formula , doly differensialy integral aşagyndaky aňlatma bolan ähli funksiýalary kesgitlemäke mümkinçilik berýär.

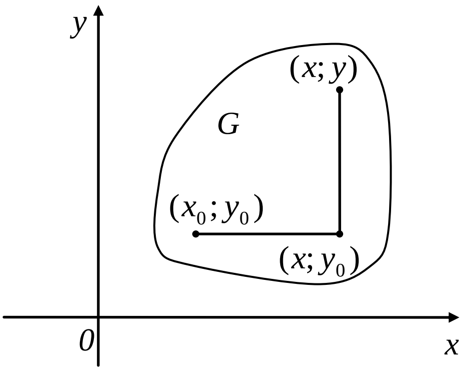
(7) formula arkaly $F(x, y)$ funksiýany gözlemek üçin G ýaýlada islendik (x_0, y_0) nokady saýlap alyp (x_0, y_0) we (x, y) nokatlary birikdirýän islendik egri boýunça egriçyzykly integraly hasaplamak ýeterlikdir. (7) integralyň integrirlemäniň ýoluna bagly dälligi sebäpli integrirlemäniň ýoly hökmünde bölekleri koordinata oklaryna perpendikulýar bolan döwük çyzygy almak ýeterlikdir. (11-nji surat).Onda

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} Pdx + Qdy + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

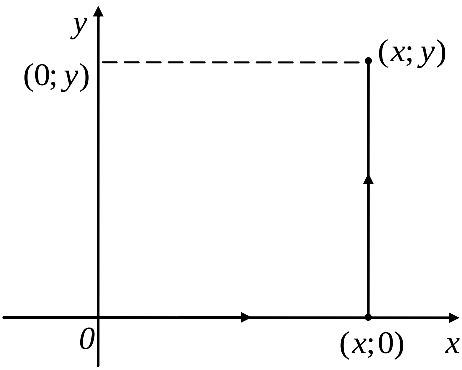
(x_0, y_0)-den (x, y_0)-a çenli aralykda $y = y_0$ *we* $dy = 0$, (x, y_0)-dan (x, y_0)-a çenli aralykda $dx = 0$ bolany üçin (7) deňlik

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C$$

şunlukda biranji kesgitli integral y- hemişelik bolanda, ikinji bolsa x -hemişelik bolanda hasaplanýar.



11-nji surat



12-nji surat

Mysal 1. $\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$ aňlatma käbir $F(x,y)$ funksiýanyň doly differensialy bolýarmy ? Eger-de bolýan bolsa $F(x,y)$ funksiýany tapmaly.

Çözülişi. Berlen aňlatmada

$$P(x,y)=x^2+2xy-y^2,\ Q(x,y)=x^2-2xy-y^2 \qquad (8)$$

funksiýalar hem-de

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=2x-2y$$

hususy önümleri üznüksiz. Bu hususy önümler özara deň. Diýmek (8) aňlatma käbir $F(x,y)$ funksiýanyň doly differensialydyr. $F(x,y)$ funksiýany gözlemek üçin $A=(x_0,y_0)$-käbir berlen nokat $B=(x,y)$-üýtgeýän nokat bolanda (4) formuladan peýdalanalyň.

Biziň ýagdaýymyzda $A=(x_0,y_0)$ nokada derek $(0,0)$ almak amatly.

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$$

integralyň integrirlemäniň ýoluna bagly dälligini göz öňünde tutup $(0,0)$ nokatdan (x,y) nokada çenli ýoly bölekleri koordinata oklaryna parallel bplan döwük çyzyk görnüşinde saýlap alalyň.Onuň üçin $(x,0)$ nokady (ýa-da $(0,y)$ nokady) (12-nji surat.) almak ýeterlik.Onda bir bölek koordinata okunyňüstünde ýatar.

Alarys:

$$F(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy+C=$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y \left(x^2-2xy-y^2\right)dy+C=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$$

C -käbir hemişelik.

Doly differensialy boýunça funksiýany kesgitlemek üçin aşakdaky ýaly çemeleşmek amatly. Eger

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q\ ,$$

bolsa, onda birinji deňligi ü-a görä integrirläp , alarys

$$F(x,y)=\int Pdx+f_1(x), \tag{9}$$

Ikinjini bolsa y-e görä integrirläp, alarys

$$F(x,y)=\int Qdy+f_2(x) \tag{10}$$

Bu deňliklerde $f_1(x)$ *we* $f_2(x)$ erkin funksiýalar.

Eger $f_1(x)$ *we* $f_2(x)$ funksiýalary (9) we (10) deňlikleriň sag bölekleri deň bolar ýaly saýlap alsak, onda şeýle ýol bilen alnan $F(x,y)$ funksiýanyň doly differensialy $Pdx+Qdy$ aňlatma bilen gabat geler.

Mysal üçin, goý $df=(2xy+1)dx+\left(x^2+3y^2\right)dy.$

dx -yň koeffisiýentini x -a görä integrirläp, alarys

$$\int(2xy+1)dx=x^2y+x+f_1(y)\,, \tag{11}$$

dy -iň koeffisiýentini y-e görä integrirläp , alarys

$$\int\left(x^2+3y^2\right)dy=xy^2+y^3+f_2(x) \tag{12}$$

Haçanda $f_1(y) = y^3 + C, \quad f_2(x) = x + C$ bolanda (10) we (11) deňlikleriň sag bölekleri gabat gelýär. Şeýlelik bilen,

$$F(x, y) = yx^2 + y^3 + x + C.$$

Mysal 2.

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

Çözülişi. Berlen ýagdaýda

$$P = y, \ Q = x, \ \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

funksiýalar üznüksiz we hususy önümler biri-birine deň.Diýmek $ydx + xdy$ aňlatma $dF(x, y)$ doly differensiala deň we berlen integral integrirlemäniň ýoluna bagly däl. (9) we (10) formulalardan $F(x, y) = \lambda y.$ we (6) formula esasynda alarys:

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy = \int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 6 + 2 = 8,$$

§5. Ikinji görnüşli egriçyzykly integralyň ulanylyşy.

Birinji görnüşli egriçyzykly integralda boluşy ýaly ikinji görnüşli egriçyzykly integral hem geometriýada, fizikada we tehnikada giňden peýdalanylýar.Iki meselä garamak bilen çäkleneris: tekiz figuranyň meýdanyny hasaplamak we güýjüň işini kesgitlemek.

1. Egriçyzykly integralyň meýdan hasaplamakda ulanylyşy.

Grin formulasynyň kömegi bilen meýdan hasaplamak. Goý, G ýaýla käbir L egri bilen çäklenen bolup S-onuň meýdany bolsun. Haçanda $f(x,y)\equiv 1$ bolanda $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ integralyň G ýaýlanyň meýdanyny aňladýanlygy belli.Şonuň üçin hem Grin formulasynda $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalary $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 1$ bolar ýaly saýlap alsak, onda G ýaýlanyň S meýdany $S=\iint\limits_G dxdy=\int\limits_L Pdx+Qdy$

formula arkaly kesgitlenýär. $Q(x,y)=x$ we $P(x,y)=0$ diýeliň, onda

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \text{we}$$

$$S=\oint\limits_L xdy$$

$P(x,y)=-y$ we $Q(x,y)=0$ diýip edil ýokardaka meňzeşlikde, alarys

$$S=-\oint_L ydx,$$

haçanda $Q(x,y)=-\frac{y}{2}$ *we* $P(x,y)=\frac{x}{2}$

bolanda

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$$

(1)

Şeýlelikde L egri bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplamak üçin üç formulany aldyk.

Mysal 1. Mysal üçin, meýdany (1) formula arkaly hasaplalyň. Ellipsiň $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ parametrik deňlemesinden peýdalanyp alarys

$$dx=-a\sin tdt,\ dy=b\cos t$$

we (1) formula esasynda

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+b\sin t\cdot a\sin t)dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

2. Güýjüň işi.

Material nokady Ox okuň boýuna $x=a$ nokatdan $b=0$ nokada süýşürmek üçin, Ox okuň ugry boýunça ugrukdyrylan $F(x)$ üýtgeýän güýjüň edýän işi kesgitli integralyň kömegi bilen

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

formula arkaly hasaplanýandygy bize belli.

Goý, material nokat F güýjüň täsiri arkaly üznüksiz tekiz BC egriniň boýuna B nokatdan Ç nokada tarap geçirilýän bolsun. Nokady B-den Ç çenli geçirmek üçin $B=M_0, M_1,..., M_i, M_{i-1},..., M_n = C$ nokatlar arkaly BC egrini böleklere böleliň (surat) M_iM_{i+1} bölekde F güýji onuň M_i nokatdaky hemişelik $F(M_i)$ bahasy bilen, başgaça aýdanymyzda $F_i \approx F(M_i)$, M_iM_{i+1} duganyň boýuna edilýän hereketi bolsa M_iM_{i+1} kesim boýunça edilýän hereket bilen çalşyralyň. Onda $F(M_i)$ hemişelik güýjüň M_iM_{i+1} kesimiň boýuna edýän işini, takmynan F üýtgeýän işiň M_iM_{i+1} duganyň boýuna edýän A_i işi hökmünde kabul etmek bolar, diýmek

$$A_i \approx F(M_i) \cdot \overrightarrow{M_iM_{i+1}}$$

Bu takmyny deňligiň sag bölegi $F(M_i)$ we $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylydyr. Ol, şol wektorlaryň degişli koordinatalarynyň skalýar köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir, ýagny , eger

$$F(M_i) = \{P(M_i), Q(M_i)\}, \overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$$

diýmek , onda

$$A_i \approx P(M_i)\cdot \Delta x_i + Q(M_i)\cdot \Delta y_i$$

i-niň 1-den başlap n-e çenli ähli bahasy boýunça jemlesek, onda tutuş BC egriniň boýuna edilen takmyny A işi alarys:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i \right) \qquad (2)$$

A-işiň takyk bahasy $M_i M_{i+1}$ dugalaryň iň ulusynyň uzynlygyny nola ymtyldyrmak arkaly alynýar.Ýöne beýleki tarapdan (2)-jem BC egriniň boýuna $P(x,y)$ *we* $Q(x,y)$ funksiýalar üçin iki integral jemiň jemidir. Kesgitlemä görä ol jemiň predeli ikinji görnüşli egriçyzykly integraldyr. Netijede, güýjiň işi

$$A = \int_{BC} Pdx + Qdy \qquad (3)$$

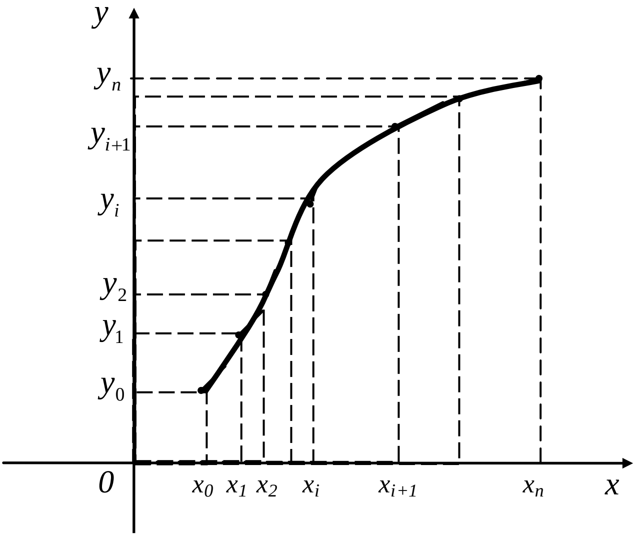
formula arkaly kesgitlenýär. Bu formulada P *we* Q funksiýalar F güýjiň koordinatalary (ýa-da koordinata oklaryna proýeksiýalary).

Eger berlen meselä tekizlikde dälde giňişlikde garasak , onda ol meseläniň çözüwi giňişlikdäki egri boýunça alynýan ikinji görnüşli

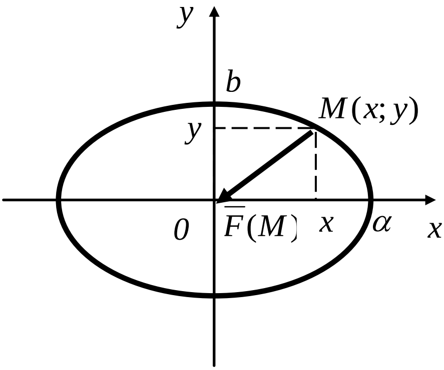
$$A = \int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz$$

integraly hasaplamaga getirýär.

<u>Mysal 2.</u> Ellipsiň her bir (x,y) nokadyna yäsir edýän $F(x,y)$ güýç bu nokatdan onuň merkezine çenli uzaklyga deň bolanda we ol, ellipsiň merkezine tarap ugrukdyrylanda bu ellips boýunça material nokady položitel ugra göçürmek üçin edilýän işi hasaplamaly.



13-nji surat



14-nji surat

<u>Çözülişi.</u> Şerte görä $|F(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}$; $F(x,y)$ güýjüň koordinatalary $P=-x$; $Q=-y$.
(" – ") belgisi güýjüň (0;0) nokada ugrukdyrylandygyny aňladýar). (3) formuladan peýdalanyp, alarys

$$A=-\oint_L xdx+ydy,$$

bu ýerde L-ellips $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ deňlemeler arkalykesgitlenýär.

Netijede

$$A=\frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2tdt=\frac{a^2-b^2}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

§6. Birinji görnüşli üst integrallary.

Bu bölümde üstde berlen berlen funksiýadan integrala ýagny üst integraly diýlip atlandyrylýan integrallara garajakdyrys.

Üst integrallar nazaryýeti egriçyzykly integrallar nazaryýetinden känbir tapawut etmeýär. Birinji we ikinji görnüşli üst integrallary bolýar.

1. Birinji görnüşli üst integralynyň kesgitlenişi.

Eger üstüň her bir nokadynda galtaşýan tekizlik bar bolup, ol bir nokatdan beýleki bir nokada geçende bu galtaşýan tekizligiň ýagdaýy üznüksiz üýtgeýän bolsa, onda olar ýaly üste endigan üst diýilýär. Eger-de üst üznüksiz birikdirilen tükenikli sany endigan üstden ybarat bolsa, onda olar ýaly üste bölek endigan üst diýilýär.

Goý bize endigan ýa-da bölek endigan käbir S üstde çäkli $f(M) = f(x, y, z)$ funksiýa kesgitlenen bolsun. S üsti, meýdanlary $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$ bolan erkin n– bölege böleliň. Her bir bölekden, erkin $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nokady saýlap alalyň we

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta S_i \quad (1)$$

jemi guralyň. (1) jeme $f(M)$ funksiýa üçin S üst boýunça integral jem diýilýär. Üstüň bölekleriniň iň ulusynyň diametrini λ bilen belgiläliň.

<u>Kesgitleme</u> $\lambda \to 0$ bolanda (1) integral jemiň, S üstiň böleklere bölünişine we bu böleklerden $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nokatlaryň saýlanyp alnyşyna bagly bolmadyk I predeli bar bolsa, onda ol predele $f(x, y, z)$ funksiýadan S üst boýunça alnan birinji görnüşli üst integraly diýilýär we aşakdaky simwollaryň haýsy hem bolsa biri bilen bellenilýär:

$$I = \iint\limits_{S} f(M)ds = \iint\limits_{S} f(x, y, z)ds.$$

Bu ýagdaýda $f(x, y, z)$ funksiýa S üst boýunça integrirlenýän funksiýa diýilýär, S üste bolsa integrirlenme ýaýlasy diýilýär. Manysy boýunça bu kesgitleme ikigat integralyň kesgitlemesine çalymdaş. Şonuň üçin hem ikigat integralyň häsiýetleri we bolmagynyň şertleri uly bolmadyk üýtgetmeleriň üsti bilen üst integralyna hem geçirmek bolýar. Hususy ýagdaýda, eger S üstde $f(x, y, z) \equiv 1$, onda

$$\iint\limits_{S} ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S.$$

bu ýerde

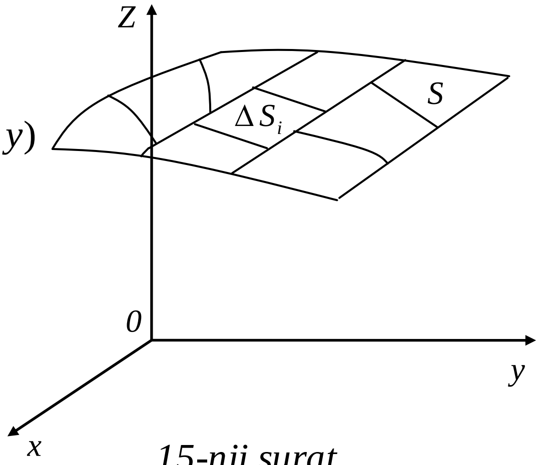
S-meýdan S-üstüň meýdanydyr. Bu ýerden görnüşi ýaly üst integralynyň kömegi bilen S üstiň meýdanyny hasaplap bolýar.

Mundan başgada eger material üstde massanyň paýlanyşynyň üst dykyzlygy belli bolsa, onda onuň massasyny, statiki momentlerini, agyrlyk merkeziniň koordinatalaryny kesgitläp bolýar.

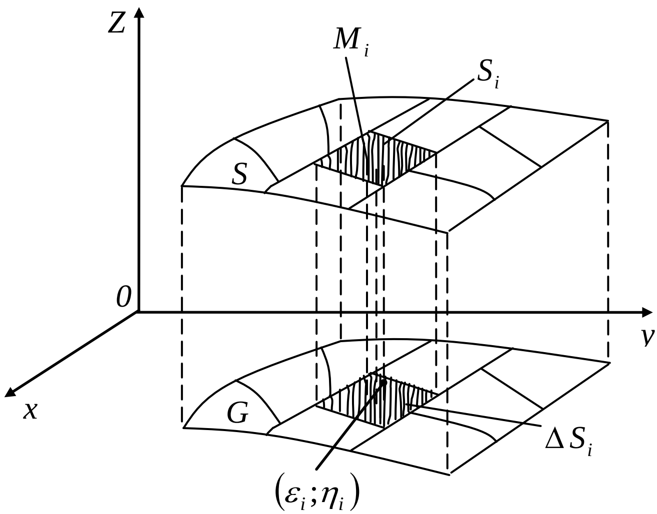
2. Birinji görnüşli üst integralynyň hasaplanyşy.

Birinji görnüşli üst integralyny hasaplamaklyk, üst integralyny ikigat intagrala getirmek arkaly amala aşyrylýar.

Goý S üst $z = z(x, y)$ deňleme arkaly berlen bolsun. $z(x, y), z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ funksiýalar S oxy tekizlige bolan G-proýeksiýasynda üznüksiz bolsun. $f(x, y, z)$ funksiýa S üstde üznüksiz diýeliň. Onda bu funksiýa S üstde integrirlenýändir.



