TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Hudaýberenow Ö

Ataýew Y

Analitiki geometriýa.

Çyzykly algebra we proýektiw geometriýanyň elemtleri

Ýokary okuw mekdepler üçin okuw kitaby

Aşgabat 2010

Sözbaşy.

Eliňizdäki kitap öň “Analitik geometriýa we çyzykly algebranyň elementleri” ady bilen 1979-njy ýylda çapdan çykypdy. Onuň ikinji goýberilişde adynyň üýtgemegi proýektiw geometriýanyň elementleri diýen täze bölümiň girizilmegi bilen baglanyşykly. Ol bölümi uniwersitetiň, pedagogik institutyň birinji kurslarynda geometriýa kursunda hem-de tehniki ýokary okuw mekdeplerde çyzgyly geometriýa kursunda proýektiw geometriýanyň elementleri bilen tanyşdyrylýandygy we ol barada türkmen dilinde aýratyn gollanmanyň ýoklugy sebäpli kitaba goşmagy makul bildik.

Täze goýberilişde okyjylar tarapyndan birinji goýberiliş üçin edilen köp bellemeler düzedildi. Biz şol edilen bellemeler üçin okyjylara uly minnetdarlyk bildirýäris.

Gollanma dokuz bapdan ybarat. Birinji bapda san oky, göniburçly koordinatalar sistemasy, polýar koordinatlar sistemasy ýaly kömekçi maglumatlar beýan edilýär. Ikinji bapda kesgitleýjiler we olaryň häsiýetleri, kesgitleýjileriň çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmekde ulanylyşy getirilendir. III-IV-V baplarda wektor algebrasyna we analitik geometriýa degişli temalar bar. VI, VIII baplarda çyzykly giňişliklere, öwürmelere we özgertmelere seredilýär. VII bapda matrisa öwrenilýär. IX bapda proýektiw geometriýanyň esasy düşünjeleri öwrenilýär.

Täze girizilen bölüm esasan birinji kurslaryň talyplary üçin ýazylan bolsa-da onuň sada görnüşde beýan edilmegi kitapçany orta mekdeplerde-de okuwdan daşary işler üçin ulanmaga mümkinçilik berýär.

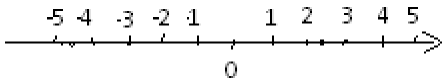
I bap.

UMUMY MAGLUMATLAR.

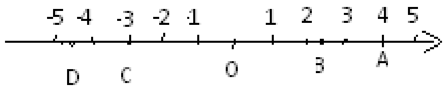
§ 1. San oky

Göni çyzygyň üstünde haýsy hem bolsa *O* nokady we masştab birligini alalyň. Ol göni çyzygyň üstündäki erkin *M* nokadyň ornuny kesgitlemek üçin, *M* nokadyň *O* nokatdan haýsy tarapda ýerleşýändigini we *M* nokadyň *O* nokatdan näçe uzaklykda ýatýandygyny görkezmek ýeterlikdir. Diýmek, göni çyzygyň erkin *M* nokadynyň ornuny kesgitlemek üçin başlangyç *O* nokady, polozitel we otrisatel ugurlary hem-de ölçeg birligini almak gerek.

Başlangyjy, polozitel we otrisatel ugurlary saýlanyp alnan göni çyzyga *ok* diýilýär. Adatça okuň polozitel ugry strelka bilen belgilenýär.



1-nji surat.



2-nji surat

Başlangyjy, polozitel we otrisatel ugurlary, uzynlyk birligi saýlanyp alnan göni çyzyga *san oky* diýilýär. San okuna *koordinata oky hem* diýmek bolar.

Islendik *M* nokadyň san okunyň başlangyjyndan näçe uzaklykdadygyny we ondan haýsy tarapda ýerleşýändigini görkezýan sana şol *nokadyň koordinatasy* diýilýär. *M* nokadyň koordinatasy, biziň görşümiz ýaly, onuň *O* nokatdan haýsy ugurda ýerleşýändigine baglylykda polozitel ýa-da otrisatel san bolup biler. Eger *M* nokat *O* nokatdan polozitel ugurda ýerleşen bolsa, onda *M* nokadyň koordinatasy *M* nokadyň *O* nokatdan uzaklygyna deňdir. Eger-de *M* nokat *O* nokatdan otrisatel ugurda ýerleşen bolsa, onda onuň koordinatasy *M* nokadyň *O* nokatdan uzaklygynyň minus alamaty bilen alynmagyna deňdir.

2-nji suratdaky *A* nokada 2,5; *B* nokada 4; *C* nokada - 3; *D* nokada -4,5; san; başlangyja, ýagny *O* nokada nul degişlidir. San okunda - koordinata okunda her bir nokada diňe bir hakyky san, her bir sana bolsa diňe bir nokat degislidir. Ýazuwda nokadyň koordinatasy köplenç halatda, nokady belgileýän harpyň sag gapdalynda skobkanyň içinde ýazylýar. *A* nokadyň koordinatasy x_1, *B* nokadyň koordinatasy x_2 diýip ýazmagyň ornuna $A(x_1)$, $B(x_2)$ ýazylýar. Okalanda bolsa *A* nokadyň koordinatasy x_1, *B* nokadyň koordinatasy x_2 diýlip okalýar.

Eger biz koordinata okundaky *AB, AC, DA* kesimlere ugrukdyrylan kesimler hökmünde, ýagny başlangyjy we ahyry görkezilen kesimler hökmünde garasak ugrukdyrylan kesimiň ugry onuň başlangyç nokadyndan ahyrky nokadyna tarap gönükdirilendir. Şol kesimleriň koordinata okunyň ugry bilen ugurdaş ýa-da oňa garşylykly ugrukdyrylandygyny *A, B, C, D* nokatlaryň koordinatalary arkaly kesgitläp bileris. Önuň üçin, ugrukdyrylan kesimiň ululygy we uzynlygy diýen iki düşünjäni girizmek amatly bolýar. Ugrukdyrylan kesim *AB* bilen belgilenýär.

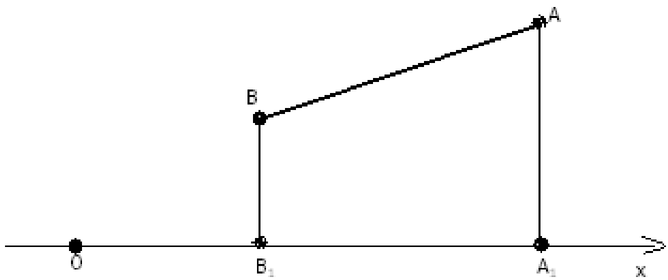
Saýlanyp alnan uzynlyk ölçeg birliginde, kesimi ölçemegiň netijesinde alnan sana *ugrukdyrylan kesimiň uzynlygy* diýlip aýdylýar. Ol hemişe polozitel sandyr.Ugrukdyrylan kesimiň uzynlygy $|\overline{AB}|$ bilen belgileýäris, oňa $\overline{AB}$ -niň moduly hem diýilýär. AB kesimiň ýokarsynda goýlan kese çyzyk ol kesimiň ugrukdyrylan kesimdigini aňladýar.

Eger kesimiň ugry koordinata okunyň ugry bilen ugurdaş bolsa, onda ugrukdyrylan kesimiň ululugy kesimiň uzynlygyna deň, eger-de kesimiň ugry koordinata okunyň ugruna garşylykly bolsa, onda ugrukdyrylan kesimiň ululygy kesimiň uzynlygynyň minus alamaty bilen alynmagyna deňdir. Kesimiň ululygy $\overline{AB}$ belgi bilen belgilenýär. Eger $\overline{AB}$ kesim koordinata oky bilen ugurdaş bolsa, onda $\overline{AB}$ =$|\overline{AB}|$ eger-de koordinata okunyň ugruna garşylykly ugrukdyrylan bolsa, onda $\overline{AB}$ $=-|\overline{AB}|$.

2-nji suratda A(2,5); B(4); C(-3) we D(-4,5). $\overline{AB}$ =1,5; $\overline{AC}$=5,5; $\overline{DC}$= -1,5. $|\overline{AB}|$ =1,5; $|\overline{AC}|$=5,5; $|\overline{DC}|$=1,5.

B e l l i k. Biz islendik kesime ugrukdyrylan kesim hökmünde garajakdyrys. Şoňa görä-de mundan bu ýana kesimi aňladýan harplaryň ýokarsyndaky kese çyzygy taşlap ýazarys.

Koordinata okunyň üsdtünde ýatmaýan A nokatdan OX oka geçirilen AA_1 perpendikulýaryň OX okdaky A_1 esasyna, A nokadyň OX oka bolan ortogonal proeksiýasy diýilýär. Aşakda diňe ortogonal proeksiýa barada gürrüň ederis. OX okdan daşarda ýatýan A nokadyň OX okdaky koordinatasy diýlip, A nokadyň OX okdaky A_1 proeksiýanyň koordinatasyna aýdylýar.



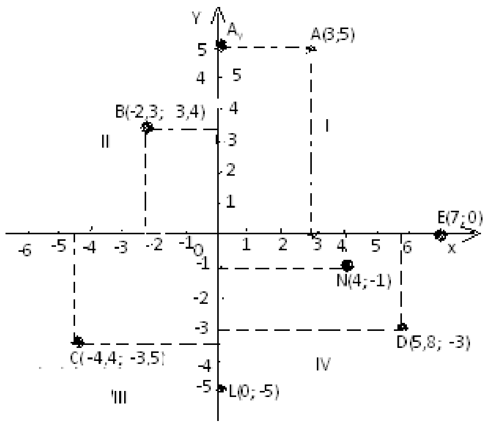
3-nji surat

Okdan daşardaky nokadyň oka bolan proeksiýasy nokadyň ornuny doly kesgitlemeýär. Meselem, *A* nokat *AA_1* perpendikulýaryň islendik ýerinde bolup biler (3-nji sur.). AB kesimiň A we B nokatlarynyň oka bolan A_1 we B_1 proýesiýalarynyň emele getirýän kesimine AB kesimiň oka bolan proýesiýasy diýilýär (3-nji surata seret).

§ 2. Tekizlikde gönüburçly koordinatalar sistemasy

Tekizlikde alnan erkin nokadyň ornuny kesgitlemäge mümkinçilik berýän sistema girizilen bolsa, onda tekizlige koordinata sistemasy girizilipdir diýilýär. Şol sistemalaryň in ýönekeýi bolan gönüburçly koordinatalar sistemasyna garalyň.(Gönüburçly koordinatalar sistemasyna, dekart koordinatalar sistemasy hem diýilýär.) Eger iki koordinata okuny olaryň başlangyçlary gabat geler ýaly edip, biri-birine perpendikulýar goýsak, onda biz *gönüburçly* ýa-da *dekart koordinatalar sistemasyny* alarys.

Adatça oklaryň birini gorizontal beýlekisini wertikal ýerleşdirýärler. Gorizontal oka *abssissalar*, wertikal oka *ordinatalar oky* diýilýär. Bu iki okuň kesişme nokadyna koordinatalaryň başlangyjy diýilýär. Abssissalar okunyň polozitel ugry adatça koordinatalaryň başlangyjyndan sag tarapa, otrisatel ugry bolsa çep tarapa alynýar. Ordinatalar okunyň polozitel ugry koordinatalaryň başlangyjyndan ýokaryk, otrisatel ugry bolsa aşak alynýar. Şeýle koordinatalar sistemasynyň biri 4-nji suratda görkezilendir. Oklaryň polozitel we otrisatel ugurlaryny başga hili hem almak bolar.



4-nji surat.

Erkin A nokadyň tekizlikdäki ornuny, A nokadyň abssissalar we ordinatalar oklaryna bolan proeksiýalary arkaly kesgitlemek bolar. Nokadyň oka bolan proeksiýasynyn kesgitlenişi şu babyň 1-nji paragrafynda görkezilipdi. Goý, A nokadyň absissalar we ordinatalar oklaryna bolan proeksiýalary A_x we A_y bolsun. A nokadyň abssissalar okundaky A_x proeksiýasynyň koordinatasyna onuň absissasy, A nokadyň ordinatalar okundaky Ay proeksiýasynyň koordinatasyna onuň ordinatasy diýilýär. A_x we A_y nokatlaryň koordinatalaryna bilelikde A nokadyň koordinatalary diýilýär.

A nokadyň abssissasy 3, ordinatasy 5 diýip ýazmagyň deregine A(3;5) belgilenilýär, okalanda bolsa A nokadyň koordinatalary 3 we 5 diýlip okalýar. Nokadyň sag tarapyndaky skobkada birinji ornunda nokadyň absissasy, ikinji orunda bolsa ordinatasy ýazylýar. Umuman erkin M nokatdyň absissasy x, ordinatasy y bolsa, ol şeýle ýazylýar M (x; y).

Tekizlikde haýsy-da bolsa bir nokat berlip, onuň koordinatalaryny dekart koordinatalar ulgamyna görä kesgitlemek gerek bolsa, olaryň deregine (hökmünde) sol nokadyň koordinata oklaryna bolan proeksiýalarynyň koordinatalaryny almalydygyny ýokarda gördük. Indi tersine, eger M (x; y) nokadyň x we y koordinataly belli bolsa, sol nokadyň özüni nähili guramalydygyna garalyň. Meselem, goý x=3, y=5 bolsun. Abssissalar okunda koordinatasy 3 deň nokatdan, ordinatalar okunda koordinatasy 5 deň nokatdan koordinata oklaryna perpendikulýar geçirýäris. Şol perpendikulýarlaryň kesişme nokady M (3; 5) nokat bolar.

Tekizlikde islendik nokatdan göni çyzyga (bizde oka) diňe bir perpendikulýar geçirip bolýandygyny,iki göni çyzygyň bolsa diňe bir nokatda kesişýändigini nazara alyp, tekizlikde berlen islendik nokada iki san degişli we her iki sana bir nokat degisli diýen netijä gelýäris.

Absissalar okundaky her bir nokadyň ordinatasy nula deňdir, seýle hem ordinatalar okundaky her bir nokadyň absissasy nula deňdir.

Koordinata oklaryndaky polozitel we otresatel ugurlary erkin saýlap alyp bilýändigimize görä, sag we çep koordinatalar sistemasy diýilýän iki koordinatalar sistemasynyň bardygyny belläliň. Eger absissalar oky başlangyjyň töwereginde sagat diliniň hereketiniň tersine $\frac{\pi}{2}$ burça öwrülende, onuň polozitel ugry ordinata okunyň polozitel ugry bilen gabat gelse, onda oňa *sag koordinatalar sistemasy* diýilýar. Eger absissalar oky başlangyjyň töwereginde sagat diliniň hereketiniň ugruna $\frac{\pi}{2}$ burça öwrülende ordinata okunyň polozitel ugry bilen gabat gelse, onda oňa *çep koordinatalar sistemasy* diýilýär.

§ 3. Tekizlikde dekart koordinatalar sistemasyna degişli ýönekeýje meseleler

Iki nokadyň arasyndaky uzaklygy kesgitlemek

Goý, M_1 $(x_1;\ y_1)$ we M_2 $(x_2;\ x_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaklyk talap edilsin. M_1 we M_2 nokatlary göni çyzygyň kesimi bilen birleşdireliň, M_1 nokatdan *OX* oka, M_2 nokatdan *Oy* oka paralel göni çyzyk geçireliň hem-de olaryň kesişme nokadyny N bilen belgiläp, M_1M_2N göniburçly üçburçlyk alarys (5-nji sur.) Bu üçburçluga Pifagoryň teoremasyny ulanyp alýarys:

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$

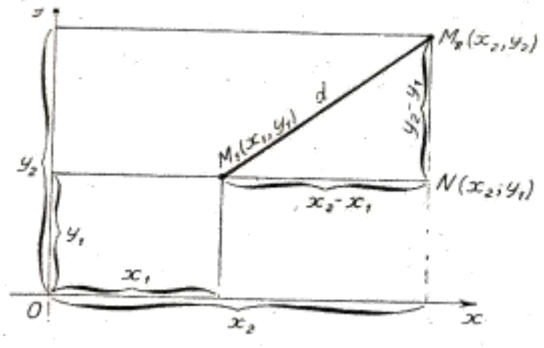
ýa-da

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1-1)$$

1 - n j i   m e s e l e. M_1 (7; 4) we M_2 (3; -5) nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Ç ö z ü l i s i. (1-1) laýyklykda

$$|M_1M_2| = \sqrt{(3-7)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{73}$$



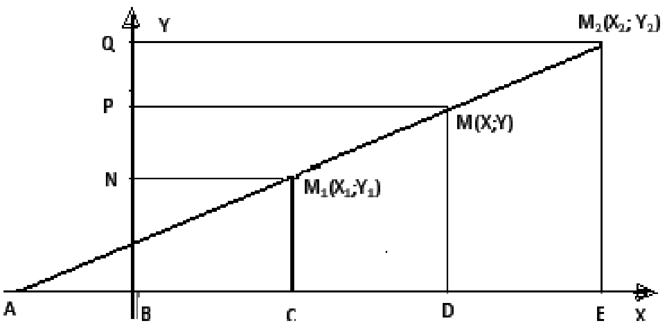
5-nji surat

2. Kesimi berlen gatnasykda bölmek.

M_1 (x_1; y_1) we M_1 (x_2; y_2) nokatlary birlesdirýän kesimiň üstünde ýatýan we $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ deňligi kanagatlandyrýan M (x ; y) nokady tapmaly (λ>0).

Bu meselä berlen M_1M_2 kesimi berlen λ gatnaşykda bölmek meselesi diýilýär.

Goý, M (x ; y) gözlenilýän nokat bolsun. M_1, M we M_2 nokatlardan koordinatalar oklaryna parallel göni çyzyklar geçireliň.



(6-nji surat.)

Suratdan görnüşi ýaly M_2AE burçuň taraplaryny parallel M_1C, MD, M_2E göni çyzyklar kesýär. Olar burçuň taraplaryny proporsional kesimlere bölýärler, ýagny;

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{CD}{DE}$$

Meseläniň sertine görä $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$ suratdan bolsa $CD = x\text{-}x_1$, $DE = x_2\text{-}x$ alýarys. Diýmek,

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \qquad (1\text{-}2)$$

Şonuň ýaly hem M_1M, MM_2, NP, PQ kesimleriň proporsional kesimdiklerini ulanyp tapyarys.

$$\lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \qquad (1\text{-}3)$$

(1-2 we(1-3) deňliklerden M nokadyň x we y koordinatalaryny tapalyň;

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad (1\text{-}4)$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \qquad (1\text{-}5)$$

Eger $\lambda < 0$ bolsa, onda M (x ; y) nokat M_1M_2 kesimiň dowamynda (M_1 nokatdan çepde ýa-da M_2 nokatdan sagda) ýatýar. Bu halda hem (1-2)-(1-5) formulalar dogry bolar.

2 - n j i m e s e l e. Berlen $\lambda > 0$ bolanda M nokadyň M_1M_2 kesimiň üstünde ýatýandygyny, $\lambda < 0$ bolanda bolsa, M_1M_2 kesimiň dowamynyň üstünde ýatýandygyny subut ediň.

Ç ö z ü l i s i. Meseläni çözmek üçin $\lambda > 0$ bolanda $x\text{-}x_1$ we $x\text{-}x_2$ tapawutlaryň garşylykly alamatynyň, $\lambda < 0$ bolanda bolsa olaryň bir meňzeş alamatlarynyň bardygyny subut etmek eterlikdir. Hakykatdan-da, (1-4) deňligiň iki böleginden hem x_1-i we x_2-ni aýryp alarys;

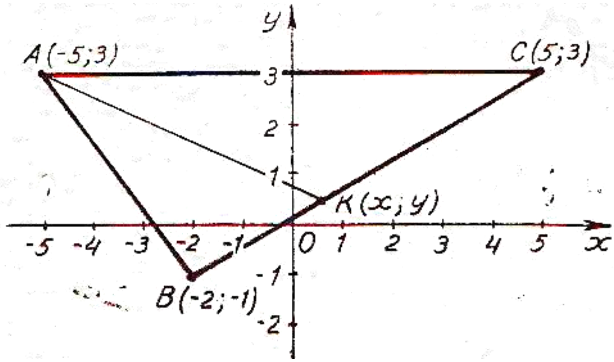
$$x - x_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}\left(x_2 - x_1\right); \qquad x - x_2 = \frac{-1}{1 + \lambda}\left(x_2 - x_1\right)$$

ýa-da

$$(x - x_1)(x - x_2) = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}(x_2 - x_1)^2;$$

Bu deňlikden ýokarda aýdylan tassyklama gelip çykýar.

3 - n j i m e s e l e. (Kesimi *n* deň bölege bölmek meselesi.) M_1(7;5) we M_2 (-2;3)nokatlary birleşdirýän kesimiň üstünde M_1 nokada, M_2 nokatdan 3 esse golaý bolan nokady tapmaly.



7-nji surat

Ç ö z ü l i s i; Meseläniň sertine görä $\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{1}{3}$, ýagny $\lambda = \frac{1}{3}$.

(1-4) we (1-5) formulalardan tapýarys;

$$x = \frac{x_1 + \lambda x}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{3}(-2)}{1 + \frac{1}{3}} = 4{,}25.$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{5 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = 4{,}5.$$

ýagny M (4,25; 4,5).

4-nji m e s e l e. Depeleri A (-5; 3), B (-2; -1), C (5; 3) nokatlarda bolan üçbuçlugyň A depesiniň içki burçunyň bessektrisasynyň uzynlygyny tapmaly.

Ç ö z ü l i s i. Goý, A burçuň bissektrisasy AK bolsun. (7-nji sur.) Belli bolşy ýaly K nokat BC kesimi

$\frac{BK}{KC} = \frac{|AB|}{|AC|} = \lambda$ bolan gatnaşykda bölýär. AB we BC kesimleriň uzynlyklaryny kesgitläliň ((1-1) formula görä);

$$|AB| = \sqrt{(-2+5)^2 + (-1-3)^2} = 5;$$

$$|AC| = \sqrt{(5+5)^2 + (3-3)^2} = 10.$$

(1-4) we (1-5) formulalardan peýdalanyp, K nokadyň koordinatalaryny kesgitläliň;

$$x = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

$$y = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3};$$

Indi (1-1) formuladan peýdalanyp, AK kesimiň uzynlygyny kesgitläris;

$$|AK| = \sqrt{\left(-5-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{16^2+8^2} = \frac{8}{3}\sqrt{5}.$$

5-n j i m e s e l e. Massalary degişlilikde $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ bolan $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ ..., $M_n(x_n; y_n)$ nokatlaryň agyrlyk merkezini tapmaly.

Çözülişi: Ilki M_1 we M_2 material nokatlaryň agyrlyk merkezini tapalyň. Goý $C_1(x_1'; y_1')$ nokat M_1 we M_2 material nokatlaryň agyrlyk merkezi bolsun. Iki material nokadyň agyrlyk merkeziniň bu nokatlary birleşdirýän kesimi massalaryna ters proporsional böleklere bölýän nokatdygy bize fizika kursundan belli, ýagny $\frac{MC_1}{C_1M_2}=\frac{m_2}{m_1}=\lambda,$ (1-4) we (1- 5) formula boýunça ýazýarys.

$$x_1^{/}=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+x_2y_2}{m_1+m_2};\qquad y_1^{/}=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

Indi M_1, M_2 we M_3 nokatlaryň agyrlyk merkezini tapalyň. Goý, bu üç nokadyň agyrlyk merkezi C_2 ($x_2^{/}$; $y_2^{/}$) bolsun. M_1 we M_2 nokatlaryň ornuna massasy bu nokatlaryň massalarynyň jemine deň bolan agyrlyk merkezi C_1 ($x_1^{/}$; $y_1^{/}$) alynsa, sonda-da M_1, M_2, M_3 nokatlaryň agyrlyk merkeziniň ornunyň üýtgemeýänligi fizika kursundan bellidir. Diýmek, massasy degişlilikde m_1+m_2 we m_3 bolan C_1 ($x_1^{/}$; $y_1^{/}$) we M_3 (x_3 ; y_3) iki material nokadyň agyrlyk merkezini tapmaly. Öňkä meňzeş edip alýarys;

$$\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2};$$

$$x_2^{/}=\frac{x_1^{/}+\frac{m_2}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_2}{m_1+m_2}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3};$$

$$y_2^{/}=\frac{y_1^{/}+\frac{m_2}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_2}{m_1+m_2}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3};$$

Indi matematiki induksiýa metodyndan peýdalanyp M_1, ..., M_n material nokatlaryň C_n ($x_n^{/}$; $y_n^{/}$) agyrlyk merkezi üçin

$$x_n^{/}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+....m_nx_n}{m_1+m_2+m_3+...+m_n};$$

$$y_n^{/}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+....m_ny_n}{m_1+m_2+m_3+...+m_n};$$

formulalary almak kyn däldir.

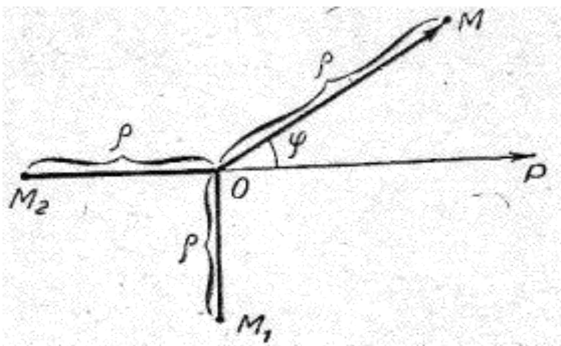
Islendik $a_1+a_2+a_3+ \ ... \ +a_n$ jem gysgaça $\sum_{i=1}^{n} a_1$ simwol bilen bellenilýär. (∑- jemiň belgisi, i - jemleýji indeks.) Bu belgileri ulanyp, agyrlyk merkezi üçin ýokarda ýazan formulalarymyzy aşakdaky ýaly gysgaça ýazmak bolar;

$$x_n{}' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \qquad y_n{}' = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

§ 4. Tekizlikde polýar koordinatalar sistemasy

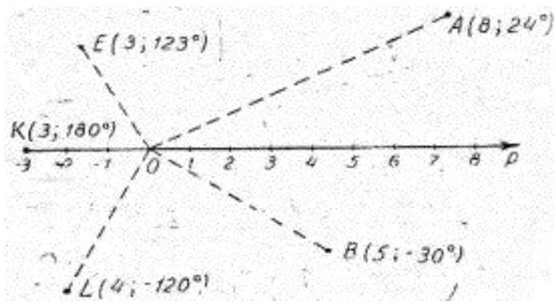
Tekizlikde berlen erkin *M* nokadyň ornuny dekart koordinatalar sistemasyndan başga koordinatalar sistemalary belen hem kesgitläp bolýar. Şol hili koordinatalar sistemalaryndan biri-de polýar koordinatalar sistemasydyr.

Tekizlikde haýsy bolsa-da bir *O* nokat we şol nokatdan çykýan *OP* şöhle berilsin. Erkin *M* nokat alalyň we *OM* uzaklygy ρ bilen, *OM* we *OP* kesimleriň arasyndaky burçy φ bilen belläliň. (8-nji sur.) ρ, φ sanlar *M* nokadyň tekizlikdäki ornuny kesgitleýär.