15-nji surat



16-njy surat

S üsti n– bölege böleliň we bu bölekleмäni oxy tekizlige proýektirläliň. Onda G ýaýlada olara degişli $G_1, G_1, \ldots, G_n$ bölekleri alarys. Onda üstiň her bir böleginiň ΔS_i meýdanyny

$$\Delta S_i = \iint\limits_{G_i} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dxdy$$

formula arkaly aňladyp bolar. Ikigat integrala orta baha hakyndaky teoremany ulanyp

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta\sigma_i \quad (2)$$

deňligi ýazyp bileris. Bu deňlikde (ξ_i, η_i) nokat G_i ýaýladan alnan käbir nokat σ_i bolsa G_i ýaýlanyň meýdany. M_i bilen koordinatasy (ξ_i, η_i, ζ_i) bolan üstiň bölegine degişli nokady belläliň. Onda $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$, (ξ_i, η_i) - bolsa (2) formulada alnan nokat. M_i nokady aralyk hasap edip $f(x, y, z)$ funksiýanyň S üst boýunça integral jemini guralyň.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f[\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)]\sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i, \eta_i) + z_y'^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta\sigma_i \quad (3)$$

Deňligiň sag böleginde, G ýaýlada üznüksiz

$$f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$$ funksiýadan ikigat integral üçin integral jem dur. Şonuň üçin hem $\lambda \to 0$ bolanda sag böleginiň predeli

$$\iint\limits_G f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy$$ ikigat

integrala deňdir. f(x, y,z) funksiýanyň S' üst boýunça integrirlenýänligi üçin $\lambda \to 0$ bolanda (3) deňligiň çep bölegi

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds.$$ üst integralyna deňdir. Onda (3) deňlikde $\lambda \to 0$ bolanda predele geçip gözlenýän

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_G f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy$$

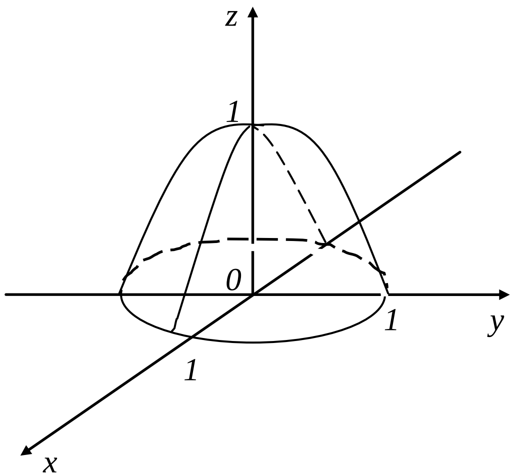
(4) formulany alarys. Şeýlelikde S üst boýunça integral ol üstiň oxy tekizligine bolan proýeksiýasy boýunça ikigat integrala getirdik.

S üst boýunça integraly, edil ýokardaka meňzeýlikde onuň oxz we oxz tekizlige görä proýeksiýalary boýunça ikigat integrala getirilýär.

Mysal 1. Haçanda S üst, $z = 1 - x^2 - y^2$ aýlanma paraboloidiň $z = 0$ tekizlik bilen kesilen bölegi bolanda

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}ds$$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi. $z = 1 - x^2 - y^2$ deňleme bilen berlen üstiň oxy tekizlige proýeksiýasy $x^2 + y^2 = 1$ töwerek bilen



17-nji surat

çäklenen G ýaýla bolýar (haçanda $z=0$ bolanda üstiň deňlemesinden $x^2+y^2=1$ alynýar). Netijede , G ýaýla $x^2+y^2\le 1$ tegelek. Bu tegelekde $z=1-x^2-y^2$, $z'_x(x,y)=-2x, z'_y(x,y)=-2y$ funksiýalar üznüksiz. (4) formuladan alarys.

$$\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}ds=\iint_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=$$
$$=\iint_G (1+4x^2+4y^2)dxdy$$

Alynan ikigat integraly $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ polýar koordinata geçip, hasaplarys:

$$\iint_G (1+4x^2+4y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (1+4\rho^2)\rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right]_0^{2\pi} d\varphi$$

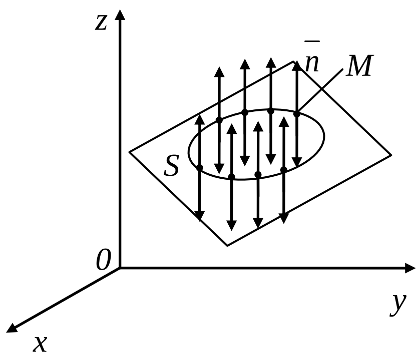
$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 3\pi.$$

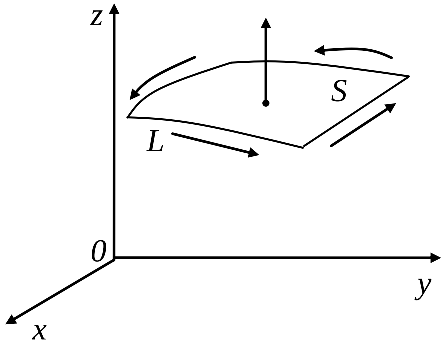
§7. Ikinji görnüşli üst integraly.

1. Ikinji görnüşli üst integralynyň kesgitlenişi.

Öňürti üstiň tarapy düşünjesini girizeliň.

Endigan S üste degişli M – erkin nokady alalyň we onuň üstünden tekizlige normal geçireliň ($\vec{n}$ wektor). Indi bolsa S üste degişli M nokatdan geçýän, üstiň çägi bilen umumy nokady bolmadyk haýsyda bolsa bir ýapyk egrini alalyň. M nokady egri boýunça $\vec{n}$ wektor bilen bilelikde, $\vec{n}$ wektor elmydama S üste geçirilen normal bolar ýaly we şonda onuň ugry üznüksiz üýtgär ýaly süýşüreliň (-nji surat). Onda M başlangyç nokadyna gelende normalyň ugry öňküligine galar





19-njy surat

ýa-da garşylykly ugry alar.

S üstde ýerleşen we onuň çägini kesmeýän islendik ýapyk egriniň boýuna nokady aýlap başlangyç ýagdaýa gelenimizde üste geçirilen normal ugruny üýtgetmese onda ol üste ikitaraply üst diýilýär.

Tekizlik, sfera, $z = f(x, y)$ deňleme arkaly berlen üst, eger-de $f(x, y), f'_x(x, y), f'_x(x, y)$ funksiýalar oxy tekizligiň käbir G ýaýlasynda üznüksiz bolsalar ikitaraply üste mysal bolup biler.

Eger S' üste degişli ýapyk egriniň boýuna aýlanyp başdaky nokada gelenimizde normalyň ugry garşylykly ugra ugrukdyrylan bolsa onda ol üste birtaraply üst diýilýär. Oňa mysal hökmünde Mýebiusyň ýapragyny getirmek bolar. Eger $ABCD$ gönüburçly kagyz bölegini alsak we onuň A nokady C nokady bilen, B nokady D nokady bilen gabat geler ýaly

edip, başgaça aýdanymyzda bir ujuny 180^0 öwrüp beýleki ujuna ýelmesek biz Mýebiusyň ýapragyny alarys. Sebäbi Mýebius ýapragynyň orta çyzygy arkaly aýlanyp başdaky nokada gelsek onda normalyň ugry garşylykly ugra üýtgeýär.
Indiden beýläk diňe ikitaraply üstlere garajakdyrys. Ikitaraply üst üçin, normalyň ugry kesgitlenen ähli nokatlarynyň köplüginde nokatdan-nokada geçilende normalyň ugry üznüksiz üýtgeýän bolsa onda oňa üstiň tarapy diýilýär, kesgitli tarapyň saýlanmagyna bolsa – üstiň oriýentasiýasy diýilýär.
Goý S – tarapy saýlanan üst öz-özüni kesmeýän L egri bilen çäklenen bolsun. L egri boýunça gözegçi normal wektoryň ugruna dik durup egri boýunça hereket edende üst elmydama çepinde bolsa onda egriniň şol ugruna položitel ugur diýip kabul etjekdiris. Garşylykly ugruna bolsa otrisatel ugur diýilýär.
Eger ästiň tarapyny üýtgetsek, başgaça aýdanymyzda normalyň ugruny garşylykly ugra üýtgetsek onda L egriniň boýuna aýlanmagyň ugurlary ýerini çalyşýar.
Indi bolsa ikinji görnüşli üst integralyna kesgitleme bereliň.
Goý S- endigan üst $z = f(x, y)$ deňleme arkaly berlen bolsun we $R(x, y, z)$ - funksiýa S üstiň nokatlarynda kesgitlenen we çäklenen bolsun. S üstiň iki tarapyndan birini saýlalyň, başgaça aýdanymyzda üstiň nokatlaryndaky normalynyň bolup biläýjek iki ugrunyň birini saýlalyň (Şeýlelikde biz üstiň bir tarapyny saýladyk). Eger normal öz oky bilen ýiti burç emele getirýän bolsa, onda biz $z = f(x, y)$ üstiň ýokarky tarapy saýlanan, kütek burç emele getirýän bolsa aşaky tarapy saýlanan diýjekdiris. S üsti erkin

n-bölege böleliň we G_i bilen i-nji bölegiň oxy tekizlige proýeksiýasyny belläliň. Her bir bölek üstden erkin $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nokady saýlap alyp

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

jemi guralyň. Bu jemde G_i bölegiň ΔS_i meýdany, S üstiň ýokary tarapy alnanda plýus, aşaky tarapy alnanda minus alamaty bilen alynýar. (1) jeme $R(M) = R(x, y, z)$ funksiýa üçin integral jem diýilýär. λ bilen S üstiň iň uly böleginiň diametrini belläliň.

Kesgitleme. Eger $\lambda \to 0$ bolanda (1) integral jemiň S üstiň böleklere bölünmegine we bu böleklerden $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nokatlaryň saýlanyp alnyşyna bagly bolmadyk I predeli bar bolsa, onda ol predele $R(x, y, z)$ funksiýadan S üstiň saýlanyp alnan tarapy boýunça ikinji görnüşli üst integraly diýilýär we aşakdaky simwollaryň haýsy hem bolsa biri bilen bellenýär:

$$I = \iint_S R(M)dxdy = \iint_S R(x, y, z)dxdy.$$

Bu ýagdaýda $R(x, y, z)$ funksiýa S üstde x we y üýtgeýänler boýunça integrirlenýän funksiýa diýilýär.

Edil şuňa meňzeşlikde S üstiň saýlanyp alnan tarapy boýunça $P(x, y, z)$ we $[Q(x, y, z)]$ funksiýadan y we z [z we x] üýtgeýänler boýunça ikinji görnüşli üst integraly kesgitlenýär:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz \qquad \left[\iint_S Q(x,y,z)dzdx\right]$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy + \iint_S P(x,y,z)dydz + \iint_S Q(x,y,z)dzdx$$

jeme umumy görnüşdäki ikinji görnüşli üst integraly diýilýär we

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \qquad (2)$$

simwol bilen bellenýär.

Ikinji görnüşli üst integrallary üçin hem birinji görnüşli üst integrallaryň häsiýetleri ýerine ýetýär. Ýöne şoňkydan üýtgeşiklikde ikinji görnüşli üst integrallarynda üstüň tarapy üýtgese ol alamatyny üýtgedýär.

Wektor meýdanynyň akymy baradaky mesele ikinji görnüşli üst integrallar baradaky düşünjä getirilýär.

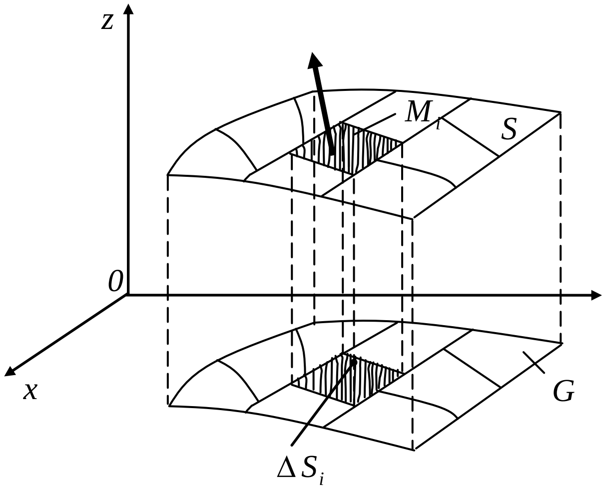
Bir taraply üstler üçin ikinji görnüşli üst integraly düşünjesi girizilmeýär.

4.Ikinji görnüşli üst integrallaryň hasaplanyşy.

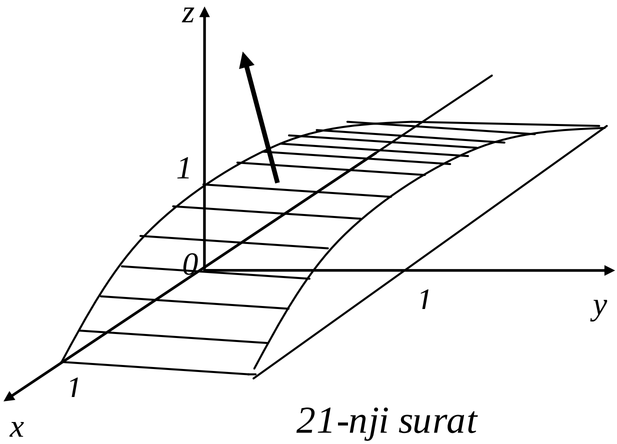
Ikinji görnüşli üst integrallary ikigat integrallara getirilip hasaplanylýar.

Goý tarapy kesgitlenen (ýokarky tarapyny saýlalyň) endigan S üst $z = f(x,y)$ deňleme arkaly berlen bolsun. $f(x,y)$ funksiýa S üstiň oxy tekizlige bolan G proýeksiýasynda kesgitlenen, $R(x,y,z)$ - funksiýa bolsa S üstde üznüksiz diýeliň.

S üsti erkin n – bölege böleliň we ol bölekleri oxy tekizlige proýektirläliň (-nji surat). Onda G ýaýla degişlilikde $G_1, G_2, \ldots, G_n$ böleklere bölüner.



20-nji surat



21-nji surat

Üstiň her bir böleginden erkin $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nokatlary saýlap alalyň we $\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$ integral jemi guralyň, bu ýerde ΔS_i bilen G_i bölegiň meýdany bellenen.

$\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$ bolýanlygy üçin

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R\left[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)\right]\Delta S_i$$

(3)

Deňligiň sag böleginde G ýaýlada üznüksiz $R\left[x, y, f(x, y)\right]$ ikigat integral üçin ikigat jem bar. (3) deňlikde $\lambda \to 0$ bolanda predele geçip gözlenýän

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_G R\left[x, y, f(x, y)\right]dxdy$$

(4)

formulany alarys. Bu formula x we y üýtgeýänler boýunça ikinji görnüşli üst integralyny ikigat integraly arkaly aňlatmaga mümkinçilik berýär. Bulardan başgada (4) formula garalýan S üstde üznüksiz $R(x, y, z)$ funksiýadan üst integralynyň bardygyny görkezýär. Eger üstiň aşaky tarapyna garasak onda (4) formulanyň sag bölegindäki integralyň öňünde minus alamatyny almaly.

Edil (4) formulanyň subudyna meňzeşlikde aşakdaky formulalaryň ýerine ýetýändigini görkezmek bolar:

$$\iint_S P(x, y, z)dydz = \iint_{G_1} P\left[f(x, y), y, z)\right]dydz \qquad (5)$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx = \iint_{G_2} Q[x, f(x,z), z]dzdx \qquad (6)$$

Bu formulalarda S üst degişlilikde $x = f(y,z)$ we $y = f(x,z)$ deňlemeler arkaly berlen bolup G_1 we G_2 degişlilikde S üstiň oyz we oxz tekizliklere proýeksiýalary. Eger S üst ähli üç koordinata tekizliklerine biratly proýektirlenýän bolsa, onda umumy görnüşdäki (2) integraly hasaplamak üçin şol (4) – (6) formulalardan peýdalanýarlar. Has çylşyrymly ýagdaýlarda S üsti ýokarda getirilen şertleri kanagatlandyrar ýaly böleklere bölýärler, (2) integral bolsa bu bölekler boýunça integrallaryň jemi bolýar.

<u>Mysal 2.</u> S üst, $z = \sqrt{1-x^2}$ üstiň $y=0$ we $y=1$ tekizlikler bilen kesilen böleginiň ýokary tarapy bolanda (-nji surat)

$$\iint_S (y^2+z^2)dxdy$$

integraly hasaplamaly.

<u>Çözülişi.</u> Berlen tekizligiň oxy tekizlige bolan proýeksiýasy $-1 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$ deňsizlikler bilen kesgitlenýän gönüburçlyk. (4) formula arkaly taparys.

$$\iint_S (y^2+z^2)dxdy = \iint_G \left[y^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (y^2+1-x^2)dy =$$

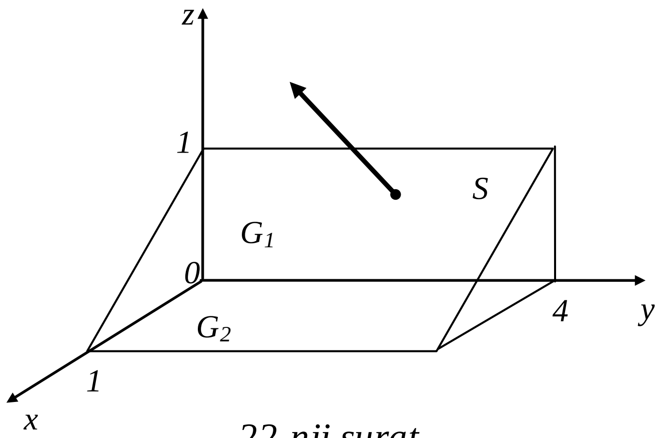
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^3}{3} + y - yx^2\right]_0^1 dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3} - x^2\right)dx = \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2$$

<u>Mysal 3.</u> S üst $x+z-1=0$ tekizligiň $y=0$, $y=4$ tekizlikler arkaly kesilýän böleginiň ýokarsy bolanda

$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ integraly hasaplamaly.

<u>Çözülişi.</u> Kesgitlemä görä

$$\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{G_1} x(y,z)dydz + \iint\limits_S ydzdx + \iint\limits_{G_2} z(x,y)dxdy.$$



22-nji surat

Deňligiň sag bölegindäki integrallarda G_1 we G_2 ýaýlalar S üstiň degişlilikde OYZ we OXY tekizliklere proýeksiýalary, S tekizligiň bolsa oy oka parallelligi üçin

$\iint\limits_S ydzdx = 0$

Degişlilikde (8) we (9) formulalardan peýdalanyp taparys.

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{G_1} (1-x)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)dx = 2,$$

$$\iint_S xdydz = \iint_{G_2} (1-z)dydz = \int_0^4 dy \int_0^1 (1-z)dz = 2,$$

Netijede $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 2 + 0 + 2 = 4.$

2. Birinji we ikinji görnüşli üst integrallaryň arasyndaky baglanyşyk.

Ikinji görnüşli üst integrallaryny başga usul arkaly hem girizip bolýar, has takygy integral belgisiniň aşagynda käbir ýörite aňlatmasy bolan birinji görnüşli integralyň üsti bilen.

Tarapy kesgitlenen üstiň erkin nokadyndaky normalyň ugrukdyryjy kosinuslaryny $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ bilen belläliň.

Ikinji görnüşli üst integrallary koordinata tekizlikleri bilen gatnaşygy boýunça tapawutlanýarlar:

1) oxy tekizlik üçin $R(x, y, z)$ funksiýadan ikinji görnüşli üst integraly, birinji görnüşli üst integralynyň kömegi bilen aşakdaky formula arkaly aňladylýar:

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \iint_S R(x, y, z)\cos\gamma ds \qquad (11)$$

2) oyz tekizlik üçin $Q(x, y, z)$ funksiýadan ikinji görnüşli üst integraly birinji görnüşli üst integralynyň kömegi bilen aşakdaky formula arkaly aňladylýar:

$$\iint_S Q(x, y, z)dzdx = \iint_S Q(x, y, z)\cos\beta ds \qquad (12)$$

3) oyz tekizlik üçin $P(x, y, z)$ funksiýadan ikinji görnüşli üst integraly birinji görnüşli üst integralynyň kömegi bilen aşakdaky formula arkaly aňladylýar:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha ds \qquad (13)$$

(11) – (13) formulalary goşup üstiň saýlanyp alnan tarapy boýunça ikinji görnüşli umumy üst integralyny birinji görnüşli üst integraly arkaly aňlatmanyň formulasyny alarys:

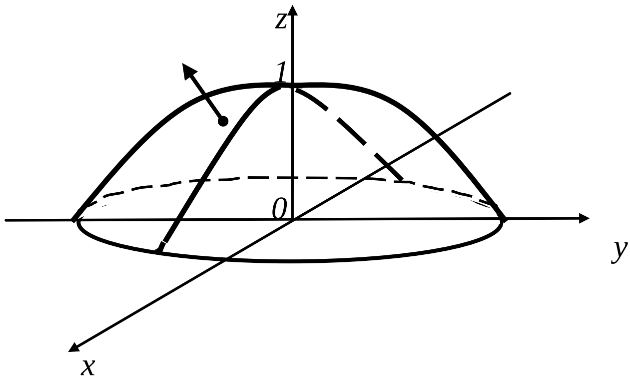
$$\begin{aligned}&\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \\ &= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\end{aligned} \qquad (14)$$

Eger üstiň beýleki tarapyny saýlasak, onda normalyň ugrukdyryjy kosinuslary $\cos\alpha, \cos\beta$ we $\cos\gamma$ alamatlaryny üýtgederler we netijede ikinji görnüşli üst integrallary hem öz alamatyny üýtgeder.

Mysal 4. Haçanda S üst $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sferanyň oxy tekizliginiň ýokarsynda ýerleşen böleginiň daşky tarapy, γ - bolsa S üstiň normalynyň oz ok bilen emele getirýän ýiti burçy bolsa, $\iint_S z\cos\gamma ds$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

Üst integrallarynyň iki görnüşini baglanyşdyrýan (11) formuladan peýdalanyp, alarys



23-nji surat

$$\iint_S z\cos\gamma ds = \iint_S zdxdy.$$

S – berlen üstiň oxy tekizlige G – proýeksiýasy $x^2 + y^2 \le 1$ tegelek. (8) formula esasynda

$$\iint_G zdxdy = \iint_G \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy.$$

Ikigat integralda polýar koordinatalaryna geçip taparys.

$$\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

§8. Ostrogradskiniň formulasy.

Ostrogardskiniň formulasy ýapyk üst boýunça üst integralyny giňişlikde bu üst bilen çäklenen ýaýla boýunça üç gat integral bilen baglanyşdyrýar. Bu formula ýapyk egri boýunça alnan egriçyzykly integraly şol egri bilen çäklenen tekiz ýaýla boýunça ikigat integraly baglanyşdyrýan Grin formulasynyň käbir gaýtalanmasydyr. Ostrogradskiniň formulasy analizde we analiziň ulanylýan ýerlerinde giňden peýdalanylýar.

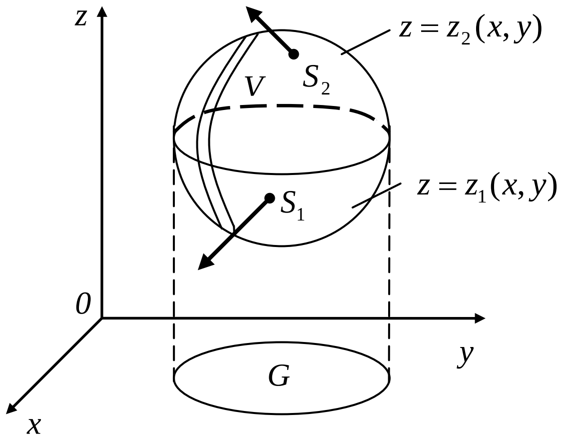
Bu formulany, giňişlikde koordinata oklaryna parallel gönüler geçirenimizde ikiden köp bolmadyk kesişme nokady bolýan üstler bilen çäklenen ýapyk ýaýla üçin subut edeliň. Gysgalyk üçin olar ýaly ýaýlany ýönekeý ýaýla diýip atlandyralyň. Şunlukda bu ýaýlany çäkleýän üstiň daşky tarapyny alalyň. Üst endigan ýa-da bölek endigan hasap edeliň.

Teorema. V giňişlikde ýapyk S üst bilen çäklenen ýönekeý ýaýla bolsun we goý $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ we $R(x,y,z)$ funksiýalar berlen ýaýlada özleriniň birinji hususy önümleri bilen üznüksiz bolsunlar. Onda Ostrogradskiniň formulasy diýlip atlandyrylýan

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (1)$$

formula ýerine ýetýändir.

Subudy. Goý S üstiň (V ýaýlanyň) oxy tekizlige proýeksiýasy G ýaýla bolsun, (24-nji surata seret).



24-nji surat

$z = z_1(x, y)$ bilen S üstiň aşaky, $z = z_2(x, y)$ bilen bolsa ýokarky bölegini belläliň.

$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ üç gat integraly üst integralyna özgerdeliň. Onuň üçin üç gat integraly gaýtalanýan integral görnüşinde aňladyp, soňra Nýuton – Leýbnis formulasyndan peýdalanyp z boýumça integrirlemäni amala aşyralyň.

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_G R[x, y, z_1(x, y)]dxdy - \iint\limits_G R[x, y, z_1(x, y)]dxdy$$

G ýaýlanyň şol bir wagtda S_1 we S_2 üstleriň oxy tekizlige proýeksiýalary bolýanlygy üçin, ikigat integrallary olara degişlilikde deň bolan $z = z_2(x, y)$ üstiň daşky tarapy we $z = z_1(x, y)$ üstiň daşky tarapy boýunça alnan üst integrallary bilen çalşyryp bolýar, ýa-da

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_2} R(x, y, z)dxdy - \iint_{S_1} R(x, y, z)dxdy.$$

S_1 boýunça integralda, üstiň tarapyny çalşyryp alarys.

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_2} R(x, y, z)dxdy + \iint_{S_2} R(x, y, z)dxdy = \iint_S R(x, y, z)dxdy` \quad (2)$$

Bu formulada V ýaýlany çäkleýän üstiň daşky tarapy S-bilen bellenildi. Edil şuňa meňzeşlikde

$$\iiint \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S Pdydz \qquad (3)$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Qdxdz \qquad (4)$$

(2), (3) we (4) formulalary agzama-agza goşup (1) formulany alarys.

<u>Bellik.</u> Ostrogradskiniň formulasy tükenikli sany ýönekeý ýaýlalara bölünýän giňişlikdäki islendik ýapyk V ýaýla üçin ýerine ýetýändir. Hakykatdan hem, ýaýlanyň her bir bölegi üçin (1) formulany ulanyp alnan netijeleri goşsak, onda deňligiň çep böleginde V ýaýla boýunça üç gat integraly, sag böleginde bolsa V ýaýlany çäkleýän S üst boýunça üst integralyny alarys, sebäbi kömekçi üstler boýunça üst integrallary biri-birine garşylykly taraplar

boýunça iki gezek alynýar we goşulanda biri-birini ýok edýär.
Ostrogradskiniň formulasynyň kömegi bilen ýapyk üstler boýunça üst integrallaryny hasaplamak amatly bolýar.
Mysal 1. Eger $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ tekizlikler bilen çäklenen piramidanyň daşky tarapy S bolsa
$\iint\limits_S xdxdy+ydxdz+zdxdy$ integraly hasaplamaly.
Çözülişi. Ostrogradskiniň formulasyndan peýdalanalyň.

$$\iint\limits_S xdxdy+ydxdz+zdxdy=\iiint\limits_V(1+1+1)dxdydz=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=$$

$$=3\int_0^1 dx\int_0^{1-x} z\Big|_0^{1-x-y}dy=\int_0^1\left[y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_1^{1-x}dx=$$

$$=3\int_0^1\left[1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Mysal 2. $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferanyň daşky tarapy S diýsek, onda
$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$ integraly hasaplamaly.
Çözülişi. Ostrogradskiniň formulasyny ulanyp, alarys.

$$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

Bu ýerde sferik koordinatalara geçip alarys.

$$3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi R^5$$

Egriçyzykly integral haýsy ýaýlany çäkleýän egri boýunça alnanda Grin formulasynyň bu ýaýlanyň meýdanyny aňladýandygyny biz belläpdik. Edil şoňa meňzeşlikde, üst integraly haýsy ýapyk *S* üst boýunça alynýan bolsa, onda Ostrogradskiniň formulasynyň hem şol üstiň çäkleýän *V* ýaýlasynyň göwrümini aňladýandygyny görkezmek bolar. Hakykatdan hem *P*, *Q* we *R* funksiýalary

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 1$$

bolar ýaly saýlap alalyň. Onda, S üst bilen çäklenen göwrümi ϑ bilen bellesek

$$\vartheta = \iiint_V dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Hususy ýagdaýda

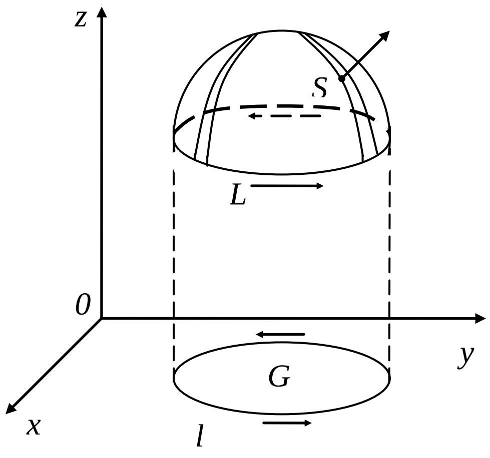
$$P = \frac{x}{3}, Q = \frac{y}{3}, R = \frac{z}{3}$$

diýsek göwrüm hasaplamak üçin

$\vartheta = \dfrac{1}{3}\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ formulany alarys.

§9. Stoks formulasy.

Stoks formulasy üst integral bilen egriçyzykly integraly baglanyşdyrýar. Grin we Ostrogradskiniň formulalaryna meňzeşlikde Stoks formulasy hem analiziň özünde, şonuň ýaly-da onuň ulanylýan ýerlerinde giňden ulanylýar.
Goý S – üst $z = z(x, y)$ deňleme arkaly berlen bolsun. S – üstiň oxy tekizlige proýeksiýasy ýapyk G ýaýla bolsun. G – ýaýlada $z = z(x, y), z'_x(x, y), z'_y(x, y)$ funksiýalar üznüksiz hasap edeliň. S üsti çäkleýän egrini L bilen bu egriniň oxy tekizlige proýeksiýasyny l bilen belläliň. l egri G ýaýlany çäkleýändir. Onda bu şertlerde aşakdaky teorema ýerine ýetýändir.



25-nji surat

Teorema. Eger $P(x,y,z)$ funksiýa özüniň birinji tertipli hususy önümleri bilen S üstde üznüksiz bolsun. Onda

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma \right) ds \quad (1)$$

formula ýerine ýetýändir. Bu formulada $\cos\beta, \cos\gamma$ - S üste geçirilen normalyň ugrukdyryjy kosinuslary, L – egri položitel ugur boýunça alynýar.

Subudy. L egri boýunça alnan $\oint_L P(x,y,z)dx$ integraly S üst boýunça integrala özgerdeliň. Bu özgertmäni

$$\oint_L \to \oint_l \to \iint_G \to \iint_S ,$$

yzygiderlikde amala aşyralyň. Öňürti giňişlikdäki L egri boýunça egriçyzykly integraly tekizlikdäki l – tekiz egri boýunça egriçyzykly integrala, soňra ony G ýaýla boýunça ikigat integrala ahyrsoňunda bolsa soňky integraly S üst boýunça integrala özgerderis. L egri S üstde ýatýar, onda onuň nokatlarynyň koordinatalary $z = z(x,y)$ deňlemäni kanagatlandyrýar we şonuň üçin hem $P(x,y,z)$ funksiýanyň L egriniň nokatlaryndaky bahalary $P[x,y,z(x,y)]$ funksiýanyň, L egriniň proýeksiýasy bolan l egrä degişli nokatlardaky bahalaryna deňdir. L we l egrileriň bölünmesiniň degişli bökleriniň ox oka proýeksiýalary gabat gelýär. Şonuň üçin hem L we l egriler boýunça P funksiýadan ikinji görnüşli egriçyzykly integral üçin integral jemler gabat gelýär we şonuň üçin integrallar hem deňdir:

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \oint_l P[x,y,z(x,y)]dx.$$

Soňra bolsa Grin formulasyndann peýdalanyp G ýaýla boýunça ikigat integrala geçeliň. Alarys

$$\oint_l P[x,y,z(x,y)]dx = -\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z'_y \right) dxdy$$

Bu ýerde integral aşagyndaky funksiýa $P(x,y,z)$ funksiýadan y-e görä hususy önüm alynanyndan soňra z-iň ornuna $z(x,y)$-iň bahasynyň goýulmagyna deňdir.

S – üstiň ýokary tarapy bolany üçin $\cos\gamma > 0$ (norma bilen öz okuň arasyndaky ýiti burç $\gamma - e$ deňdir) we normal $-z'_x, -z'_y, 1$ koordinatalara eýedir. Normalyň ugrukdyryjy kosinuslarynyň degişli proýeksiýalaryna proporsionaldyr, onda

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{-z'_y}{1} = -z'_y$$

Şonuň üçin hem

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z'_y \right) dxdy = -\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy$$

Indi bolsa bu ikigat integraly üst integralyna özgerdeliň:

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) ds.$$

Netijede

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) ds.$$

Degişli şertlerde edil ýokardaka meňzeşlikde

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) ds \qquad (2)$$

$$\oint_L R(x,y,z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) ds \qquad (3)$$

formulalar hem subut edilýär. (1), (2), (3) formulalary goşup Stoks formulasy diýlip atlandyrylýan

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right] dx$$

formulany alarys. Üst integrallaryny baglanyşdyrýan formulanyň kömegi bilen Stoks formulasyny

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdx = \iint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx. \qquad (4)$$

görnüşde ýazyp bileris.

Stoks formulasyny ýatda saklamak kyn däldir. Onuň sag bölegindäki birinji integral Grin formulasyndaky ikigat integralyň aşagyndaky aňlatmadan integraldyr, ikinji we üçünji ondan x, y, z koordinatalary we P, Q, R funksiýalaryň yzygider gaýtalanmasydyr. Hususy ýagdaýda, eger S üst oxy tekizligiň L egri bilen çäklenen ýaýlasy bolsa, onda $dzdx$ we $dydz$ boýunça integrallar nola öwrülýärler we Stoks formulasy Grin formulasyna geçýär.

Stoks formulasy ýapyk egri boýunça egriçyzykly integraly üst integralynyň kömegi bilen hasaplamaga mümkiçilik berýär.

Mysal. L – egri $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ deňlemeler arkaly berlen töwerek, S bolsa $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (z > 0)$ ýarym sferanyň ýokarky tarapy bolsa we L egri položitel ugur boýunça geçilýän bolsa Stoks formulasynyň kömegi arkaly

$\oint_L x^2 y^2 dx + dy + zdz$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

bolýanlygy üçin (4) Stoks formulasyndan peýdalanyp alarys.

$$\oint_L x^2 y^2 dx + dy + zdz = -3\iint_S x^2 y^2 dxdy = -\frac{\pi}{8}.$$

Eger $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ (5) bolsa onda giňişlikdäki islendik ýapyk L egri boýunça integral nola deňdir:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0 \qquad (6)$$

§10. Skalýar argumentli wektor fuksiýa.

1. Wektor funksiýanyñ predeli.

Kesgitleme. Eger her bir $t \in T$, bu ýerde T käbir san köplügi, üçin üç ölçegli giñişlikde $\vec{r} = \vec{r}(t)$ wektor kesgitlenen bolsa, onda T köplüge, wektor funksiýa ýa-da $\vec{r}(t)$ wektor kesgitlenen diýilýar.

Eger giñişlikde gönüburçly koordinatalar sistemasy girizilen bolsa, onda her bir wektora tertipleşdirilen hakyky san üçligi – onuñ koordinatalary we tersine her bir tertipleşdirilen hakyky san üçligine wektpr degişlidir. Şonuñ üçin wektor funksiýanyñ berilmegi onuñ $x(t), y(t), z(t)$ koordinatalary bolan $x(t), y(t), z(t)$ üç skalýar funksiýanyñ berilmegi bilen deñgüýçlidir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Kesgitleme. Goý $\vec{r}(t)$ wektor käbir t_0 nokadyñ belkide t_0 (1)-yñ özünden başga käbir etrabynda kesgitlenen bolsun, $\vec{a}$ käbir wektor diýeliñ. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin $\exists \quad S = S(\varepsilon) > 0$ san bar bolup $|t - t_0| < \varepsilon$ şerti kanagatlandyrýan $\forall\ t$ üçin $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ deñsizlik ýerine ýetse, onda $\vec{a}$ wektora $\vec{r}(t)$ wektor funksiýanyñ $t \to t_0$ bolandaky predeli diýilýär we

$\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\vec{a}$ (1) bilen bellenýär. (1) deñligiñ ýerine ýetmegi üçin $\lim\limits_{t\to t_0} \left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=0$ deñsizligiñ ýerine ýetmegi zerur we ýeterlik.

Eger $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$ we $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ bolsa, onda $\vec{a}=\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$ bolmagy üçin

$$\lim_{t\to t_0} \vec{x}(t)=a_1\ ,\ \lim_{t\to t_0} y(t)=a_2\ ,$$

$$\lim_{t\to t_0} z(t)=a_3 \qquad (3)$$

deñlikleriñ ýerine ýtmegi zerur we ýeterlik.

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{\left(x(t)-a_1\right)^2+\left(y(t)-a_2\right)^2+\left(z(t)-a_3\right)^2}$$

Onda

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|\geq\left|x(t)-a_1\right|$$

Bu ýerden $t\to t_0$ bolanda $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|\to 0$ bolsa, onda $t\to t_0$ bolandan $\left|x_1(t)-a_1\right|\to 0$ bolýandygy görünýär. Wektor funksiýanyñ predeliniñ esasy häsetleri.

1^0. Eger $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)=\vec{a}$ bolsa, onda $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}\right|=\left|\vec{a}\right|$

$$\left|\left|\vec{r}\right|-\left|\vec{a}\right|\right|\leq\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|$$

2^0. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$

3^0. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(f(t)\cdot\vec{r}(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$

4^0. $\lim\limits_{t \to t_0}(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)) = (\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t))$

5^0. $\lim\limits_{t \to t_0}[\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)] = \left[\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t)\right]$

2. Wektor funksiýanyñ üznüksizligi.

<u>Kesgitleme:</u> t_0 nokadyñ etrabynda kesgitlenen $\vec{r}(t)$ wektor funksiýa t_0 nokatda üznüksiz diýilýär, eger $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

bolsa t_0 nokadyñ etrabynda kesgitlenen $\vec{r}(t)$ wektor funksiýanyñ şol t_0 nokatda üznüksiz bolmagy üçin t_0 nokatda $x(t), y(t), z(t)$ funksiýalaryñ üznüksiz bolmagy zerur we ýeterlik.

3. Wektor funksiýanyñ önümi we differensialy

<u>Kesgitleme:</u> Goý $\vec{r}(t)$ wektor t_0 nokadyñ käbir etrabynda kesgitlenen bolsun.

Eger $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}$ predel bar bolsa, onda ol predeli $\vec{r}(t)$ wektor funksiýanyñ t_0 nokatdaky önümi diýilýär we $\vec{r}'(t_0)$ görnüşde belgilenýär.

$$r'(t_0) = \lim_{\Delta \to t} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

Şeýlelik bilen wektor funksiýanyñ nokatdaky önümi wektor funksiýadyr.

$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$ wektor funksiýanyñ t_0 nokatda önüminiñ bolmagy üçin $x(t), y(t), z(t)$ funksiýalaryñ t_0 nokatda $x'(t), y'(t), z'(t)$ önümleriñ bolmagy zerur we ýeterlikdir we $\vec{r}'(t) = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k}$

$$|r'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Munuñ şeýledigi predeliñ kesgitlemesinden we $\Delta \to 0$ gelip çykýar.