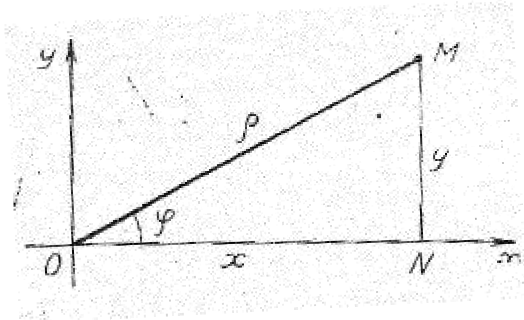


8-nji surat

Bu hili koordinatalar sistemasyna *polýar koordinatalar* sistemasy diýilýär. *O* nokada *polýus*, *OP* şöhlä *polýar oky*, *OM*= ρ uzaklyga *polýar radiusy*, polýar radiusyň polýar oky bilen emele getirýän φ burçuna *polýar burçy* diýilýär. (8-nji sur.)
ρ uzaklyk bolany üçin hemişe polozitel ululykdyr. Polýar okuň polýusyň töwereginde sagat diliniň hereketiniň tersine ýa-da ugruna öwrülmegine baglylykda φ burç polozitel ýa-da otrisatel bolup biler.
Ýazuwda *M* nokadyň koordinatalaryny *M* nokadyň sag tarapynda skobkanyň içinde, birinji orunda polýar radiusyny, ikinji orunda polýar burçuny goýýarlar, ýagny *M* $(\rho;\ \varphi)$ (9-nji suratda sonuň ýaly nokatlar görkezilendir). $(\rho;\ \varphi)$ sanlara *M* nokadyň polýar koordinatalary diýilýär.



9-njy surat
Berlen dekart koordinatalar sistamasynyň *OX* okuny polýar koordinatalar sistamasynyň polýar okunyň üstünde, başlangyjyny polýusda ýerleşdirsek, *M* nokadyň dekart we polýar koordinatalary arasyndaky baglanyşygy tapyp bileris. *M* nokadyň dekart sistamasyndaky koordinatalary x we y, polýar sistamasyndaky koordinatalary ρ we φ bolsun (10-njy sur.). Gönüburçly Δ *OMN*-den alýarys.



10-njy surat

$$ON = OM\cos\varphi; \quad MN = OM\sin\varphi$$

ýa-da *ON*=x; *MN*=y we *OM*= ρ bilen çalsyryp alarys;

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1\text{- }6)$$

Bu sistemadan ρ we φ aňsatlyk bilen tapylýär;

$$\rho^2 = x^2 + y^2; \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}; \qquad (1\text{- }7)$$

(1- 6) we (1- 7) deňlikler gözlenilýän baglanyşygy berýär.

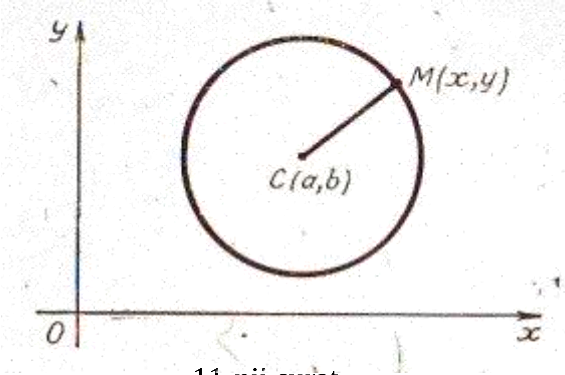
§ 5. Çyzygyň deňlemesi

Tekizlikde berlen *l* çyzygyň saýlanyp alnan koordinatalar sistemasyndaky deňlemesi diýlip, *l* çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalarynyň kanagatlandyrýan, emma *l* çyzyga degişli bolmadyk nokatlaryň hiç biriniň koordinatalarynyň kanagatlandyrmaýan deňlemesine aýdylýar.

Eger *l* çyzygyň erkin *M* nokadynyň dekart sistemasyndaky koordinatalary (*x*; *y*) bolsa, onda *l* çyzygyň deňlemesi *F*(*x*; *y*)=0 görnüşde, eger-de *M* nokadyň polýar sistemasyndaky koordinatalary (ρ ; φ) bolsa, onda *l* çyzygyň deňlemesi $\Phi(\rho ; \varphi)=0$ görnüşde ýazylyp bilner.

K ä b i r m e s e l e l e r e g a r a l y ň.

6-n j y m e s e l e. Merkezi $C(a;\, b)$ nokatda bolan R radiusly töweregiň deňlemesini tapmaly.



11-nji surat

Ç ö z ü l i s i. Goý, $M(x;\, y)$ nokat deňlemesi gözlenilýän töweregiň erkin nokady bolsun (11-nji sur.),

$$R = |CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2};$$

Bu ýerden

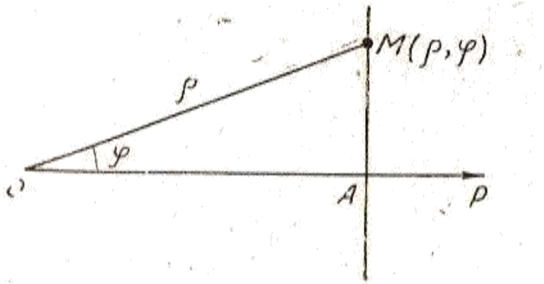
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (1\text{- }8)$$

(1- 8) gözlenilýän deňlemedir.

Eger töweregiň merkezi OX okuň üstünde ýatsa b=0 bolar, OY okuň üstünde ýatsa a=0 bolar, ahyrda koordinatalar başlangyjynda ýatsa a=0 we b=0 bolar, (1- 8) formula bolsa degişlilikde aşakdaky görnüşleri alar.

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2; \qquad x^2 + y^2 = R^2; \qquad x^2 + (y-b)^2 = R^2;$$

7-n j i m e s e l e. Polýusdan a uzaklykda polýar okuna perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini tapmaly.



12-nji surat

Ç ö z ü l i s i. Goý, $M\ (\rho\,;\varphi)$ deňlemesi gözlenilýän göni çyzygyň erkin nokady bolsun. (12-nji sur.), onda gönibürçly $\Delta\, OAM$ üçburçlykdan

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \quad \text{ýa-da} \quad \rho - \frac{a}{\cos\varphi} = 0.$$

gözlenilýän deňlemäni tapýarys.

§ 6. Çyzygyň parametrik deňlemesi

Belli bir koordinatalar sistemasynda berlen çyzygyň islendik nokadynyň koordinatalary başga bir üçünji ululyk arkaly aňladylsa, onda çyzygyň deňlemesi parametrik görnüşde aňladylypdyr, üçünji ululyga bolsa parametr diýilýär.

Çyzygyň parametrik deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \qquad (1\text{- }9)$$

t - parametr.

Polýar koordinata sistemasynda bolsa

$$\begin{cases} \rho = \lambda(t), \\ \varphi = \mu(t). \end{cases} \qquad (1\text{- }10)$$

görnüşde ýazylýar.

(1-9) we (1- 10) sistema üç näbellili iki deňleme sistemasydyr. Bu sistemalardaky deňlemeleriň birinden t-ni tapyp ikinjisine goýsak, onda çyzygyň deňlemesini degişlilikde dekart we polýar koordinatalar ulgamynda alarys.Aýdylanlara oňat düşünmek üçin meselelere garalyň.

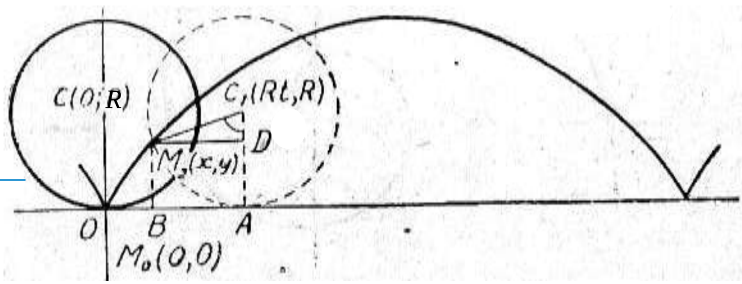
8-n j i m e s e l e. Göni çyzygyň üstünde typman tigirlenýän R radiusly töweregiň fiksirlenen nokadynyň traektoriýasynyň deňlemesini tapmaly.

Ç ö z ü l i s i. Töweregiň tigirlenýän göni çyzygy OX ok bilen, onuň fiksirlenen M nokady koordinatalar başlangyjy bilen gabat gelýär dieliň (13-nji sur.).

Goý, töwerek käbir uzaklyga tigirlenipdir we onuň $C(O;\ R)$ merkezi C_1 ýagdaýy alypdyr dieliň. Onda $M\ (O;O)$ nokat hem täze $M_2\,(x;y)$ ýagdaýy alar.Şonda R radius käbir t burça öwrüler ($\angle M_2C_1D=t$). 13-nji suratdan alýarys;

$OA=\smile AM_2=Rt;\ \ M_2D=R\sin t;\ \ DC_1=R\cos t;$

$x=OB=OA-BA=Rt-R\sin t;$



13-nji surat

$$y=BM_2=AC_1-DC_1=R-R\cos t;$$

ýa-da

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases} \qquad (1\text{- }1)$$

Alnan deňleme töweregiň fiksirlenen nokadynyň traektoriýasynyň parametrik deňlemesidir. Töwerek tigirlenende sol nokadyň çyzýan traektoriýasyna *sikloida* diýilýär.

(1 -11) sistemanyň ikinji deňlemesinden t-ni tapyp, birinjisinde ornuna goýup

$$x = R\arccos\frac{R-y}{R} - R\sin\left(\arccos\frac{R-y}{R}\right)$$

sikloidanyň deňlemesini dekart koordinatalar sistemasynda alýaris.

9-n j i m e s e l e. Radiusyň ugry boýunça hemişelik v tizlik bilen polýusdan daşlaşýan, şol bir wagtyň özünde hem hemişelik ω burç tizligi bilen polýusyň daşynda aýlanýan nokadyň traektoriýasynyň deňlemesini getirip çykarmaly.

Ç ö z ü l i s i. Meseläniň şertine görä, islendik t wagt geçenden soň, nokadyň polýusdan uzaklygy

$$\rho = vt.$$

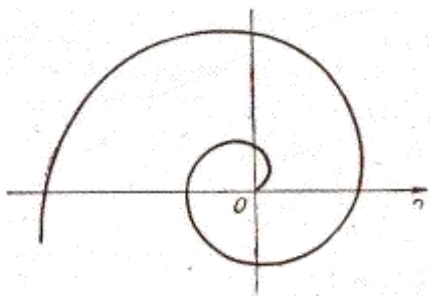
bolar.

Nokadyň polýusyň daşynda aýlanyp emele getiren burçy (polýar burçy)

$$\varphi = \omega t.$$

bolar. Diýmek, nokadyň traektoriýasynyň polýar koordinatalar sistemasyndaky parametrik deňlemesi

$$\begin{cases} \rho = vt, \\ \varphi = \omega t. \end{cases} \qquad (1\text{- }12)$$



14-nji surat

Bu sistemanyň ikinji deňlemesinden t-ni tapyp, birinjisinde ornuna goýsak, nokadyň traektoriýasynyň deňlemesini polýar koordinatalar sistemasynda. $\rho = \frac{v}{\omega}\varphi$ ýa-da $\frac{v}{\omega} = a$ belgiläp alarys; $\rho = a\varphi$, Muňa A r h i m e d i ň s p i r a l y diýilýär.

I I bap.
KESGITLEÝJILER WE ÇYZYKLY DEŇLEMELER SISTEMASY

§ 1. Kesgitleýjiler barada düşünje

Biz çyzykly deňlemeler sistemasyna seredip, kesgitleýjiler barada ilkinji düsünjäni alýarys. Goý, bize asakdaky çyzykly deňlemeler sistemasy berlen bolsun.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{2- 1}$$

x_1 tapmak üçin (2- 1) sistemanyň birinji deňlemesini a_{22}, ikinji deňlemesini bolsa a_{12} köpeldeliň, soňra biri-birinden aýralyň;

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

bu ýerden

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}}. \tag{2- 2}$$

x_2 tapmak üçin (2- 1) sistemanyň birinji deňlemesini a_{21}, ikinji deňlemesini a_{11} köpeldeliň, soňra biri-birinden aýralyň;

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

bu ýerden

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{2- 3}$$

x_1 we x_2 üçin aňlatmalaryň ikisiniň hem maýdalawjysynyň berlen deňlemeleriň näbellileriniň koeffisientlerinden düzülen anlatmalardygyny, sanawjylarynyň bolsa maýdalawjydan x_1-iň we x_2-iň koeffisientlerini degişlilikde b_1 we b_2 azat çlenler bilen çalşyrylyp alynandygyny görýäris.

(2-1) sistemanyň koeffisientleriniň ýerleşiş tertibini üýtgetmezden tablisa düzeliň;

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2\text{- }4)$$

Kwadrat görnüşde ýerleşdirilen dört sandan ybarat bolan (2- 4) tablisa degişli $a_{11}a_{22}$-$a_{21}a_{12}$ tapawuda ikinji tertipli kesgitleýji diýilýär we şeýle bilgilenýär;

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (2\text{- }5)$$

Görşümiz ýaly, bu kesgitleýji iki setirden we iki sütünden ybarat. a_{ik} (i, k =1;2) sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. a_{ik} element i-nji setiriň we k-nji sütüniň kesişýän ýerinde ýerleşýär.

(2-5) kesgitleýjidäki a_{11}, a_{22} elementleriň emele getirýän diagonalyna esasy diagonal, a_{21}, a_{22} elemetleriniň emele getirýän diagonalyna bolsa kömekçi diogonal diýilýär. Ikinji tertipli kesgitleýji onuň esasy diagonallaryndaky elementleriň köpeltmek hasynyndan kömekçi diadonalyndaky elemetleriň köpeltmek hasylynyň aýrylmagyna deňdir.

1-n j i m y s a l. Aşakdaky kesgitleýjileri hasaplamaly;

$a)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; $b)\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$; $w)\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & \cos\alpha \\ 6\cos\beta & -3\sin\beta \end{vmatrix}$.

Ç ö z ü l ü ş i.

$$a)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2-(-3)\cdot 7 = 31;$$

$$b)\begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 9(-7)-1(-2) = -61;$$

$$w)\begin{vmatrix} 2\sin\alpha & \cos\alpha \\ 6\cos\beta & -3\sin\beta \end{vmatrix} = 2\sin\alpha\,(-3\sin\beta)-6\cos\beta\cos\alpha=-6\cos(\alpha-\beta).$$

Dokuz elementden kwadrat tablisa düzeliň;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad (2\text{- }6)$$

Kwadrat görnüşinde ýerleşdirilen dokuz elementden ybarat bolan (2- 6) tablisa degişli

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

sana *üçünji tertipli kesgitleýji* diýilýär we şeýle belgilenýär.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2\text{- }7)$$

a_{ik} (i, k=1, 2, 3) sanlara kesgitleýjiniň elementleri diýilýär. Bu ýerde hem i, k -indeksler degişlilikde a_{ik} elementiň haýsy setirde we haýsy sütünde ýerleşýändigini görkezýär. Üçünji tertipli kesgitleýjiniň üç setiri we üç sütüni bolýar. Kesgitleýjileri hasaplamagyň usullaryndan iki sanysyny görkezeliň.

1-n j i u s u l. (2- 7) kesgitleýjiniň birinji we ikinji sütünini sag tarapdan täzeden ýazmak bilen aşakdaky tablisany düzýäris;

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$

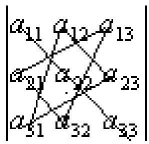
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (\ 2\text{-}3)$$

$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

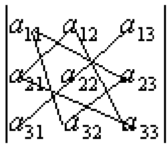
Üstünden tutuş çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny öz alamatlary bilen, punktir çyzyk geçirilen elementleriň köpeltmek hasyllaryny bolsa garşylykly alamatlary bilen almak arkaly üçünji tertipli kesgitleýjini tapýarys.

2-n j i u s u l. Üçünji tertipli kesgitleýjini aşakdaky shema boýunça hem hasaplaýarlar;

a) goşmak alamatlylar;



aýyrmak alamatlylar



Kesgitleýjiniň bahasynyň her bir goşulyjysynda kesgitleýjidäki islendik setirden we islendik sütünden bir elementiň bardygyny görýäris.

2-n j i m y s a l. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly;

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ç ö z ü l i s i;

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 6 + 7\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 3 - 7\cdot 1\cdot 6 - 4\cdot 1\cdot 5 = 67.$$

Görşümiz ýaly 2-nji we 3-nji tertipli kesgitleýjiler degişlilikde 2^2 we 3^2 elementlerden düzülýärler.

4, 5, ..., tertipli kesgitleýjiler hem degişlilikde 4^2, 5^2, ..., elementlerden düzülen san bolup, ýokardaka meňzeş belgilenýär. Meselem;

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}.......a_{18} \\ .... \\ .... \\ a_{81}a_{82}......a_{88} \end{vmatrix} \quad \text{we} \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}.......a_{1n} \\ .... \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}......a_{nn} \end{vmatrix}$$

degişlilikde 8-nji we *n*-nji tertipli kesgitleýjiler bolarlar. Üçden ýokary tertipli kesgitleýjileriň hasaplanylyşyna 3-nji paragrafda gararys.

§ 2. Kesgitleýjileriň esasy häsiýetleri

Kesgitleýjileriň birnäçe täsin häsiýetleri bolup, olary ýerlikli ulanmaklyk kesgitleýjileri hasaplamagy ýeňilleşdirýär. Biz şol häsiýetleriň esasylaryny 3-nji tertipli kesgitleýjilerde düşundirmek bilen çäklenjekdiris. Kesgitleyjileriň esasy häsiýetlerine geçmezden ozal gerek boljak bir kesgitlemäni girizeliň.

K e s g i t l e m e. **Berlen kesgitleýjini esasy diagonalyň töwereginde 180° öwrüp täze kesgitleýji, ýagny berlen kesgitleýjiniň 1-nji, 2-nji, ..., n-nji setirleri degişlilikde 1-nji, 2-nji, ..., n-nji sütünleri bolan kesgitleýji alynsa, onda ol kesgitleýjä transponnirlenen kesgitleýji diýilýär.**

Berlen kesgitleýjiden transponirlenen kesgitleýjini almak operasiýasyna *transponirlemek* diýilýär.

Kesgitleýjileriň esasy häsietleri;

1.Kesgitleýjini transponirlemek kesgitleýjiniň ululygyny üýtgetmeýär;

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{21}a_{31} \\ a_{21}a_{22}a_{32} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2\text{- }8)$$

2.Eger kesgitleýjiniň iki setiriniň ýa-da sütüniniň ýerini çalşyrsak, onda onuň ululygynyň diňe alamaty üýtgeýär.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} a_{32} a_{33} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{11} a_{12} a_{13} \end{vmatrix}. \qquad (2\text{- }9)$$

3.Özara deň iki setiri ýa-da sütüni bolan kesgitleýji nula deň. Meselem; $a_{i1} = a_{i2} = b_i$ (i=1; 2; 3) bolsa, onda ol nula deň, ýagny

$$\begin{vmatrix} b_1 b_1 a_{13} \\ b_2 b_2 a_{23} \\ b_3 b_3 a_{33} \end{vmatrix} = 0; \qquad (2\text{- }10)$$

4.Kesgitleýjileriň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da bir sütüniniň ähli elementleriniň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda ony kesgitleýji alamatynyň daşyna çykarmak bolar;

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ ka_{21} ka_{22} ka_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2\text{- }11)$$

5.Tutuş bir setiri ýa-da bir sütüni nuldan ybarat bolan kesgitleýji nula deňdir;

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2\text{-}12)$$

6.Iki setiriniň ýa-da iki sütüniniň elementleri proporsional bolan kesgitleýji nula deňdir. Meselem; $a_{i1} = b_i$; $a_{i2} = kb_i$ bolsa, onda ol nula deňdir, ýagny

$$\begin{vmatrix} b_1 kb_1 a_{13} \\ b_2 kb_2 a_{23} \\ b_3 kb_3 a_{33} \end{vmatrix} = 0; \qquad (2\text{- }13)$$

7. Kesgitleýjileriň m-nji setiriniň ýa-da sütüniniň her bir elementi iki goşulyjynyň jeminden ybarat bolsa, onda ol

şol tertipdäki iki kesgitleýjiniň jemine deňdir; olaryň birinjisiniň m-nji setiriniň ýa-da sütünininiň elementleri şol goşulyjylaryň birinjisinden ybarat, ikinjisiniň m-nji setiriň ýa-da sütünininiň elementleri şol goşulyjylaryň ikinjisinden ybaratdyr, galan setirleriň elementleri üç kesgitleýjide hem bir meňzeşdir;

$$\begin{vmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad \textbf{(2- 14)}$$

8. Kesgitleýjileriň setiriniň ýa-da sütünininiň her bir elementiniň üstüne beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementlerini käbir k sana köpeldip goşsak, onda kesgitleýjiniň ululygy üýtgemez;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu häsiýetleriň dogrulylygyna göz ýetirmek üçin (2-8)-(2-15) kesgitleýjileri hasaplap görmek ýeterlikdir.

3.**Kesgitleýjini setiriň we sütüniň elementleri boýunça dagytmak**

Bu mowzugy düşündirmek hem-de netijeleri gysgaça formulirlemek üçin algebraik doldurgyç diýen düşünjäni girizeliň. Belli bolşy ýaly

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{23}a_{12}a_{31} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{23}. \end{matrix}$$

Bu deňligiň sag böleginden haýsy-da bolsa bir elementi, meselem a_{13} elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$ tapawudy alarys, a_{12} elementi ýaýyň daşyna çykarsak, onda ýaýyň içinde $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ tapawudy alarys.Ýokardaky formulanyň sag böleginden islendik elementi ýaýyň daşyna çykarsak, ýaýyň içinde iki çlen galýar.Ýaýyň içinde galýan bu tapawuda (kesgitleýjä) ýaýyň daşyna çykarylan elementiň *algebraik doldurgyjy* diýilýär. Meselem, a_{12} elementiň algebraik doldurgyjy $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ bolýar, a_{13} elementiň algebraik doldurgyjy $a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$ bolýar we ş.m.

a_{ik} elementiň algebraik doldurgyjyny A_{ik} bilen belgiläliň, onda a_{13} elementiň algebraik doldurgyjy A_{13}, a_{22} elementiň algebraik doldutgyjy A_{22} bolýar. (2-7) formula haýsy-da bolsa bir setiriň elementlerini, meselem, ikinji setriň elementlerini ýaýyň daşyna çykaryp alarys :

$$\Delta = a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11}).$$

Indi ýokardaky deňlik algebraik doldurgyçlar arkaly ýazalyň

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

Umuman, islendik setiriň elementleri üçin aşakdaky formulany ýazyp bileris:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$$

Islendik sütüniň elementleri üçin bolsa aşakdaky formulany ýazyp bileris:

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k}$$

n tertipli kesgitleýji üçin hem aşakdaky formulalar dogrudyr:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

ýa-da

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$$

N e t i j e. Kesgitleýjiniň ululygy onuň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini olaryň algebrarik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jemine deňdir.

(2-18) we (2-19) formulalara setiriň we sütüniň elementleri boýunça kesgitleýjiniň dagydylmasy diýilýär.

Indi islendik tertipli kesgitleýjiniň elementi üçin algebrarik doldurgyjyň tapylyşyny görkejeliň.

Haýsy-da bolsa bir a_{ik} elementi alyp, onuň ýerleşen setiriniň we sütüniniň üstüni çyzalyň. Galan elementleriniň emele getirýän kesgitleýjisine şol a_{ik} elementiň minory diýilýär. Minoryň tertibi berlen kesgitleýjiniň tertibinden bir san kiçidir. a_{ik} elementiň minory M_{ik} bilen belgilenýär.

$(-1)^{i+k}M_{ik}$ sana bolsa a_{ik} elementiň algebraik doldurgyjy diýilýär we A_{ik} bilen belgilenýär. Diýmek,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik} \qquad (2\text{-}20)$$

Meselem,ýokarda alnan a_{32} elementiň A_{32} algebraik doldurgyjy aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

Kesgitleýjiniň elementiniň minory arkaly tapylan doldurgyjyň ýokarda kesgitlenen doldurgyç bilen gabat gelýändigini belläp geçeliň.(2-18),(2-19) we (2-20) formulalar berlen kesgitleýjini tertibi şol kesgitleýjiňkiden bir san kem bolan kesgitleýjiler bilen çalşyp hasaplamaga mümkinçilik berýär.Bu ýagdaý kesgitleýjileriň tertibi üçden uly bolanda giňden ulanylýar.

M y s a l l a r a g a r a l y ň.

3-nji m y s a l. Aşakdaky kesgitleýjini ikinji tertipli kesgitleýjä getirip hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ç ö z ü l i ş i: Berlen kesgitleýjini (2-18) formuladan peýdalanyp birinji setiriň elementleri boýunça dagydyp ýazalyň:

$$\Delta = 3A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 6 \cdot A_{13}.$$

Soňra (2-20) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 1(-1)^{1+2} M_{12} - 6^{1+3} M_{13}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

şeýlelikde,

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3(4-12) - 10 + 21 +$$

$$+ 6(20-14) = 23$$

4-nji m y s a l. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ç ö z ü l i ş i. Berlen kesgitleýjini ikinji sütüniň elementleri boýunça dagydyp ýazalyň we hasplalyň:

$$\Delta = O \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + OA_{32} + 2A_{42} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 + 21 - 14 - 2 + 2(6 + 8 - 20 - 9) = -20$$

Kesgitleýjileriň çyzykly deňlemeler ulgamyny çözmekde we derňemekde peýdalanylýan ýene-de bir häsiýetine, üçünji tertipli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kesgitleýjide garalyň. Kesgitleýjiniň haýsy-da bolsa bir setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jeminiň nämä deňdigini tapalyň. Mysal üçin, ýokardaky kesgitleýjiniň ikinji setiriniň elementlerini üçünji setiriň elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasylynyň jemini tapalyň.

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

deňlikleri göz öňünde tuttyp alarys:

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} =$$

$$= a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

kesgitleýjileriň üçünji häsiýetine görä, nula deň bolýar. Şuňa meňzeşlikde islendik setir üçin

(í ≠ j) $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0, \qquad (2\text{-}21)$$

islendik sütün üçin

(í ≠ j) $$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0, \qquad (2\text{-}22)$$

boljakdygyna göz etirmegiň kynçylygy ýokdur. Islendik teripli kesgitleýjiler üçin aşakdaky formulalar dogrudyr:

(í ≠ j) $$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0, \qquad (2\text{-}23)$$

(í ≠ j) $$a_{1j}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0, \qquad (2\text{-}24)$$

Diýmek, kesgitleýjiniň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini beýleki setiriň ýa-da sütüniň degişli elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jemi nula deňdir.

4. Çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmek we derňemek

Goý, bize n näbellisi bolan çyzykly n deňleme sistemasy berilsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2\text{-}25)$$

(2-25) sistemanyň koeffisientlerinden kesgitleýji düzeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}26)$$

(2-26) kesgitleýjä sistemanyň kesgitleýjisi diýilýär. (2-25) sistemanyň deňlemelerini (1-26) kesgitleýjiniň birinji sütüniniň algebraik doldurgyçlaryna degişlilikde köpeldilp, olary goşalyň

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + ... + a_{n2}A_{n1})x_2 +$$
$$+ .... +$$
$$+ (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + ... + a_{nn}A_{n1})x_n = \qquad (2\text{-}27)$$
$$= (b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1})$$

Bu ýer-de x_1 -iň koeffisienti (2-19) formula laýyklykda (2-26) kesgitleýjini berýär, $x_2, x_3, ...x_n$ -iň koeffisientleri bolsa (2-24) formula laýyklykda nula deň.(2-27) deňligiň sag bölegi bolsa, (2-26) birinji sütüniniň elementlerini degişli azat agzalar bilen çalşyrmak arkaly alnandyr.Ony Δ_1 bilen belgiläp (2-27) deňligi

$$\Delta x_1 = \Delta_1$$

Görnüşinde ýazyp bileris. $\Delta \neq 0$ bolanda

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Şuňa meňzeşlikde (2-25) sistemanyň deňlemelerini (2-26) kesgitleýjiniň í-nji sütininiň algebraik doldurgyçlaryna köpeldip, soňra goşsak, onda $\Delta x_i = \Delta_i$ ýa-da $\Delta \neq 0$ bolanda

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \, (i = 1;2;3;...;n) \qquad (2\text{-}28)$$

alarys. Bu ýer-de Δ ᵢ kesgitleýji, Δ kesgitleýjiniň í-nji sütininiň elementlerini degişli azat agzalar bilen çalşyrmak arkaly alnandyr.

(2-28)formula bilen tapylan $x_i = (i = 1;2;3;...;n)$ bahalaryň (2-25) sistemanyň çözüwdigini görkezeliň. Onuň üçin (2-28) formula bilen tapylan x_i bahalaryny (2-25) sistemanyň islendik k-njy deňlemesiniň çep bölegine goýalyň we onuň sag bölegine deňdigini görkezeliň. Dogrudan hem

$$a_{k1}\frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{k2}\frac{\Delta_2}{\Delta} + a_{k3}\frac{\Delta_3}{\Delta} + ... + a_{kn}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{k1}\Delta_1 + a_{k2}\Delta_2 +$$
$$+ a_{k3}\Delta_3 + ... + a_{kn}\Delta_n) = \frac{1}{\Delta}[\; a_{k1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1}) +$$
$$+ a_{k2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + ... + b_nA_{n2}) + ... + a_{kn}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} +$$
$$+ ... + b_nA_{nn})] = \frac{1}{\Delta}\left[b_1\left(a_{k1}A_{11} + a_{k2}A_{12} + ... + a_{kn}A_{1n}\right) +\right.$$
$$+ b_2\left(a_{k1}A_{21} + a_{k2}A_{22} + ... + a_{kn}A_{2n}\right) + ... + b_k(a_{k1}A_{k1} +$$
$$+ a_{k2}A_{k2} + ... + a_{kn}A_{kn}) + ... + b_n(a_{k1}A_{n1} + a_{k2}A_{n2+}$$
$$\left. + ... + a_{kn}A_{nn})\right] = \frac{1}{\Delta}b_k \cdot \Delta = b_k \cdot$$

$b_i = (i = 1;2;3;...;n)$ sanlaryň köpeldijileri í≠k bolanda (2-23) formula boýunça nula deň, í=k bolanda onuň köpeldijisi (2-18) formula boýunça Δ kesgitleýjä deň. Şeýlelikde (2-25) sistemanyň çözüwi (2-28) formula bilen berilýär.

Indi (2-25) sistemany derňemeklige girişeliň.

1. Δ≠0 bolsa, (2-25) sistemanyň (2-28) formula bilen aňladylýan ýeke-täk çözüwi bar.
2. Δ=0 bolsa, emma $\Delta_i \; (i = 1;2;...n)$sanlaryň iň bolmanda birisi nula deň bolmasa, (2-25) sistemanyň çözüwi ýokdur. Hakykatdan hem, $x_1, x_2..., x_n$ şol sistemanyň çözüwi bolsun.

Onda ol çözüw üçin

$$\Delta x_1 = \Delta_1 (i = 1;2;...n) \tag{2-28}$$

deňlikler ýerlikli bolýar. (2-28) deňlikleriň hemmesiniň çep bölegi nula deň, emma iň bolmanda biriniň sag bölegi nuldan üýtgeşik. Alnan garşylyk çözüwiň ýokdygyny görkezýär.

3. $\Delta = 0; \Delta_i = 0 (i = 1;2;...n)$ bolsa, onda ýa-ha (2-25) sistemanyň hiç bir çözüwi ýokdur, ýa-da tükeniksiz köp çözüwi bardyr.Bu sözleriň subutyny 5-nji paragrafyň ahyrynda getireris.

Biz çyzykly deňlemeler sistemasyny kesgitleýjiler arkaly çözdük we derňedik. Kesgitleýjiler teoriýasynyň esasyny Şweýsariýaly alym G. K r a m e r (1704-1752) tutdy. Şoňa görä-de çyzykly deňlemeler sistemasyny kesgitleýjiler arkaly çözmek usulyna K r a m e r i ň u s u l y diýilýär.

M y s a l l a r a g a r a l y ň.

5-n j i m y s a l. Aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -15 \end{cases}$$

Ç ö z ü l i ş i. Sistemanyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -64 \neq 0$$

Berlen sistemanyň ýeke-täk çözüwi bar $\Delta_i (i = 1;2;3)$ kesgitleýjileri hasaplalyň:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -15 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -54$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -15 & -3 \end{vmatrix} = -128$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -15 \end{vmatrix} = -192$$

Indi (2-28) formula boýunça x_i $(i = 1;2;3)$ tapýarys:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-64}{-64} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-128}{-64} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-192}{-64} = 3.$$

6-n j y m y s a l.Aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ 5x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 15 \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Ç ö z ü l i ş i : Sistemanyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 3 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Diýmek, sistemanyň ýa-ha çözüwi ýok, ýa-da tükeniksiz köp çözüwi bolmaly. Muny anyklamak üçin Δ_1 hasaplalyň.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 15 & -4 & 10 \\ 3 & -5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\Delta_1 \neq 0$, bolany üçin Δ_2, Δ_3 hasaplamagyň geregi ýok

$\Delta = 0$, emma $\Delta_1 \neq 0$. Diýmek, sistemanyň çözüwi ýok.

5. Bir jynsly çyzykly deňlemeler sistemasy

Azat agzalary nula deň bolan çyzykly deňlemeler sistemasyna bir jynsly çyzykly deňlemeler sistemasy diýilýär. Meselem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}29)$$

Bu sistema n näbellili birjynsly çyzykly deňlemeler sistemasydyr.

(2-29) sistemanyň koeffisientlerinden kesgitleýji düzeliň.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}30)$$

Δ≠0 bolanda ýokarda aýdylyşy ýaly (2-29) sistemanyň ýeke-täk çözüwi bolar. Ol çözüwiň hemme kompanentleriniň nul, ýagny $x_i = 0\ (i = 1;2;...n)$ boljagy aýdyňdyr. Bu çözüwe (2-29) sistemanyň triwial çözüwi diýilýär. Diýmek, (2-29) sistemanyň nula deň bolmadyk çözüwiniň bolmagy üçin Δ=0 bolmagy zerurdyr. Δ=0, emma onuň n-1 tertipli minorlarynyň haýsy-da bolsa biri nula deň bolmasa, onda koeffisientleri şol minora girýän n-1 tertipli deňlemeler sistemasyny alýarys we koeffisienti şol minora girmeýän näbellini azat näbelli höküminde deňligiň sag bölegine geçirýäris. Soňra alnan sistemany (2-28) formula boýunça çözýäris. Onuň çözüwi azat näbellä baglanyşykly tapylar. Näbellileriň tapylan bahalarynyň azat näbelliniň islendik bahasynda (2-29) sistemany kanagatlandyrýandygyny aňsatlyk bilen barlap bolýar. Diýmek Δ=0 emma n-1 tertipli minoryň biri nuldan üýtgeşik bolan ýagdaýda (2-29) sistemanyň azat näbellä baglanyşykly bolan tükeniksiz köp çözüwini tapýarys.

Eger Δ=0 bolsa we n-1 tertipli minorlaryň hemmesi nul bolsa, ýöne n-2 tertipli minorlaryň haýsyda bolsa biri nula deň bolmasa, onda koeffisientleri bu minora girýän n-2 tertipli sistemany alýarys we bu deňlemelerdäki ikinäbellini (koeffisientleri şol minora girmeýän iki näbellini) azat näbelliler höküminde deňligiň sag bölegine geçirýäris hem-de olary (2-28) formula boýunça çözýäris. Çözüwe iki azat näbelli (sag bölege geçirilen näbelliler) girer. Şol iki näbellä erkin bahalary berip, (2-29) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwini taparys we ş. m. Şeýlelikde (2-29) sistemanyň kesgitleýjisi nula deň bolsa, onuň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin üç näbellili birjynsly çyzykly üç deňleme sistemasyna garalyň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Goý,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

Emma α_{32} elementiň minory

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$$

bolsun.

α_{32} elementiň minoryna (2-31) sistemanyň birinji we ikinji deňlemelerindäki x_1-iň we x_3-iň koeffisientleri girýär. Şonuň üçin (2-31) sistemanyň birinji we ikinji deňlemesini ulgam edip ýazalyň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

x_2-leriň koeffisientleriniň α_{32} elementiň minoryna girmeýänligi üçin, x_2-ni özünde saklaýan agzalary deňligiň sag bölegine geçireliň:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = -a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{23}x_3 = -a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (2\text{-}32)$$

(2-32) sistemany (2-28) formula boýunça çözüp alarys:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} x_2; \quad x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} x_2.$$

$$-\frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix}} = k$$ bilen belgiläliň.

Onda $$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{23} \end{vmatrix} k; \quad x_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix} k;$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} k.$$

x_1; x_2; x_3 üçin tapylan bahalaryň k-niň islendik bahasynda (2-31) sistemanyň üçünji deňlemesini hem kanagatlandyrýandygyny görkezeliň. Dogrudan hem:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{22} a_{33} \end{vmatrix} k -$$

$$- a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{21} a_{23} \end{vmatrix} k + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} k =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} k = 0.$$

Diýmek (2-31) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bar.
Indi 4-nji paragrafyň ahyryndaky sözlemi subut etmäge girişeliň.
Goý, (2-25) sistemanyň

$$x_1 = \overline{x_1}; \quad x_2 = \overline{x_2}; \quad x_3 = \overline{x_2}; \quad ...; \quad x_n = \overline{x_n}$$

bir çözüwi bar diýeliň. Bu çözüwi (2-25) sistemada goýup alarys:

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x_1}+a_{12}\overline{x_2}+...+a_{1n}\overline{x_n}=b_1 \\ a_{21}\overline{x_1}+a_{22}\overline{x_2}+...+a_{1}\overline{x_n}=b_2 \\ .... \\ a_{n1}\overline{x_1}+a_{n2}\overline{x_2}+...+a_{nn}\overline{x_n}=b_{n.} \end{cases} \qquad (2\text{-}33)$$

(2-33) sistemanyň deňlemelerini degişlilikde (2-25) sistemanyň deňlemelerinden aýryp alýarys:

$$\begin{cases} a_{11}\left(x_1-\overline{x_1}\right)+a_{12}\left(x_2-\overline{x_2}\right)+...+a_{1n}\left(x_n-\overline{x_n}\right)=0 \\ a_{11}\left(x_1-\overline{x_1}\right)+a_{12}\left(x_2-\overline{x_2}\right)+...+a_{1n}\left(x_n-\overline{x_n}\right)=0 \\ .... \\ a_{n1}\left(x_1-\overline{x_1}\right)+a_{n2}\left(x_2-\overline{x_2}\right)+...+a_{nn}\left(x_n-\overline{x_n}\right)=0 \end{cases}$$

$x_i-\overline{x_i}=y_i=\left(i=1,2,...n\right)$ bilen belgiläp alarys:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n=0 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n=0 \\ .... \\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+...+a_{nn}y_n=0. \end{cases} \qquad (2\text{-}34)$$

Δ=0 bolanda (2-34) sistemanyň tükeniksiz köp çözüwiniň bardygyny biz ýaňja gördük.y_i üçin tapylan tükeniksiz köp çözüwi

$$x_i=\overline{x_i}+y_i$$

deňlige goýup (2-25) üçin tükeniksiz köp çözüwi alarys. Diýmek, (2-25) sistemanyň bir çözüwiniň bolmagyndan tükeniksiz köp çözüwiniň bolýandygy gelip çykdy.

§ 6. Çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmekde Gaussyň usuly

Gaussyň (1777-1855, nemes alymy) usulynyň düýp manysyna düşünmek üçin, dört näbellili dört çyzykly deňlemeler sistemasyna garamak ýeterlik. Gaussyň usulyna başlamazdan öňürti üçburçly sistema diýilýän aşakdaky

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ \qquad\qquad\qquad a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \tag{2-35}$$

çyzykly deňlemeler sistemanyň çözülişine garalyň. Bu sistemanyň kesgitleýjisi nuldan tapawutly bolanda ol şeýle çözülýär. Onuň dördünji deňlemesinden x_4 tapyp, üçünji deňlemä goýmaly, ondan x_3 tapyp, x_4-iň we x_3-iň bahalaryny sistemanyň ikinji deňlemesine goýmaly, ondan x_2-ni kesgitlemeli, soňra x_4-iň x_3-iň we x_2-niň tapylan bahalaryny birinji deňlemä goýup, ondan x_1 tapmaly.

Indi üçburçly bolmadyk sistemany alalyň

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{21}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \tag{2-36}$$

Bu sistemanyň çözmekde Gaussyň usulynyň ideýasy ony üçburçly sistema getirip çözmekden ybaratdyr. (2-36) sistema aşakdaky usul bilen üçburçly sistema getirilýär. Goý, $a_{11} \neq 0$ bolsun. (2-36) sistemanyň birinji deňlemesiniň hemme agzalaryny a_{11} – *eýerdiji elemente* bölüp alarys:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \qquad (2\text{-}37)$$

bu ýerde $b_{1i} = \dfrac{a_{1i}}{a_{11}} \quad (i = 2,3,4,5).$

(2-37) deňlemäni a_{21} köpeldip (2-36) sistemanyň ikinji deňlemesinden, a_{31} köpeldip üçünji deňlemesinden, a_{41}

köpeldip dördünji deňlemesinden aýyrsak näbellileriniň sany bir sana azalan sistemany alýarys:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (2\text{-}36\ \square)$$

bu ýerde $a_{ij}^{(1)} = a_{i1} - a_{i1}b_{1j}\,(i, j \geq 2).$

(2-36) sistemanyň birinji deňlemesiniň hemme agzallaryny $a_{22}^{(1)}$ -eýerediji elemente bölüp alarys ($a_{22}^{(1)} \neq 0$ güman edilýär).

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \qquad (2\text{-}38)$$

bu ýerde $$b_{2i}^{(1)} = \frac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

(2-38) deňlemäni ilki $a_{32}^{(1)}$ soňra köpeldip $a_{42}^{(1)}$ köpeldip (2-36) sistemanyň degişlilikde ikinji we üçünji deňlemelerinden aýryp alýarys:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \qquad \text{(2-36")}$$

bu ýerde $$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)}.$$

(2-36") sistemanyň birinji deňlemesiniň hemme agzalaryny $a_{33}^{(2)}$ erediji elemente bölüp alarys ($a_{33}^{(2)} \neq 0$ guman edilýär).

$$x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}. \qquad \text{(2-39)}$$

bu ýerde $$b_{3i}^{(2)} = \frac{a_{3i}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad \text{(i>3)}$$

(2-39) deňlemäni $a_{43}^{(2)}$ köpeldip we (2-36") sistemanyň ikinji deňlemesinden aýryp alarys

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}$$

bu ýerde
$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - a_{43}^{(2)} \ b_{34}^{(2)}.$$

Ahyrky deňlemeden alarys:

$$x_4 = b_{45}^{(3)} \cdot \qquad \text{(2-40)}$$

(2-37) – (2-40) deňlemeleri sistema edip ýazsak, berlen bilen deňgüýçli bolan üçburçly sistema alarys.

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \\ \qquad x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \\ \qquad\qquad x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = b_{45}^{(3)}. \end{cases} \qquad (2\text{-}41)$$

Bu sistemanyň çözülişi (2-35)-iň çözülişi ýalydyr.

Çyzykly deňlemeler sistemasyny Gaussyň usuly bilen çözmek üçin, zerur we ýeterlik şert ″eýerdiji elementleriniň nuldan tapawutly san bolmagydyr. Eger haýsy-da bolsa bir etapda ýokarda görkezilen eýerdiji element nula deň bolsa, onda deňlemeleriň ýa-da näbellileriň ornuny çalşyrmak bilen ″eýerdiji elementleriň ″ nuldan tapawutly san bolmagyny gazanmaga çalyşmaly. Eger-de, haýsy-da bolsa bir etapda deňlemeleriň ýa-da näbellileriň ornuny çalşyranymyzda hem nuldan tapawutly eýerdiji element bolmasa, onda iki ýagdaýyň bolmagy mümkin: Şol etapdaky seredilýän deňlemeler sistemasynyň hemme koeffisientleri we azat agzalary nula deň. Bu ýagdaýda ilkinji sistemanyň tükeniksiz köp çözüwiniň boljagy aýdyňdyr. Şol etapdaky deňlemeler sistemanyň hemme koeffisientleri nula deň bolup, azat agzalarnyň haýsy-da bolsa biri ýa-da bir näçesi nuldan tapawutly bolsa, onda $0=b_{ij} \neq 0$ netije emele geler. Ol bolsa çözülýän sistemanyň çözüwiniň ýokdugyny görkezýär.

7-n j i m y s a l. Sistemany Gaussyň usuly boýunça çözmeli:

$$\begin{cases} 7{,}9x_1 + 5{,}6x_2 + 5{,}7x_3 - 7{,}2x_4 = 6{,}68 \\ 8{,}5x_1 - 4{,}8x_2 + 0{,}8x_3 + 3{,}5x_4 = 9{,}95 \\ 4{,}3x_1 + 4{,}2x_2 - 3{,}2x_3 + 9{,}3x_4 = 8{,}6 \\ 3{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 8{,}9x_3 + 3{,}3x_4 = 1 \end{cases} \qquad (2\text{-}42)$$

Birinji deňlemäniň hemme agzalaryny 7,9-a böleliň.

$$x_1 + 0{,}70886x_2 + 0{,}72152x_3 - 0{,}91139x_4 = 0{,}84557 \quad \text{(I)}$$

(I) deňligiň agzalaryny 8,5, 4,3 we 3,2 köpeldip, degişlilikde (2-42) sistemanyň ikinji, üçinji, we dördünji deňlemesinden aýryp, aşakdaky üç näbellili üç deňleme sistemasyny alarys.

$$\begin{cases} 10{,}82531x_2 - 5{,}33292x_3 - 11{,}24682x_4 = 2{,}76265 \\ 1{,}15190x_2 - 6{,}30254x_3 - 13{,}21898x_4 = 4{,}96405 \\ -3{,}6685x_2 - 11{,}20886x_3 + 6{,}21645x_4 = -1{,}70582 \end{cases} \quad (2\text{-}43)$$

Bu sistemanyň birinji deňlemesini 10,82531 bölüp alarys.

$$x_2 + 0{,}49263x_3 - 1{,}03894x_4 = -0{,}25520 \quad \text{(II)}$$

(II) deňlemäniň agzalaryny ilki 1,15190; soňra 3,66835 köpeldip degişlilikde (2-43) sistemanyň ikinji we üçünji deňlemelerinden aýyrsak, iki näbellili iki deňlemeli sistema emele geler.

$$\begin{cases} -6{,}8700x_3 + 14{,}41573x_4 = 5{,}25801 \\ -9{,}40172x_3 + 2{,}40525x_4 = -2{,}64198. \end{cases} \quad (2\text{-}44)$$

Bu sistemanyň birinji deňlemesini-6,8700 bölüp alýarys

$$x_3 - 2{,}09836\, x_4 = -9{,}76536 \quad \text{(III)}$$

(III) deňlemäniň hemme agzalaryny – 9,40172 köpeldip, (2-44) sistemanyň ikinji deňlemesinden aýryp alarys.

$$-17{,}32294x_4 = -9{,}83768$$

bu ýerden

$$x_4 = 0{,}56790$$

(I-IV) deňlemelerden üçburçly sistemany düzýäris:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}70886x_2 + 0{,}72152x_3 + 0{,}19139x_4 = 0{,}84557 \\ \qquad x_2 + 0{,}49263x_3 - 1{,}03894x_4 = -0{,}25520 \\ \qquad\qquad x_3 + 2{,}09836x_4 = 0{,}76536 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 0{,}56790 \end{cases}$$

Bu sistemadan x_4=0,56790, x_3=0,42630, x_2=0,12480, x_1=0,96710 tapýarys.

Biz hasaplamalary geçirenimizde oturdan soňky 5 belgili ýagny, 0,00001 takykylyk bilen hasaplamalary ýerine ýetirdik. Bu hili hasaplamalar bilen tapylan cözüwiň takyk bolman, ýakynlaşan boljakdygy anykdyr.

Gaussyň usuly köp näbellili deňlemeler sistemasynyň ýakynlaşan çözüwini tapmakda giňden ulanylýar.Elektron-hasaplaýjy maşynlarda çyzykly deňlemeler sistemasyny Gaussyň usuly bilen çözmeklik Krameriň usuly bilen çözmekden amatlydyr.

Adatça çyzykly deňlemeler sistemasyny Gaussyň usuly boýunça çözmek üçin aşakdaky ýaly tablisa düzülýär (1-nji tablisa).

(1-nji tablisa)

Näbellileriň koefisientleri				Azat agzalar	Σ	Bölümler
x_1	x_2	x_3	x_4			
7,9	5,6	5,7	-7,2	6,68	18,68	I
8,5	-4,8	0,8	3,5	9,95	17,95	
4,3	4,2	-3,2	9,3	8,6	23,2	
3,2	-1,4	-8,9	3,3	1	2,8	
1	0,7088	0,72152	-0,91139	0,84557	2,36456	
	-10,82531	-5,33292	11,24682	2,76265	-2,14876	II
	1,15190	-6,30254	13,21898	4,96405	13,03139	
	-3,66835	-11,20886	6,21645	-1,70582	-10,36658	
	1	0,49263	-1,03894	-0,25520	0,19849	
		-6,87000	14,41573	5,25801	12,80374	III
		-9,40172	2,40525	-2,64198	-9,63845	
		1	-2,09836	-0,76536	-1,86372	
			-17,32294	-9,83768	-27,16062	IV
			1	0,56790	1,56790	

1-nji tablisanyň I bölüminiň dört setiri berlen sistemanyň koeffisientlerinden we azat agzalardan ybarat.Iň soňky setiri bolsa birinji setiri 7,9 bölüp alynýar. Tablisadaky $\sum$ belgili sütün, setiriň sanlarynyň jemidir. Ol sütün hasaplama kontrollyk etmäge ýardam edýär.Meselem, birinji bölümiň bäşinji setirindäki bäş sanyň jemi birinji setiriň altynjy sanynyň 7,9 bölünmeginden alnan sana deň bolsa, onda birinji setiri 7,9 bölenimizde ýalňyşlyk goýbermedik bolmagymyz gaty ähtimaldyr.Tablisanyň ikinji bölümindäki ilkinji üç setiriň sanlary birinji bölüminiň bäşinji setirini 8,5; 4,3; 3,2; köpeldip degişlilikde ikinji, üçünji we dördünji setirlerinden aýryp alynýar. Iň soňky setiri bolsa birinji setirde emele gelen sanlary şol setiriň birinji sanyna, ýagny – 10,82531 bölüp alynýar.Uçünji bölümdäki sanlar ikinji bölümden, dördünji bölümdäki sanlar üçünji bölümden hut ikinji bölümdäki sanlaryň birinji bölümden alynyşy ýaly alynýar.

III bap

WEKTOR ALGEBRASY

§ 1.Skalýar we wektor ululyklar. Kollinear we komplanar wektorlar. Wektorlaryň deňligi

Skalýar we wektor ululyklar baradaky düşünje bize orta mekdebiň fizika we matematika kursundan tanyş. Seýle-de bolsa olaryň häsiýetlerini ýatlap geçeliň.

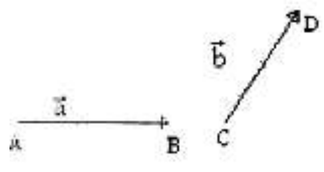
K e s g i t l e m e. **Eger ululyk özüniň san bahasy bilen häsiýetlendirýän bolsa, oňa skalýar ululyk diýilýär.**

Meselem, massa, göwrüm, uzynlyk, temperatura skalýar ululyklardyr.

K e s g i t l e m e. **Eger ululyk özüniň san bahasy hem-de ugry bilen häsiýetlendirýän bolsa, oňa wektor ululyk diýilýär.**

Meselem, tizlik, tizlenme, güýç we şuňa meňzeş ululyklar wektorlardyr.

Wektora ugrukdyrylan kesim hökmünde garasak kesimi çäklendirýän iki nokadyň haýsynyň başlangyç we haýsynyň ahyrky nokatdygyny anyklamaly bolarys. Suratda wektorlaryň ahyrynda strelka goýulýar (15-nji surat).



15-nji surat.

Ýazuwda wektor kesimi çäklendirýän iki baş harp bilen ýa-da ýekeje kiçi harp bilen belgilenip, onuň üstünde ýiti ujy sag tarapa ugrukdyrylan strelka goýulýar. Meselem. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Wektor iki baş harp bilen belgilenende wektoryň başlangyjy birinji orunda, ahyry bolsa ikinji orunda ýazylýar.

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň uzynlygy $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ balen belgilenýär.Oňa wektoryň moduly hem diýýärler. Uzynlygy nula deň bolan wektora hem garaýarlar. Oňa nul wektor diýýärler.Ony $\vec{O}$ bilen belgileýärler. Nul wektoryň belli bir ugrukdyrylan tarapy ýokdur. Nul wektoryň başlangyç nokady we ahyrky nokady biri-biriniň üstüne düşýär

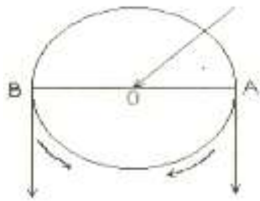
Uzynlygy bire deň bolan wektorlara birlik wektorlar diýilýär $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, ...\vec{a}, \vec{b}$ wektorlara ugurdaş birlik wektorlar $\overrightarrow{AB^o}, \overrightarrow{CD^o}, ..., \vec{a^o}, \vec{b^o}, ...$ bilen belgilenýär.

Matematikada dine ugry we ululygy bilen häsiýetlendirýän wektorlar öwrenilýär. Olara *erkin wektorlar* diýilýär. Fizikada erkin wektorlardan başga wektorlara hem, meselem, *baglanyşykly wektorlar* diýilýän wektorlara hem garalýar. Mysal üçin, gozganmaýan oka birikdirilen diske haýsy bolsa-da bir güýç täsir edýär diýeliň.Eger güýç A nokada goýlan bolsa,onda disk sagat diliniň ugry boýunça, B nokada goýlan bolsa sagat diliniň garşylykly ugry boýunça aýlanyp başlar. Eger-de güýç O nokada goýlan bolsa, onda disk dynçlyk ýagdaýyny saklar (16-njy surata ser.).Bu ýerde şol bir ugraugrukdyrylan güýjiň haýsy nokada goýlanlygy rol oýnaýar. Bu hili wektorlara baglanyşykly wektorlar diýilýär.Erkin wektorlaryň bolsa haýsy nokada goýlandygy düýpli rol oýnaman,diňe olaryň ululyklary we ugurlary rol oýnaýar.
Aşakda diňe erkin wektorlara garalýar. Parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatýan wektorlara *kollinear wektorlar* diýilýär. Bir wektoryň beýleki wektora kolliinearlygy parallelik

alamaty bilen belgilenýär. Meselem, $\overrightarrow{AB}$ wektor $\overrightarrow{CD}$ wektora kollinear bolsa, onda $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ görnüşde ýazylýar.