<u>Kesgitleme:</u> t_0 nokadyñ käbir etrabynda kesgitlenen $\vec{r}'(t)$ wektor funksiýa şol nakatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. Eger ol funksiýanyñ t_0 nokatdaky $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ artdyrmasyny $\Delta r = \vec{a} \cdot \Delta t + \varepsilon(\Delta t) \cdot \Delta t$ görnüşde ýazyp bolýan bolsa, bu ýerde $\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta t) = 0$

Bu ýerdäki $\vec{a}\Delta t$ çyzykly wektor funksiýa t_0 nokatdaky $\vec{r}(t)$ wektor-funksiýanyñ differensialy diýilýar we $d\vec{r} = \vec{a} \cdot \Delta t$ görnüşde bellenilýar. $\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \vec{\varepsilon}(\Delta t) \cdot \Delta t$

Wektor – funksiýanyñ differensirlenýändiginden onuñ $\vec{r}'(t)$ önüminiñ barlygy we ol önümiñ $\vec{a}$ wektora deñdigi gelip çykýar. Hakykatdan hem

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\vec{a}+\varepsilon(\Delta t)\right]=\vec{a}$$

Tersine hem dogrudyr. $\varepsilon(\Delta t)=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}-r'(t_0)$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}'(t_0)\cdot\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\cdot\Delta t$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\vec{\varepsilon}(\Delta t)=0$$

$$d\vec{r}=\vec{r}(t_0)\Delta t \qquad \Delta t=dt$$

$$d\vec{r}=\vec{r}'dt, \qquad \vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}'\cdot\Delta t+\vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot\Delta t$$

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}'\mathrm{X}t+\vec{\alpha}(\Delta t)$$

$$\vec{\alpha}(\Delta t)=\vec{\varepsilon}(\Delta t)\cdot\Delta t=\vec{0}(\Delta t) \qquad \Delta\mathrm{t}\to 0 \qquad \vec{\alpha}(0)=0$$

Goý $t(\tau)$ bolsun. Eger bu funksiýa τ_0 nokatda differensirlenýän $t_0=t(\tau_0)$ we $\Delta\tau=\tau-\tau_0$, onda

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\tau}=\vec{r}'\cdot\frac{\Delta t}{\Delta\tau}+\frac{\vec{\alpha}(\Delta t_0)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\alpha}(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=0$$

onda

$$\vec{r}'_\tau = \vec{r}'_t \cdot t_\tau$$

Wektor funksiýanyñ önümi üçin aşakdaky deñlikler ýerine ýetýär.

1. $(\vec{c})' = 0$
2. $\left(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right)' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$
3. $(f \cdot \vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}'$
4. $(r_1, r_2)' = (r_1', r_2) + (r_1, r_2')$
5. $\left([r_1, r_2]\right)' = [r_1', r_2] + [r_1, r_2']$

Soñky deñligiñ ýerine ýetýänligini görkezeliñ.

$$\left([r_1, r_2]\right)' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[r_1(t+\Delta t), r_2(t+\Delta t)] - [r_1(t), r_2(t)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{r}_1(t+\Delta t), \vec{r}_2(t+\Delta t)] - [\vec{r}_1(t), r_2(t+\Delta t)] + [r_1(t), r_2(t+\Delta t)] - [r_1, r_2]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to o} \frac{[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t), r_2(t+\Delta t)] + [\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t+\Delta t) - r_2(t)]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{r_1(t+\Delta t) - r_1(t)}{\Delta t}, r_2(t+\Delta t) \right] + \lim_{\Delta t \to 0} \left[r_1(t) \frac{\vec{r}_2(t = \Delta t) - r_2(t)}{\Delta t} \right] =$$

$$= [r_1'(t), r_2(t)] + [r_1(t), r_2'(t)]$$

§11. Skalýar we wektor meýdanlar.

Meýdan düşünjesi häzirki zaman fizikasynyň köp meseleleriniň esasyny düzýär. Eger giňişligiň (ýa-da onuň käbir bölegindäki) nokatlaryň her birinde U – ululygyň bahasy kesgitlenen bolsa, onda umumy ýagdaýda giňişlikde käbir U – ululygyň meýdany kesgitlenen diýilýär. Mysal üçin, gazyň akymy öwrenilende birnäçe meýdany derňemeli bolýar: temperatura meýdany (her bir nokatda temperatura kesgitli baha eýe), basyş meýdany, tizlik meýdany we ş.m. Eger U ululyk meýdany t wagta bolmasa, onda oňa stasionar (ýa-da durgynlaşan) meýdan diýilýär. Garşylykly ýagdaýda meýdana stasionar däl (ýa-da durgunlaşmadyk) meýdan diýilýär. Şeýlelikde U ululyk M nokada we t wagta görä funksiýadyr. Fiziki meselelerde skalýar we wektor ululyklar bilen ýygy-ýygydan iş salyşmaly bolýar. Muňa degişlilikde, meýdanyň iki görnüşini tapawutlandyrýarlar: skalýar we wektor meýdanlar. Ýönekeýlik üçin olary stasionar hasap etjekdiris.

1.Skalýar meýdan. Goý G – giňişlikdäki ýa-da tekizlikdäki ýaýla bolsun. Eger G ýaýlanyň her bir M nokadynda U skalýar ululyk kesgitlenen bolsa, onda G ýaýlada skalýar meýdan kesgitlenen diýilýär. G ýaýlada kesgitlenen skalýar meýdan we funksiýa düşünjeleri gabat gelýär. Adatça skalýar meýdan $\mathrm{U = F(M)}$funksiýa arkaly berilýär hem-de oňa skalýar funksiýa diýilýär. Eger giňişlikde $oxyz$ koordinatalar sistemasyny girizsek, onda her bir M nokada kesgitli x, y, z koordinata degişli bolar we U skalýar ululyk bu koordinatalardan funksiýa bolar: $U = F(M) = F(x, y, z)$.

Skalýar meýdana mysal edip käbir otagdaky howanyň temperaturasyny.

Skalýar meýdana mysal edip, eger temperatura nokadyň funksiýasy hökmünde garasak, onda otagdaky howanyň temperaturasy skalýar meýdana mysal bolup biler. Ýylylyk çeşmesine ýakyn duran nokatlarda temperatura ýokary, daşda duran nokatlarda bolsa pesdir. Eger temperatura hemme ýerde deň bolsa, onda bu ýagdaýda skalýar meýdan hemişelikdir.

1.Wektor meýdany.

Edil skalýar meýdan düşünjesiniň girizilişi ýaly wektor meýdan düşünjesi hem girizilýär: eger G ýaýlanyň her bir nokadynda $\vec{F}(M)$ wektor kesgitlenen bolsa, onda G ýaýlada wektor meýdany berlen diýilýär. Wektor meýdanyny kesgitleýän $\vec{F}(M)$ funksiýa, wektor funksiýasy diýilýär.

Tebigatda duş gelýän güýç meýdanalary wektor meýdanyna mysal bolup biler. Ýaýlanyň her bir nokadyna güýjüň bu nokatdaky ululugyny we ugruny kesgitleýän wektor degişli edilendir.

Mysal 1. Okunyň daşynda ω - hemişelik burç tizligi bilen aýlanýan gaty jisimiň nokatlarynyň $\vec{\vartheta}(M)$- tizlik meýdanyny kesgitlemeli.

Çözülişi. Haçanda $\vec{\omega}$ - burç tizliginiň wektory; $\vec{r}$ bolsa, aýlanýan jisimiň M nokadynyň aýlanma okunyň haýsy hem bolsa bir nokadyna görä radius wektory bolsa, onda M nokadyň $\vec{\vartheta}$ tizligi $\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ wektor köpeltmek hasylyna deňdir. Okuň bu gozganmaýan koordinatalar başlangyjy diýip aýlanma okuny bolsa, oz oky hökmünde kabul edeliň. Onda

$\vec{\omega} = \omega\vec{\kappa}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ we netijede

$$\vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ y & z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ x & z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{vmatrix}\vec{k} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$$

gözlenilýän wektor meýdan.

3.Potensial meýdan. Potensial meýdan düşünjesini girizeliň. Käbir *F(M)* skalýar meýdana garalyň. Eger *G* ýaýlanyň her bir *M* nokadynda *gradF* wektor kesgitlenen bolsa,onda bu wektoryň meýdanyna potensial meýdan diýilýär. Şunlukda skalýar meýdanyň özüne bolsa wektor meýdanyň potensialy diýilýär, potensial meýdany kesgitleýän wektora potensial wektor hem diýilýär. Başgaça aýdanymyzda, eger

$$\vec{a} = gradF = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \qquad (1)$$

bolýan F(M) skalýar funksiýa bar bolsa, onda $\vec{a}(M)$ wektor potensial wektordyr.

Haýsy şertlerde, berlen $\vec{a}(M)$ wektor potensial wektor diýlen sorag ýüze çykýar. Bu soraga öň garalypdy.

Goý $\vec{a}$ wektoryň ox, oy we oz koordinata oklaryna proýeksiýalary degişlilikde P, Q we R bolsun başgaça aýdanymyzda

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$
(2)

diýeliň.

Haçanda P,Q,R üznüsiz funksiýalar üznüksiz hususy önümlere eýe bolsalar, onda $Pdx + Qdy + Rdz$ aňlatmanyň käbir $F(x, y, z)$ funksiýanyň doly differensialy bolmagy üçin *P, Q, Z* funksiýalar

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$
(3)

şertleri we diňe şu şertleri kanagatlanmalydyr. Ýöne eger $Pdx + Qdy + Rdz = dF$ bolsa, onda (2) deňlikler hem ýerine ýetýändir. Diýmek (3) şert berlen wektor meýdanynyň potensial meýdandygyny aňladýar. Bu ýagdaýda $F(x, y, z)$ - funksiýa meýdanyň potensial funksiýasy diýilýär.

Dartyş güýç meýdany potensial meýdana mysal bolup biler. Eger koordinatalar başlangyjynda m massa ýerleşdirilen bolsa, onda bu massa dartyş güýç meýdanyny döredýär; giňişligiň *M* nokadynda ýerleşdirilen massa birligine Nýutonyň kanuny boýunça $k \cdot \frac{m}{r^2}$ ululykly koordinatalar başlangyjyna tarap ugrukdyrylan $\vec{F}(M)$ güýç täsir edýär. Bu ýerde $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ýagny koordinatalar başlangyjyndan *M* nokada çenli uzaklyk, *k* – proporsionallyk koffisiýenti. Goý *M* nokadyň koordinatalary x, y, z bolup, *F(M)* güýjüň ugrukdyryjy kosinuslary bolup $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ bolsun, onda onuň koordinatalary

$$P = |F|\cos\alpha = \frac{km}{r^2}\left(-\frac{x}{r}\right) = -\frac{kmx}{r^3}$$

$$Q = |F|\cos\beta = \frac{km}{r^2}\left(-\frac{y}{r}\right) = -\frac{kmy}{r^3}$$

$$R = |F|\cos\gamma = \frac{km}{r^2}\left(-\frac{z}{r}\right) = -\frac{kmz}{r^3}$$

formulalar arkaly kesgitlenýär.
Netijede

$$\vec{F}(M) = -\frac{kmx}{r^3}\vec{i} - \frac{kmy}{r^3}\vec{j} + \frac{kmz}{r^3}\vec{k}.$$

Berlen wektor funksiýasynyň potensial meýdandygyny barlamak kyn däldir we onuň potensial funksiýasy bolup $U(r) = \frac{km}{r}$ funksiýa hyzmat edýär. Indi bolsa massa birligini $B(x_1, y_1, z_1)$ nokatdan $C(x_2, y_2, z_2)$ nokada geçirmek üçin $\vec{F}(M)$ güýjüň edýän işini hasaplalyň.

Haçanda $\vec{F}(M)$ güýjüň koordinata oklaryna proýeksiýalary P, Q we R bolsa A iş

$$A = \int_{BC} Pdx + Qdy + Rdz$$

egriçyzykly integralyň üsti bilen aňladylýar. Berlen güýç meýdanynyň potensial meýdan bolanlygy üçin integral aşagyndaky aňlatma doly differensialdyr, şonuň üçin hem ol integral integrrilemäniň ýolunyň saýlanyp alnyşyna bagly däldir we

$$A = \int_B^C Pdx + Qdy + Rdz = U(C) - U(B)$$

formula arkaly hasaplanyp bilner.

Bu formuladan görnüşi ýaly, $\vec{F}(M)$ güýjüň işi potensial funksiýanyň C we B nokatlaryndaky bahalarynyň tapawudyna deňdir. Eger B we C nokatlardan koordinatalar başlangyjyna çenli uzaklyklary degişlilikde r_1 we r_2 diýsek, onda

$$A = U(r_2) - U(r_1) = \frac{km}{r_2} - \frac{km}{r_1} = km\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Giňişligiň koordinatalar başlangyjyndan beýleki nokatlarynyň dartyş güýç meýdanynyň kesgitleniş ýaýlasy bolýandygyny belläliň.

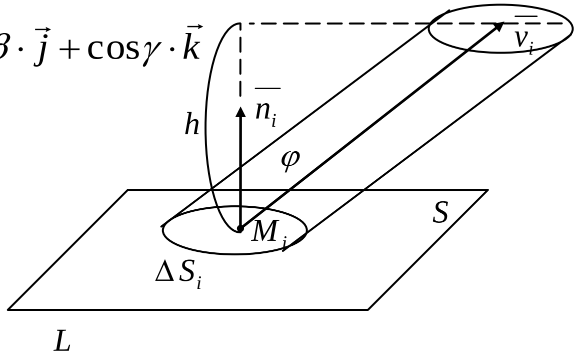
2.Wektor meýdanynyň akymy baradaky mesele.

Goý giňişlikde suwuklugyň tizliginiň $\vec{\vartheta}(M)$ wektor meýdany berlen bolsun, başgaça aýdymyzda giňişlik her bir $M(x, y, z)$ nokatdaky tizligi $\vec{\vartheta}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ bu ýerde P,Q we R – tizligiň koordinata oklaryna bolan proýeksiýalary, bolan suwuklyk bilen doldururylan bolsun. Goý P,Q we R funksiýalar özleriniň koordinatalaryna görä üznüksiz funksiýalar bolsun. Suwuklugyň dykyzlygyny $\rho = 1$ hasap edip, tarapy kesgitlenen, L – ýapyk egri bilen çäklenen S – üstden wagt birliginde akyp geçýän suwuklugyň mukdaryny kesgitläliň.

Goý

$\vec{n} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$

S – üste geçirilen normal wektor bolsun we goý onuň ugrukdyryjy kosinuslary üstüň nokatlarynyň x, y, z koordinatalaryna görä üznüksiz funksiýalar bolsun.



26-njy surat

S üsti meýdanlary $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$ bolan n bölege böleliň we olaryň her birinden $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nokady saýlap alalyň. Tekizligiň i-nji böleginden wagt birliginde akyp geçýän suwuklugyň mukdaryny Π_i bilen belläliň.

$\vec{n}_i = \vec{n}(M_i)$ we $\vec{\vartheta}_i = \vec{\vartheta}(M_i)$ wektorlaryň arasyndaky burçy φ bilen belläliň. Eger bu burç ýiti bolsa, başgaça aýdanymyzda, $\vec{n}_i$ - normal haýsy tarapa ugrukdyrylan bolsa suwuluk hem "şol tarapa" akýar diýeliň, şonda Π_i ululygy položitel hasap edeliň, eger-de burç kütek bolsa, onda suwukluk "tersine akýar" we ol otrisatel diýip hasap edeliň. S üst ýeterlikçe kiçi böleklere bölünende i-nji bölegiň her bir nokadynda $\vec{\vartheta}$ tizlik hemişelik $\vec{\vartheta}(M_i)$ bahany alýar diýip, üstiň bölekleri bolsa – tekizlik diýip hasap etmek bolar. Onda Π_i ululygy esasynyň meýdany ΔS_i we beýikligi, $\vec{\vartheta}_i$ wektoryň $\vec{n}_i$ normala proýeksiýasynyň moduly bilen silindriň göwrümi hökmünde, degişli alamaty bilen almak bolar, başgaça aýdanymyzda

$\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot h$

bu ýerde h – görkezilen proýeksiýa. Ýöne $h = |\vartheta_i| \cos\varphi = |\vec{\vartheta}_i| \cdot |\vec{n}_i| \cdot \cos\varphi = (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{n}_i)$ bolýanlygy üçin

$$\Pi_i \approx (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{n}_i)\Delta S_i$$

i – boýunça 1-den n-e çenli jemläp tarapy kesgitlenen S üstden wagt birliginde akyp geçýän suwuklugyň П mukdaryny kesgitläris:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{n}_i) \cdot \Delta S_i$$

$\vec{\vartheta}$ wektoryň P, Q, R proýeksiýalary we $\vec{n}$ wektoryň ugrukdyryjy kosinuslary S üstüň nokatlarynyň x, y, z koordinatalaryna görä üznüksiz funksiýalar bolany üçin

$$\vec{\vartheta} \cdot \vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

skalýar köpeltmek hasyly üznüksiz funksiýadyr. Haçanda üstüň bölekleriniň iň ulusynyň diametri nola ymtylanda ol jemiň predeli bardyr we ol predel $(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n})$ funksiýadan S üst boýunça alnan üst integralyna deňdir. Predele geçip П akymyň takyk bahasyny alarys:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n})\Delta S_i = \iint_S (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) ds,$$

ýa-da skalýar köpeltmek hasylyny wektorlaryň koordinatalary arkaly aňlatsak

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

Birinji we ikinji görnüşdäki üst integrallaryny baglanyşdyrýan formuladan peýdalansak, onda

$$\Pi = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \qquad (2)$$

Şeýlelikde tarapy kesgitlenen S üstden wagt birliginde akyp geçýän suwuklugyň Π - mukdary, üstüň kesgitlenen tarapy boýunça alnan ikinji görnüşli üst integralyna deňdir.

Islendik $\vec{\vartheta}(M)$ wektor meýdany üçin (2) ikinji görnüşli üst integralyna S üst boýunça $\vec{\vartheta}(M)$ wektoryň akymy (ýa-da $\vec{\vartheta}(M)$ wektor meýdanynyň akymy) diýilýär. Tebigatda duş gelýän beýleki wektor meýdanlarynyň akymy başga fiziki mana eýedir.

3. Diwergensiýa

Goý S üst bilen çäklenen V ýaýlada $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$ wektor meýdany berlen bolsun, şunlukda $P(M), Q(M), R(M)$ funksiýalar özleriniň hususy önümleri bilen V ýaýlada üznüksiz hasap edeliň.

<u>Kesgitleme 1.</u> $\vec{a}(M)$ wektor meýdanynyň diwergensiýasy diýlip

$$di\vartheta\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

deňlik arkaly kesgitlenen $di\vartheta\vec{a}(M)$ skalýar funksiýa aýdylýar.
Diwergensiýa üçin aňlatmany we üstden geçýän wektor akymy düşünjesini peýdalanyp Ostrogradskiniň formulasyny wektor görnüşinde ýazyp bolar. ostrogradskiniň formulasyndaky üst integral, $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ wektoryň S üst boýunça akymyny aňladýar:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n})ds.$$

Bu aňlatmadan we (5) formuladan peýdalanyp Ostrogradskiniň formulasyny

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n})ds = \iiint_V di\vartheta\vec{a}(M)d\vartheta \qquad (6)$$

Şeýlelikde, $\vec{a}(M)$ ýapyk S üst boýunça akymy S üst bilen çäklenen ýaýla boýunça $\vec{a}(M)$ meýdanyň diwergensiýasyndan alnan üçgat integrala deňdir.
Diwergensiýanyň kesgitlemesi koordinatalar sistemasynyň saýlanyp alnyşy bilen baglanyşykly bolanda hem, diwergensiýanyň koordinata sistemasynyň saýlanyp alnyşyna bagly däldigini görkezeliň. Onuň üçin erkin M nokady alalyň, ony erkin S üst bilen çäklenen V ýaýla bilen gurşalyň we V ýaýla Ostrogradskiniň formulasyny ulanalyň. Soňra üç gat integral üçin orta baha hakyndaky teoremany ulanalyň. Onda V ýaýlanyň käbir M_0 nokady we V ýaýlanyň ϑ göwrümi üçin

$$\iint_S (\vec{a} \cdot \vec{n})ds = di\vartheta\vec{a}(M_0) \cdot \vartheta$$

deňlik ýerine ýetýändir. Bu ýerden

$$di\vartheta\vec{a}(M_0) = \frac{\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\vartheta},$$

Indi bolsa V ýaýlany M_0 nokada gysalyň. Şonda $\vartheta \to 0, M_0 \to M$ bolar we

$$di\vartheta\vec{a}(M) = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\vartheta}, \qquad (7)$$

başgaça aýdanymyzda $\vec{a}(M)$ wektor meýdanynyň M nokatdaky diwergensiýasy, S üst boýunça $\vec{a}(M)$ wektoryň akymynyň M nokady gurşaýan ýaýlanyň göwrümine bolan gatnaşygynyň predeline deňdir.