Parallel tekizliklerde ýatýan wektorlara *komplanar wektorlar* diýilýär.

Nul wektora islendik wektora collinear we komplanar wektor hökmünde garamak bolar



16-njy surat. .

Eger iki wektor:

1) kollinear bolsa,

2) bir tarapa ugrukdyrylan bolsa,

3) uzynlyklary hem deň bolsa, onda şol iki wektora *özara deň wektorlar* diýilýär. Uzynlyklary deň bolan, emma garşylykly ugra ugrukdyrylan wektorlara *garşylykly wektorlar* diýilýär.

§ 2. Wektory sana köpeltmek

$\vec{a}$ wektoryň hakyky λ sana köpeltmek hasyly diýilip, birinjiden $\vec{a}$ wektor bilen kollinear bolan, ikinjiden uzynlygy $|\lambda|\,|\vec{a}|$ deň bolan, üçünjiden λ>0 bolanda $\vec{a}$ wektor bilen bir ugra ugrukdyrylan, λ<0 bolanda $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugra ugrukdyrylan wektora aýdylýar.

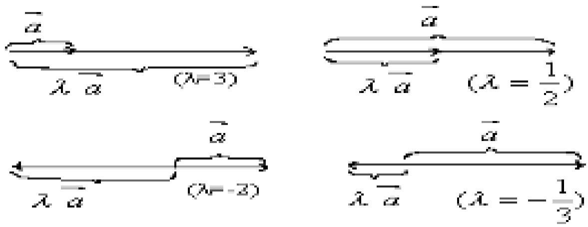
$\vec{a}$ wektoryň hakyky λ sana köpeltmek hasyly $\lambda\vec{a}$ bilen belgilenýär.Wektory hakyky sana köpeltmegiň häsiýetlerine garalyň.

1. Islendik $\vec{a}$ wektor hem-de α we β sanlar üçin

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \qquad (3\text{-}1)$$

deňlik dogrudyr.

Hakykatdan-da, eger α we β sanlaryň alamatlary bir meňzeş bolsa, onda (3-1) deňligiň çep we sag böleklerindäki wektorlaryň ikisi-de $\vec{a}$ wektor bilen bir ugra ugrukdyrylan bolýarlar, eger-de α we β sanlaryň alamatlary dürli bolsalar, onda olaryň ikisi-de $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugra ugrukdyrylan bolýarlar. Soňada görä-de, $\alpha(\beta\vec{a})\, we\, (\alpha\beta)\vec{a}$ wektorlar kollinear we bir ugra ugrukdyrylan



17-nji surat.

wektorlardyr. Ondan başga- da ol wektorlaryň ikisiniň hem uzynlygy $|\alpha|\,|\beta|\,|\vec{a}|$ deňdir.

Diýmek, $\alpha(\vec{a}\beta)$ we $(\alpha\beta)\vec{a}$ wektorlar deňdirler.(Eger, α,β sanlaryň biri ýa-da $\vec{a}$ wektor nula deň bolsa, onda (3-1) deňligiň iki bölegi hem nula deň bolar).

2. Nula deň bolmadyk islendik $\vec{a}$ wektora kollinear bolan $\vec{b}$ wektor üçin

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \qquad (3\text{-}2)$$

deňligi kanagatlandyrýan λ san bardyr we ol san ýeke-täk sandyr.

Hakykatdan-da, $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kolinear bolany üçin $\vec{a}$ wektoryň uzynlygyny λ gezek uzaldyp ýa-da gysgaldyp, uzynlygy $\vec{b}$ wektoryň uzynlygyna deň bolan $\lambda\vec{a}$ wektory alarys.(λ>0 diýip hasap edýäris). Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar bir ugra ugrukdyrylan bolsalar, onda $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, eger dürli ugra ugrukdyrylan bolsalar, onda $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$ bolar. Indi bize λ sanyň ýeke-täkligini subut etmek galdy. Goý, λ sandan başga-da (3-2) deňligi kanagatlandyrýan λ_1 san bar, ýagny $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ *we* $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}$ diýeliň. Yokarky deňliklerdäki λ we λ_1 sanlaryň alamatlarynyň birmeňzeşdigi öz-özünden düşünikli. λ > 0 we $\lambda_1 > 0$ diýsek onda

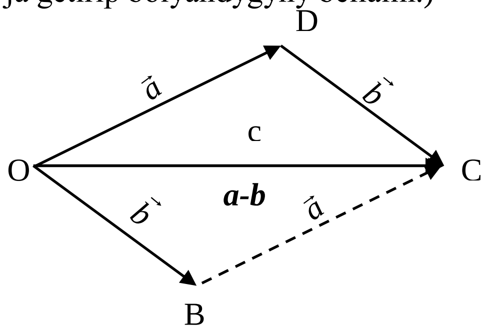
$$|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|,$$

$$|\vec{b}| = |\lambda_1\vec{a}| = |\lambda_1||\vec{a}| = \lambda_1|\vec{a}|$$

Bu ýerden $\lambda=\lambda_1$ gelip çykýar. $\vec{a}$ wektory hakyky λ sana bölmeklik $\vec{a}$ wektory $\frac{1}{\lambda}$ sana köpeltmek bilen çalşyrylýar.

§ 3. Wektorlary goşmak we aýyrmak.

K e s g i t l e m e. **Umumy O başlangyjy bolan $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektoryň jemi diýip, şol wektorlaryň umumy O başlangyjyndan çykýan hem-de $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň üstünde gurlan parallelogramyň dioganaly bolup hyzmat edýän üçünji $\vec{c}$ wektora aýdylýar we (18-nji sur.) $\vec{a}+\vec{b}$ bilen belgilenýär.** 18-nji surata görä $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}\ ya-da\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$ ýazyp bileris.(Umumy başlangyjy bolmadyk $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary, olaryň ugurlaryny üýtgetmezden öz-özüne parallel edip süýşirmek arkaly umumy başlangyja getirip bolýandygyny belläliň.)



18-nji surat

18-nji suratdan $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC}\ we\ \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$ boljagy görünýär. Onda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň jemine beren kesgitlemämizi aşakdaky ýaly edip aýdyp bileris.

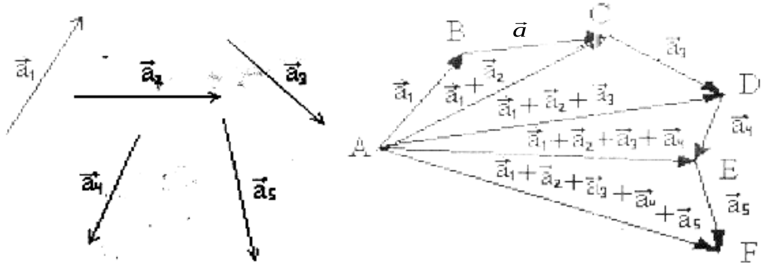
$\vec{a}$ wektoryň ahyry $\vec{b}$ wektoryň başlangyjy bolan iki wektoryň jemi diýip, başlangyjy $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy bilen, ahyry $\vec{b}$ wektoryň ahyry bilen gabat gelýän üçünji $\vec{c}$ wetora aýdylýar (18-nji sur.). Iki wektoryň jemine deň bolan üçünji wektory gurmagyň birinji usulyna parallelogram usuly, ikinji usulyna bolsa üçburçlyk usuly diýilýär.

Birnäçe wektoryň jemini tapmak üçin köplenç üçburçlyk usuly peýdalanylýar.Meselem, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ *we* $\vec{a}_5$ wektorlaryň jemini gurjak bolsak, onda $\vec{a}_2$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_1$ wektoryň ahyrynda, $\vec{a}_3$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_2$ wektoryň ahyrynda, $\vec{a}_4$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_3$ wektoryň ahyrynda, $\vec{a}_5$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}_4$ wektoryň ahyrynda ýerleşdirýäris.Başlangyjy birinji $\vec{a}_1$ wektoryň başlangyjy, ahyry iň soňky $\vec{a}_5$ wektoryň ahyry bilen gabat gelýän wektor berlen bäş wektoryň jemi bolar (19-njy sur.).

Ýokarda görkezilişi ýaly edip, berlen wektorlaryň jemini gurmak usulyna wektorlaryň jemini tapmak diýilýär.

Indi iki wektoryň tapawudy diýlip nämä aýdylýandygyna we onuň nähili tapylýandygyna garalyň.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň tapawudy diýlip, kemeldiji $\vec{b}$ wektor bilen goşulanda kemeliji $\vec{a}$ wektory berýän üçünji $\vec{c}$ wektora aýdylýar we $\vec{a}-\vec{b}$ bilen ($\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$) belgilenýär.



19-njy surat.

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wektory gurmaklyga, $\vec{a} - \vec{b}$ tapawudy tapmak diýilýär. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wektory gurmak üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary umumy O başlangyja getirýärler we kemeldiji $\vec{b}$ wektoryň ahyryndan kemeliji $\vec{a}$ wektoryň ahyryna wektor geçirýärler (20-nji surat.).

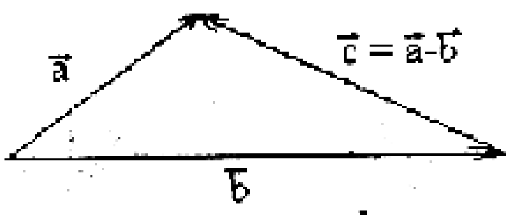
21-nji suratda kollinear wektorlaryň jeminiň we tapawudynyň tapylyşy görkezilendir.

Wektorlaryň jeminiň häsiýetilerine garalyň.

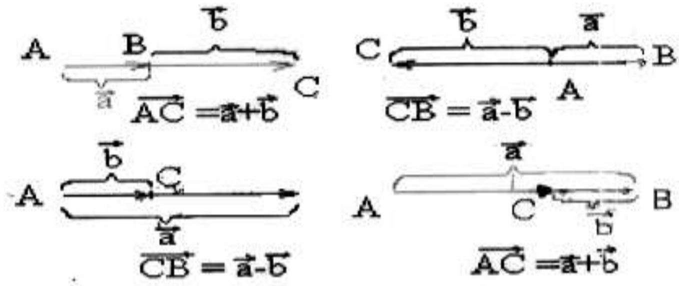
1.Islendik λ san üçin

$$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\,. \qquad (3\text{-}3)$$

Hakykatdan hem, düşnüklilik üçin λ>0 diýeliň. $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ wektory we $\vec{a} + \vec{b}$ jem bolan $\overrightarrow{AB}$ wektory λ sana köpeldeliň (22-nji surat.). Şonda biz $\lambda\vec{a}$ deň bolan $\overrightarrow{AC_1}$ wektory we $\lambda\ (\vec{a} + \vec{b}\ )$ wektora deň bolan $\overrightarrow{AB_1}$ wektoryalary alarys. Δ ABC we Δ AB_1C_1 garalyň



20-nji surat.



21-nji surat.

Bu üçburçlyklaryň A burçy umumy we burça sepleşýän iki tarapy proporsional

$$\frac{|\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{|\lambda\vec{a}|}{|\lambda(\vec{a}+\vec{b})|}=\frac{|\lambda||\vec{a}|}{|\lambda||\vec{a}+\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$$

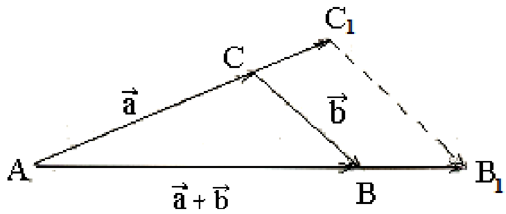
Diýmek, Δ **ABC** ~Δ **AB_1C_1**. Soňa görä-de

$$\frac{|\overrightarrow{C_1B_1}|}{|\vec{b}|}=\frac{|\lambda\vec{a}|}{|\vec{a}|},\ bu\ yerden\,|\overrightarrow{C_1B_1}|=\lambda|\vec{b}|\left(\lambda>0|\lambda|=\lambda\ \right)$$

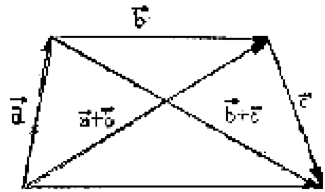
Surata görä $\overrightarrow{C_1B_1}\parallel\vec{b}$. Diýmek, $\overrightarrow{C_1B_1}=\lambda\,\vec{b}$. 22-nji suratdan $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}$ ýa-da $\lambda\ (\vec{a}+\vec{b})=\lambda\ \vec{a}+\lambda\vec{b}$ alýarys.

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

Goşulyjylaryň ornuny çalşyrmaklyk olaryň jemine täsir etmeýär, ýagny wektorlaryň jemi kommutatiw kanuna boýundyr. Bu kanunyň dogrulygy wektorlaryň jeminiň kesgitlemesinden gelip çykýar.



22-nji surat.



$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

23-nji surat.

3. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (3-5)

Islendik üç wektoryň jemi assosiatiw kanuna boýundyr, ýagny goşulyjylary islendik görnüşde toparlamak bolýar. Bu kanunyň dogrulygy 23-nji suratdan görünýär.

4. Islendik α we β hakyky san hem-de $\vec{a}$ wektor üçin

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\overrightarrow{\alpha a}+\overrightarrow{\beta\alpha} \quad (3\text{-}6)$$

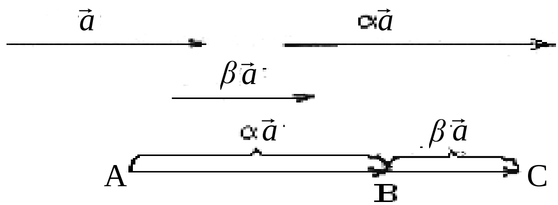
deňlik dogrudyr.

Hakykatdan-da, (3-6) deňligiň çep we sag böleginde ýazylan wektorlaryň kollineardygyna şübhe ýok. Eger α we β sanlaryň alamatlary birmeňzeş bolsa, onda (3-6) deňligiň iki bölegindäki wektorlar bir ugra ugrukdyrylandyrlar (α > 0; we β >0 bolanda wektorlar $\vec{a}$ wektor bilen udurdaşdyrlar α < 0; we β <0 bolanda wektorlar $\vec{a}$ wektor bilen garşylykly ugrukdyrylandyr.). Kesgitlilik üçin α > 0; β >0 hasap edip, (3-6) deňligiň sag we çep bölekleriniň uzynlyklarynyň deňdigini, ýagny $\left|(\alpha+\beta)\vec{a}\right| = \left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\right|$ boljagyny görkezeliň. 24-nji suratdan

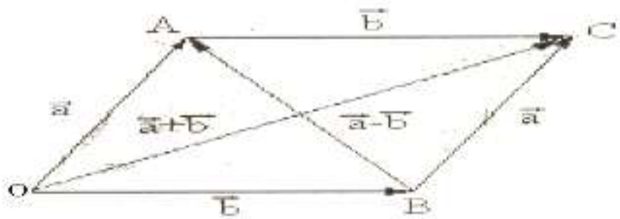
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|$ ýa-da $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\right| = \left|\alpha\vec{a}\right| + \left|\beta\vec{a}\right|$ *alarys.*

$|\alpha a| + |\beta a| = |\alpha|\,|a| + |\beta|\,|\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)\,|a|$;

α we β sanlaryň alamatlary bir meňzeş bolany üçin $|a| + |\beta| = |\alpha + \beta|$



24-nji surat.



25-nji surat

Diýmek, $\left|\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\right|=\left|\alpha+\beta\right|\left|\vec{a}\right|=\left|(\alpha+\beta)\vec{a}\right|.$

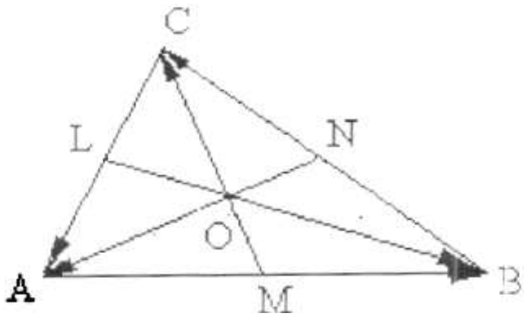
Biz (3-6) deňligiň sag bölegindäki wektoryň uzynlygynyň çep bölegindäki wektoryň uzynlygyna deňdigini görkezdik.
α we β sanlaryň alamatlary dürli bolan ýagdaý hem ýokardaka meňzeş subut edilýär.Indi käbir meselelere garalyň

1- n j i m e s e l e.
1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-b\right|$, 2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|>\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, 3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ bolmagy üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özara nähili ýerleşmeli ?

Ç ö z ü l i ş i. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektory umumy O başlangyja getireliň. Şonda $\vec{a}+\vec{b}$ we $\vec{a}-\vec{b}$ wektorlar taraplary $\vec{a}$ we $\vec{b}$ bolan paralellogramyň dioganallary bolarlar (25-nji sur.).
ΔOAB we ΔOBC garalyň. $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$; $\overrightarrow{OB}$ umumy. Şoňa görä-de

1) eger ∠AOB=∠OBC bolsa $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-b\right|$ bolýar. ∠AOB+∠OBC=π bolany üçin $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar özara perpendikulýar bolmaly

2)∠AOB<∠OBC bolsa $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|>\left|\vec{a}-b\right|$ bolýar. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar ýiti burç emele getirmeli.



26-njy surat.

3) ∠AOB>∠OBC bolsa $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-b|$ bolýar. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kütek burç emele getirmeli.

2 - n j i m e s e l e. Eger O nokat ABC üçburçlygyň medianalarynyň kesişme nokady bolsa, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ bolýandygyny subut etmeli. (26-njy surat).

Ç ö z ü l i ş i. ΔABC-niň taraplaryna $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$, wektorlar hökmünde garasak, onda

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{O} \qquad (3\text{-}7)$$

26-njy suratdan alarys:

$$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CA})=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$

$$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{LB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

Bu üç deňlikden

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})=\frac{3}{2}\cdot\vec{O}=\vec{O}$$

§ 4. Wektoryň oka bolan proeksiýasy we onuň häsiýetleri

K e s g i t l e m e. $\overrightarrow{AB}$ **wektoryň başlangyç A nokadyndan we ahyrky B nokadyndan** l **oka geçirilen perpendikulýarlaryň esaslarynyň arasyndaky ugrykdyrylan** A_1B_1 **kesimiň ululygyna** $\overrightarrow{AB}$ **wektoryň** l **oka bolan ortogonal proeksiýasy diýilýär.**

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň l oka bolan proeksiýasy aşakdaky ýaly bellenilýär:

$$pr_l\,\overrightarrow{AB}=A_1B_1$$

Wektoryň oka bolan proeksiýasynyň häsiýatlerine garamazdan ozal wektor bilen okuň emele getirýän burçy diýip nämä düşünýändigimizi aýdyňlaşdyralyň.

K e s g i t l e m e. l **okuň polo£itel ugry bilen** $\overrightarrow{AB}$ **wektoryň ugry arasyndaky burçuň kiçisine** $\overrightarrow{AB}$ **wektoryň** l **ok bilen emele getirýän burçy diýilýär.**

$\overrightarrow{AB}$ wektoryň l ok bilen emele getirýän burçy 27-nji suratda φ bilen görkezilendir , $\vec{a}$ wektoryň l oka bolan A_1B_1 proeksiýasy $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ bolanda položitel bolýar, $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$

bolanda otrisatel bolýar. Wektoryň oka bolan proeksiýasynyň esasy häsiýetleri aşakdakylardan ybarat.

1. $\vec{a}$ wektoryň l oka bolan $A_1 B_1$ proeksiýasy $\vec{a}$ wektoryň uzynlygynyň $\vec{a}$ wektoryň l ok bilen emele getirýän burçunyň kosinusyna köpeldilmegine deňdir, ýagny

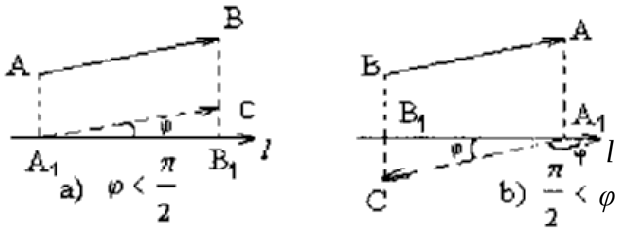
$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \qquad (3\text{-}8)$$

Bu häsiýet 27-nji surat arkaly aňsat subut edilýär.

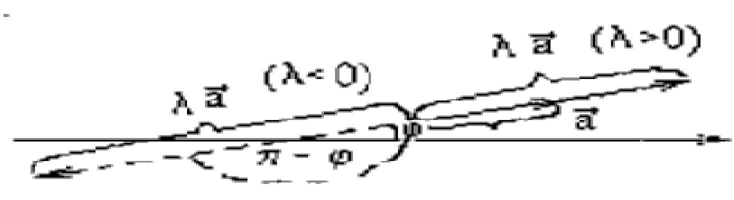
2. Islendik λ san üçin $\lambda \vec{a}$ wektoryň l oka bolan proeksiýasy, $\vec{a}$ wektoryň proeksiýasynyň λ sana köpeldilmegine deňdir, ýagny

$$pr_l \lambda \vec{a} = \lambda pr_l \vec{a}$$

S u b u d y. λ > 0 bolsa, $\vec{a}$ we $\lambda \vec{a}$ wektorlar ugurdaşdyrlar. Şoňa görä-de olaryň ikisiniň hem l ok



27-nji surat.



28-nji surat.

bilen emele getirýän burçlary şol bir burçdyr. λ < 0 bolsa $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar garşylykly ugrukdyrylandyr. Bu ýagdaýda $\vec{a}$ wektor l ok bilen φ burçy emele getirse, $\lambda\vec{a}$ wektor l ok bilen π – φ burçy emele getirer (28-nji surat.)
Subut eden häsiýetimize görä λ > 0 bolanda
$pr_l\,\lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos\varphi = \lambda|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda\ pr_l\,\vec{a}.$ λ <0 bolanda
$(|\lambda| = -\lambda)$ $pr_l\,\lambda\vec{a} = |\lambda\vec{a}|\cos(\pi-\varphi) = -\lambda|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda\ pr_l\,\vec{a}.$

Diýmek, islendik λ üçin alarys:

$$pr_l\ \lambda\vec{a} = \lambda\ pr_l\,\vec{a}.$$

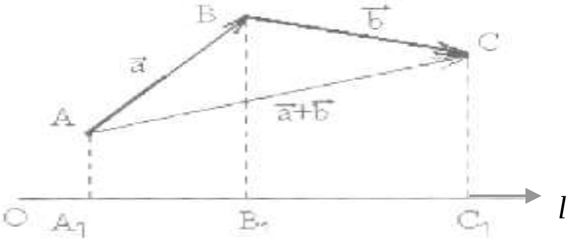
3. Birnäçe wektoryň jeminiň l oka bolan proeksiýasy şol wektorlaryň l oka bolan proeksiýalarynyň jemine deňdir. Aňsatlyk üçin bu häsiýeti $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ iki wektor üçin subut edeliň. $\vec{b}$ wektoryň $\vec{a}$ wektora görä nähili ýerleşendigine garamazdan, ony ugryny üýtgetmezden öz-özüne parallel edip süýşirip

$\vec{a}$ wektoryň ahyry $\vec{b}$ wektoryň başlangyjy bolar ýaly edip bileris. 29-njy suratdan görüşi ýaly

$$pr_l\,(\vec{a}+\vec{b}) = A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Emma $pr_l\vec{a} = A_1B_1;\quad pr_l\vec{b} = B_1C_1$

Bu deňliklerden $pr_l\,(\vec{a}+\vec{b}) = pr_l\,\vec{a} + pr\vec{b}$ alarys. Bu häsiýet islendik sandaky wektorlar üçin hem edil şeýle subut edilýär.



29-njy surat.

Subut edilen üç häsiýetden aşakdaky netijeleri alýarys.

1. *Eger* $\vec{a}=\vec{b}$ *bolsa,onda olaryň şol oka bolan proeksiýalary hem deňdir.* Bu netije birinji häsiýetden gelip çykýar.

2. *Islendik* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sanlar we* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ wektorlar üçin

$$pr_l\,(C_1\overrightarrow{a_1}+C_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+C_n\overrightarrow{a_n})=C_1 pr_l\,\overrightarrow{a_1}+C_2 pr_l\,\overrightarrow{a_2}+\ldots+C_n pr_l\,\overrightarrow{a_n}.$$

Bu netije 2-nji we 3-nji häsiýetden gelip çykýar.

3. *Eger* $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ *wektorlar kollinear bolsalar, onda olaryň dürli oklara bolan proeksiýalary proporsionaldyr.*

Hakykatdan-da, $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$ bolsa $\vec{a}=\lambda\,\vec{b}.$ Ikinji häsiýete görä, islendik l_1 *we* l_2 oklar üçin

$$pr_{l_1}\vec{a}=pr_{l_1}\lambda\vec{b}=\lambda\,pr_{l_1}\vec{b},$$

$$pr_{l_2}\vec{a}=pr_{l_2}\lambda\vec{b}=\lambda\,pr_{l_2}\vec{b}.$$

.

Bu ýerden $\dfrac{pr_{l_1}\vec{a}}{pr_{l_1}\vec{b}}=\dfrac{pr_{l_2}\vec{a}}{pr_{l_2}\vec{b}}=\lambda$ gelip çykýar.

Tersine, $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň dürli oklara bolan proeksiýalary proporsional bolsalar, olar kollineardyrlar diýen netijäni subut etmek örän aňsatdyr. Şonuň üçin hem iki wektoryň dürli oklara bolan proeksiýalarynyň proporsianallygyna iki wektoryň kollinearlyk şerti diýilýär.

B e l l i k. 1) Umumy başlangyja getirilen $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň arasyndaky burç diýlip, şol wektorlaryň polo£itel ugurlarynyň emele getirýän, 180^o-dan kiçi bolan, burçuna aýdylýar; we $\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}$ bilen belgilenýär.2) $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proeksiýasy diýip, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora kollinear we $\vec{b}$ wektor bilen ugurdaş l oka bolan proeksiýasyna aýdylýar.Ol $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ bilen belgilenýär. Açyk görnüşi ýaly

$pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\ \hat{,}\ \vec{b}).$

3 - n j i m e s e l e.Uzynlygy 5-e deň bolan $\vec{a}$ wektor $\vec{b}$ wektor bilen 60^o burç emele getirýär. $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ wektora bolan proeksiýasyny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. $pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\ \hat{,}\ \vec{b}) = 5\cdot\cos 60^o = 2{,}5$

§ 5. Wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy.

Wektory bazisler boýunça dagytmak

K e s g i t l e m e. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ **wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy diýlip,**

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}, +\alpha_2\overrightarrow{a_2}, +\alpha_3\overrightarrow{a_3}, +...+\alpha_n\overrightarrow{a_n} \quad (3\text{-}10)$$

görnüşde ýazylan wektora aýdylýar.

Bu ýerde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ hakyky sanlardyr. Eger $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$ bolsa, onda $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ wektorlaryň çyzykly kombinasiýasyna triwial kombinasiýa diýilýär.

K e s g i t l e m e. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ **wektorlaryň triwial bolmadyk haýsy-da bolsa, bir çyzykly kombinasiýasy nula deň bolsa, ýagny** $\alpha_1 \overrightarrow{a_1}, +\alpha_2 \overrightarrow{a_2}, +\alpha_3 \overrightarrow{a_3}, + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$ we $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$ **bolsa, onda** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ **wektorlara çyzykly baglanyşykly wektorlar diýilýär.** Çyzykly baglanyşykly wektorlaryň iň bolmanda biri galan wektorlaryň çyzykly kombinasiýasy hökmünde aňladylyp bilner.

$\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ wektorlaryň triwial kombinasiýasyndan başga nula deň çyzykly kombinasiýasy bolmasa, ýagny $\alpha_1 \overrightarrow{a_1}, +\alpha_2 \overrightarrow{a_2}, + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0$ deňlikden $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ gelip çyksa, onda ol wektorlara çyzykly baglanyşyksyz wektorlar diýilýär.

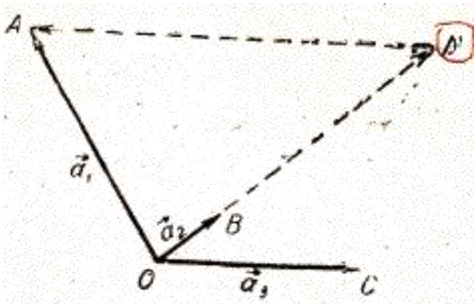
Wektorlaryň çyzykly baglylyk düşünjesi matematikada möhüm düşünjeleriň biridir. Wektorlaryň çyzykly baglylygyna degişli aşakdaky teoremalary subut edeliň.

1-n j i t e o r e m a. ***Kollinear wektorlar çyzykly baglanyşykly wektorlardyr.***

Biz bu teoremany 3-nji babyň 2-nji paragryfynda subut edipdik.

2-n j i t e o r e m a. ***Ikiden köp komplanar wektorlaryň çyzykly baglanyşygy bardyr.***

Goý, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \; ..., \overrightarrow{a_n}$ komplanar wektorlar bolsunlar, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ üç wektory alalyň we olary umumy O başlangyja getireliň.



30-njy surat.

Olar komplanar bolanlary üçin bir tekizlikde ýatýarlar. Berlen wektorlaryň haýsy-da bolsa biri beýlekisine kollinear, meselem $\overrightarrow{a_1} \,//\, \overrightarrow{a_2}$ bolsa, onda 1-nji teorema esasynda

$$\overrightarrow{a_1} = \lambda \overrightarrow{a_2} + O \cdot \overrightarrow{a_3}$$

çyzykly baglanyşygyny ýazyp bileris.

Berlen $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ *we* $\overrightarrow{a_3}$ wektorlaryň hiç biri beýleki ikisine kollinear däl diýeliň. $\overrightarrow{a_1}$ wektoryň A ujundan tä $\overrightarrow{a_2}$ wektoryň ýatan göni çyzygy bilen kesişýänçä $\overrightarrow{a_3}$ wektora kollinear wektor $\overrightarrow{NA}$ geçireliň. 30-njy suratdan alarys

$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NA}. \quad \overrightarrow{ON} \,//\, \overrightarrow{OB} \text{ we } \overrightarrow{NA} \,//\, \overrightarrow{OC} \qquad (\gamma)$$

1-nji teorema görä

$$\overrightarrow{ON} = \alpha \vec{a}_2; \ \ \overrightarrow{NA} = \beta \ \overrightarrow{a_3}$$

$\overrightarrow{ON}$ *we* $\overrightarrow{NA}$ wektorlaryň bahalaryny (γ) deňlige goýup alarys:

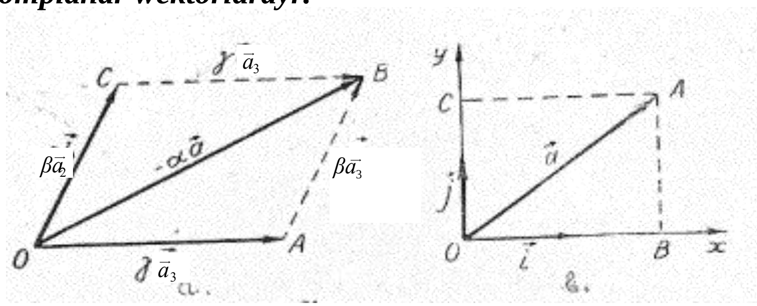
$$\overrightarrow{a_1} = \alpha \overrightarrow{a_2} + \beta \overrightarrow{a_3}. \qquad (3\text{-}11)$$

Diýmek, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ komplanar wektorlar hemişe çyzykly baglanyşykda bolýarlar.Eger şeýle bolsa, onda teoremanyň subudy, şübhesiz bolýan

$$\overrightarrow{a_1} = \alpha \overrightarrow{a_2} + \beta \overrightarrow{\alpha_3} + 0 \cdot \overrightarrow{a_4} + ... + 0 \cdot a_n$$

deňlikden gelip çykýar.

T e r s t e o r e m a. ***Eger*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ ***wektorlaryň arasynda triwial bolmadyk çyzykly daglanyşyk bar bolsa, onda olar komplanar wektorlardyr.***



31-nji surat.

Dogrudan hem, goý $\alpha \overrightarrow{a_1} + \beta \overrightarrow{a_2} + \gamma \overrightarrow{a_3} = 0$ bolsun, $\beta \overrightarrow{a_2}$ wektory we $\gamma \overrightarrow{a_3}$ wektory umumy bir başlangyja getirirp, bu iki wektoryň üstünde parallelogram gursak, onda $-\alpha \overrightarrow{a_1}$ onuň umumy başlangyçdan çykýan diagonaly bolar we olar bilen bir tekizlikde ýatar.

N e t i j e . *Tekizlikde ikiden köp çyzykly baglanyşyksyz wektor bolup bilmez.*

$\overrightarrow{a_1}$ wektoryň (3-11) deňlik bilen aňladylyşyna, $\overrightarrow{a_1}$ wektoryň $\overrightarrow{a_2}$ we $\overrightarrow{a_3}$ *bazisde dagadylşy* diýilýär, α we β sanlara *dagytmanyň koeffisientleri diýýärler*.Eger bazis wektorlar özara perpendikulýar bolsa, onda oňa *orthogonal bazis* diýilýär.

Eger bazis wektorlar dekart koordinata sistemasynyň oklaryna parallel hem-de birlik wektorlar bolsalar, onda olara dekart bazisi diýilýär. Adatça abssissalar okundaky birlik wektor $\vec{i}$, ordinatalar okundaky birlik wektor $\vec{j}$ bilen belgilenýär we olara ortlar hem diýiliýär. Tekizlikde berlen islendik $\overrightarrow{a}$ wektory gönüburçly koordinatalar sistemasynyň başlangyjyna getirsek we şol $\overrightarrow{a}$ wektoryň ahyryndan koordinatalar oklaryna tä koordinata oklary bilen kesişýänçä parallel çyzyklar geçirsek, onda *OBAC* gönüburçlugy alarys (31-nji sur). Suratdan görnüşi ýaly

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

bolar. $pr_{ox}\vec{a} = x,\quad pr_{oy}\vec{a} = y,$ bilen belgilesek, onda $\overrightarrow{OB} = \vec{xi};\ \ \overrightarrow{OC} = \vec{yj};\ we\, \vec{a} = \vec{xi} + \vec{yi}$ bolar . (3-11^1).

(3-11^1) formula $\overrightarrow{a}$ wektoryň *dekart bazisinde dagadylyşy* diýilýär. (3-11^1) görnüşdäki deňlik gysgalyk üçin simwoliki

$\overrightarrow{a}=\{x;y\}$ görnüşde hem ýazylýar. Meselem, $\overrightarrow{a}=5\vec{i}-2\vec{j}$ wektor, $\overrightarrow{a}=\{5;-2\}$ görnüşde ýazylýar.

3-n j i t e o r e m a. ***Hiç bir ikisi özara kollinear bolmadyk $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}, we\ \overrightarrow{a_3}$ komplanar wektorlaryň (3-11)deňlik bilen aňladylýan çyzykly baglanyşygy ýeke-täkdir.***

Goý, $\overrightarrow{a_1}$ wektoryň iki dürli dagadylyşy bar diýeliň:

$$\overrightarrow{a_1}=\alpha_1\overrightarrow{a_2}+\beta_1\overrightarrow{a_3}\ we\ \overrightarrow{a_1}=\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\beta_2\overrightarrow{a_3}$$

Bu deňliklerden alarys:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_2}+\beta_1\overrightarrow{a_3}=\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\beta_2\overrightarrow{a_3}$$

ýa-da $$(\alpha_1-\alpha_2)\overrightarrow{a_2}+(\beta_1-\beta_2)\overrightarrow{a_3}=0$$

Eger-de $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2\neq 0$ bolsa, onda $\overrightarrow{a_2}$ we $\overrightarrow{a_3}$ wektorlar collinear bolardylar. Teoremanyň şertine görä $\overrightarrow{a_2}$ we $\overrightarrow{a_3}$ wektorlar kollinear däldirler.

Diýmek, $\alpha_1-\alpha_2=0$ we $\beta_1-\beta_2=0$ ýa-da $\alpha_1=\alpha_2$ we $\beta_2=\beta_2$, ýagny

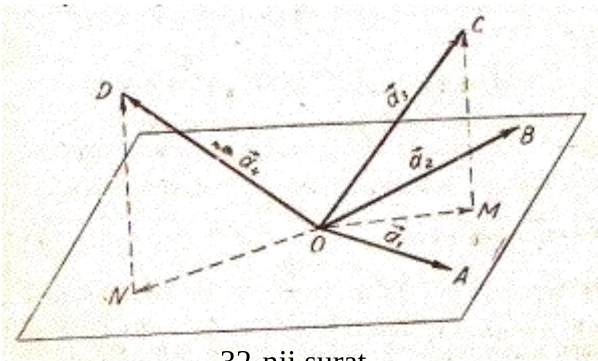
α we β sanlar ýeke-täkdir.

4-n j i t e o r e m a.***Giňişlikde üçden köp wektoryň hemişe triwial bolmadyk baglanyşygy bardyr.***

Goý, $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\ (n\geq 4)$ wektorlar berlen wektorlar bolsun. $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3},\overrightarrow{a_4}$, wektorlary alalyň.Bu wektorlaryň haýsy bolsa-da birisi beýlekisine kollinear bolsa, onda 1-nji teorema görä olaryň çyzykly baglanyşygy bolar.

Berlen wektorlaryň käbir üçüsi komplanar bolsa, onda 2-nji teorema görä olaryň çyzykly baglanyşygy bolar.

Goý $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$, wektorlaryň hiç bir üçüsi komplanar däl diýeliň. Berlen wektorlary umumy 0 başlangyja getireliň $\overrightarrow{a_1}\ we\ \overrightarrow{a_2}$ wektorlaryň tekizligine $\overrightarrow{a_3}\ we\ \overrightarrow{a_4}$ wektoryň ahyryndan perpendikulýar geçireliň (32-nji sur.). Bu perpendikulýarlaryň M we N esaslaryny O başlangyç bilen birleşdireliň. $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ wektorlaryň; hem-de $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{a_3}$ wektorlaryň $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ wektorlaryň hem-de $\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ND}, \overrightarrow{a_4}$ wektorlaryň üç-üçden komplanar bolanlary üçin, 2-nji teorema görä aşakdakylary ýazyp bileris.



32-nji surat

$$\overrightarrow{OM} = k_1\ \overrightarrow{a_1} + p_1\,\overrightarrow{a_2}; \qquad \overrightarrow{ON} = k_2\ \overrightarrow{a_1} + p_2\,\overrightarrow{a_2}$$

$$\overrightarrow{CM} = k_3\ \overrightarrow{OM} + p_3\,\overrightarrow{a_3} = k_1k_3\ \overrightarrow{a_1} + p_1\,k_3\overrightarrow{a_2} + p_3\,\overrightarrow{a_3} \qquad (3-12)$$

$$\overrightarrow{ND} = k_4\ \overrightarrow{ON} + p_4\,\overrightarrow{a_4} = k_2k_4\ \overrightarrow{a_1} + p_2\ p_4\overrightarrow{a_2} + p_4\,\overrightarrow{a_4} \qquad (3-13)$$

Wektor $\overrightarrow{MC}\ we\ \overrightarrow{ND}$ şol bir Q tekizlige perpendikulýar bolanlary üçin kollineardyrlar, şoňa görä-de

$$\overrightarrow{MC} = l \cdot \overrightarrow{ND} \tag{3-14}$$

(3-12) – (3-14) deňliklerden hiç biri nula deň bolmadyk käbir m_1, m_2, m_3, m_4 sanlar üçin

$$m_1 \overrightarrow{a_1} + m_2 \overrightarrow{a_2} + m_3 \overrightarrow{a_3}, m_4 \overrightarrow{a_4} = 0 \tag{3-15}$$

alarys. Indi biz islendik $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ (n>4) wektorlar üçin şübhe döretmeýän

$$m_1 \overrightarrow{a_1} + m_2 \overrightarrow{a_2} + m_3 \overrightarrow{a_3}, m_4 \overrightarrow{a_4} + 0 \cdot \overrightarrow{a_5} + ... + 0 \cdot \overrightarrow{a_n} = 0$$

deňligi ýazyp bileris.Teorema subut edildi.

(3-15) deňlikden wektorlaryň islendik birini , meselem, $\overrightarrow{a_4}$ wektory beýlekiler arkaly aňladyp bileris:

$$\overrightarrow{a_4} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3} \tag{3-16}$$

$\overrightarrow{a_4}$ wektoryň (3-16) deňlik bilen aňladylyşyna $\overrightarrow{a_4}$ wektoryň $\overrightarrow{a_1}$ $\overrightarrow{a_2}$ $\overrightarrow{a_3}$ basisde dagadylyşy diýilýär. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ sanlara dagytmanyň koeffisiýentleri diýilýär

5-n j i t e o r e m a. $\overrightarrow{a_4}$ ***wektoryň komplanar bolmadyk*** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3},$ ***wektorlar bazisinde dagadylyşy ýeke-täkdir.***

Goy, $\overrightarrow{a_4}$, wektoryň

$$\overrightarrow{a_4} = \alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3}$$

we

$$\overrightarrow{a_4} = \beta_1\overrightarrow{a_1} + \beta_2\overrightarrow{a_2} + \beta_3\overrightarrow{a_3}$$

iki dürli dagadylyşy bar diýeliň.
Bu iki deňlikden alarys.

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overrightarrow{a_2} + (\alpha_3 - \beta_3)\overrightarrow{a_4} = 0 \qquad (3\text{-}17)$$

(3-17) deňlikde käbir i üçin $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ bolsa, onda $\overrightarrow{a_i}$ wektory beýleki iki wektor arkaly aňladyp bolar, ýagny

$\overrightarrow{a}_2,$ wektorlar komplanar bolarlar. Şerte görä olar kompalar däl. Diýmek, (3-17) deňligiň dogry bolmagy, üçin $\alpha_i = \beta_i (i = 1,2,3)$ bolmaly. Teorema subut edildi.

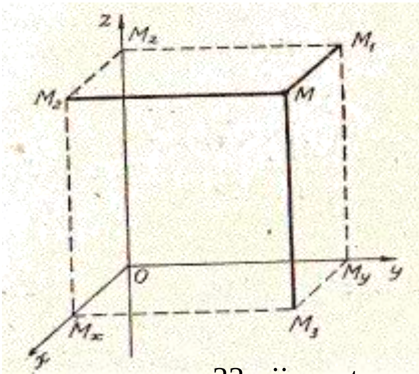
§ 6. Giňişlikde göniburçly koordinatalar sistemasy.

Giňişlikde dekart bazisi.

Giňişlikde nokadyň ornuny kesgitlemäge mümkinçilik berýän sistema girizilen bolsa, onda giňişlikde koordinatalar sistemasy girizilipdir diýilýär. Giňişlikde girizmäge mümkin bolan koordinatalar sistemasynyň biri-de gönüburçly dekart koordinatalar sistemasydyr.

Bir nokatda kesişýän özara perpendikulýar üç okdan ybarat bolan koordinatalar sistemasyna gönüburçly ýa-da dekart koordinatalar sistemasy diýilýär. Oklaryň birinjisine abssissalar oky, ikinjisine ordinatalar oky, üçünjisine applikatalar oky diýilýär we degişlilikde *OX*, *OY*, *OZ* bilen belgilenýär. Üç okuň kesişýän nokadyna, ýagny *O* nokada, koordinatalaryň başlangyjy diýilýär (33-nji sur.).

Koordinatalaryň sag ulgamy üçin, *OZ* okuň polo£itel ugryndan seredýän gözesçä *OX* oky *O* nokadyň töwereginde sagat diliniň tersine $\frac{\pi}{2}$ burç öwrülende onuň polo£itel bölegi *OY* okuň polo£itel bölegi bilen gabat gelmelidir. Koordinatalaryň çep ulgamy üçin, *OZ* okuň polo£itel ugryndan seredýän gözegçä *Ox* oky *O* nokadyň töwereginde sagat diliniň ugryna $\frac{\pi}{2}$ burç öwrülende onuň



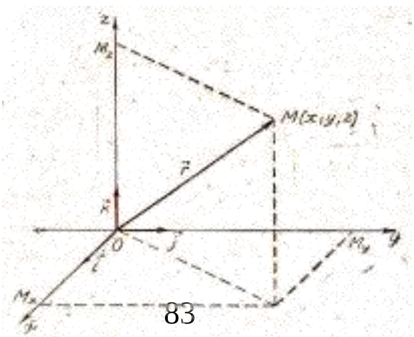
33-nji surat.

polo£itel bölegi *OY* okuň polo£itel bölegine gabat gelmelidir.*OX* we *OY;OX* we *OZ; OY* we *OZ* oklaryň üstünden geçýän tekizliklere koordinata tekizlikleri diýilýär hem-de köplenç *XOY, XOZ, YOZ* tekizlikleri diýilýär.Bu üç tekizlikler giňişligi sekiz bölege bölýär.Ol böleklere 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8-nji oktantlar diýilýär.Ilkinji dört octant *XOY* tekizliginden ýokarda, soňky dört octant (5, 6, 7, 8-nji oktantlar) *XOY* tekizliginden aşakda ýerleşýär.Goý, bize giňişlikde erkin *M* nokat berilsin. *M* nokatdan *XOY, YOZ, XOZ* tekizliklere $M_1 M$, M_2M, M_3M, perpendikulýarlary geçireliň. Bu üç perpendikulýaryň ululygynyň *M* nokadyň giňişlikdäki ornuny gutarnykly kesgitleýändigi düşnüklidir. Eger biz M_1 nokatdan *OY* we *OZ* oklara, M_2 nokatdan *OX* we *OZ* oklara M_3 nokatdan *OX* we *OY* oklara perpendikulýar geçirsek, onda OM_x M_3 M_y

$M_1\ M_z\ M_2\ M$ parallelepipedi alarys $M_1M = OM_x$; $M_2M = OM_y$; $M_3M = OM_z$ sanlara M nokadyň koordinatalary diýilýär hem-de olar degişlilikde x, y, z bilen belgilenýär. Ýazuwda M nokadyň koordinatalary M nokadyň sag tarapynda ýaýyň içinde $M\ (x, y, z)$ görnüşde ýazylýar. Giňişlikde islendik $M(x,y,z)$ nokadyň ornuny başlangyjy koordinatalar başlangyjynda, ahyry M nokatda bolan $\overrightarrow{OM}$ wektoryň berilmegi hem kesgitleýär. $\overrightarrow{OM}$ wektora $M\ (x,y,z)$ nokadyň radius wektory diýilýär we ol köplenç $\vec{r}$ bilen belgilenýär.

Degişliklikde OX, OY, OZ oklara parallel bolan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik wektorlara dekart bazisi ýa-da ortlar diýilýär. Geçen paragrafyň 4-nji teoremasynda subut edilen baglanyşygy $\overrightarrow{OM}$ radius-wektor üçin dekart bazisi arkaly ýazsak alarys:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{xi} + \overrightarrow{yj} + \overrightarrow{zk} \qquad (3\text{-}16^1)$$



34-nji surat.

Bu ýerde x, y, we z koeffisientler M nokadyň koordinatalarydyr (34-nji sur.).

Goý, $\vec{a}$ islendik wektor bolsun, ony $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ bazise görä(3-16) formula laýyklykda dagydyp ýazalyň:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_x i} + \overrightarrow{a_y j} + \overrightarrow{a_z k} \qquad (3\text{-}16^{11})$$

Bu ýerde a_x, a_y, a_z, koeffisientler $\vec{a}$ wektoryň degişlilikde OX, OY, OZ oklara bolan proeksiýalarydyr. a_x, a_y, a_z, sanlara

$\vec{a}$ wektoryň koordinatalary hem diýilýär. (3-16[11]) görnüşdäki ýazuw gysgalyk üçin köplenç aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\overrightarrow{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z,\}$$

Indi koordinatalary berlen wektorlaryň jemini tapalyň. Goý, $\overrightarrow{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z,\}$, $\overrightarrow{b} = \{b_x,\ b_y,\ b_z,\}$ berlip $\vec{a} + \vec{b}$ wektory tapmaklyk talap edilsin. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlary (3-16[//]) formula görä ýazalyň we $\vec{a}$ + $\vec{b}$ jemde ýerine goýalyň

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}).$$

ýa-da

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.$$

Diýmek, koordinatalary bilen berlen iki wektoryň jeminiň koordinatalary goşulyjylaryň bir atly koordinatalaryny goşmak bilen tapylýar.

$\overrightarrow{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z,\}$ koordinatalary bilen berlen wektory λ sana köpeltmek üçin onuň koordinatalaryny şol λ sana köpeltmek ýeterlikdigini, ýagny $\overrightarrow{\lambda\ a} = \{\lambda \vec{a}_x,\ \lambda a_y, \lambda\, a_z,\}$bolýanyny hem belläp geçeliň.

Biziň 4-nji paragrafda getirip çykaran iki wektoryň kollinearlyk şertini koordinatalary berlen $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wekotorlar üçin ýazsak

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

deňlikleri, ýagny koordinatalary bilen berlen iki wektoryň kollinearlyk şertini alarys

4-n j i m e s e l e. Başlangyjy $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ahyry $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nokatda bolan $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalaryny tapmaly.

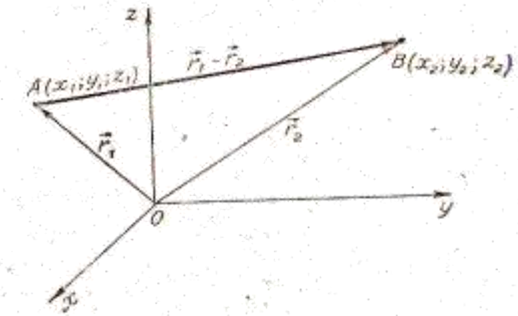
Ç ö z ü l i ş i. A we B nokatlaryň $\vec{r}_1$ we $\vec{r}_2$ radius wektorlaryny geçireliň.(3-16[1]) görä

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\vec{i} + y_2\vec{j} + z_1\vec{k}, \qquad \overrightarrow{r_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

Bu ýerden

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - x_1\vec{i} - y_1\vec{j} - z_1\vec{k} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1 : z_2 - z_1\}.$$

Biz bu netijäni wektoryň oka bolan proeksiýasynyň 3-nji häsiýetini peýdalanyp, gös-göni hem ýazyp bilerdik.



35-nji surat.

N e t i j e. *Başlangyç A we ahyrky B nokatlarynyň koordinatalary belli bolan* $\overrightarrow{AB}$ *wektoryň koordinata oklaryna bolan proýeksiýalary, B nokadyň degişli koordinatalarynydan A nokadyň degişli koordinatalarynyň aýrylmagyna deňdir.*

Meselem , başlangyjy $A(3; 5; 1)$, ahyry B (-2; 1; 9) nokatlarda bolan $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalary – 2 – 3 = - 5; 1 – 5 = – 4; 9 – 1 = 8; deňdir. Diýmek, $\overrightarrow{AB} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ ýa-da $\overrightarrow{AB} = \{-5; -4; 8\}$ bolar.

5-n j i m e s e l e. $\vec{a} = \{3;\ 2; 1\}$ wektory $\vec{b} = \{6;\ 1;\ 2\}$, $\vec{c} = \{4;\ 5; -2\}$, $\vec{d} = \{1;\ -5;\ 4\}$ bazisde dagydyp ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. (3-16) formula görä ýazýarys.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c} + \alpha_3\vec{d}$$

α_1, α_2, α_3, sanlary kesgitlemek üçin bu deňlikde berlen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ wektorlaryň $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, dekart bazisde dagytmalaryny goýalyň:

$$3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}=\alpha_1\left(6\vec{i}+\vec{j}+2k\right)+\alpha_2\left(4\vec{i}+\overrightarrow{5j}+\overrightarrow{2k}\right)+$$
$$\alpha_3\left(\vec{i}+\overrightarrow{5j}+\overrightarrow{4k}\right)=(6\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3)\vec{i}+$$
$$(\alpha_1+5\alpha_2+5\alpha_3)\,j+(2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)\,k$$

Bu ýerden 4-nji paragryfyň 1-nji netijesine görä α_1, α_2, α_3 näbelliler üçin çyzykly üç deňleme sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} 6\alpha_1+4\alpha_2+\alpha\ \ =3 \\ \alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3=2 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=1 \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp alarys.

$$\alpha_1=\frac{31}{8};\ \alpha_2=-\frac{33}{8};\ \alpha\ \ =-\frac{30}{8};$$

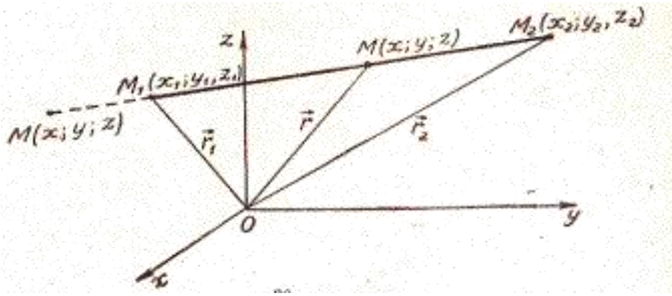
$$\text{Şeýlelikde } \vec{\alpha}\ \ =\frac{31}{8};\vec{b}-\frac{33}{8};\vec{c}-\frac{30}{8}\vec{d}.$$

6-n j y m e s e l e. $M_1(x_1\ y_1\ z_{,1})$, $M_2(x_2\ y_2\ z_{,2})$ nokatlardan geçýän göni çyzygyň üstünde $M_1\ M=\ \lambda M\ M_2$ bolar ýaly $M(x,\ y,\ z_{,})$ nokady tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. 36-njy suratdan görnüşine görä

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \{x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z\}.$$



36-nji surat

Meseläniň şertine görä $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\ \mathrm{M}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{M}\ \ \mathrm{M}_2}$ bolmaly. Diýmek,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{z-z_1}{z_2-z} = \lambda;$$

$$ya\text{–}da: x-x_1 = (x_2-x)\lambda,\ y-y_1 = (y_2-y)\lambda;\ z-z_1 = (z_2-z)\lambda$$

Bu deňliklerden alarys

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

$\lambda>0$ bolsa M nokat $M_1\ M_2$ kesimiň üstünde, $\lambda<0$ bolsa, M nokat $M_1\ M_2$ kesimiň dowamynyň üstünde ýatar. Çünki $\lambda>0$ bolanda $\overrightarrow{M_1M}$ *we* $\overrightarrow{MM_2}$ wektorlar bir ugra. (Bu meselä öň garalypdy.) $\lambda<0$ bolanda garşylykly ugra ugrukdyrylan bolýarlar.