Akymyň we göwrümiň koordinatalar sistemasyna bagly däldigi üçin diwergensiýanyň hem koordinatalar sistemasyna bagly däldigi gelip çykýar, şony hem subut etmek soralýardy.

(7) formulany peýdalanyp diwergensiýanyň fiziki manysyny aýdyňlaşdyralyň. Onuň üçin $\vec{a}(M)$ - wektor meýdany $\rho = 1$ dykyzlykly suwuklugyň tizlik meýdany bolan ýagdaýyna garalyň. Öňden belli bolşy ýaly, $\vec{a}(M)$ wektoryň

$$\Pi = \iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds$$

akymy wagt birliginde S üst boýunça $\vec{n}$ normalyň ugry boýunça akyp geçýän suwuklugyň mukdaryna deňdir.

Goý $\vec{n}$ - daşky normal bolsun. S – iň ýapyk üst bolanlygy üçin $\vec{a}(M)$ wektoryň akymy, S üst biolen çäklenen V ýaýlada wagt birliginde döreýän ýa-da ýok bolýan suwuklugyň mukdaryna deňdir. Suwuklugyň bu mukdaryna (eger $\Pi>0$ bolsa) *V* ýaýlada ýerleşen çeşmäniň jemlenen kuwwady (eger $\Pi<0$ bolsa) ýiten kuwwady diýilýär.

$$\frac{\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\vartheta},$$

gatnaşyga garalyň. Ol çeşmeleriň ortaça dykyzlygyny, başgaça aýdanymyzda bolsa, *V* ýaýlanyň göwrüm birliginde, wagt biriligi aralygynda döreýän (ýa-da ýok bolup gidýän) suwuklugyň mukdaryny aňladýar, *V* ýaýla *M* nokada ýygnalandaky

$$\lim_{\vartheta\to 0}\frac{\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds}{\vartheta},$$

predele bolsa çeşmeleriň *M* nokatdaky dykyzlygy diýip at bermek bolar. bu predel bolsa $di\vartheta\vec{a}(M)$ deňdir. Şeýlelikde, tizlikleriň wektor meýdanynyň diwergensiýasy suwukluk çeşmeleriniň dykyzlygyny häsiýetlendirýär.

Eger $di\vartheta\vec{a}(M)>0$ bolsa, onda (6) formuladan görmüşi ýaly $\Pi>0$, ýagny *V* ýaýlanyň içinde suwukluk çeşmesi bar bolup ondan çykýan suwukluk oňa girýän suwuklukdan köp, eger $di\vartheta\vec{a}(M)<0$ bolsa $\Pi<0$, ýagny onda V ýaýlanyň içinde suwukluk akymy bar bolup ol akym boýunça girýän suwuklugyň mukdary ondan çykýan suwuklukdan köpdür. Eger-de $di\vartheta\vec{a}(M)=0$ bolsa, onda $\Pi=0$, ýagny *V* ýaýlanyň içinde çeşme-de ýok akym hem ýokdur. Başgaça aýdanymyzda oňa girýän we çykýan suwuklyklaryň mukdary deňdir. Bu hadysa, mysal üçin derýada akýan suwuň akymynda ýerleşen islendik V göwrümde bolup geçýär.

Islendik wektor meýdan üçin $di\vartheta\vec{a}(M)$ ýokarky fiziki mana eýedir; diwergensiýa meýdandaky çeşmeleriň dykyzlygyny häsiýetlendirýär.

Eger her bir nokatda $di\vartheta\vec{a}(M)$=0 bolsa, onda $\vec{a}(M)$ wektor meýdanyna solenoidal meýdan diýilýär.

Mysal 2. OZ okuň daşynda ω hemişelik tizlik bilen aýlanýan jisimiň $\vec{\vartheta}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ wektor meýdanynyň diwergensiýasyny hasaplamaly.

Çözülişi. Bu mysalda $P = -\omega y, Q = \omega x, R = 0.$ Şonuň üçin hem

$$di\vartheta\ \vec{\vartheta}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0,$$

diýmek berlen wektor meýdan solenoidal.

4.Sirkulýasiýa. Rotor.

Goý käbir ýaýlada

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$$

käbir wektor meýdany we L –bolsa bu ýaýlada ýerleşen endigan ýa-da bölek endigan egri.

L egride hereketiň iki ugrunyň birini saýlap alalyň we $d\vec{l}$ bilen egriniň her bir nokadynda hereketiň ugry bilen gabat gelýän moduly boýunça duganyň differensialyna deň bolan wektory belläliň.

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Onda $\vec{a}(M)$ we $d\vec{l}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyndan alnan egriçyzykly integrala

$$\int_L \vec{a}(M)\cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

L egriniň boýuna $\vec{a}(M)$ wektor meýdanynyň sirkulýasiýasy diýilýär. Güýç meýdanynda sirkulýasiýa güýç meýdanynyň material nokady L ýoluň boýuna süýşürmek üçin eden işini aňladýar. Başga hili meýdanlarda sirkulýasiýa başga fiziki mana eýedir.

<u>Kesgitleme 2.</u> $\vec{a}(M)$ wektor meýdanynyň rotory diýip

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

deňlik arkaly kesgitlenýän wektora aýdylýar.

Rotor we sirkulýasiýa düşünjelerinden peýdalanyp

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]$$

Stoks formulasyny has gysga wektor görnüşinde

$$\oint_L \vec{a}(M)\cdot dl = \iint_S \left(rot\vec{a}(M)\cdot\vec{n}\right)ds$$

görnüşde ýazmak bolar. Şeýlelikde, L ýapyk egriniň boýuna $\vec{a}(M)$ wektoryň sirkulýasiýasy bu wektor meýdanynyň L egri bilen çäklenen S üst boýunça akymyna deňdir.

Edil diwergensiýada bolşy ýaly $rot\vec{a}(M)$ üçin hem $\vec{a}(M)$ wektoryň rotorynyň koordinata sistemasynyň saýlanyp alnyşyna bagly däldigini görkezmek bolar.

Mysal 3. oz okuň daşyndan ω burç tizligi bilen aýlanýan gaty jisimiň $\vec{\vartheta}(M) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ tizlik meýdanynyň rotoryny hasaplamaly.

Çözülişi. Rotoryň kesgitlemesinden peýdalanyp, alarys.

$$rot\vec{a}(M) = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(-\omega y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y}\right)\vec{k} = 2\omega\vec{k}$$

Diýmek berlen wektor meýdanynyň rotory öz aýlanma oky boýunça ugrukdurlan bolup ululygy aýlanma tizliginiň iki essesine deňdir.

Rotor düşünjesi potensial meýdan düzüjisi bilen gönüden göni baglanyşykdadyr. $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$ wektor meýdanynyň potesial meýdan bolmagy üçin

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

şertiň ýerine ýetmelidigi öň görkezilipdi. Bu bolsa $\vec{a}(M)$ meýdanyň rotorynyň ähli koordinatalarynyň nola deň bolmalydygyny aňladýandyr. Diýmek $\vec{a}(M)$ wektor meýdanynyň potensial meýdan bolmagy üçin $rot\vec{a}(M) = 0$ şertiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

5. Gamilton operatory.

Meýdan nazaryýetiniň esasy düşünjeleri: gradiýent, diwergensiýa, rotor we olaryň üstünde geçirilýän amallary Gamilton ýa-da “Nabla” operatory diýlip atlandyrylýan $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ operatoryň üsti bilen aňlatmaklyk amatly bolýar. ∇ operatoryna, koordinatalary $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ we $\frac{\partial}{\partial z}$ bolan simmoliki wektor hökmünde. Onuň üstünde geçirilýän amallar bolsa wektor algebrasynyň amallary hökmünde garamak bolar. Şunlukda $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ we $\frac{\partial}{\partial z}$ koordinatalaryň skalýar funksiýa köpeltmek hasylyna degişlilikde x, y we z görä hususy önüm hökmünde garamak bolar.

<u>Mysallar.</u>

1.Goý $u(x, y, z)$ - skalýar funksiýa bolsun. Onda ∇ operatorynyň u funksiýa köpeltmek hasyly bu funksiýanyň gradiýentini berýär:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad u$$

2.Goý $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ wektor funksiýa. Onda ∇ operatoryň $\vec{a}(M)$ wektor funksiýa skalýar köpeltmek hasyly bu funksiýanyň diwergensiýasyny berýär.

$$\nabla \cdot \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right)\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = d$$

3. ∇ operatoryň $\vec{a}(M)$ wektor funksiýa wektor köpeltmek hasyly bu funksiýanyň rotoryny berýär.

$$\nabla \times \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} = rot\vec{a}(M$$

Köplenç ikinji tertipli operasiýalara duşgelmek bolýar. Olaryň has wajyplaryna garalyň.

1^0. $div\, rot\vec{a}(M) = 0$. Hakykatdanda, ikinji tertipli garyşyk önümleriň deňliginden peýdalansak, onda

$$div\ rot\vec{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

Bu netijäni ∇ operatordan peýdalanmak arkaly hem añsat alyp bolar:

$$div\, rot\vec{a}(M) = \nabla \cdot (\nabla \cdot x\vec{a}) = 0,$$

Sebäbi bu ýerde ikisi deñ bolan, üç sany $\nabla, \nabla, \vec{a}$ wektorlaryñ garyşyk köpelitmek hasyly alynýar. Olar ýaly köpelitmek hasylynyñ nola deñ bolýandygy aýdyñdyr.

2^0. $rot\ grad u = 0$ Hakykatdan-da , ikinji tertipli garyşyk önümleriñ deñliginden

$$rot\ grad u = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\vec{i} +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\vec{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\vec{k} = 0$$

Bu netijäni ∇ operatory ulanmak arkaly hem almak bolýar:

$$rot\ grad\ u = \nabla x(\nabla u) = (\nabla x \nabla)u = 0,$$

Sebäbi şol bir wektoryñ wektor köpelitmek hasyly nola deñdir.

3^0. $div\ grad\ u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Hakykatdan-da

$$grad\ \mathrm{u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$div\ grad\ \mathrm{u}\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8)$$

(8) deñligiñ sag bölegini simwollaryñ üsti bilen aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{ýa-da}$$

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ simwola Laplas operatory diýilýär. Laplas operatoryna w- “wektor”skalýar köpelitmek hasyly görnüşinde garamak bolar. Hakykatdan-da

$$(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \Delta$$

Şonuñ üçin hem (8) deñlik ∇ operatoryñ kömegi bilen

$$div\ grad\ \mathrm{u} = \nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla) u = \nabla^2 u$$

görnüşde ýazylýar.

$\Delta u = 0$ deñlemä Laplas deñlemesi diýilýär. Onuñ kömegi bilen fizikanyñ dürli stassioner prossesleri añladylýar. Mysal üçin:

Ýylylygyñ stassionar ýaýramagy, nokatlanş zarýadyñ elektrostatik meýdany, käbir ýaýlanyñ içindäki gysylmaýan suklygyñ durnuklaşan hereketi we başgalar. $\Delta u = 0$ şerti kanagatlandyrýan $u(x, y, z)$ skalýar meýdana garmonik meýdan diýilýär.

§12. Giňişlikde egriçyzykly koordinatalar.

Gradiýent, diwergensiýa, rotor we şeýle hem beýleki käbir ululyklar matematikanyň we nazary fizikanyň dürli meselelerinde ýygy-ýygydan duş gelýändir. Şonuň üçin köp halatlarda olary dekart koordinatalar ulgamynda aňlatmakdan daşary, beýleki egriçyzykly koordinatalarda aňlatmak amatlydyr. Mysal üçin, eger wektor meýdany sferik simmetriklik häsiýete eýe bolsa, ýagny her bir nokatda skalýar ýa-da wektor ululyk şol nokatdan koordinata başlangyjyna çenli aralyga bagly bolsa, onda bu halda şeýle meýdanlar bilen baglanyşykly ähli formulalar sferik koordinatalarda ýönekeý görnüşi alar. Beýleki hallarda bolsa başga egriçyzykly koordinatalar ulgamyna geçmeklik amatly bolmagy ähtimaldyr. Şonuň üçin hem giňişlikde, egriçyzykly koordinatalar düşünjesini girizeliň.

Goý, üçölçegli giňişlikde, käbir q_1, q_2, q_3 egriçyzykly koordinatalar ulgamy girizilen bolup, onuň x,y,z koordinatalar ulgamy bilen baglanyşygy

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad (1)$$

formulalar arkaly amala aşyrylsyn. Geljekde zeruru bolan koordinata üstleri we koordinata yzyklary düşünjelerini ýatlalyň. Giňşligiň diňe bir koordinatasy bellenen M(q_1, q_2, q_3) nokatlarynyň köplügine koordinata üsti diýilýär. Giňişligiň iki kordinatasy bellenen M(q_1, q_2, q_3)

nokatlarynyň köplügine koordinata çyzygy diýilýär. Biz bu ýerde egriçyzykly koordinatalar ulgamynyň iň ýönekeý we durmuşda köp duş gelýän görnüşine- egriçyzykly ortogonal koordinatalar ulgamyna,ýagny islendik nokatda şol nokat arkaly geçýän üç koordinata çyzyklary orthogonal bolýan egriçyzykly koordinatalar ulgamyna seretjekdiris. Egriçyzykly ortogonal koordinatalar ulgmyna silindrik we sferik koordinatalar mysal bolup bilerler.

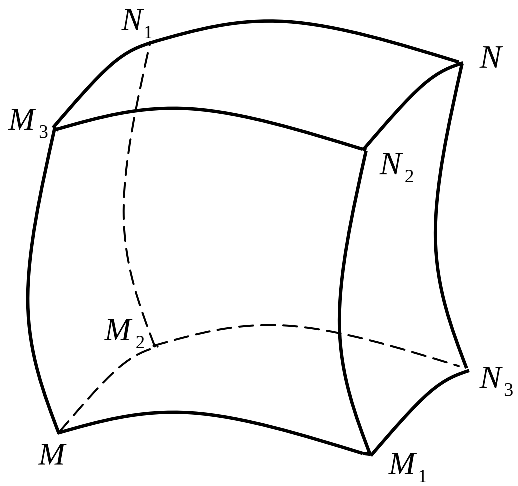
1. Ortogonal koordinatalarda uzynlyk, meýdan we göwrüm.

M nokatda şol nokat arkaly geçýän koordinata çyzyklaryna galtaşýan birlik wektorlardan düzülen I_1, I_2, I_3 ortogonal we normirlenen bazis girizeliň. Bu bazisiň dekart koordinatalar ulgamynda kegitlenýän *i, j, k* birlik wektorlarda tapawudy, onuň bir nokatdan başga nokada geçende üýtgeýänligidir, ýagny I_1, I_2, I_3 wektorlaryň özleri q_1, q_2, q_3 koordinatalara bagly bolan funksiýalardyr. Eger $r = x(q_1, q_2, q_3)\cdot i + y(q_1, q_2, q_3) j + z(q_1, q_2, q_3)\cdot k$ bolsa, onda

$$I_m = \frac{\partial}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m} i + \frac{\partial y}{\partial q_m} j + \frac{\partial z}{\partial q_m} k$$

$$(\mathrm{m} = 1,2,3)$$

Ilki bilen dürli meselelerde duş gelýän ululyklar bolan uzynlgyyň, meýdenyň we göwrümiň orthogonal koordinatalarda



27-nji surat

aňladylyşyny görkezeliň. Onuň üçin ýeterlik kiçi bolan egriçyzykly parallelopipede seredeliň. Goý, ol parallelepiped q_1, q_2, q_3 parametrleriň q_1 we $q_1 + d\,q_1$; q_2 we $q_2 + d\,q_2$; q_3 we $q_3 + d\,q_3$ bahalaryna degişli bolan üç jübüt koordinata üstleriň kesişmeginden alnan bolsun. (1-nji surat)

MM_1 gapyrganyň M we M_1 nokatlarynyň egriçyzykly koordinatalary degişlilikde, (q_1, q_2, q_3) we $(q_1 + \mathrm{d}\,q_1,$ $q_2 + \mathrm{d}\,q_2,\ q_3 + \mathrm{d}\,q_3)$ bolar. Olaryň dekart koordinatalaryny degişlilikde, (x, y, z) we $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ bilen belgiläliň. Onda MM_1 gapyrganyň dl_1 uzynlygy $dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ deňdir. Şunlukda, MM_1 gapyrgada

x, y, z koordinatalar diňe q_1 parametriň funksiýasydyr (q_2 we q_3 bolsa şol gapyrgada hemişelikdir). Şonuň üçin bu halda $dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1$, $dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1$, $dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$ we şonuň üçin

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1$$

Edil şonuň ýaly, degişlilikde, MM_2 we MM_3 gapyrgalar üçin

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2,$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3$$

Eger $$H_m = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2}$$

(m=1,2,3) (2)

Belgileme girizsek, onda dl_1, dl_2, dl_3 üçin formulalar $dl_1 = H_1 dq_1$, $dl_2 = H_2 dq_2$, $dl_3 = H_3 dq_3$ (3) görnüşi alynar. Bu deňliklerdäki (2) boýunça kesgitlenýän

H_1, H_2, H_3 ululyklara Lameniň ýa-da masştab koefissiýentleri diýilýär.
Koordinatalar ulgamynyň ortogonallygy esasynda, $MM_2N_1M_3$ granyň $d\sigma_1$ meýdany dl_2 we dl_3 ululyklaryň köpeldilmegine deňdir, ýagny $d\sigma_1 = H_2H_3dq_2dq_3$
Edil şuňa meňzeşlikde $MM_1N_2M_3$ we $MM_1N_3M_2$ granlar üçin
$d\sigma_2 = H_3H_1dq_3dq_1$, $d\sigma_3 = H_1H_2dq_1dq_2$
Onda ýeterlik kiçi egriçyzykly parallelopipediň göwrümi

$$dV = dl_1dl_2dl_3 = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$$

2. Ortogonal koordinatalarda gradiýent

Mälim bolşy ýaly, $f = f(q_1, q_2, q_3)$ funksiýanyň gradiýentiniň käbir ugra proýeksiýasy ol funksiýanyň şol ugur boýunça önümine deňdir. Şonuň üçin I_1, I_2, I_3 bazisde gradf wektoryň komponentlerini hasaplamak üçin, f funksiýanyň şo l wektorlar arkaly kesgitlenýän l_1, l_2, l_3 ugurlar boýunça önümini tapaly. Eger f funksiýanyň M_1 we M nokatlardaky bahalarynyň tapawudy Δf bolsa, onda kesgitleme esasynda

$$(gradf, I_1) = \frac{\partial f}{\partial l_1} = \lim_{dl_1 \to o} \frac{\Delta f}{dl_1} = \lim_{dq_1 \to o} \frac{\Delta f}{H_1 dq_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1},$$

Edil şonuň ýaly,

$$(gradf, I_2) = \frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad (gradf, I_3) = \frac{\partial f}{\partial l_3} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}$$

Şeýlelikde, $f = f(q_1, q_2, q_3)$ funksiýanyň orthogonal koordinatalardaky gradiýenti şeýle aňladylýar:

$$gradf = \frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} I_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} I_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3} I_3$$

3. Ortogonal koordinatalarda diwergensiýa

Berlen $F(M) = F_1(M)I_1 + F_2(M)I_2 + F_3(M)I_3$ wektoryň egriçyzykly q_1, q_2, q_3 koordinatalarda diwergensiýasyny aňlatmak üçin

$divF(M) = \lim\limits_{v \to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_{T} (F, n) d\sigma$ formuladan peýdalanýarys.

Bu formulanyň esasynda $divF(M)$ hasaplamaklyk ýeterlik kiçi paralelepipediň
(1-nji surat) üsti arkaly *F(M)* wektoryň akymynyň şol parallelepipediň dV göwrümine bolan gatnaşygyny hasaplamak ýalydyr. Şonuň üçin ilki bilen MM_1 gapyrga perpendikulýar bolan iki gran arkaly *F(M)* wektoryň akymyny hasaplalyň.

$MM_2N_1M_3$ grana daşky normal- I_1 bilen gabat gelýär. (çünki I_1 wektor q_1 koordinatanyň artýan tarapyna ugrukdyrylandyr, seredilen grana daşky normal bolsa oňa garşylykly ugrukdyrylandyr). Şonuň esasynda F wektoryň şol grana arkaly akymy (ýeterlik kiçi dV görä birinjiden ýokary tertipdäki takyklykda) takmyn $(F, -I_1)d\sigma = -F_1H_2H_3dq_2dq_3$ deňdir, bu ýerde $F_1H_2H_3$ ululyklar (q_1, q_2, q_3) nokatda hasaplanylýar.

Garşylykly $M_1N_3NN_2$ granyň seredilen grandan tapawudy, bu ýerde birinji koordinata $q_1 + dq_1$ deňdir we ol grana bolan normal I_1 bilen gabat gelýär. Şonuň üçin şol gran boýunça F wektoryň akymy takmyn $(F, I_1)d\sigma_1 = F_1H_2H_3dq_2dq_3$ deňdir, şunlukda $F_1H_2H_3$ ululyklaryň birinji koordinatasy $q_1 + dq_1$ bolýandyr.

Şeýlelikde, F wektoryň parallel bolan $MM_2N_1M_3$ we $MM_2N_1M_3$ granlar arkaly akymy takmyn

$$F_1H_2H_3dq_2dq_3\Big|_{q_1+dq_1} - F_1H_2H_3dq_2dq_3\Big|_{q_1} = \frac{\partial(F_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3$$

deňdir.

Edil şuňa meňzeşlikde, F wektoryň beýleki parallel jübüt granlar arkaly akymy üçin takmyn

$$\frac{\partial(F_2H_1H_3)}{\partial q_2}dq_1dq_2dq_3,$$

$$\frac{\partial(F_3H_1H_2)}{\partial q_3}dq_1dq_2dq_3$$

aňlatmalary alarys. Ol ululyklaryň üçüsini goşup we ol jemi $dV = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$ göwrüme bölüp, diwergensiýany ortogonal koordinatalarda aňladarys:

$$divF = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(F_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(F_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(F_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right]$$

4. Ortogonal koordinatalarda rotor.

Wektor meýdanynyň rotoryny ortogonal koordinatalarda aňlatmak üçin

$$\left(rot\,F(M)\right)_n = \lim_{\sigma\to 0}\frac{\oint\limits_L F_\tau dl}{\sigma}$$

Ol formulada σ öz içinde M nokady saklaýan we n wektora perpendikulýar bolan käbir meýdançanyň meýdanydyr, L bolsa şol meýdançany çäklendirýän ýapyk egridir. Şonuň üçin F wektoryň $MM_2N_1M_3M$ ýapyk egri boýunça sirkulýasiýasyny hasaplap we ony şol egri bilen çäklenen meýdançanyň $d\sigma_1$ meýdanyna bölüp, $rotF$ wektoryň we I_1 wektora bolan proýeksiýasyny alarys. Ýapyk egri boýunça sirkulýasiýasyny MM_2, M_2N_1, N_1M_3 we M_3M dugalar boýunça sirkulýasiýalaryň jemi hökmünde hasaplarys. F wektoryň MM_2 boýunça sirkulýasiýasy (ýeterlik kiçi $d\sigma_1$ görä birden ýokary tertipdäki takyklykda) takmyn

$$F_2 dl_2 = F_2 H_2 dq_2 \qquad (3)$$

deňdir, şunlukda F_2 we H_2 ululyklar (q_1, q_2, q_3) nokatda hasaplanylýar. N_1M_3 boýunça wektoryň sirkulýasiýasy häzirki alnan sirkulýasiýadan tapawudy N_1M_3 dugada üçünji koordinata $q_3 + dq_3$ deňdir hem-de N_1M_3 boýunça ugur I_1 ugra garşylyklydyr. Şonuň esasynda N_1M_3 boýunça sirkulýasiýa takmyn

$$-\left[F_2H_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_2H_2)dq_3\right]dq_2 \qquad (4)$$

deňdir. Edil şuňa meňzeşlikde, M_2N_1 we N_2M boýunça sirkulýasiýalar üçin degişlilikde

$$\left[F_3H_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_3H_3)dq_2\right]dq_3$$

(5)

$-F_3H_3dq_3$ degişli aňlatmalary alarys. (3), (4), (5) we (6) ululyklary goşup, F wektoryň $MM_2N_1M_3M$ ýapyk egri boýunça sirkulýasiýasynyň $-\frac{\partial(F_2H_2)}{\partial q_3}dq_2dq_3 + \frac{\partial(F_3H_3)}{\partial q_2}dq_2dq_3$ deňdigini görýäris. Bu aňlatmany $MM_2N_1M_3$ granyň $d\sigma_1 = H_2H_3dq_2dq_3$ meýdanyna bölüp, $rotF$ wektoryň I_1 bazis wektora tarap $(rotF)_1$ proýeksiýasy üçin

$$(rotF)_1 = \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(F_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(F_2H_2)}{\partial q_3}\right\}$$ deňligi alarys.

Edil şonuň ýaly, $(rotF)_2 = \frac{1}{H_3H_1}\left\{\frac{\partial(F_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(F_3H_3)}{\partial q_1}\right\}$

$$(rotF)_3 = \frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial(F_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(F_1H_1)}{\partial q_2}\right\}$$ deňlikleri alarys.

5. Ortogonal koordinatalarda Laplas operatory.

$gradf$ we $divF$ amallaryň ortogonal koordinatalarda aňladylan formulalaryndan peýdalanyp, Laplasyň operatorynyň ortogonal q_1, q_2, q_3 koordinatalarda aňladylyşynyň

$$\Delta f = divgradf = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \right.$$

6. Esasy formulalaryň silindrik we sferik koordinatalarda aňladylyşy

1. Silindrik koordinatalarda aňladylyşy. Silindrik r, φ, z koordinatalary dekart x, y, z koordinatalar bilen baglanyşdyrýan $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$ formulalardan peýdalanyp, Lameniň koeffisiýentlerini silindrik koordinatalarda hasaplalyň

(şunlukda, $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z$)

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Bu formulalar esasynda egriçyzykly ortogonal koordinatalar bolan silindrik koordinatalarda

$$gradf=\frac{\partial f}{\partial r}I_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}I_\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}I_z,$$

$$divF=\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$rotF=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)I_r+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)I_\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right)I_z=$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1I_r & H_2I_\varphi & H_3I_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_1F_r & H_2F_\varphi & H_3F_z \end{vmatrix},$$

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2. Sferik koordinatalarda aňladylyşy. Sferik r,θ,φ koordinatalary dekart x,y,z koordinatalary bilen baglanyşdyrýan $x=r\cos\varphi\sin\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\theta$ formulalardan peýdalanyp, Lameniň koeffisiýentlerini sferik koordinatalarda hasaplalyň
($q_1=r, q_2=\theta, q_3=\varphi$):
$H_1=1, H_2=r, H_3=r\sin\theta$
Bu formulalaryň esasynda egriçyzykly ortogonal koordinatalar bolan sferik koordinatalarda

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial r} I_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} I_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} I_\varphi,$$

$$divF = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$rotF = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right) I_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\varphi)}{\partial r}\right) I_\theta +$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) I_\varphi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} I_r & rI_\theta & rI_\varphi \sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\varphi \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

3-nji mysal. Sferik koordinatalarda berlen $F = \frac{\cos\theta}{r^2} I_r + \frac{\sin\theta}{r^2} I_\theta$ wektor meýdanynyň rotoryny tapmaly.

$\lhd$Rotoryň sferik koordinatalarda aňladylan formulasy esasynda

$$rotF = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} I_r & rI_\theta & rI_\varphi \sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\cos\theta}{r^2} & \frac{\sin\theta}{r} & o \end{vmatrix} = \frac{I_\varphi}{r}\left(\frac{\sin\theta}{r^2} - \frac{\sin\theta}{r^2}\right) = 0.$$

§13. Tenzorlar.

Matematiki nukdaý nazardan fiziki ululyklaryñ ýönekeýi diýilip skalýar ululyklar hasaplanýar, mysal üçin jisimiñ massasy, jisimiñ göwrümi, wektoryñ uzynlygy we ş.m. Şeýle skalýar ululyklaryñ her biri islendik koordinatalar sistemasynda bir san bilen añladylýar, şunlukda bu san koordinata sistemasynyñ saýlanyp alynyşyna bagly däldir.

Skalýar ululyklara görä çylşyrymlyrak ululyk wektor ululykdyr, mysal üçin tizlik, tizlenme, güýç we ş.m. Wektor ululyk üç ölçegli giñişligiñ her bir bazisinde san üçligi arkaly kesgitlenýär. Ol san üçligi wektoryñ koordinata oklaryna görä proýeksiýalary, şunlukda "wektoryñ koordinatalary" bir bazisden beýleki geçende kesgitli kanun boýunça özgerýär.

Matematiki nukdaý nazardan, çylşyrymlylygy boýunça soñ gelýän fiziki ululyk ol hem tenzorlardan, ol wektorlaryñ üstünde geçirilýän çyzykly operatoryñ funksiýasyny ýerine ýetirýär. Şolar ýaly ululyk arkaly, mysal üçin anizatrop jisimdäki geçirijilik añladylýar. Has takygy, izotrop we elektrik meýdanynyñ güýjenmesiniñ $\vec{E}$ wektory kolleniar, başgaça aýdanymyzda

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (1)$$

(1) deñlikdäki σ $(\sigma > 0)$ skalýar köpeldijä geçirijilik diýilýär. Anizatrop jisimde, umuman alanyñda $\vec{J}$ we $\vec{E}$ kolleniar däldir we σ çyzykly operator $\vec{E}$ wektory $\vec{J}$

wektora öwrýär, şol operatora hem geçirijilik “tenzory” diýilýär.

Eger giñişlikde käbir kesgitli $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisi saýlasak we bu bazis boýunça $\vec{J}$ we $\vec{E}$ wektorlary dagytsak

$$\vec{J} = j_1\vec{e}_1 + j_2\vec{e}_3 + j_3\vec{e}_3$$
$$\vec{E} = E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2 + E_3\vec{e}_3 \tag{2}$$

onda (1) deñligi oña ekwiwalent bolan üç sany

$$J_k = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ki} E_i \qquad k = 1,2,3 \tag{1`}$$

Skalýar deñlik bilen çalçyryp bileris. Şeýlelikde σ geçirijilik tenzory her bir bazisde σ_{ki} $k,i = 1,2,3$ dokuz san arkaly kesgitlenýär. Bu sanlara tenzoryñ degişli bazisindäki koordinatalary diýilýar

Tenzoryñ kesgitlemesine, bir bazisden beýleki bazise geçilende onuñ koordinatalarynyñ özgermesiniñ ýazgysy hem girmelidir.

1. Affin ortogonal tenzor düşünjesi.

1. Ortogonal normirlenen bazisi özgeritmek. Üç ölçegli ewklid giñişliginde haýsy hem bolsa iki sany $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3$ we $\vec{e}_1', \vec{e}_3', \vec{e}_3'$ ortogonal normirlenem bazise garalyñ. Bazisleriñ ortogonallygyndan we

normirlenenliginden skalýar köpelitmek hasyly üçin aşakdaky gatnaşyklar gelip çykýar $(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$,

$$(\vec{e}'_i, \vec{e}'_k) = \delta_{ik} \qquad (2`)$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ haçaçan } i \neq k \\ 1 \text{ haçaçan } i = k \end{cases} \qquad (3)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_3$ we $\vec{e}'_1, \vec{e}'_3, \vec{e}'_3$ bazisleri şertli degişlilikde "köne" we "täze" diýip atlandyrjakdyrys. Täze bazisiñ wektorlaryny köne boýunça dagadyp, alarys.

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ýa-da gysgaça

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\vec{e}_j, i = 1,2,3. \qquad (4`)$$

$$\left\|\alpha_{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix}$$

(5)

matrisa köne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden täze $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ bazise geçiş matrisasy diýilýär. Bu matrisanyň häsiýetlerini öwreneliň.

$\vec{e}'_i = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_1 + \alpha_{i3}\vec{e}_3$ wektory

$\vec{e}'_j = \alpha_{j1}\vec{e}_1 + \alpha_{j2}\vec{e}_1 + \alpha_{j3}\vec{e}_3$ wektora skalýar köpeldip, alarys.

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1}+\alpha_{i2}\alpha_{j2}+\alpha_{i3}\alpha_{j3}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & eger \quad j\neq i\\ 1, & eger \quad j=i\end{cases} \tag{6}$$

Başgaça aýdanymyzda matrisanyň islendik setiriniň elementleriniň kwadratlarynyň jemi bire deň, islendik iki setiriniň degişli elementleriniň köpeltmek hasyllarynyň jemi nola deň. (4) deňligi $\vec{e}_k$ wektora skalýar köpeldip, taparys.

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_k) = \alpha_{ik} \tag{7}$$

(5) matrissa ters bolan matrissanyň elementleri üçin (7) meňzeş aňlatmalary tapalyň. Köne bazisiň $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ wektorlaryny täze boýunça dagydyp ýazalyň.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \beta_{11}\vec{e}_1' + \beta_{12}\vec{e}_2' + \beta_{13}\vec{e}_3'\\
\vec{e}_2 &= \beta_{21}\vec{e}_1' + \beta_{22}\vec{e}_2' + \beta_{23}\vec{e}_3' \qquad (8)\\
\vec{e}_3 &= \beta_{31}\vec{e}_1' + \beta_{32}\vec{e}_2' + \beta_{33}\vec{e}_3'
\end{aligned}$$

ýa-da gysgaça

$$\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{3} \beta_{kj}\vec{e}_j'. \qquad (8^{'}).$$

$$\|\beta_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

matrissa (5) matrisanyň ters matrissasygy aýdyňdyr. ($8^{'}$) wektory $\vec{e}_i'$ skalýar köpeldip, alarys.

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_k) = \beta_{ki} \tag{10}$$

(10) we (7) deňlikleri deňeşdirip (5) we (9) matrissalaryň elementleriniň arasyndaky baglanyşygy taparys:

$$\alpha_{ik} = \beta_{ki}. \qquad (11)$$

Şeýlelikde (5) matrissa ters bolan (9) matrissa (5) matrissany transponirlemek arkaly alynýar.

2.Affin ortogonal tenzoryň kesgitlemesi.

Tenzorlaryň formal teoriýasy gurlanda inwariant skalýar ululyklary we wektorlary tenzorlaryň hasabyna goşmaklyk maksada laýyk bolýar. Bir ortogonal normirlenen bazisden beýlekä geçilmegine görä inwariant bolan *L* skalýar ululyga nolunjy rangly affin ortogonal tenzor diýilýär.

Temperatura, massa, wektoryň uzynlygy nolunjy rangly affin ortogonal tenzorlardyr. Wektoryň birinji koordinata okuna ($\vec{e}_1$ bazis wektory arkaly kesgitlenýän oka) proýeksiýasy, her bir $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisde bir bazisden beýleki bazise geçmäge görä inwariant bolmadyk skalýar ululykdyr, şonuň üçin hem ol nolunjy rangly tenzor däldir.

Aşakdaky kesgitleme wektorlary tenzorlaryň hataryna goşýar.

Kesgitleme 1. Goý her bir ortogonal normirlenen bazisde *L* ululyk sanlaryň üçlügi arkaly kesgitlenýän bolsun: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisde L_1, L_2, L_3 sanlar bilen, $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazisde bolsa L_1', L_2', L_3' sanlar bilen we ş.m.

Şunlukda islendik $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden başga bir islendik $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazise geçenimizde ol sanlar

$$L_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} L_k \qquad (12)$$

formula arkaly özgerdilýär, bu formulada $\|\alpha_{ij}\|$-matrissa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazise geçmegiň matrissasy. Onda L ululyga birinji rangly affin ortogonal tenzor diýilýär we (L_i) ýa-da $L \equiv (L_i)$ simwol bilen bellenýär.
L_i , *i=1,2,3* sanlara *L* tenzoryň $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdäki koordinatalary, L_i *i=1,2,3* sanlara bolsa degişlilikde bu tenzoryñ $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazisdäki koordinatalary diýilýär.
Islendik wektoryñ birinji rangy affin ortogonal tenzor bolýandygyny subut edeliñ Birinjiden her bir $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ ortogonal normirlenen bazisde $\vec{x}$ wektor özüniñ üç koordinatasy bolan san üçligi arkaly kesgitlenýär. Ikinjiden bolsa bir bazisden beýleki bazise geçilende $\vec{x}$ wektoryñ koordinatalary (12) görnüşde formulalar arkaly özgerdilýär. Hakykatdanda, $\vec{x}$ wektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ we $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazisler boýunça dagadyp bolýar.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2' + x_3\vec{e}_3' \tag{13}$$

(13) deñligi $\vec{e}_i'$ skalýar köpelideliñ. (3) we (7) deñliklerden

$$x_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}x_k, \qquad i = 1,2,3 \tag{14}$$

Şunlukda (14) formula edil (12) formula ýaly görnüşe eýedir. Bu bolsa $\vec{x}$ wektoryñ birinji rangly affin ortogonal tenzordygyny añladýar.
<u>Bellik 1.</u> Her bir birinji rangly affin ortogonal tenzora wektor hökmünde garamak bolar.

Bellik 2. $\|\alpha_{ij}\|$ matrisa üçin ters matrisanyñ $\|\alpha_{ij}\|$ matrisany transponirlemek arkaly alynýanlygy üçin , (14) deñlikden taparys.

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} x'_j, \qquad i = 1,2,3$$

(14′)

Kesgitleme 2. Goý L ululyk her bir ortogonal normirlenen bazisde dokuz san arkaly kesgitlenýän bolsun: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisde $L_{i,j}$ i, j = 1,2,3 sanlar orkaly, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ bazisde bolsa $L_{i,j}$ i, j = 1,2,3sanlar arkaly we ş.m. Eger islendik $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden başga bir islendik $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ bazise geçenimizde bu sanlar

$$L_{i,j} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{im} \alpha_{jn} L_{mn}, \qquad i, j = 1,2,3$$

(15)

formulalar arkaly özgerdilýär. Bu ýerde $\|\alpha_{ij}\|$ matrissa $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ bazise geçen matrissasy. Onda L ululyga ikinji rangly affin ortogonal tenzor diýilýar we (L_{ij}) simwol arkaly belgilenýär, diýmek $L \equiv (L_{ij})$. L_{ij}, ij=1,2,3, sanlar L tenzoryñ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bozisdäki koordinatalary, $L \equiv (L_{ij})$. L_{ij}, ij=1,2,3, sanlar bolsun onuñ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdäki koordinatalary diýilýär.

Islendik P $(P \geq 1)$ rangly affin ortogonal tenzorlar hem ýokardaka meñzeşlikde kesgitlenýär.

3. Çyzykly operator ikinji rangly tenzor hökmünde.