§ 7. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly we onuň esasy häsiýetleri

K e s g i t l e m e. $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ **iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly diýlip, $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň uzynlyklarynyň şol wektorlaryň arasyndaky burçuň kosinusyna köpeldilmegine deň bolan skalýar ululyga aýdylýar. Ol, $(\vec{a}, \vec{b})$** ýa-da $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bilen belgilenýär. Kesitlemä görä

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right) \qquad (3-18)$$

(3 – 18) deňligiň sag bölegini wektoryň oka bolan proýeksiýasynyň 1-nji häsiýetinden peýdalanyp, aşakdaky ýaly ýazyp bileris.

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right) = |\vec{a}|\left(|\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right)\right) = |\vec{a}| \; pr_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right) = |\vec{b}|\left(|\vec{a}| \cos\left(\vec{a}, \widehat{\ } \ \vec{b}\right)\right) = |\vec{b}| \; pr_{\vec{b}} \vec{a}$$

Onda (3 – 18) deňlik aşakdaky görnüşi alar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \; pr_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \; pr_{\vec{b}} \vec{a} \qquad (3-19)$$

(3 – 19) deňlige laýyklykda iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyna aşakdaky ýaly kesgitleme hem berip bileris.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly şol wektorlaryň biriniň uzynlygynyň beýleki wektoryň, birinjä bolan proeksiýasyna köpeldilmegine deňdir.

Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň skalýar sandygyny berk bellemek gerek. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň esasy häsiýetlerine garalyň.

1. Iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly, berlen wektorlaryň biri nula deň bolanda ýa-da berlen wektorlar özara perpendikulýar bolanda nula deňdir we diňe şol halda nula deňdir.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$ ýagny wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly orun çalşyrma kanunyna boýundyr.1-nji we2-nji häsiýetiň dogrulygy örän aýdyň bolany üçin subudyny getirmeýäris.

3. Iki wektoryň jeminiň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyly şol wektorlaryň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Başga söz bilen aýdylanda, iki wektoryň jeminiň üçünji wektora skalýar köpeltmek hasyly köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyna boýundyr.

Hakykatdanda, (3 – 19) formula görä

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\ \ pr_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$ ýazyp bileris.

Wektoryň oka bolan proeksiýasynyň 3-nji häsiýetine görä

$$pr_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)= pr_{\vec{c}}\ \ \vec{a}+ pr_{\vec{c}}\,\vec{b}.$$

Diýmek,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot \vec{c} =\left|\vec{c}\right|\ \left(pr_{\vec{c}}\,\vec{a}+ pr_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)=\vec{c}\cdot \vec{a} +\vec{c}\cdot\vec{b}= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot \vec{c}.$$

4.Islendik skalýar λ köpeldiji üçin, wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly köpeltmegiň utgaşdyrma kanunyna boýun egýär:

$$\lambda(\vec{a},\ \vec{b}\,)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right).$$

Bu deňlik bilen aňladylýan skalýar köpeltmek hasyllarynyň üçüsiniň hem şol bir sana deňdigini görkezeliň.

$$\lambda\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)= \lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\ \widehat{}\ \vec{b}\right),$$

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\ pr_{\vec{b}}\left(\lambda\vec{a}\right).$$

Wektoryň oka bolan proeksiýasynyň 2-nji häsiýetine görä

$$pr_{\vec{b}}\ \lambda\vec{a}=\lambda pr_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Diýmek,

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\lambda\ pr_{\vec{b}}\,\vec{a}= \lambda\left|\vec{b}\right|\ pr_{\vec{b}}\,\vec{a}= \lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\ \widehat{}\ \vec{b}\right)$$

Edil şuňa meňzeş edip alarys.

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\;\widehat{}\;\vec{b}\right)`$$

5. Wektoryň öz-özüne skalýar köpeltmek hasyly şol wektoryň uzynlygynyň kwadratyna deňdir.

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^{2}.$$

Bu häsiýet iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden gelip çykýar.

§ 8. Koordinatalary bilen berlen wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly

Goý, $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1;\ \}$we $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2;\ \}$ berlen bolsun. Bu iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyny tapalyň.

$$\vec{a}= x_1\,i + y_1\,j + z_1\,k,$$
$$\vec{b}= x_2\,i + y_2\,j + z_2\,k$$

deňlikleri ulanyp alarys.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k})\,(x_{21}\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}).$$

Wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylynyň 3-nji häsiýetine laýyklykda biz bu iki ýaýy köpagzany köpagza köpeldiliş usuly bilen köpeldip bileris.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2\vec{i_1}\,\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\,\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\,\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\,\vec{j}+$$
$$+z_1y_2\vec{k}\,\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Emma özara perpendikulýar wektorlar bolany üçin

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\,\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0;$$

$$\text{we}\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=j\cdot j=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

Şoňa görä-de alarys.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \qquad (3-21)$$

Diýmek, *koordinatalary belli bolan iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly bir atly koordinatalarynyň köpeltmek hasyllarynyň jemine deňdir.*

(3 – 21) deňlikden iki wektoryň koordinat görnüşdäki perpendikulýarlyk şerti gelip çykýar. Eger $\vec{a}\perp\vec{b}$ bolsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$ ýa-da $x_1x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$

(3 – 21) formuladan koordinatalary bilen berlen wektoryň uzynlygyny tapmak bolar. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ formulany ulanyp taparys:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \qquad (3-22)$$

Biz indi koordinatalary belli bolan islendik $\vec{a}$ wektoryň koordinata oklary bilen haýsy burç emele getirýändigini örän

$$x=pr_{ox}\vec{a}=\overrightarrow{|a|}\cos\alpha$$

aňsatlyk bilen kesgitläp bileris. Goý, $\vec{a} = \{x; y; z\}$bolsun we ox, oy, oz oklar bilen degişlilikde α, β, γ burçlary emele getirsin. $(3 - 8)$ formula boýunça

$y = |\vec{a}| \cos\beta$; $z = |\vec{a}| \cos\gamma$ ýazyp bileris.

Bu ýerden alarys

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-23);$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-24);$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (3-25)$$

(3 – 23)- (3 – 25) deňlikleri ilki kwadrata göterip, soňra agzaba-agza goşup alarys:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

K ä b i r m e s e l e l e r e g a r a l y ň.

7-n j i m e s e l e. $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *we* $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. M_1 we M_2 nokatlaryň arasyndaky uzaklyk $\overrightarrow{M_1M_2}$ wektoryň uzynlygyna deňdir. Emma $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$(şu babyň 3-nji meselesine ser.). Şoňa görä-de

$$|M_1M_2| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)}.$$

8-n j i m e s e l e. $\vec{a} = \{x_1 \ y_1 \ z_1\}$ *we* $\vec{b}\{x_2 \ y_2 \ z_2\}$ wektorlaryň arasyndaky burçy kesgitlemeli.

Ç ö z ü l i ş i $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny ýazalyň.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\,(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b})$$

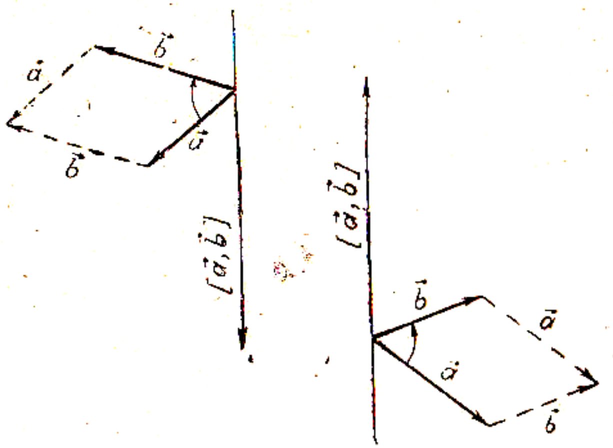
bu ýerden $\cos\,(\vec{a}_1 \hat{\ } \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, ýa-da

$$\cos\,(\vec{a}_1 \hat{\ } \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

§ 9. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly we onuň esasy häsiýetleri

K e s g i t l e m e. **1) uzynlygy san taýdan** $\vec{a}$ **we** $\vec{b}$ **wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deň bolan, 2)** $\vec{a}$ **we** $\vec{b}$ **wektorlaryň ikisine-de perpendikulýar bolan, 3) ahyryndan seredilende birinji wektoryň, ikinji wektor bilen gabat gelmegi üçin birinji wektory sagat diliniň hereketiniň tersine kiçi burça öwrülýän edip görkezýän üçinji** $\vec{c}$ **wektora** $\vec{a}$ **we** $\vec{b}$ **wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly diýilýär.**

Iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly $[\vec{a}, \vec{b}]$ýa-da $\vec{a} \times \vec{b}$ ýaly belgilenýär, $\vec{a}$, $\vec{b}$, we $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$ üç wektor sag sistemasyny emele getirýär.



37-nji surat.

$\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanynyň $|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \wedge \vec{b})$ bolany sebäpli

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \wedge \vec{b}) \qquad . (3-26)$$

Wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň esasy häsiýetlerine garalyň.

1. $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektoryň köpeltmek hasyly, bu wektorlaryň biri nul wektor bolan halda ýa-da $\vec{a} \| \vec{b}$ bolan halda we diňe şu iki halda nula deňdir. Bu häsiýet aýdyňdyr.

2. Wektor köpeltmek hasylynda wektorlaryň orny çalyşsa, onda diňe alamaty üýtgär: .

$$\left[\vec{a},\, \vec{b}\right] = -\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$$

Hakykatdan-da, kesgitlemäniň 1-nji punktyna görä $|\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{b}\times\vec{a}\,|$, ýagny $\vec{a}\times\vec{b}$ we $\vec{b}\times\vec{a}$ wektorlaryň uzynlyklary deň. Kesgitlemäniň 3-nji punktyna görä $\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ we $\vec{b}, \vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ üçlükler sag ulgamy emele getirmeli. Bu bolsa $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$ we $\left[\vec{b},\, \vec{a}\right]$ wektorlaryň garşylykly ugrukdyrylandygyny görkezýär. Şoňa göra-de

$$\left[\vec{a},\, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\, \vec{a}\right]$$

3. Skalýar köpeldiji üçin iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly, köpeltmegiň utgaşdyrma kanunyna boýun egýär:

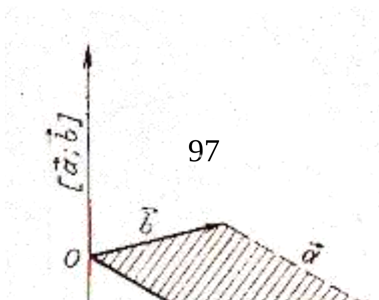
$$\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\lambda\,\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda\,\vec{b}\right]. \qquad (3-27)$$

a) $\lambda = 0$ bolanda (3 - 27) dogry;
b) $\lambda \neq 0$ bolanda

$$\left|\lambda\ \vec{a}\right| = |\lambda|\ \left|\vec{a}\right|;\quad \left|\lambda\ \vec{b}\right| = |\lambda|\ \left|\vec{b}\right|;$$

$$\sin\left(\lambda\,\vec{a},\hat{}\ \vec{b}\right) = \sin\left(\vec{a},\hat{}\ \vec{b}\right);$$

$$\sin\left(\vec{a},\hat{}\ \lambda\ \vec{b}\right) = \sin\left(\vec{a},\hat{}\ \vec{b}\right).$$



38-nj surat

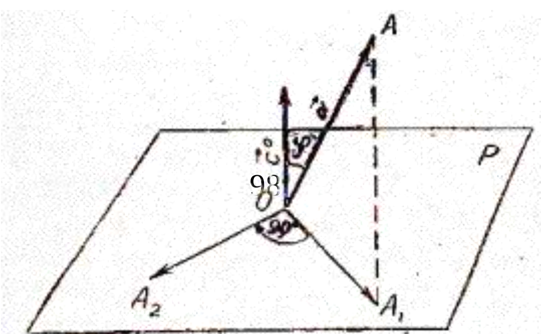
bolýandygyny göz öňünde tutsak, seredýän wektorlarymyzyň üçüsiniň hem uzynlyklarynyň, ugurlarynyň bir meňzeşligi gelip çykýar. Diýmek, (3 – 27) deňlik λ islendik hakyky san bolanda dogrydyr.

4. $\vec{a}+\vec{b}$ wektoryň $\overrightarrow{c^{o}}$ wektora köpeltmek hasyly köpeltmegiň paýlaşdyrma kanunyna boýundyr.

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\overrightarrow{c^{\mathbf{o}}}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^{\mathbf{o}}}+\vec{b}\times\overrightarrow{c^{\mathbf{o}}}.$$

Subut etmek üçin ilki $\vec{a}\times\overrightarrow{c^{o}}$ garalyň.

Bu wektorlary umumy başlangyja getireliň we umumy başlangyçdan $\overrightarrow{c^{o}}$ wektora perpendikulýar bolan P tekizlik geçireliň (39-njy surat.).



39-njy surat

$\overrightarrow{OA}$ wektoryň ahyryndan P tekizlige AA_1 perpendikulýar geçireliň. Şonda $\overrightarrow{OA_1}$ wektor $\overrightarrow{OA}$ wektoryň tekizlikdäki proýeksiýasy bolar.

Bellik. Başlangyjy $\vec{a}$ wektoryň başlangyjynyň ahyry bolsa ahyrynyň P tekizlige bolan proýeksiýasy bilen gabat gelýän wektora $\vec{a}$ wektoryň P tekizlige bolan proýeksiýasy diýilýär. Wektorlaryň tekizlige bolan proýeksiýalary üçin hem wektorlaryň jeminiň proýeksiýasy goşulyjylaryň proýeksiýalarynyň jemine deňdir. Indi $\overrightarrow{OA_1}$ wektory $\overrightarrow{c^o}$ wektoryň ahyryndan seredilende sagat diliniň hereketiniň ugruna tarap 90° öwreliň. Şonda $\overrightarrow{OA_2}$ wektory alarys. $\overrightarrow{OA_2}$ wektor, $\overrightarrow{OA}$ wektoryň proýeksiýasyna perpendikulýar bolany üçin, onuň özüne-de perpendikulýardyr, P tekizlikde ýatany üçin ol $\overrightarrow{c^o}$ hem perpendikulýardyr. $\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{c^o}$ wektoryň arasyndaky burçy φ bilen belgiläliň. Iki wektoryň wektor köpeltmek hasylyna görä

$$\overrightarrow{OA_1} \times \overrightarrow{c^o} = \overrightarrow{OA_2}$$

we

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{c^o}\right| = \left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \left|\overrightarrow{OA_1}\right|$$

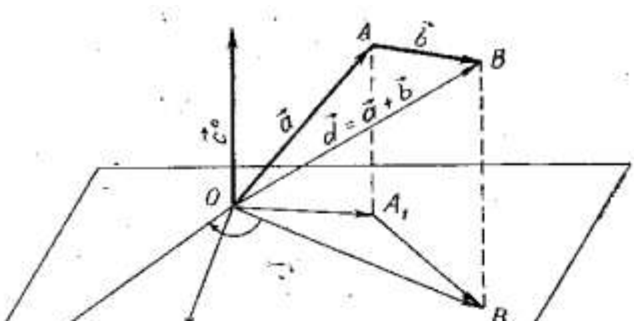
Emma

$$\left|\overrightarrow{OA_1}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cos(90^o-\varphi) = \left|\overrightarrow{OA}\right|\sin\varphi .$$

Bu deňliklerden $\left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right|\sin\varphi$ gelip çykýar. Kesgitlemä görä $\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{c^o}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{c^o}\right|\sin\varphi = \left|\overrightarrow{OA}\right|\sin\varphi$ we $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{c^o}$ wektor $\overrightarrow{OA_2}$ bilen ugurdaş. $\left|\overrightarrow{OA}\right|_2 = |OA|\sin\varphi = \left|\overrightarrow{OA}\times\vec{c}^{\,0}\right|$. Indi soňky deňligi göz oňünde tutup alarys:

$$\overrightarrow{OA}\times c^o = \overrightarrow{OA_2} \quad (3-28)$$

Indi $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\overrightarrow{c^o}$ tapalyň. Suratyň düşnükli bolmagy üçin $\vec{b}$ wektoryň başlangyjyny $\vec{a}$ wektoryň ahyrynda ýerleşdireliň. $\vec{a}$ we $\overrightarrow{c^o}$ wektorlary umumy başlangyja getireliň hem-de başlangyçdan $\overrightarrow{c^o}$ wektora perpendikulýar tekizlik geçireliň. Umumy başlangyç bilen $\vec{b}$ wektoryň ahyryny birleşdireliň (40-njy sur.). $\vec{a}, \vec{b}$ we $\overrightarrow{OB} = \vec{a}+\vec{b}$ wektorlaryň P tekizlige bolan $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ $\overrightarrow{OB_1}$ proýeksiýalaryny O başlangyjyň töwereginde $\overrightarrow{c^o}$ wektoryň ahyryndan seredilende sagat diliniň hereketiniň ugruna 90^o öwreliň. Şonda $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ $\overrightarrow{OB_2}$ wektorlary alarys.



40-njy çyzgy

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{c^{o}}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{c^{o}}$, $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{c^{o}}$ wektor üçin (3–28) formulany ulanyp alarys:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{c^{o}}=\overrightarrow{OA_2},\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{c^{o}}=\overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{c^{o}}=\overrightarrow{OB_2},\ \overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2},$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

Diýmek

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)\times\overrightarrow{c^{o}}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{c^{o}}=\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{c^{o}}+$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{c^{o}}\ \acute{y}a-da\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\overrightarrow{c^{o}}=\vec{a}\times\overrightarrow{c^{o}}+\vec{b}\times\overrightarrow{c^{o}}.$$

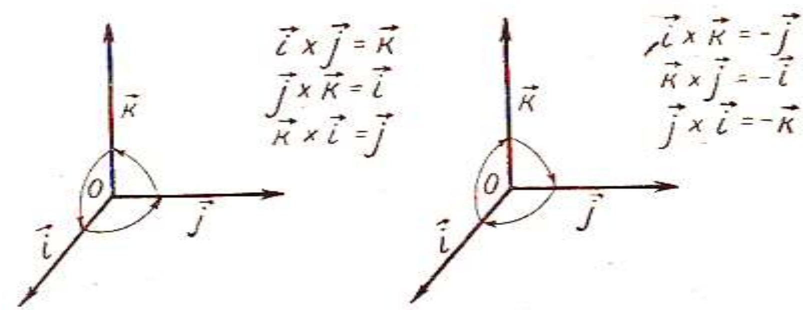
Indi islendik $\vec{c}$ wektor üçin $\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\overrightarrow{c^{o}}$ bolýanyny göz öňünde tutup we soňky deňligiň iki tarapyny hem $\left|\vec{c}\right|$ sana köpeldip, subut etmeli $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ deňligi alarys.

§ 10. Koordinatalary belli bolan iki wektoryň wektor köpeltmek hasyly

Ilki dekart bazisiniň ortlarynyň, ýagny $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ wektorlaryň jübüt-jübütden wektor köpeltmek hasylyny tapalyň.

Kesgitlemä görä

$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0; \ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$



41-nji surat.

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}.$

Dekart bazisiniň ortlarynyň ikisiniň wektor köpeltmek hasyly sag sistemasyny düzýän bolsa üçünjisine deň, çep sistemasyny düzseler üçünjisine ters alamaty bilen deňdir. Sag we çep sistema 41-nji suratda görkezilendir.

Indi koordinatalary belli bolan $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ *we* $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapalyň.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

deňligiň sag böleginiň wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň 3-nji we 4-nji häsiýetlerine laýyklykda, köpagzalaryň köpeldilişine meňzeşlikde we $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

wektorlaryň geliş tertibiniň saklanmalydygyny göz öňünde tutup, dagydyp ýazalyň:

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2\,\vec{i}\times\vec{i}+y_1x_2\,\vec{j}\times\vec{i}+z_1x_2\,\vec{k}\times\vec{i}+x_1y_2\,\vec{i}\times\vec{j}+$$
$$+y_1y_2\,\vec{j}\times\vec{j}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+y_1z_2\,\vec{j}\times\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}.$$

$\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyllary barada ýokarda aýdylanlary göz öňünde tutup alarys:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-y_1x_2\vec{k}+z_1x_2\,\vec{j}+x_1y_2\vec{k}-z_1y_2\vec{i}-x_1z_2\,\vec{j}+y_1z_2\vec{i}=$$
$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.$$

Ýaýlaryň içindäki sanlaryň her biriniň ikinji tertipli kesgitleýji bolýanlygyna görä, $\vec{a}\times\vec{b}$ wektory aşakdaky ýaly ýönekeý görnüşde hem ýazyp bileris:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} \qquad (3-29)$$

ýa – da

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\} \qquad (3-29')$$

(3 – 29) deňligiň sag böleginiň birinji setiriň elementlerine görä dagydylan üçünji tertipli kesgitleýjidigi görünýär.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & y_2\end{vmatrix}. \qquad (3-29^{//})$$

Käbir meselelere seredeliň.
11-nji mesele. Depeleri

$$A\,(x_1;\ y_1;\ z_1),\ B\,(x_2;\ y_2;\ z_2) \text{ we } C\,(x_3;\ y_3;\ z_3)$$

nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektoryň wektor köpeltmek hasylynyň uzynlygy kesgitlemä görä, $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň üstünde gurlan parallelogramyň meýdanyna deňdir. Biziň üçburlugymyzyň S meýdany parallelogramyň meýdanynyň ýarsyna deň, ýagny $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ bolar. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlaryň koordinatalaryny tapýarys.

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},$$
$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}$$

we (3 – 29) formula laýyklykda alarys:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}..\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}_2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}.$$

Eger ABC üçburçlugyň depeleri XOY tekizlikde ýatýan bolsa, ýagny $z_3 = z_2 = z_1 = 0$ bolsa, onda aşakdaky formulany alarys:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2}=$$

$$=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}. \qquad (3-30)$$

12-n j i m e s e l e. $\vec{a}\neq 0$ şert boýunça $\vec{a}=\left[\vec{b},\vec{x}\right]$ bolar ýaly edip $\vec{x}$ wektory tapmak hemişe mümkinmi?

Ç ö z ü l i ş i. $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly bolmagy üçin kesgitlemä görä, $\vec{a}$ wektoryň $\vec{b}$ we $\vec{x}$ wektora perpendikulýar bolmagy zerur. $\vec{b}$ wektoryň üsti bilen $\vec{a}$ wektoryň ugruna perpendikulýar tekizlik geçireliň we şol tekizligiň üstünde islendik bir $\vec{c}$ wektor alalyň. $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{d}$ belgiläliň. Wektor $\vec{a}\parallel\vec{d}$, şoňa görä-de $\vec{a}=\lambda\,\vec{d}$, şeýle hem

$$\lambda\,\vec{d}=\lambda\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\lambda\vec{c}\right].$$

$\lambda\vec{c}=\vec{x}$ edip alsak, onda ol $a=\left[\vec{b},\vec{x}\right]$ meseläniň çözüwi bolar.

13-n j i m e s e l e. Eger $\vec{x}$ wektoryň $\vec{a}=\{5,\,3,\,2\}$ we $\vec{b}=\{1,\,-2,\,4\}$ wektorlara perpendikulýarlygy belli hem-de $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\right)=85$ bolsa, $\vec{x}$ wektory tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. $\vec{a}$ *we* $\vec{b}$ iki wektora perpendikulýar bolan islendik wektor olaryň wektor köpeltmek hasylyna, ýagny $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ wektora kollinear bolmaly. Diýmek,

$$\vec{x}=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\lambda\left(16\vec{i}-18\vec{j}-13\vec{k}\right)$$

$\vec{x}$ bahasyny meseläniň ikinji şertindäki deňlige goýup aalrys:

$$\lambda\left(16\vec{i}-18\vec{j}-13\vec{k}\right)\left(\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}\right)=85$$

ýa-da

$$-85\lambda=85$$

Bu ýerden $\lambda=-1$.Diýmek,

$$\vec{x}=-16\vec{i}+18\vec{j}+13\vec{k}.$$

§ 11. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

$\vec{a}$ **we** $\vec{b}$ **wektorlaryň wektor köpeltmek hasylynyň** $\vec{c}$ **wektora skalýar köpeldilmegine** $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$ **üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly diýilýär** we aşakdaky ýaly belgilenýär.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c} \text{ ýa-da } \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň skalýar ululykdygy aýdyňdyr.

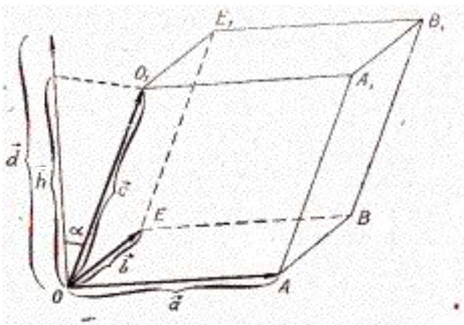
$\vec{a}, \vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylynyň geometrik manysyna düşünmek üçin şol wektorlary umumy O başlangyja getireliň we gapyrgalary degişlilikde $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$

wektora deň bolan parallelepiped guralyň (42-nji surat.). $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{d}$ belgilesek, onda $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \left|\vec{d}\right| \left|\vec{c}\right| \cos\left(\vec{d}, \wedge \vec{c}\right)$ alarys.

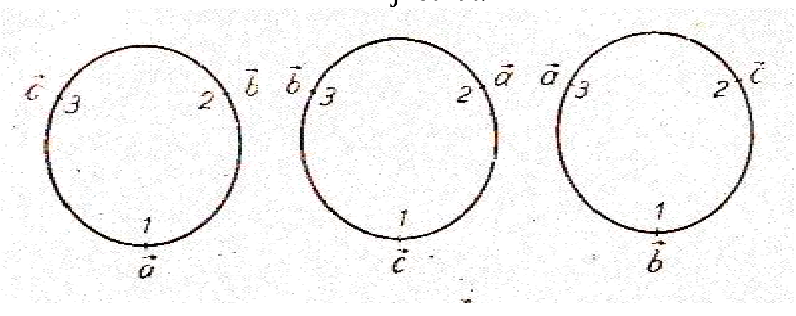
Belli bolşy ýaly $\left|\vec{d}\right|$ san *OABE* parallelogramyň meýdanyna deň $\left|\vec{c}\right| \cos\left(\vec{d}, \wedge \vec{c}\right)$ bolsa parallelepipediň beýikligine deňdir.

Parallelepipediň esasynyň meýdanyny beýikligine köpeltmek hasylynyň onuň göwrümine deňdigine görä

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \pm V \qquad (3-31)$$



42-nji surat.



43-nji surat

Bu ýerde V – parallelepipediň göwrümi. Diýmek $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň geometrik manysy hökmünde şol wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň göwrümini alyp bileris. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň käbir häsiýetine garalyň.

1. Berlen üç wektoryň orunlaryny töwerek boýunça süýşürip üýtgetsek, onda üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly üýtgemeýär:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\left[\vec{c},\ \vec{a}\right]\cdot\vec{b}=\left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\cdot\vec{a}.$$

B e l l i k. Berlen wektorlaryň ornuny töwerek boýunça süýşürip üýtgetmeklige *sikilleýin orun üýtegme* diýilýär. (43-nji surada ser.).

2. Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynda wektorlaryň haýsy bolsa-da biriniň ornuny üýtegtmän, beýleki ikisiniň ornuny üýtgetseň, onda onuň alamaty üýtgeýär:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\vec{c}=-\left[\vec{b},\ \vec{a}\right]\vec{c}=-\left[\vec{a},\ \vec{c}\right]\vec{b}.$$

3. Eger $\vec{a}$, $\vec{b}$ we $\vec{c}$ wektorlar komplanar bolsalar, onda 42-nji suratdaky parallelepipediň beýikligi h = 0 bolardy we onuň göwrümi nula deň bolar:

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\cdot\vec{c}=0. \qquad (3-32)$$

Bu şert üç wektoryň komplanar bolmagy üçin ýeterlik şert bolup hyzmat edýär.

§ 12. Koordinatalary belli bolan üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasyly

Goý $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ *we* $\vec{c} = \{x_3;\ y_3;\ z_3\}$ berlen bolsun. Bu üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylyny olaryň proýeksiýalary arkaly aňladalyň.

$$\left|\vec{a},\ \vec{b}\right|\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)\left(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}\right)$$

ýa-da (3 – 21 formula görä)

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 \quad \text{ýa-da} \ ,$$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (3-33)$$

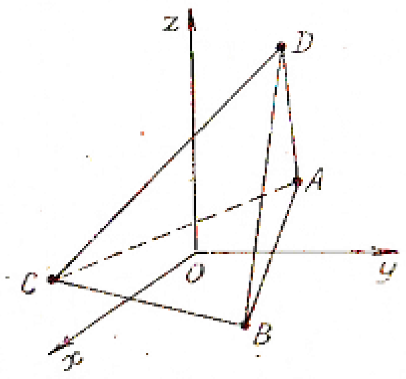
Üç wektoryň garyşyk köpeltmek hasylynyň 3-nji häsiýetine görä $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektorlaryň komplanar bolmagy üçin

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

bolmagy ýeterlikdir.

I n d i k ä b i r m e s e l e l e r e g a r a l y ň.

14-n j i m e s e l e. Depeleri A (1, 2, 3), B (4, 1, 2), C (3, 2, 1) we D (1, 2, 5) nokatlarda bolan piramidanyň göwrümini tapmaly.



44-nji çyzgy.

Ç ö z ü l i ş i. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasylyny alalyň. Ol şol wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň V_{par} göwrümine deňdir. 44-nji suratdan görnüşi ýaly *BACD* piramidanyň V_{pir} göwrümi wektorlaryň üstünde gurlan parallelepipediň $\frac{1}{6}$ V_{par} deňdir, ýagny

$$V_{pir} = \pm\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \{3;\ -1;\ -1\},\ \overrightarrow{AC} = \{2;\ 0;\ -2\},\ \overrightarrow{AD} = \{0;\ 0;\ 3\}$$

bolany üçin (3 –33) formula laýyklykda

$$V_{pir}=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\right|=1.$$

IV b a p

Göni çyzygyň we tekizligiň deňlemesi

Bu babyň mazmunyny öwrenmäge girişmezden ozal, geljekde bize gerek boljak dekart koordinatalar sistemasynyň birinden beýlekisine geçmek, algebraik çyzyklar we üstler hem-de olaryň tertibi diýilýän temalara garalyň.

§ 1. Bir dekart koordinatalar sistemasyndan beýleki dekart koordinatalar sistemasyna geçmek.

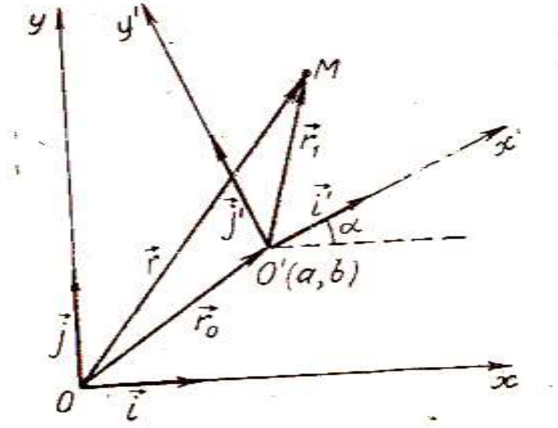
Umuman koordinatalar sistemasynyň birinden beýleki koordinatalar sistemasyna geçmek diýmeklik, nokadyň bir koordinatalar sistemasynydaky koordinatalary bilen şol nokadyň beýleki koordinatalar sistemasyndaky koordinatalarynyň arasyndaky baglanşygy tapmak diýmekdir.

Goý, bize tekizlikde XOY we $X'O\ Y'$ dekart koordinatalar sistemasy hem-de käbir M nokat berilsin. M nokadyň XOY we $X'O'\ Y'$ koordinatalar sistemasyndaky koordinatalary degişlilikde $(x;\ y)$ we $(x';\ y')$ bolsun. XOY we $X'O'Y'$ koordinatalar sistemasynyň ortlary degişlilikde $\vec{i};\ \vec{j}$ we $\vec{i'};\ \vec{j'}$ bolsun. O' nokadyň XOY koordinatalar sistemasyna görä koordinatalary $(a,\ b)$ diýeliň. 45-nji suratdan görnüşine görä

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r_1} \qquad (4-1)$$

Bu deňligi koordinata görnüşinde ýazalyň

$$x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}. \qquad (4-2)$$



45-nji surat

$\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}$ wektorlary (3-11[/]) formula laýyklykda $\vec{i}; \vec{j}$ bazisde dagydyp ýazalyň

$$\overrightarrow{i^{/}} = \lambda_1 \vec{i} + \nu_1 \vec{j}; \quad \vec{j} = \lambda_2 i + \nu_2 \vec{j}.$$

$\lambda_1, \nu_1; \lambda_2, \nu_2$ degişlilikde $\overrightarrow{i^{/}}$ we $\overrightarrow{j^{/}}$ wektorlaryň $\vec{i}$ we $\vec{j}$ wektorlara bolan proýeksiýasydyr:

$$\lambda_1 = pr_{\vec{i}}\, \overrightarrow{i^{/}} = \left|\overrightarrow{i^{/}}\right| \cos\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{i^{/}}}\right); \nu_1 = pr_{\vec{j}}\, \overrightarrow{i^{/}} = \left|\overrightarrow{i^{/}}\right| \cos\left(\widehat{\vec{j}, \overrightarrow{i^{/}}}\right)$$

$$\lambda_2 = pr_{\vec{i}}\, \overrightarrow{j^{/}} = \left|\overrightarrow{j^{/}}\right| \cos\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{j^{/}}}\right); \nu_2 = pr_{\vec{j}}\, \overrightarrow{j^{/}} = \left|\overrightarrow{j^{/}}\right| \cos\left(\widehat{\vec{j}, \overrightarrow{j^{/}}}\right)$$

Eger $\left(\overrightarrow{i}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{i^{/}}\right)=\alpha$ bilen belgilesek, onda $\left(\overrightarrow{i^{/}}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{j}\right)=90^{o}-\alpha$,

$\left(\vec{i},\,\widehat{}\,.\overrightarrow{j^{/}}\right)=90^{o}+\alpha, \left(\vec{i}.,\,\widehat{}\,.\overrightarrow{j^{/}}\right)=\alpha$ bolar(45-nji surata seret)

Şonda

$\lambda_1=\cos\alpha,\ \nu_1=\cos(90^{o}-\alpha)=\sin\alpha,\ \ \lambda_2=-\sin\alpha,\ \ \nu_2=\cos\alpha.$

Diýmek,

$\overrightarrow{i^{/}}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha;\ \overrightarrow{j^{/}}=-\vec{i}\sin\alpha+\vec{j}\cos\alpha.$

$\overrightarrow{i^{/}}$ we $\overrightarrow{j^{/}}$ -iň tapylan bahalaryny (4-2) deňlige goýup alarys.

$$\overrightarrow{xi}+\overrightarrow{yi}=\overrightarrow{ai}+\overrightarrow{bj}+\overrightarrow{x^{/}i}\cos\alpha+\overrightarrow{x^{/}j}\ \sin\alpha-\overrightarrow{y^{/}i}\ \sin\alpha+\overrightarrow{y^{/}j}\ \cos\alpha=$$

$$=\left(a+x^{/}\cos\alpha-y^{/}\sin\alpha\right)\vec{i}+\left(b+x^{/}\sin\alpha-y^{/}\cos\alpha\right)\vec{j}$$

Bu ýerden gözlenýän baglanyşygy tapýarys

$$\begin{cases} x=x^{/}\cos\alpha-y^{/}\sin\alpha+a \\ y=x^{/}\sin\alpha+y^{/}\cos\alpha+b. \end{cases} \qquad (4-3)$$

Bu sistemany $x^{/}\ we\ y^{/}$ görä çözüp

$$\begin{cases} x^{/}=x\cos\alpha+y\sin\alpha-a\cos\alpha-b\sin\alpha \\ y^{/}=y\cos\alpha-x\sin\alpha+a\sin\alpha-b\cos\alpha. \end{cases} \qquad (4-4)$$

görnüşde hem ýazyp bolar.

Eger $X^{/}O^{/}Y^{/}$ koordinata sistemasy diňe başlangyç bilen tapawutlansa, ýagny α=0 bolsa, onda (4-3) we (4 - 4) formulalar degişlilikde aşakdaky görnüşi alarlar:

$$\begin{cases} x=a+x^{/} \\ y=b+y^{/}, \end{cases} \qquad (4-3^{/})$$

$$\begin{cases} x^{/}=x-a \\ y^{/}=y-b. \end{cases} \qquad (4-4^{/})$$

Bu hala koordinatalar sistemasyny *parallel göçürme* ýa-da *göçürme öwürmesi* diýilýär. Eger iki sany koordinatalar sistemasynyň başlangyçlary gabat gelse, ýagny 0 we $0^{/}$ biri-biriniň üstüne düşse, onda

$a = b = 0$ bolar we (4-3) we (4 – 4) formulalar degişlilikde aşakdaky görnüşi alarlar.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases} \qquad \textbf{(4 – 3'')}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = y\sin\alpha + x\cos\alpha, \end{cases} \qquad \textbf{(4 – 4'')}$$

Bu hala koordinatlar sistemasyny *aýlamak* ýä-da *aýlanma* öwürmesi diýilýär.

Indi goy, bize giňşlikde *OXУZ* we *O'X' У'Z'* dekart koordinatalar sistemasy hem-de *M* nokat berilsin. *M* nokadyň *OXУZ* we *O'X'У'Z* koordinatalar sistemasyndaky koordinatalary degişlilikde (***x***; ***y***; ***z***) we (***x'***; ***y'***; ***z'***) bolsun.

OXYZ we ***O'X' Y' Z'*** koordinatalar sistemasynyň ortlary $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ we $\vec{i'}, \ \vec{j'}, \ \vec{k'}$ bolsun. ***O'*** nokadyň *OXУZ* koordinata sistemasyna görä koordinatalary (*a,b,c)* dieliň. 46-nji suratdan görnüşine görä

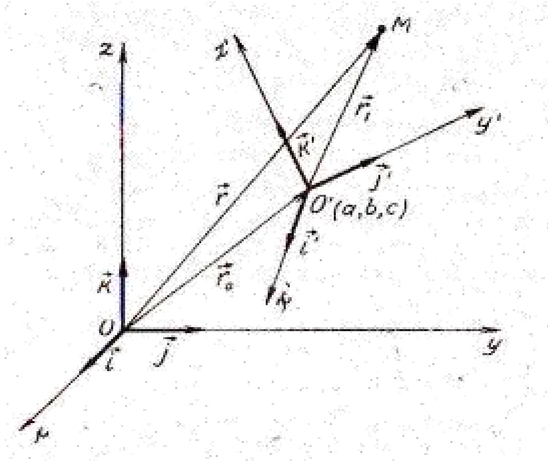
$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r_1} \qquad \textbf{(4 – 5)}$$

ya-da koordinata görnüşinde

$$\overrightarrow{x\ i} + \overrightarrow{y\ \ j} + \overrightarrow{zk} = \overrightarrow{ai} + \overrightarrow{bj} + \overrightarrow{ck} + \overrightarrow{x'i'} + \overrightarrow{y'j'} + \overrightarrow{z'k'}. \quad \textbf{(4 – 6)}$$

$\vec{i'}, \ \vec{j'}, \ \vec{k'}$ wektorlary $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bazisde dagydyp yazylaň

$$\vec{i'} = \lambda_1 \vec{i} + \nu_1 \vec{j} + \mu_1 \vec{k}$$



46-nji surat.

$$\overrightarrow{j'} = \lambda_2 \vec{i} + \nu_2 \vec{j} + \mu_2 \vec{k}$$
$$\overrightarrow{k'} = \lambda_3 \vec{i} = \nu_3 \vec{j} + \mu_3 \vec{k}$$

Alnan bahalary (4-6) deňlige goyup we iki wektoryň deňlik şertini ulanyp gözlenyan baglanyşygy alarys:

$$\begin{cases} x = a + A_{11}x' + A_{12}y' + A_{13}z' \\ y = b + A_{21}x' + A_{22}y' + A_{23}z' \\ z = c + A_{31}x' + A_{32}y' + A_{33}z' \end{cases} \qquad \mathbf{(4-7)}$$

(4 – 7) sistemany $x' \, y' \, z'$-e görä çözüp alars

$$\begin{cases} x' = B_{11}x + B_{12}y + B_{13}z + D_1 \\ y' = B_{21}x + B_{22}y + B_{23}z + D_2 \\ z' = B_{31}x + B_{32}y + B_{33}z + D_3 \end{cases} \qquad \textbf{(4 – 8)}$$

Bu yerde A_{ij}, B_{ij}, D_i (**i, j = 1, 2, 3**) hemişelik sanlardyr.

§ 2.Algebraik çyzyklar, üstler hem-de olaryň tertibi

K e s g i t l e m e.**Tekizlikdäki dekart koordinatalar sistemasynyň birinde deňlemesi *x* we *y* görä käbir k_1, r_1, k_2, r_2, . . . , k_n, r_n bitin položytel sanlar arkaly**

$$A_1x^{k_1}y^{r_1} + \ldots + A_nx^{k_n}y^{r_n} = 0 \qquad \textbf{(4 – 9)}$$

görnüşde yazylyan çyzyga algebraik çyzyk diyilyär.

K e s g i t l e m e.**Dekart koordinatalar sistemasynyň birinde deňlemesi *x, y* we *z* görä käbir k_1, r_1, s_1, k_2, r_2, s_2, . . . , k_n, r_n, s_n bitin položytel sanlar arkaly**

$$A_1x^{k_1}y^{r_1}z^{s_1} + \ldots + A_nx^{k_n}y^{r_n}z^{s_n} = 0 \qquad \textbf{(4 – 10)}$$

görnüşde yazylyan üste algebraik üst diýilýär.

Algebraik däl çyzyklara we üstlere *transendent çyzyklar we üstler* diýilýär. Meselem, $y = \sin x$; $y = \lg x$; $y = a^x$ we ş. m.-ler transendent çyzyklardyr. $z^2 + \sin x - \cos y = 0$ transendent üstdir.

$A_s x^{k_s} y^{r_s} z^{p_s}$ bir agzanyň *x,y,z* näbellileriniň dereje görkezijileriniň jemine, ýagny $k_s + r_s + p_s$ **jeme** *bir agzanyň derejesi* diýilýär.(4-9) we (4-10) deňlemelerdäki bir agzalaryň iň uly derejesine *deňlemäniň derejesi* diýilýär. Deňlemäniň derejesine çyzygyň, degişlilikde *üstüň tertibi* diýilýär. Bu aýdylanlara anyk mysallarda düşünip geçeliň.

$$3x^3 + 2xy - 7x^2y^2 + 9 = 0,$$
$$7x^2yz^3 + 12x^3y^4z - 5xy + 3 = 0$$

mysallaryň birinjisinde $7x^2y^2$ bir agzanyň derejesiniň görkezijisi, şondaky agzalaryň görkezijileriniň iň ulusy. Ol 4-e deň. Şoňa görä-de oňa dördünji derejili deňleme ýa-da dördünji tertipli çyzyk diýilýär.Mysallaryň ikinjisine sekizinji derejeli deňleme ya-da sekizinji tertipli üst diýilýändigine özüňiz hem düşünen bolsaňyz gerek.

T e o r e m a.***Algebraik çyzygyň ya-da üstüň tertibi onuň deňlemesiniň dekart koordinatalar sistemasynyň haýsynda ýazylandygyna bagly däldir.***

Teoremany algebraik çyzyk üçün subut edeliň. Goý, algebraik çyzygyň tertibi XOY koordinatalar sistemasynda k_1+r_1 bolsun we onuň deňlemesi (4-9) deňleme görnüşinde aňladylsyn. Bu çyzygyň $X'O'Y'$ koordinatalar sistemasyndaky deňlemesini almak üçün x we y (4-3) formula bilen aňladylýän bahalaryny (4-9) deňlemede ornuna goýälyň. Şonda x bahasy k_1 derejä göterilende, käbir derejeli köpagza emele geler, emma ol köpagzanyň k_1-den uly derejeli agzasy bolup bilmez. y-iň bahasyny r_1 derejä göterenimizde hem käbir derejeli köpagza emele geler, emma ol köpagzanyň r_1-den uly derejeli hiç bir agzasy bolup bilmez. Emele gelen köpagzalary biri-birine köpeldenimizde,k_1+r_1 -den uly derejeli hiç bir agza emele gelmez. Indi onuň derejesiniň k_1+r_1 –den kiçi bolup bilmejekdigini görkezeliň. Goý, XOY koordinatalar sistemasyndan $X'O'Y'$ koordinatalar sistemasyna geçenimizde çyzygyň deňlemesiniň derejesi kiçeldi we $p<k_1+r_1$ boldy dieliň. Eger şeýle bolsa $X'O'Y'$ koordinatalar sistemasyndan XOY koordinatalar sistemasyna geçsek onuň derejesi artmaly (öňki derejäni bermek üçin) bolardy. Bu bolsa ýokarda subut edilene görä mümkin däl.Diýmek, teoremanyň tassyklamasy dürs bolup çykýar.

Teorema algebraik üstler üçün hem algebraik çyzgylar üçün subut edilişi ýaly subut edilýar.

Algebraik çyzygyň we üstüň derejesiniň saýlanyp alnan dekart sistemasyna bagly däldigine olaryň *iniwariantlygy* diýilýär.

B e l l i k.Çyzygyn ýa-da üstüň tertibi diňe dekart koordinatalar sistemasynda kesgitlenýändigini ýatda saklamak gerek. Eger polýär sistemasynda r radiusly töweregiň deňlemesini ýazsak, ol polýüsuň nirede erleşýändigine baglylykda $p=r$ (polýüs töweregiň merkezinde bolanda), $p=2r\cos\varphi$ (polýüs töweregiň üstünde, polýar oky merkeziniň üsti bilen geçende) alýarys. Olaryň birinjisi birinji tertipli algebraik çyzyk, ikinjisi bolsa transendentik çyzyk bolýar. Dekart koordinatalar sistemasynda töweregiň nirede ýerleşýändigine garamazdan ol ikinji tertipli egri çyzyk bolýar.

3.Tekizlikde göni çyzygyň deňlemesi

1.Göni çyzygyň umumy deňlemesi

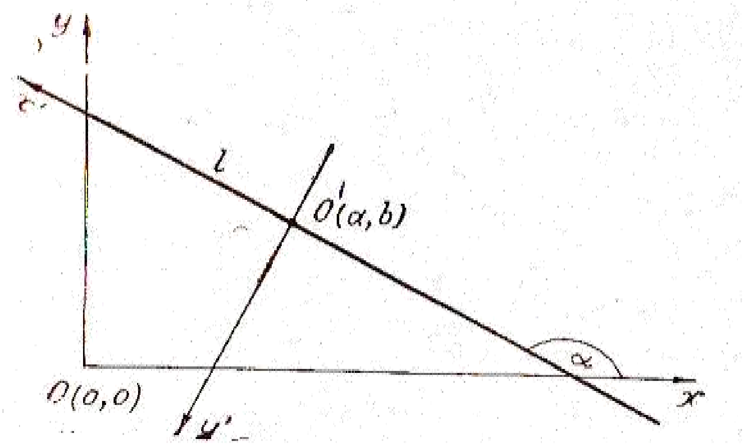
Tekizlikde haýsy-da bolsa bir göni çyzyk we XOY dekart koordinatlar sistemasy berilsin.Bu göni çyzygyň deňlemesini tapalyň. Başgaça, bu göni çyzygynyň islendik nokadynyň koordinatlarynyň kanagatlandyrýan, emma bu göni çyzyga degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatlarynyň kanagatlandyrmaýan algebraik baglanyşygyny tapalyň.

XOY koordinatalar sistemasynyň başlangyjyny berlen l göni çyzygyň islendik bir nokadyna göçüreliň we OX oky l göni çyzygyň ugry bilen gider ýaly edip, ony käbir burça öwreliň (47-nji sur.). Şonda biz täze $X'O'Y'$ koordinatalar sistemasyny alýarys.l göni çyzygyň $O'X'$ okuň üstünde ýatýandygyna görä, l göni çyzygyň islendik nokadynyň ordinatasy täze koordinatalar sistemasyna görä nul bolýar:

$$\mathbf{y'=0} \qquad (4\text{-}11)$$

y'=0 deňlemäni l göni çyzygyň islendik nokadynyň we diňe şol nokatlaryň koordinatlarynyň kanagatlandyrýandygy üçün y'=0 deňleme l göni çyzygyň $X'O'Y'$ sistemasyndaky deňlemesidir.

Bir koordinatalar sistemasyndan beyleki koordinatalar sistemasyna geçilende deňlemäniň derejesiniň, ýagny çyzygyň



47-nji surat.

tertibiniň üýtgemeýändigine görä tekizlikde göni çyzygyň deňlemesi birinji derejeli, deňlemedir, ýagny göni çyzyk birinji tertipli çyzykdyr.

y'=0 deňlemede y'-iň bahasyny (4-4) deňlikden alyp ornuna goysak, göni çyzygyň *XOY* koordinatalar sistemasyna görä deňlemesini taparys.

$$\boldsymbol{y}\mathbf{cos}\ \alpha - \boldsymbol{x}\mathbf{sin}\ \alpha + \boldsymbol{a}\mathbf{sin}\,\alpha - \boldsymbol{b}\mathbf{cos}\ \alpha = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(4-12)}$$

(4 – 12) deňlemeden alarys:

$$\mathbf{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})(-\ sin\,\alpha\ ) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})\ cos\,\alpha\ = 0.} \qquad \mathbf{(4-12)}$$

Bu deňligiň çep bölegine proeksiýalary {***x* – *a*; *y* - *b***} we {**- sin**α **cos** α} bolan özara perpendikulýar iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly hökmünde garamak bolýar 0' (*a; b)* we *M (x; y)* nokatlaryň *l* göni çyzyga degişli bolandyklary üçin

$\overrightarrow{O'M} = \{$***x – a; y - b***$\}$ wektor l göni çyzygyň üstünde ýatar. $\overrightarrow{O'M} \cdot \vec{n}=0$ bolanyna görä $\vec{n}=\{-\sin\alpha;\ \cos\alpha\}$ wektor l göni çyzyga perpendikulýar bolan birlik wektordyr. Goy, $\vec{n}$ **= {*A,B*}** wektor $\vec{n}$ wektora kollinear islendik wektor bolsun. Onda $\overrightarrow{O'M} \cdot \vec{n}=0$ bolýar. Bu deňligi koordinatlar görnüşde ýazyp alýarys:

$$A(x-a)+B(y-b)=0$$

ýa-da

$Ax+By-(Aa+Bb)=0.$

$Aa+Bb=-C$ bilen belgiläliň, onda alarys:

$$Ax+By+C=0. \qquad (4\text{-}13)$$

(4-13) deňlemä *göni çyzygyň umumy deňlemesi* diýilýär. $\vec{n}=\{A;B\}$ wektora göni çyzygyň normal wektory diýilýär.

Indi göni çyzygyň umumy deňlemesiniň derňewine geçeliň.

a) $C=0$ bolanda, $Ax+By=0$. Bu deňligi 0 (0,0) nokadyň kordinatalary kanagatlandyrýar. Diýmek, bu halatda göni çyzyk koordinatalar başlangyjyndan geçýär.

b) $A=0$ bolanda , $By+C=0.$

A san $\vec{n}$ wektoryň absissa okuna bolan proeksiýasy bolany üçin, bu halatda $\vec{n}$ wektor Ox oka perpendikulýar bolýar. Diýmek, l göni çyzyk Ox okuna paralleldir.

c) $B=0$ bolanda, $Ax+C=0.$ Bu halda l göni çyzyk Oy oka paralleldir.

d) $A=C=0$ bolanda, $By=0$ ýa-da $y=0$.Ox okuň deňlemesi bolýar.

e) $B=0,\ C=0$ bolanda, $Ax=0$ *ýa-da* $x=0$.Oy okuň deňlemesi bolýar.

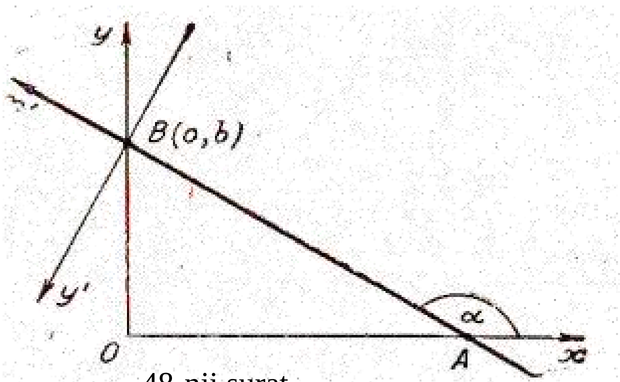
(4-13) deňleme bilen berilýän göni çyzygy gurmak üçin ilki $x=0$ berip, $y=-\dfrac{C}{A}$ ýagny $\left(0;-\dfrac{C}{B}\right)$ nokady alýarys.Bu nokat göni çyzygyň *Oy* ok bilen kesişme nokady bolýar. Soňra $y=0$ berip $x=-\frac{C}{A}$, ýagny $\left(-\frac{C}{A};\ 0\right)$ nokady alýarys. Bu nokat göni çyzygyň *OX* oky bilen kesişme nokady bolýar. Bu iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzyk gözlenilýän göni çyzyk bolýar.

2.*Göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi*

Goý, göni çyzyk *Oy* oky *B(o;b)* nokatda kessin we *Ox* ok bilen α burçy emele getirsin.

Berlen *b* san we *α* burç boýünça *l* göni çyzygyň deňlemesini çykarmak üçin *XOY* koordinatalar başlangyjyny *B(0;b)* nokada göçürip *Ox* oky *α* burça öwürsek (48-nji sur.), onda (4-12) deňlemedäki $a\sin\alpha$ agza nula deň bolar we (4-12) deňleme aşakdaky görnüşi alar:

$$y\ cosa\text{-}x\ sina\text{-}b\ cosa=0 \qquad (4\text{-}14)$$



48-nji surat.

(4-14) deňligiň hemme agzalaryny *cosa* bölüp alarys.

$$y=xtga+b. \qquad (4\text{-}15)$$

tga=k bilen belgiläp (4-15) deňlemäni aşakdaky ýaly ýazarys

$$y=kx+b \qquad (4\text{-}15')$$

bu erde *k* san göni çyzygyň burç koeffisiýentidir.