Çyzykly operator ýz-da çyzykly wektor funksiýa diýip her bir $\vec{x}$ wektora $\vec{y}$ wektory degişli edýän $\vec{y}=L(\vec{x})$ funksiýa aýdylýar. Şunlukda ol funksiýa, islendik $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ we islendik hemişelik C_1, C_2 üçin

$$L(C_1\vec{x}_1+C_2\vec{x}_2)=C_1L(\vec{x}_1)+C_2L(\vec{x}_2) \quad (16)$$

Deñligi kanagatlandyrýar. L çyzykly operatoryñ $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazisdäki koordinatalary diýip bazis wektorlaryñ $L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), L(\vec{e}_3)$ obrazlarynyñ $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazisler boýunça

$$\begin{aligned} L(\vec{e}_1) &= L_{11}\vec{e}_1+L_{12}\vec{e}_2+L_{31}\vec{e}_3\\ L(\vec{e}_2) &= L_{12}\vec{e}_1+L_{22}\vec{e}_2+L_{32}\vec{e}_3 \quad (17)\\ L(\vec{e}_3) &= L_{13}\vec{e}_1+L_{23}\vec{e}_2+L_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}$$

dagatmasynyñ L_{ij} koeffisiýentlerine aýdylýar. (17) dagatmany gysgaça

$$L(\vec{e}_j)=\sum_{k=1}^{3}L_{kj}\vec{e}_3 \qquad j=1,2,3 \quad (18)$$

(18) deñligiñ iki bölegini hem $\vec{e}_i$ skalýar köpeldeliñ. (3) deñlikden peýdalansak, onda

$$L'_{ij}=(\vec{e}_i, L(\vec{e}_j)), \qquad i,j=1,2,3 \quad (19)$$

Edil şuña meñzeşlikde $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ bazisdeL operatoryñ koordinatalary üçin, alarys

$$L'_{ij} = (\vec{e}'_i, L(\vec{e}'_j)), \qquad i,j=1,2,3 \qquad (20)$$

$$\vec{e}'_i = \sum_{m=1}^{3} \alpha_{im}\vec{e}_m, \qquad \vec{e}_j = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{jn}\vec{e}_n \qquad (21)$$

añlatmalary (20) ornuna goýup taparys

$$L'_{ij} = (\vec{e}'_i, L(\vec{e}'_j)) = \left(\left(\sum_{m=1}^{3} \alpha_{im}\vec{e}_m\right), \left(\sum_{n=1}^{3} \alpha_{in}L(\vec{e}_n)\right)\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}(\vec{e}_m, L(\vec{e}_n)) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}, \qquad (22)$$

i,j=1,2,3

(22) formula (15) formula bilen gabat gelýär we netijede L çyzykly operatoryñ ikinji rangy affin ortogonal tenzordygy subut edildi.

4. Ikinji rangly tenzor çyzykly operator hökmünde.

(L_{ij}) ikinji rangly affin ortogonal tenzora ýewklid giñişligindäki wektorlarda kesgitlenen çyzykly operator hökmünde garamak bolar. Goý ikinji rangly (L_{ij}) affin ortogonal tenzor berlen bolsun. Öñürti (17) deñliler arkaly berlen, her bir ortogonal normirlenen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdäki bazis wektorlarda, $\vec{y} = L(\vec{x})$ çyzykly operatory kesgitläliñ, soñra bu operatory her bir $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}$ wektor üçin

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} x_i L(\vec{e}_i) \qquad (23)$$

gatnaşyk bilen kesgitläliñ.

Şeýlelik bilen kesgitlenen operatoryñ hakykatdan hem çyzyklydygyny, başgaça aýdanymyzda (16) deñligiñ ýerine ýetýändigini subut edeliñ.

Goý $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$ we $\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{e}_i$ onda

$$C_1\vec{x} + C_2\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} (C_1 x_i + C_2 y_i)\vec{e}_i$$

(23) kesgitlemäni ulansak (23) deñlikde $\vec{x}$ wektory $c_1\vec{x} + c_2\vec{y}$ bilen çalşyrsak), onda (18) bilen gabat gelýär.

$$L(C_1\vec{x} + C_2\vec{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (C_1 x_i + C_2 y_i) L(\vec{e}_i) = C_1 \sum_{i=1}^{3} x_i L(\vec{e}_i) + C_2 \sum_{i=1} Z_i L(\vec{e}_i) = C_1 L(\vec{x}) + C_2 L(\vec{y})$$

Deñligi ýazyp bileris. Operatoryñ çyzyklydygy subut edildi. (L_{ij}) tenzor arkaly kesgitlenýär. L çyzykly operatoryñ kesgitlemesiniñ bazise bagly däldigini görkezeliñ. Başga sözler bilen aýdanymyzda eger $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisde tenzoryñ L_{ij} koordinatalarynyñ ornuna bu tenzoryñ $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazisdäki L_{ij}' koordinatalaryny alsak we L' çyzykly operatory $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ bazis wektor üçin

$$\begin{aligned} L'(\vec{e}_1') &= L_{11}'\vec{e}_1' + L_{12}'\vec{e}_2' + L_{31}'\vec{e}_3' \\ L'(\vec{e}_2') &= L_{12}'\vec{e}_1' + L_{22}'\vec{e}_2' + L_{32}'\vec{e}_3' \\ L'(\vec{e}_3') &= L_{13}'\vec{e}_1' + L_{23}'\vec{e}_2' + L_{33}'\vec{e}_3' \end{aligned} \qquad (17')$$

deñlik arkaly we her bir $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i' \vec{e}_i'$

wektor üçin

$$L'(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} x_i' L'(\vec{e}_i') \qquad (23')$$

deñlik arkaly kesgitlesek, onda her bir $\vec{x}$ wektor üçin

$$L'(\vec{x}) = L(\vec{x}) \qquad (24)$$

Hakykatdan hem

$$L_{i,j}' = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{ji} L_{ik}, \qquad x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j', \qquad \vec{e}_k = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \vec{e}_i'$$

(17), (22), (17′) we (23′) deñliklerden peýdalanyp, alarys.

$$L(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{k=1}^{3} L_{ki}\vec{e}_k = \sum_{j=1}^{3} x_j' \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{ji} L_{ki} \right) \vec{e}_i' = \qquad (25)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} x_j' \sum_{l=1}^{3} L_{lj}' \vec{e}_j' = \sum_{j=1}^{3} x_j' L'(\vec{e}_j') = L'(\vec{x}).$$

Şuny hem subut etmek talap edilýärdi.

Biz L' we L operatorlaryň gabat gelýändigini, şunuň bilen bilelikde hem, (17) we (23) deňlikler arkaly kesgitlenýän her bir ikinji rangly *(L_{ij})* affin ortogonal tenzora, L çyzykly operatoryň biratly degişli edilýändigini subut etdik. Bu L çyzykly operatory, oňa degişli bolan *(L_{ij})* tenzor bilen deňgüýçli edip bolýar. Has takygy ikinji görnüşli affin ortogonal tenzora çyzykly operator hökmünde garamak bolar.

5. Tenzorlaryň üstünde algebraik amallar.

1.Tenzorlary goşmak, aýyrmak we köpeltmek.
Şol bir rangly tenzorlary jemlemek we aýyrmak bolýar; mysal üçin, ikinji rangly a_{ij} we b_{ij} tenzorlaryň jemi (tapawudy) diýip koordinatalary $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$, $i,j=1,2,3$.
bolan tenzora aýdylýar. Koordinatalar sistemasy üýtgände c_{ij} ululyklaryň tenzoryň kanuny boýunça üýtgeýändigine göz ýetirmek kyn däldir.
Islendik (deň tertipli) rangly iki tenzoryň jemi ýokardaka meňzeşlikde kesgitlenýär. Islendik rangly tenzorlary köpeldip bolýar. Mysal üçin, ikinji rangly a_{ij} tenzory üçünji rangly b_{nmp} tenzora köpeltsek, onda koordinatalary
$c_{ijnmp}=a_{ij}b_{nmp}$, $i,j,n,m,p=1,2,3$.
bolan bäşinji rangly tenzory alarys. Bir koordinatalar sistamasyndan beýleki koordinatalar sistemasyna geçilende c_{ijnmp} ululyklaryň tenzorlaryň kanuny boýunça üýtgeýändigini görkezmek kyn däldir. Iki dürli rangly tenzorlaryň köpeltmek hasyly ýokardaka meňzeş kesgitlenýar. Tenzoryň sana köpeldilmegine iki tenzoryň köpeltmek hasylynyň hususy haly hökmünde garamak bolar; ol şeýle kesgitlenýär: a_{ijk} tenzoryň c sana köpeldilmegi diýlip koordinatalary $b_{ijk}=ca_{ijk}$ bolan tenzora aýdylýar. b_{ijk} ululyklaryň tenzory emele getirýändigine göz ýetirmek kyn däldir.

6. Tenzoryň wektora köpeldilişi.

Ikinji rangly tenzoryň wektora operator köpeldilişi diýlip atlandyrylýan köpeltmekde durup geçeliň. Tenzoryň wektora operator köpeldilişiniň iki görnüşini tapawutlandyrýarlar. Olaryň biri (L_{ij}) tenzory $\vec{x}$ wektora çepinden , beýlekisi bolsa tenzoryň sagyndan köpeltmek $(L_{ij})\vec{x}$. Iki ýagdaýda hem wektoryň tenzoryň wektora köpeltmek hasyly diýlip käbir wektora düşünilýär.
Goý (L_{ij}) tenzoryň $\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisdäki matrissasy

$$\left\| L_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{matrix} \right\| \qquad (26)$$

we goý bu bazisde $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i$ bolsun. Onda $y^* = \vec{x}(L_{ij})$ wektor köpeltmegiň bu baz

$$\left\| y_1^*, y_2^*, y_3^* \right\| = \left\| x_1, x_2, x_3 \right\| \left\| \begin{matrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{matrix} \right\| \qquad (27)$$

deňleme arkaly kesgitlenýär,

$$\vec{y} = (L_{ij})\vec{x} \quad (28)$$

wektor – köpeltmegiň koordinatalary bu bazisde

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \qquad (29)$$

(27) we (29) gatnaşyklar has kompakt gönüşde

$$\vec{y}^{*} = \vec{x}\|L_{ij}\| \qquad (27')$$

we

$$\vec{y} = \|L_{ij}\|\vec{x} \qquad (29')$$

ýaly ýazylýar. Birinji ýagdaýda $\vec{x}$ we $\vec{y}^{*}$ wektorlar setir – matrissa görnüşinde ikinji ýagdaýda bolsa $\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlar sütün – matrissa görnüşinde alynýar.

7.Tenzorlaryň umumy kesgitlemesi.

1.Wektorlaryň özara bazisi.

Goý $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ýa-da, gysgaça $\vec{e}_i$ (30)

wektorlar bazis emele getirýän bolsun. bu wektorlar gapyrgasy bolar ýaly edilip gurulan parallelepipediň göwrümini

$$V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad (31)$$

bilen belläliň.

$$\vec{e}^{\,1} = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}, \vec{e}^{\,2} = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{V}, \vec{e}^{\,3} = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{V} \qquad (32)$$

bolan $\vec{e}^{\,k}$ wektorlar, $\vec{e}_i$ bazis üçin “özara” diýlip atlandyrylýan bazisi döredýär. Hakykatdan hem, $\vec{e}^{\,k}$

wektorlar gapayrgalary bolar ýaly edilip gurlan parallelepipediň göwrümi

$$V' = \left(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}\right) = \left(\frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}, \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{V}, \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{V}\right) =$$

$$\frac{1}{V^3}\left([\vec{e}_2, \vec{e}_3][[\vec{e}_3, \vec{e}_1], [\vec{e}_1, \vec{e}_2]]\right) = \frac{1}{V^3}\left([\vec{e}_1, \vec{e}_3] \cdot [\vec{e}_1(\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2) - \vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3)]\right) = \quad (33)$$

$$= \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}$$

Şeýlelikde

$$VV' = 1 \quad (34)$$

Şonuň üçin hem

$$\frac{\left[\vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}\right]}{V'} = V \cdot \frac{[[\vec{e}_3, \vec{e}_1], [\vec{e}_1, \vec{e}_2]]}{V^2} = \frac{V^2 \vec{e}_1}{V^2} = \vec{e}_1; \quad (35)$$

edil şuňa meňzeşlikde, alarys.

$$\frac{\left[\vec{e}^{\,3}, \vec{e}^{\,1}\right]}{V'} = \vec{e}^{\,2}, \quad \frac{\left[\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}\right]}{V'} = \vec{e}^{\,3} \quad (36)$$

(35) we (36) deňliklerden

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,k}\right) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{hacanda} \neq \text{k} \\ 1 & \text{hacanda} \quad \text{i} = \text{k} \end{cases}$$

gelip çykýar.

Eger $\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisler ortonormirlenen bolsalar, onda özara bazis olar bilen gabat gelýär.

8. Wektorlaryň kowariant we kontrawariant koordinatalary.

$\vec{x}$ wektoryň özara bazis boýunça dagytmasyna garalyň.

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}^{\,i}=\sum_{i=1}^{3}x^i\vec{e}_i \qquad (37)$$

$\vec{x}$ wektoryň berlen bazisdäki kontrawariant koordinatalary diýlip bu wektoryň berlen bazis boýunça dagytmasynyň koeffisiýentlerine aýdylýar; onda x^i we x_i sanlar $\vec{x}$ wektoryň degişlilikde $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ we $\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}$ bazislerdäki kontrawariant koordinatalary bolýar. $\vec{x}$ wektoryň berlen bazisdäki kowariant koordinatalary diýlip bu wektoryň özara bazis wektoryna skalýar köpeltmek hasylyna aýdylýar. (37) deňligi $\vec{e}_k$ ýa-da $\vec{e}^{\,k}$ wektorlara skalýar köpeldip, (36) deňligi ulanyp, $\vec{x}$ wektoryň $\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}$ we $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ bazislerdäki kowariant koordinatalaryny, degişlilikde

$$\left(\vec{x},\vec{e}_k\right)=\sum_{i=1}^{3}x_i\left(\vec{e}^{\,i},\vec{e}_k\right)=\sum_{i=1}^{3}x_i\delta_k^i=x_k \qquad (38)$$

$$\left(\vec{x},\vec{e}^{\,k}\right)=\sum_{i=1}^{3}x^i\left(\vec{e}_i,\vec{e}^{\,k}\right)=\sum_{i=1}^{3}x^i\delta_i^k=x_k \qquad (39)$$

Şeýlelikde wektoryň berlen bazisdäki kowariant koordinatalary, onuň özara bazisdäki kontrawariant koordinatalary bolup durýar.

3.Tenzor simwollarynda jemleme amaly.

Tenzor hasaplamalarda jemleme amalyny ýazmak üçin aşakdaky düzgün kabul edilen: eger käbir aňlatmada şol bir indeksler gabat gelýän bolsa, olaryň biri ýokarky beýlekisi aşaky bolsa, onda ol berlen indeks boýunça 1-den 3-e çenli jemlenýändigini aňladýar. Mysal üçin (36) we (37) jemler bu düzgüne laýyklykda

$$\vec{x} = x_i \vec{e}^{\,i} \ , \ \vec{x} = x^i \vec{e}_i \qquad (40)$$

görnüşde, $\sum_{i=1}^{3} a_{ik} \vec{x}^{\,i} \vec{x}^{\,k}$ biçyzykly forma

$$a_{ik} \vec{x}^{\,i} \vec{x}^{\,k} \qquad (41)$$

görnüşde ýazylýar we ş.m.

4.Bazis wektorlarynyň özgerdilişi.

$\vec{e}_i$ köne bazisiň $\vec{e}_{i'}$ täze bazise özgerdilmesine garalyň. Jemlemäniň tenzor ýazgysyndan peýdalanyp, alarys.

$$\vec{e}_{i'} = \alpha_{i'}^{i} \vec{e}_i , \quad i' = 1,2,3. \qquad (42)$$

$\alpha_{i'}^{i}$ koeffisiýentler köne $\vec{e}_i$ bazisden täze $\vec{e}_{i'}$ bazise geçmegiň matrissasyny döredýär, ýagny

$$\left\| \alpha_{i'}^{i} \right\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{1'}^{1} & \alpha_{1'}^{2} & \alpha_{1'}^{3} \\ \alpha_{2'}^{1} & \alpha_{2'}^{2} & \alpha_{2'}^{3} \\ \alpha_{3'}^{2} & \alpha_{3'}^{2} & \alpha_{3'}^{3} \end{Vmatrix} \qquad (43)$$

Eger biz ters özgertmä, ýagny täze $\vec{e}_{i'}$ bazisden $\vec{e}_i$ bazise geçmegiň özgertmesine garasak:

$$\vec{e}_{i'} = \alpha_i^{i'} \vec{e}_{i'}, \tag{44}$$

onda $\left\| \alpha^i{}_{i'} \right\|$ matrissanyñ $\left\| \alpha^i{}_{i'} \right\|$ matrissa ters matrissa boljakdygy aýdyñdyr. Hakykatdan hem

$$\vec{e}_k = \alpha^{i'}{}_k \alpha_{i'}{}^i \cdot \vec{e}_{i'} \tag{45}$$

$\vec{e}_{i'} = \alpha^{i'}{}_k \alpha_i{}^i \cdot \vec{e}_i$ añlatmany ornyna goýup

$$\vec{e}_k = \alpha^{i'}{}_k \alpha'_{i'} \cdot \vec{e}_{i'} \tag{46}$$

deñligi ýazyp bileris. $\vec{e}_k$ wektory $\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bozisler boýunça dagytmanyñ ýeketäkliginden peýdalanyp (46) deñlikden alarys.

$$\alpha_k{}^{i'} \alpha_{i'}{}^i = \delta^i{}_k = \begin{cases} 0 & \text{hacanda } i \neq k \\ 1 & \text{hacanda } i = k \end{cases} \tag{47}$$

Bu bolsa $\left\| \alpha^{i'}{}_i \right\|$ we $\left\| \alpha^i{}_{i'} \right\|$ matrisalaryñ özara ters matrisalardygyny añladýar.

5. Wektoryñ kowariant we kontrawariant koordinatalaryny özgeritmek. Öñürti

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{i'} e_{i'} \tag{48}$$

Wektoryñ kontrawariant koordinatalarynyñ nähili özgerdilýändigine garalyñ. $\vec{e}_i = \alpha_i{}^{i'} \vec{e}_i$ wektory (48) ornuna goýsak, onda $\vec{x} = x^i \alpha_i{}^{i'} \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'}$

$\vec{x}$ wektory $\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis boýunça dagytmasynyñ ýeketäkliginden peýdalanyp, taparys

$$\vec{x}^{i'} = \alpha_i{}^{i'} \vec{x}^i \tag{49}$$

Şeýlelikde „täze“ $x^{i'}$ kontrawariant koordinatalar, täze $\vec{e}_{i'}$ bazise tersine geçiş $\left\|\alpha^{i'}{}_{i}\right\|$ matrissasy arkaly „köne“ x^{i} kontrawariant koordinatalar arkaly añladylýar. Şu ýerden hem „kontrawariant koordinatalar“ ady gelip çykýar. (49) meñzeşlikde $\vec{x}^{i} = \alpha_{i'}{}^{i} x^{i'}$ (50) deñligi alarys.

$\vec{x}$ wektoryñ x_i kowariant koordinatalarynyñ nähili özgerdilýändigine garalyñ.

$$x_i = (\vec{x}, \vec{e}_i), \qquad x_{i'} = (\vec{x}, \vec{e}_i), \tag{51}$$

bolýandygy üçin

$$x_{i'} = (\vec{x}, \vec{e}_{i'}) = (\vec{x}\alpha_{i'}{}^{i}, \vec{e}_i) = \alpha_{i'}{}^{\mathrm{i}}, \mathrm{x_i} \tag{52}$$

Şeýlelikde kowariant koordinatalaryñ göni özgertmesi bazis wektorlaryñ göni özgertmesiniñ matrissasy arkaly amala aşyrylýar; şu ýerden hem „kowariant koordinatalar“ ady gelip çykýar. Edil (52) meñzeşlikde

$$x_i = \alpha_i^{i'} x_{i'} \tag{53}$$

deñligi ýazyp bileris.

9. Tenzoryñ umumy kesgitlemesi.

Yenede öñki ýaly, köne $\vec{e}_i$ bazisden täze $\vec{e}_{i'}$ bazise geçiş matrissasyny $\left\|\alpha^{i}{}_{i'}\right\|$ bilen, täze $\vec{e}_{i'}$ bazisden köne $\vec{e}_i$ bazise tersien geçiş matrissasyny $\left\|\alpha^{i'}{}_{i}\right\|$ bilen belläliñ

Kesgitleme: Her bir $\vec{e}_i (i=1,2,3)$ bazisde 3^{p+q} sany $A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ sanlar arkaly kesgitlenýär, bu ýerde i_s, $s=1,2,\ldots p$ we j_t, $t=1,2,..q$ indeksler biri birine bagly bolmazdan *1,2,3* bahalary alýarlar, A sana $p+q$ rangly tenzor diýilýär, eger islendik $\vec{e}_i$ bazisden başga bir islendik $\vec{e}_{i'}$ bazise geçilende bu sanlar

$$A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \alpha^{i_1}_{i'_1} \alpha^{i_2}_{i'_2} .. \alpha^{i_p}_{i'_p} \cdot \alpha^{j'_1}_{j_1} \alpha^{j'_2}_{j_2} .. \alpha^{j'_q}_{j_q} \cdot A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

(54)

Kanun boýunça özgerýän bolsa, onda p- gezegem kontrwariant diýilýär. (54) deñlikde $\left\| \alpha^{i}{}_{i'} \right\|$ matrissa $\bar{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazisden $\bar{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$ bazise geçiş matrissasy $\left\| \alpha^{i'}{}_{i} \right\|$ bolsa oña ters matrissa. $A^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ sanlara *A* tenzoryñ $\vec{e}_i$ bozisdäki koordinatalary. Ỳokardaky $j_1, \ldots j_q$ indekslere tenzoryñ kontrawariant $i_1, .. i_p$ aşakdakylara bolsa kowariant indeksleri diýilýär.

Özbaşdak çözmek üçin ýumuşlar.

1. *A(0,2)* we *B(4,0)* nokatlary birikdirýän göniniň Γ kesimi boýunça $\int\limits_{\Gamma} \frac{dS}{x-y}$ integraly hasaplamaly.

2. Depeleri $A(-1,0), B(1,0), C(0,1)$ nokatlarda ýerleşen üçburçlygyň Γ taraplary boýunça $\int_{\Gamma} xydS$ integraly hasaplamaly.

Çözülişi: AB gönininiň deňlemesi: $y=0$; BC gönininiň deňlemesi: $x+y=1$; AC gtönininiň deňlemesi $y-x=1$ (1-nji surat)

$$\int_{\Gamma} xydS = 0$$

$$\int_{BC} xydS = \int_{CB} xydS = \int_0^1 x(1-x)\sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\int_{CA} xydS = \int_{AC} xydS = \int_{-1}^0 x(1+x)\sqrt{2}dx = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\int_{\Gamma} xydS = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = o + \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} = 0$$

3. Dpeleri $A(0,0), B(4,0), C(4,2)$ nokatlarda ýerleşen gönüburçlygyň Γ taraplary boýunça $\int_{\Gamma} xydS$ integraly hasaplamaly.
4. Haçanda Γ egri, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq o$ ellipsiň bölegi bolanda $\int_{\Gamma} xydS$ intagraly hasaplamaly.
5. Haçanda Γ egri $y = 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$, parabolanyň ýokarky ýarym tekizlikdäki bölegi bolsa $\int_{\Gamma} ydS$ integarly hasaplamaly.

6. Γ egri $x^2 + y^2 = 2ax$ töwerek bolanda $\int_\Gamma (x - y)dS$ integraly hasplamaly.
7. Eger her bir nokadyndaky dykyzlygy bu nokadyň ordinatasyna deň bolsa, $x = a\cos t, y = b\sin t$ ellipsiň birinji çärýekde ýerleşen böleginiň massasyny tapmaly.
8. $x = a\cos t, y = b\sin t, z = bt, (o \le t \le 2\pi)$ wint çyzygynyň birinji aýlawynyň Oz oka görä inersiýa momentini kesgitlemeli.
9. Haçanda Γ egri $x = a\cos t, y = b\sin t$ ellipsiň ýokarky bölegi bolanda sagat peýkamynyň hereketiniň ugry boýunça $\int_\Gamma y^2dx + x^2dy$ ikinji görnüşli egriçyzykly integraly hasaplamaly:

Çözülişi: Γ egriniň boýuna görkezilen ugur boýunça hereket edilende t parametr π-den o-a çenli üýtgeýär. Şonuň üçin hem

$$\int_\Gamma y^2dx + x^2dy = \int_\pi^0 \left[b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b\cos t\right]dt =$$

$$ab\int_0^\pi \left[b\sin^3 t - a\cos^3 t\right]dt = ab\left[-\int_0^\pi b(1-\cos^2 t)d(\cos t) - \int_0^\pi a(1-\sin^2 t)d(\sin t)\right] =$$

$$= \frac{4}{3}ab^2$$

10.Haçanda Γ egri koordinata oklary we x+y=2 göni arkaly emele gelýän üçburçlyk bolsa, položitel ugra görä (sagat peýkamynyň aýlanma ugrunyň garşysyna) $\int_{\Gamma} xdy$ ikinji görnüşli egriçyzykly integraly hasaplamaly.

11. $\int_{\Gamma} y^2dx + x^2dy$ integraly hasaplamaly.

a) Γ egri $y = 4 - x^2$ parabolanyň ýokarky ýarym tekizlikde ýerleşen bölegi bolanda, şunlukda integral sagat peýkamynyň hereketiniň ugruna alynmaly.

b) Γ egri *(-2,0), (0,4), (2,0)* nokatlary birikdirýän döwük çyzyk.

ç) Γ - Ox okuň $[-2,2]$ kesimi $\int_{\Gamma} xdx + ydy$ integraly (0,0) we (1,1) nokatlary birikdirýän aşakdaky ýollar boýunça x-yň artýan ugruna hasaplamaly.

a) Γ egri $y = \sqrt{x}$ parabola

b) Γ egri y=x göni

ç) Γ egri y=x^2 parabola

13. Deňlemeleriň haýsysy doly differensially deňleme:

a) $(2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy = 0$

b) $\frac{dx}{y} - \frac{x}{dy} = 0$

ç) $(2 - y)dx + xdy = 0$

14. Deňlemeleri çözmeli:

a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$

b) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

ç) $yzdx + xzdy + xydz = 0$

15. Γ ýapyk egriniň položitel ugry boýunça alnan egriçyzykly integraly bu egriniň çäkleýän Ω ýaýlay boýunça ikigat integrala özgertmeli.

a) $\int\limits_{\Gamma}(1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$

b) $\int\limits_{\Gamma}(e^{xy}+2x\cos y)dx+(e^{xy}-x^2\sin y)dy$

16. Γ egri $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ellips bolanda, $\int\limits_{\Gamma}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$ integraly hasaplamaly.

17. Γ_1 egri (0,0) we (1,1) nokatlary birikdirýän y=x^2 parabolanyň bölegi, Γ_2 egri bolsa (0,0) we (1,1) nokatlary birikdirýän kesim diýsek, onda

$$I_2=\int\limits_{\Gamma_1}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy,$$

$$I_2=\int\limits_{\Gamma_2}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy,$$ integrallaryň tapawudyny hasaplamaly.

18. Eger Γ egri $x^2+y^2=R^2$ töwerek bolsa, onda polžitel ugur boýunça $\int\limits_{\Gamma}xy^2dy-x^2ydx$ integraly hasaplamaly.

19. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ astroida bilen çäklenen Ω figuranyň meýdanyny hasaplamaly.

20. $\vec{a}=\{2xy,x^2\}$ güýç m massaly nokady süýşürende edilýän işiň diňe ýoluň başlangyç we ahyrky nokadyna baglydygyny görkezmeli. (1,1) nokatdan (2,5) nokada süýşürlende edilýän A işiň ululygyny hasaplamaly.

Eger üst $x = x(u,\vartheta), y = y(u,\vartheta), z = z(u,\vartheta)$ parametrik ýa-da $r(u,\vartheta) = x(u,\vartheta)\vec{i} + y(u,\vartheta)\vec{j} + z(u,\vartheta)\vec{k}$,
$(u,\vartheta) \in \Omega$ wektor görnüşde berlen bolsa hem-de $x(u,\vartheta), y(u,\vartheta), z(u,\vartheta)$ funksiýalar Ω ýapyk ýaýlada üznüksiz hususy önümlere eýe bolsalar, onda bu üstüň S meýdanynyň

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dud\vartheta = \iint_{\Omega} \sqrt{|r_u|^2 \cdot |r_\vartheta|^2 - (r_u \cdot r_\vartheta)^2}\, dud\vartheta \cdot$$ ikigat

integral arkaly aňladylýandygyny görkezmeli. Bu integralda

$$E = |r_u|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}^2\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}^2\right)$$

$$G = |r_\vartheta|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2$$

$$F = (r_u, r_\vartheta) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial \vartheta}$$

<u>Çözülişi:</u>

Hakykatdan-da, $S = \iint_{\Omega} |\vec{r}_u \cdot \vec{r}_\vartheta| dud\vartheta$, ýöne

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}$$

şonuň üçin hem

$$\left|\vec{r}_u \times \vec{r}_\vartheta\right| = \sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,\vartheta)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,\vartheta)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,\vartheta)}\right]^2}$$

Kök belgisiniň aşagyndaky ýakobianlary açyp, kwadrata göterip we zerur algebraik özgertmeleri geçirip subut etmeli formulamyzy alarys. Haçanda $\vec{r}_u$ we $\vec{r}_\vartheta$ wektorlar ortogonal bolanda $\left(\left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_\vartheta\right) = 0\right)$ bu formuladan peýdalanmak has hem amatly.

Bu ýagdaýda

$$S = \iint_\Omega \left|\vec{r}_u\right| \cdot \left|\vec{r}_\vartheta\right| du d\vartheta$$

$$x = u\cos\vartheta, \quad y = u\sin\vartheta, \quad z = 4\vartheta$$

$$0 \le u \le 3, \quad 0 \le \vartheta \le \pi$$

üstüň meýdanyny tapmaly.

Berlen ýagdaýda

$$\vec{r}_u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0), \quad \vec{r}_\vartheta = (-u\sin\vartheta, u\cos\vartheta, 4);$$

$$\left(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_\vartheta\right) = 0, \quad |r_u|^2 = 1, \quad |r_\vartheta|^2 = 16 + u^2$$

Şonuň üçin hem

$$S = \iint_\Omega 1 \cdot \sqrt{16 + u^2}\, du d\vartheta = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^3 \sqrt{16 + u^2}\, du = \pi \int_0^3 \sqrt{16 + u^2}\, du =$$

$$= \pi \left[\frac{u}{2}\sqrt{16 + u^2} + 8\ln\left(u + \sqrt{16 + u^2}\right)\right]\Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{2}(15 + 16\ln 2)$$

21. S – üst $x^2+y^2+z^2=a^2$ sfera bolanda $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)dS$ integraly hasaplamaly.

22. Eger sferanyň üstündäki massanyň dykyzlygy $\sqrt{x^2+y^2}$ bolsa, onda $x^2+y^2+z^2=a^2$ $\left(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right)$ böleginiň massasyny hasaplamaly.

23. Eger S – üst $x=u\cos\vartheta,\ \ y=u\sin\vartheta,\ z=\vartheta$ $\left(0\le u\le a,\ 0\le\vartheta^2\le 2\pi\right)$ gelikoidanyň bölegi bolsa $\iint\limits_S zds$ integraly hasaplamaly.

24. S^* - üst $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidanyň daşky tarapy bolsa $\iint\limits_{S^*} zdxdy$ üst integralyny hasaplamaly.

<u>Çözülişi</u> Üst $z=\pm c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ deňleme arkaly anyk görnüşde berlipdir. Ellipsiň ýokarky bölegi üçin daşky normal bilen *oz* okuň arasyndaky ýiti burçyň kosinusy

$$\cos\left(\vec{n},z\right)=\frac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}}$$

(aşaky bölegi üçin minus alamaty bilen almaly) formula arkaly hasaplanýar. Şonuň üçin hem ellipsoidanyň S_1^* ýokarky bölegi üçin “+” belgini alýarys.

$$\iint\limits_{S^*} z\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

Edil şuňa meňzeşlikde ellipsoidanyň S_2^* aşaky bölegi üçin

$$\iint\limits_{S_2^*} z\,dxdy = -\iint\limits_{\Omega}\left(-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy = \iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

Şeýlelikde

$$\iint\limits_{S^*} z\,dxdy = 2c\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

bu ýerde

$$\Omega = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$$

Soňky integraly hasaplap, alarys

$$\iint\limits_{S^*} z\,dxdy = \frac{4}{3}\pi abc.$$

25. S^*- üst $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$ ýarymsferanyň daşky tarapy bolsa

$$\iint\limits_{S^*} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$$

üst integralyny hasaplamaly.

26. S^* - üst $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=a$ tekizlikler bilen çäklenen tetraedriň doly üstüniň daşky tarapy bolsa,

$$\iint\limits_{S^*} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$$

üst integralyny hasaplamaly.

Ostrogradskiý formulasyndan peýdalanyp üst integrallaryny hasaplamaly:

27. Eger S üst $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ tekizlikler bilen çäklenen piramidanyň daşky tarapy bolsa,

$$\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy$$

integraly hasaplamaly.

28. Eger S - üst $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidanyň daşky tarapy bolsa $\iint\limits_{S} z^2 dxdy$ integraly hasaplamaly.

29. Eger S - üst $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidanyň daşky tarapy bolsa $\iint\limits_{S} z^4 dxdy$ integraly hasaplamaly.

30. Eger Γ- egri sagat peýkamynyň hereketiniň garşysyna ugrukdyrylan $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ töwerek bolsa, onda Stoks formulasyndan peýdalanyp

$$\int_{\Gamma} ydx+zdy+xdz$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

<u>Çözülişi</u> Γ- egriniň ugry $x+y+z=0$ tekizligiň $x^2+y^2+z^2=b^2$ sferanyň içindäki bölegiň ugry sagdan ýokaryk ugrukdyrylan normal bilen gabat gelýär:

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(F(x,y,z)=x+y+z=0,\ F'_x=F'_y=F'_z=1,\ |dradF|=\sqrt{3}\right)$$

Brelen ýagdaýda $\vec{a}$ wektor üçin $P=y,\ a=z,\ R=x$, şonuň üçin

$$\int_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=-\iint_{S}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{S}dS$$

Bu ýerde $S'-$ üst $x+y+z=0$ tekizlikdäki b – radiusly tegelek. Birden alnan S üst boýunça üst integraly bu üstüň meýdanyna deňdir, şonuň üçin hem

$$\int_{\Gamma} ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{S}dS=-\frac{3}{\sqrt{3}}\pi b^2=-\sqrt{3}\pi b^2 .$$

31. Γ - egri $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ töwerek bolsa Stoks formulasyndan peýdalanyp

$$\int_{\Gamma} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

32. Γ - egri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z = 0$ töwerek bolsa Stoks formulasyndan peýdalanyp

$$\int_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + zdz$$

egriçyzykly integraly hasaplamaly.

33. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 6z$ funksiýanyň gradiýentini tapmaly.

34. Giňişlikdäki haýsy nokatlarda

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

meýdanyň gradiýenti a) öz okuna perpendikulýar?

b) nola deň?

35. $\vec{a} = \{x, y, z\}$ wektoryň, başgaça aýdanymyzda (x, y, z) nokadyň radius wektorynyň rotoryny tapmaly.

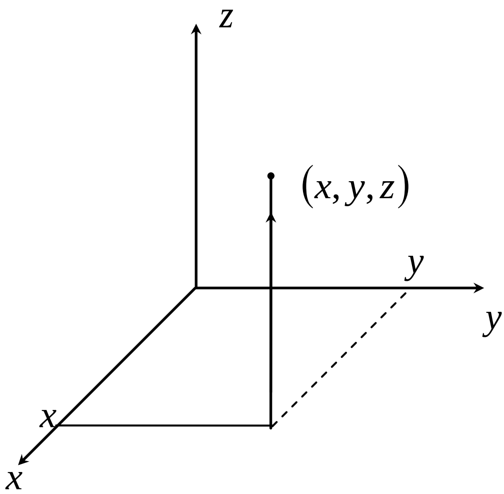
36. $\vec{a} = \{z + y, x, y\}$ wektorynyň rotoryny tapmaly.

37. a) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, b) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $ç$) $\vec{a} = z\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ wektorlaryň tutuş R^3 giňişlikde potensialynyň barlygyny anyklamaly.

38. R^3 giňişlikde $\vec{a} = \{x^2, y^2, z^2\}$ wektor üçin potensial funksiýany tapmaly.

Çözülişi R^3 giňişlikde $\vec{a}$ wektoryň rotory nola deň. Ondan başgada R^3 giňişlik birbagly ýaýlay emele getirýär. Şonuň üçin hem $\vec{a}$ wektoryň potensialy bar we ony

$$U = (x, y, z) = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$



formula arkaly tapalyň Γ - egrini *(0, 0, 0)*, *(x, 0, 0)*, *(x, y, 0)*, *(x, y, z)* nokatlary birikdirýän döwük çyzygy almak bolýar.

Berlen ýagdaýda ikinji görnüşli egriçyzykly integral integrirlemäniň ýoluna bagly däl. Hasaplap taparys

$$U = (x, y, z) = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right).$$

MAZMUNY

2.Wektor meýdanynyň akymy baradaky mesele.

3. Diwergensiýa
4.Sirkulýasiýa. Rotor.
5. Gamilton operatory.

§12. Giňişlikde egriçyzykly koordinatalar.

1. Ortogonal koordinatalarda uzynlyk, meýdan we göwrüm.
2. Ortogonal koordinatalarda gradiýent
3. Ortogonal koordinatalarda diwergensiýa
4. Ortogonal koordinatalarda rotor.
5. Ortogonal koordinatalarda Laplas operatory.
6. Esasy formulalaryň silindrik we sferik koordinatalarda aňladylyşy

§13. Tenzorlar.

1. Affin ortogonal tenzor düşünjesi.
2.Affin ortogonal tenzoryň kesgitlemesi.
3. Çyzykly operator ikinji rangly tenzor hökmünde.
4. Ikinji rangly tenzor çyzykly operator hökmünde.
5. Tenzorlaryň üstünde algebraik amallar.
6. Tenzoryň wektora köpeldilişi.
7.Tenzorlaryň umumy kesgitlemesi.
8. Wektorlaryň kowariant we kontrawariant koordinatalary.
9. Tenzoryñ umumy kesgitlemesi.

Özbaşdak çözmek üçin ýumuşlar.

Edebiỳat

Esasylar

1. Gurbanguly Berdimuhamedow "Türkmenistanyň saglygy goraỳşy ösdürmegiň ylmy esaslary" Aşgabat, 2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyỳewiç Berdimuhamedow. Gysgaça terjimehal. Aşgabat, 2007.
3. "Halkyň ynam bildireni" Aşgabat, 2007.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow, "Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söỳmek bagtdyr". Aşgabat, 2007.
5. "Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň daşary syỳasaty. Wakalaryň hronikasy". Aşgabat, 2007.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow "Türkmenistan- sagdynlygyň we ruhubelentligiň ỳurdy", Aşgabat, 2007.
7. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ỳygyndysy. Aşgabat, 2007.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň ỳurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syỳasaty. Aşgabat, 2007.
9. "Parahatçylyk, döredijilik, progress syỳasatynyň dabaralanmagy". Aşgabat, 2007.
10. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumymilli "Galkynyş" Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiỳasynyň nobatdan daşary V gurultaỳynyň bilelikdäki mejlisindäki sözlän sözi.
11. "Täze Galkynyş eỳỳamy. Wakalaryň senenamasy – 2007 ỳyl" . Aşgabat, 2008
12. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saỳlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008
13. Akbibi Ỷusubowa "Beỳik Galkynyş waspy", Aşgabat, 2008
14. Ильин В.А.,Позняк Э.Г. Основы математического аналза: Учебник: В. ч. II, М.: «Наука» 1980-1982.
15. Смирнов В. И. Курс высшей математики: Учебник: В 4 т. М.: «Наука» 1981. Т. 1-3
16. Будак Б.М. , Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды: М: «Наука» 1967.

17. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ: М. «Наука» 1978.
18. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: М: «Наука» 1990
19. O.Aşyrow Matematiki seljermäniň esaslary. Aşgabat 2006, tom II.

Goşmaçalar

20. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: Учебник. М.: Высш. школа, 1981,том 2.
21. Никольский С. М. Курс математического анализ М. «Наука», 1983, том 2.

Halmyradow Çary Gyzylowiç,
Gurbangulyýew Gurbannazar, Halmyradow Seýdi
Çaryýewiç, Ýazlyýewa Bahar Çaryýewna

WEKTOR WE TENZOR ANALIZINIŇ ESASLARY

Ýokary okuw mekdepleriniň talyplary üçin okuw kitaby