(4-15) deňlemä *göni çyzygyň burç koeffisiýentli deňlemesi* diýilýär.

Göni çyzygyň umumy deňlemesini burç koeffisiýentli görnüşe getirmek üçin ol deňlemeden *y* näbellini *x* –iň üsti bilen aňlatmak eterlikdir, ýagny

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

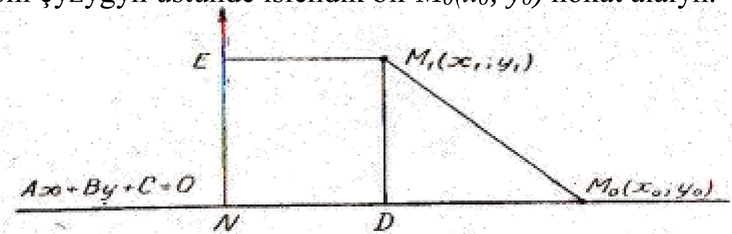
Bu deňlemäni (4-15') deňleme bilen deňeşdirip alarys.

$$-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b.$$

3.*Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk*

K e s g i t l e m e. **Nokatdan göni çyzyga geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk diýilýär.**

M_1 $(x_1; y_1)$ nokadyň $Ax+By+C=0$ göni çyzykdan d uzaklygyny analitiki kesgitlemäge sananyşalyň. $Ax+By+C=0$ göni çyzygyň üstünde islendik bir $M_0(x_0; y_0)$ nokat alalyň.



49-nji surat.

$M_0M_1=\{x_1-x_0; \ y_1-y_0\}$ wektoryň $Ax+By+C=0$ göni çyzygyň normal $n=\{A;B\}$ wektoryna bolan proeksiýasynyň uzynlygynyň M_1 $(x_1; y_1)$ nokadyň $Ax+By+C=0$ göni çyzykdan uzaklygy, ýagny $\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right|=d$ boljakdygy 49-nji suratdan görünýar. Bize $\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1} = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|$ **cos (**$\vec{n}\,\hat{,}\,\overrightarrow{M_0M}$)

$$\cos(\vec{n},\hat{\ }\vec{M}_0M_1) = \frac{\vec{n}\cdot M_0M_1}{|\vec{n}\cdot\vec{M}_0M_1|}$$

deňlikler belli.Soňky iki deňligi ulanyp alýarys:

$$\boldsymbol{d} = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}}{|\vec{n}|}\right|.$$

$M_0\vec{M}$ ={x1-x0; y1-y0 } $\vec{n}=\{A,B\}$ bolany üçin bu ýerden aşakdaky deňlik gelip çykýar.

$$\boldsymbol{d} = \left|\frac{Ax_1+By_1-(Ax_0+By_0)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

$M_0(x_0; y_0)$ nokat *$Ax+By+C=0$* göni çyzyga deňişli bolany üçin *$-(Ax_0+By_0)=C$*. Bu bahany ýökarky deňlige goýüp uzaklyk üçin aşakdaky formulany alýarys.

$$\boldsymbol{d} = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \qquad \mathbf{(4-17)}$$

Netije.*Nokadyň göni çyzykdan uzaklygyny tapmak üçün göni çyzygyň deňlemesiniň çep bölegindäki x-и we y-и berlen nokadyň koordinatlary bilen çalşyp, alnan netijäni göni çyzygyň normal wektorynyň uzynlygyna bölmeli we emele gelen sany absalýüt ululygy boýünça almaly.*

1-nji m e s e l e. *A(-2; 1)* nokadyň $3x$-$2y$+1=0 göni çyzykdan uzaklygyny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. (4-17) formulany ulanyp tapýarys:

$$d = \left|\frac{3(-2)-2\cdot 1+1}{\sqrt{9+4}}\right| = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

2-nji m e s e l e. $3x$-y-4=0 we $2x$+$6y$+3=0 göni çyzyklaryň kesişmeginden emele gelýan burçlaryň bissektrisasynyň deňlemesini yazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Berlen göni çyzyklaryň kesişmesinden emele gelýan burçlaryň bissektrisalarynyň islendik nokadynyň şol göni çyzyklardan deň uzaklykda ýatýandygyny nazara alsak, onda burçlaryň bissektrisalarynyň islendik *M(x; y)* nokady üçin

$$\frac{|3x-y-4|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|2x+6y|}{\sqrt{4+36}}$$

ýazyp beliris. Ýökarky deňlik aşakdaky iki deňlige deňgüýçlüdir

$$\frac{3x-y-4}{\sqrt{10}} = \frac{2x+6y+3}{2\sqrt{10}}$$

we

$$\frac{3x-y-4}{\sqrt{10}} = -\frac{2x+6y+3}{2\sqrt{10}}.$$

Bu ýerden burçuň bissektrisalarynyň deňlemelerini alýarys:

$$4x\text{-}8y\text{-}11=0$$

we

$$8x+4y\text{-}5=0.$$

4. *Göni çyzygyň iki dürli deňlemesiniň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti*

Eger $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *we* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

deňlemeler şol bir göni çyzyga degişli bolsa, onda olaryň normal wektorlary

$$\overrightarrow{n_1} = \{\boldsymbol{A_1}; \boldsymbol{B_1}\} \text{ we } \overrightarrow{n_2} = \{\boldsymbol{A_2}; \boldsymbol{B_2}\}$$

kollinear wektorlar bolarlar, şoňa görä-de

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda$$

Göni çyzygyň deňlemeleriniň ikinjisini λ köpeldip birinjisinden aýyryp alýarys: $C-\lambda C_2=0$ ýa-da

$$\frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

N e t i j e. *Göni çyzygyň iki dürli deňlemesiniň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti olaryň koeffisietleriniň proporsional bolmagydyr:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \textbf{(4 – 17)}$$

5.Berlen bir we iki nokadyň üstünden geçýan göni çyzygyň deňlemesi. Üç nokadyň bir göni çyzykda ýatmaklyk şerti.

Berlen $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň üstünden geçýan göni çyzygyň deňlemesini almak üçün goni çyzygyň umumy deňlemesini ýazalyň.

$$Ax+By+C=0.$$

Bu göni çyzyk $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň üstünden geçýän bolsa, onda $M_0(x_0; y_0)$ nokadyň koordinatalary göni çyzygyň deňlemesini kanagatlandyrmaly bolar. Şoňa görä-de aşakdaky ýaly ýazyp bileris

$$Ax_0+By_0+C=0.$$

Ýokarky iki deňligi biri-birinden agzaba-agza ayryp alýarys:

$$A(x-x_o)+B(y-y_0)=0. \qquad (4\text{-}18)$$

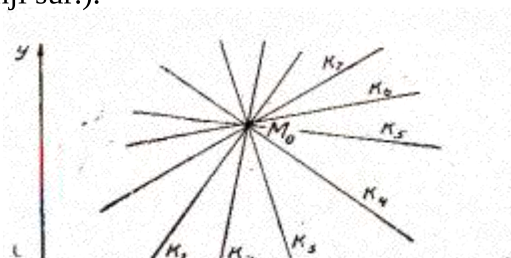
(4-18) deňleme $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünde geçýän göni çyzygyň deňlemesidir. (4-18) deňlemeden alýarys:

$$\boldsymbol{y-y_0=-\frac{A}{B}\,(x-x_0).}$$

$-\dfrac{A}{B}=k$ bilen belgilýap $M_0(x_0;\ y_0)$ nokatdan geçýan göni çyzygyň deňlemesini alarys:

$$y-y_0=k\,(x-x_0)$$

k –nyň dürli bahalarynda $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünden geçän dürli göni çyzyklary alýarys. $M_0(x_0;\ y_0)$ nokadyň üstünden geçýan göni çyzyklaryň toplumyna *göni çyzyklaryň çogdumy* diýilýär (50-nji sur.).



50-nji surat.

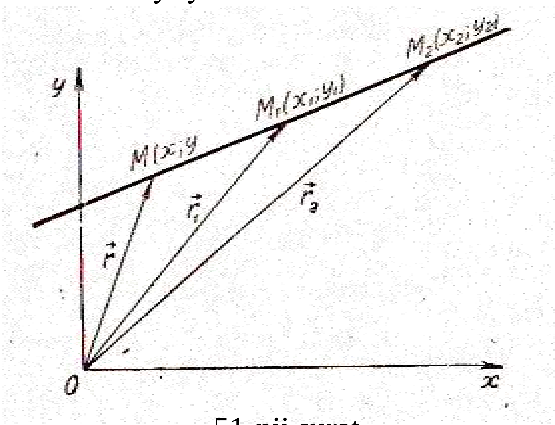
Berlen $M_1(x_1,y_1)$ we $M_2(x_2;\ y_2)$ nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini almak üçin şol nokatlaryň üstünden göni çyzyk geçireliň we bu göni çyzygyň üstünde erkin $M(x;y)$ nokat alalyň.

$$\overrightarrow{M_1M}_2=\{x_2-x_2;\ y_2-y_1\},\qquad \overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1\}$$

wektorlar kollineardyrlar. Wektorlaryň kollinearlyk şertinden alýarys:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \mathbf{(4-19)}$$

(4-19) proporsiýa *berlen iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi* diýilýär.



51-nji surat.

(4-19) proporsiýany ikinji tertipli kesgitleýji görnüşinde

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ y_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0 \qquad \mathbf{(4-20)}$$

ýa-da üçünji tertipli kesgitleýji görnüşinde

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=\mathbf{0} \qquad \mathbf{(4-21)}$$

ýazyp bileris.

(4-20) we (4-21) kesgitleýjileriň deňdigine ol kesgitleýjileri hasaplap göz ýetirmek bolar. Kesgitleýjilerdäki x, y sanlary x_3, y_3 sanlar bilen çalşyrsak berlen $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ we $M_3(x_3;\ y_3)$ nokatlaryň şol bir göni çyzyga degişlilik şerti gelip çykýar.

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathbf{(4-22)}$$

ýa – da

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(4-23)}$$

Üç nokatdyň bir göni çyzyga degişlilik şertini depeleri M_1, M_2, M_3 nokatlarda bolan üçburçlugyň meýdanyna garamak bilen hem almak bolar. M_1, M_2 we M_3 nokatlar bir göni çyzyga degişli bolsa, onda ol üçburçlugyň meýdany nula deň bolýar. Bu bolsa (4-22) we (4-23) kesgitleýjileri berýär.

3-nji m e s e l e. Depeleri $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$ we $C(-2;\ 4)$ nokatlarda bolan üçburçlugyň taraplarynyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i.(4-20) ýa-da (4-21) formuladan peýdalanyp, üçburçlugyň taraplarynyň denlemelerini ýazýarys. *AB* tarapyň deňlemesi.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{ýa – da} \qquad x+y-3=0$$

AC tarapyň deňlemesi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{ýa – da} \qquad \mathbf{2x + 3y - 8 = 0.}$$

BC tarapyň deňlemesi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{ýa – da} \qquad \mathbf{3x + 4y - 10 = 0.}$$

6. *Iki göni çyzygyň arasyndaky burçuň ululygyny kesgitlemek. Iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk we parallellik şerti*

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

we

$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

iki göni çyzygyň kesişmeginden emele gelen wertikal burçlaryň biriniň ululygy bu çyzyklara perpendikulýar bolan

$$\overrightarrow{n_1} = \{\boldsymbol{A_1; B_1}\} \text{ we } \overrightarrow{n_2} = \{\boldsymbol{A_2;B_2}\}$$

wektorlaryň arasyndaky burça deňdir. Şoňa görä-de berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burçuň deregine $\vec{n}_1$ we $\vec{n}_2$ wektorlaryň arasyndaky burçy kesgitläp bileris, ol bolsa

$$\mathbf{cos\varphi}= \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (4\text{-}24)$$

formula bilen berilýär.

Indi berlen iki göni çyzygyň özara perpendikulýarlyk we parallellik şertine garalyň. Eger berlen çyzyklar özara perpendikulýar bolsalar, onda cosφ=0 bolar. Diýmek, (4-24) deňligiň sag bölegindäki drobuň sanawjisy nula deň bolar. Şeýlelikde, iki göni özara perpendikulýarlyk şerti

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (4\text{-}25)$$

görnüşde ýazylýar. Eger berlen göni çyzyklar özara parallel bolsalar, onda n_1 wektor n_2 wektorlar parallel bolarlar. Diýmek, iki göni çyzygyň parallellik şerti aşakdaky görnüşde bolar.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda. \qquad \mathbf{(4-26)}$$

Eger göni çyzyklar aşakdaky deňlemeler bilen berlen bolsalar

$$y=k_1x+в_1,$$
$$y=k_2x+в_2$$

onda (4-24), (4-25) we (4-26) formulalar degişlilikde aşakdaky görnüşleri alarlar.

$$\mathbf{\cos\varphi} = \frac{1+k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{1+k_2^2}}, \qquad \mathbf{(4-27)}$$

$$\boldsymbol{k_1k_2 = -1}, \qquad \mathbf{(4-28)}$$

$$\boldsymbol{k_1 = k_2}. \qquad \mathbf{(4-29)}$$

4-nji mesele.$3x-y+1=0$ we $4x+3y+5=0$ göni çyzyklaryň arasyndaky burçuň ululygyny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. (4-24) formuladan peýdalanyp kesgitleýäris.

$$\cos\varphi = \frac{12-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{25}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} \approx 0{,}5895$$

$$\varphi = \arccos 0{,}5895 \approx 53^{o}53'.$$

5-nji m e s e l e. $A(3;\ 4)$ nokadyň üstünden geçýän hem-de $3x$-$2y$-$3=0$ göni çyzyga perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Goý, gözlenýän göni çyzygymyz $Ax+By+C=0$ bolsun. Meseläniň şertine görä gözleýän göni çyzygymyz berlen göni çyzyga perpendikulýar bolmaly (4-25) formula boýunça $3A-2B=0$ ýazýarys. Bu ýerden

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \lambda \text{ ýa – da } \boldsymbol{A = 2\lambda,\ B = 3\lambda.}$$

A-nyň we B-niň tapylan bahalaryny gözleýän göni çyzygymyzyň deňlemesine goýup alarys.

$$2\lambda x+3\lambda y+c=0$$

Bu göni çyzygyň A(3,4) nokadyň üstünden geçmelidigini nazara alsak, onda ýokarky deňlemeden alarys:

$$6\lambda+12\lambda+c=0 \quad \text{ýa-da } c=18\lambda.$$

A-nyň B-nyň we C-niň tapylan bahalaryny gözleýän göni çyzygymyzyň deňlemesine goýsak we alan deňlemämizi λ gysgaltsak, gözlenýän güni çyzykgyň $2x+3y-18=0$ deňlemesini alarys.

6-nji m e s e l e. $A(5;\ 3)$ nokadyň üstünden geçýän we $2x$-$3y+1=0$ göni çyzyga parallel bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Goý, gözlenilýän göni çyzygyň deňlemesi $Ax+By+C=0$ bolsun. Meseläniň şertine görä gözlenilýän göni çyzyk berlen göni çyzyga parallel bolmaly.(4-26) formula boýunça

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\lambda \text{ ýa – da } \boldsymbol{A = 2\lambda, B = - 3\lambda.}$$

A-nyň we B-niň bahalaryny gözlenýän deňlemede oruna goýsak $2\lambda x- 3\lambda y +C=0$ deňlemä geleris.

5-njy meseledäkä meňzeş usul bilen $C =-\lambda$ boljagyny hem-de gözlenilýän göni çyzygyň.

$$2x\text{-}3y -1=0$$

deňlemesini tapýarys.

7-nji m e s e l e $3x+4y +6=0$ göni çyzyga görä $A(2; 3)$ nokada simmetrik nokat tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Ilki bilen $A(2; 3)$ nokadyň göni çyzyga bolan $A(x_1;y_1)$ proeksiýasyny tapalyň.Onuň üçün $A(2; 3)$ nokadyň üstünden geçýän we berlen çyzyga perpendikulýär bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň.

$$4x\text{-}3y\text{-}1=0 \quad \text{(5-nji meselä ser.).}$$

$A(x_1;y_1)$ nokadyň berlen we oňa perpendikulýär bolan göni çyzyga degişli bolany üçün onuň koordinatalary

$$3x_1+4y_1=-6$$
$$4x_1\text{-}3y_1=-1$$

sistemany kanagatlandyrarlar.Sistemany çözüp

$x_1=-0,88$; $y_1=-0,84$ taparys.

Goý, $A_2(x_2;y_2)$ nokat berlen göni çyzyga görä $A(2; 3)$ nokada simmetrik nokat bolsun. Onda $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1A_2}$ boljagy şühbesizdir.

$\overrightarrow{AA_1}$ $=\{-0,88-2; -0,84-3\}$

$\overrightarrow{A_1A_2}$ $=\{ x_2+0,88; y_2=0,84\}$.

$\overrightarrow{AA_1}$ we $\overrightarrow{A_1A_2}$ wektorlaryň deňlik şertinden

$x_2+0,88=-0,88-2$; $y_2+0,84=-0,84-3$

ýa-da

$x_2=-3,76$; $y_2=-4,68$ alarys.

$A_2(-3,76; -4,68)$ nokat gözlenilýän nokatdyr.

§4. *Tekizligiň deňlemeleri*
1. Tekizligiň umumy deňlemesi

Goý, bize π tekizlik we $OXYZ$ koordinatalar sistemasy berlen dieliň. Bu tekizligiň deňlemesini, ýagny bu tekizlige degişli bolan nokatlaryň koordinatalarynyň kanagatlandyrýan, emma bu tekizlige degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalarynyň kanagatlandyrmaýan algebraik baglanyşygyny çykaralyň.

Goý, $0^{/}(a;b;\ c)$ nokat tekizligiň berlen nokady bolsun. $OXYZ$ koordinatalar başlangyjyny $0^{/}(a;b;\ c)$ nokada göçürip onuň iki okuny, meselem, Ox we Oy oklaryny tekizligiň üstünde ýatar ýaly edip käbir burçlara öwreliň. Onda biz $O'x'y'z^{/}$ täze koordinatalar sistemasyny alýarys.Alan koordinatalar sistemamyza görä tekizligiň islendik nokadynyň koordinatlary.

$$z'=0 \qquad (4\text{-}30)$$

deňlemäni kanagatlandyrar, emma π tekizlige degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalary kanagatlandyrmaz. Diýmek, (4-30) deňleme $O'x'y'z'$ kordinatalat sistemasyna görä π tekizligiň deňlemesidir.

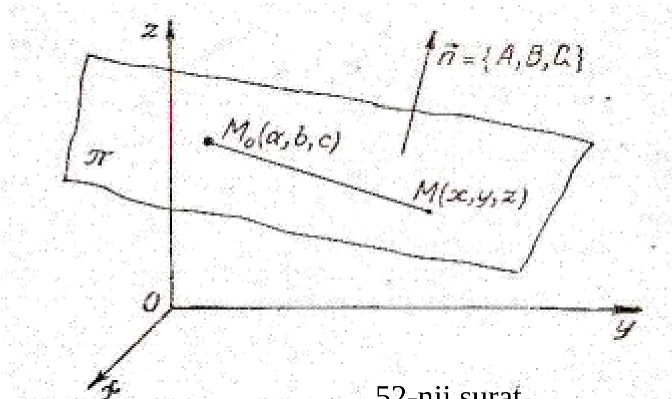
Dekart koordinatalar sistemalarynyň birinden beýlekisine geçilende, deňlemäniň derejesiniň üýtgemeýänligine görä, (4-30) deňleme tekizlik birinji tertipli üstdir diýip ýatmaga hukuk berýär. π tekizligin deňlemesini $oxyz$ koordinatalar sistemasynda tapmak üçin (4-8) we (4-30) baglanyşyklardan peýdalanyp alýarys:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (4\text{-}31)$$

Bu ýerde A,B,C,D- käbir hemişelik sanlar. (4-31) deňlemä *tekizligiň umumy deňlemesi diýilýär.*

Tekizligiň umumy deňlemesindäki A,B,C,D sanlaryň geometrik manysyny aýdyňlaşdyrmak üçin tekizligiň deňlemesini başga usul bilen çykaralyň. Eger tekizligiň haýsy bolsa-da bir nokady we tekizlige perpendikulýär wektor berilse, tekizligiň giňişlikdäki orny doly kesgitli bolar.

Göý, $M_0(a; b; c)$ we tekizlige perpendikulýär $\vec{n}=\{A; B; C\}$ wektor berlen bolsun. tekizlikde M_0 nokatdan başga islendik bir $M(x, y, z)$ nokat alalyň (52-nji surat.).



52-nji surat

$\overrightarrow{M_0M}=\{x-a; y-b; z-c\}$ wektor $\vec{n}$ wektora perpendikulýar bolany üçün

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0 \qquad (4\text{-}32)$$

yazyp bileris. (4-32) deňleme tekizligiň wektor görnüşindäki deňlemesidir. Hakykatdan-da (4-32) deňlemäni π tekizligiň islenik nokady kanagatlandyrýar, emma π tekizlige degişli bolmadyk hiç bir nokadyň koordinatalary kanagatlandyrmaýar.

Tekizligiň wektor deňlemesindeň koordinat görnüşindäki deňlemä geçeliň.

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

ýa-da $D=-(Aa+Bb+Cc)$ belläp alýars:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Bu deňleme tekizligiň umumy deňlemesidir. Islendik $Ax+By+Cz+D=0$ deňlemäniň haýsy-da bolsa bir tekizligiň deňlemesi bolýandygyny we $\vec{n}=\{A; B; C\}$ wektoryň hem şol tekizlige perpendikulýar (normal) wektor bolýandygyny subut etmek bolar.

Indi tekizligiň umumy deňlemesiniň derňewine geçeliň.

a) D=0. Emma $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$ bolsa, onda tekizligiň deňlemesi

$$Ax+Ay+Cz+0$$

görnüşi alar we ony 0(0; 0; 0) nokadyň koordinatalary kanagatlandyrar. Diýmek, bu halda tekizlik koordinatalar başlanjyndan geçer.

b)$A=0$ emma $B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ bolsa, onda tekizligiň $\vec{n}=\{A; B; C\}$ normal wektory Ox oka perpendikulýar bolar, şoňa görä-de $By+Cz+D=0$ tekizlik Ox oka parallel bolar.

c) $B=0$ emma , $A\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ bolsa, onda tekizlik Oy oka parallel bolar.

d) $C=0$ emma , $A\neq 0, B\neq 0, D\neq 0$ bolsa, onda tekizlik Oz oka parallel bolar.

e) $A=D=0$ emma , $B\neq 0, C\neq 0$ bolsa, onda $By+Cz=0$ alarys. $D=0$ bolanda tekizlik koordinatalar başlangyjyndan geçýär, $A=0$ bolanda bolsa Ox oka parallel bolýar. Diýmek, tekizlik Ox okuň üstünden geçer.

f) $B=D=0$ emma $A\neq 0, C\neq 0$ bolsa, tekizlik Oy okuň üstünden geçer.

g) $C=D=0$ emma $A\neq 0, B\neq 0$ bolsa, onda tekizlik Oz okuň üstünden geçer.

k) $A=B=0$ emma $C\neq 0, D\neq 0$ bolsa, onda $Cz+D=0$ alarys. Bu tekizligiň $n=\{0; 0; C\}$ normal wektory Ox we Oy oklara, perpendikulýar, tekizlik bolsa XOY tekizlige parallel bolar.

l) $A=C=0$ emma $B\neq 0, D\neq 0$, bolsa, onda tekizlik XOZ tekizlige parallel bolar.

m) $B=C=0$ emma $A\neq 0$ $D\neq 0$ bolsa, onda tekizlik YOZ tekizlige parallel bolar.

s) $A=B=D=0$ emma $C\neq 0$ bolsun.$D=0$ bolanda tekizlik koordinatlar başlangyjyndan geçýär, $A=B=0$ bolsa tekizlik *XOУ* tekizlige parallel bolýar.

Diýmek, $Cz=0$ ýa-da $Z=0$ deňleme *XOУ* tekizligiň deňlemesidir.

к) $A=C=D=0$ emma $B\neq 0$ bolsa, y=0 bolýar.Bu deňleme *XOZ* tekizligiň deňlemesidir.

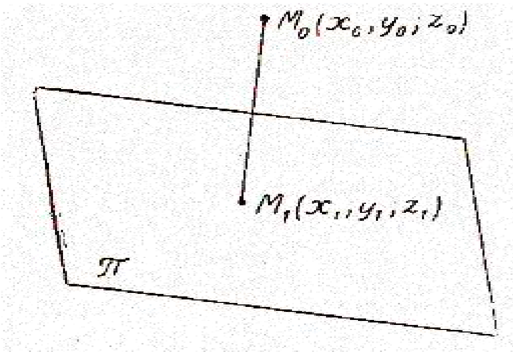
л) $B=C=D=0$ emma $A\neq 0$ bolsa, x=0 bolýar.Bu deňleme *УOZ* tekizligiň deňlemesidir.

Indi deňlemesi berlen tekizligi nähili gurmalydygyna garalyň.Tekizligi gurmak üçin tekizligiň bir çyzygyň üstünde ýatmaýan üç nokadyny tapmaly. Tekizligiň bir nokadyny tapmak üçin x we y näbellilere x_0, we y_0 san bahalary bersek tekizligiň deňlemesinden z_0 bahany taparys, ýagny $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokady alarys. Edil şu usul bilen tekizligiň ene-de iki nokadyny taparys. Tapylan üç nokadyň üsti bilen tekizlik geçirmeli. Adatda şol üç nokat hökmünde tekizligiň koordinata oklary bilen kesişme nokatlary alynýar. Tekizligiň koordinata oklarynyň birine ýa-da ikisine parallel bolan hususy ýagdaýynda ony gurmak üçin degişlilikde bir ýa-da iki nokadyny tapyp, tekizligiň koordinata oklaryna parallellik şertini peýdalanyp gurmaly.

2. *Nokadyň tekizlikden uzaklygy*

K e s g i t l e m e. **Nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň uzynlygyna nokadyň tekizlikden uzaklygy diýilýär.** Goý, bize $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokat we $Ax+By+Cz+D=0$ tekizlik berlen bolsun. M_0 nokatdan tekizlige çenli bolan uzaklygy d bilen we şol nokatdan geçirilen perpendikulýaryň esasyny $M_1(x_1; y_1; z_1)$ bilen belgiläliň (53-nji sur.). (3-22) formula boýünça

$$d^2=|M_0M_1|^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$$



53-nji surat

Gurluşa görä $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$. Bu erde $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ tekizligiň normal wektory. $\overrightarrow{M_0M}$ we $\vec{n}$ wektorlaryň parallellik şertinden

$$\frac{x_1 - x_0}{A} = \frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{z_1 - z_0}{C} = \lambda$$

ýa-da

$$x_1 - x_0 = \lambda A,\ y_1 - y_0 = \lambda B,\ z_1 - z_0 = \lambda C \qquad (4\text{-}33)$$

alarys.

Bu bahalary d uzaklyk üçin bolan aňlatmada oruna goýüp alarys:

$$d = \sqrt{\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 + \lambda^2 C^2} = |\lambda|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

λ sany kesgitlemek üçin (4-33) deňliklerden x_1, y_1, z_1 bahalaryny tapyp tekizligiň deňlemesine goýalyn onda

$$A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = 0$$

ýa-da

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

λ sanyň tapylan bahasyny *d* üçin bolan aňlatmaga goýüp alýarys:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (4\text{-}34)$$

N e t i j e. *Nokadyň tekizlikden uzaklygyny tapmak üçin tekizligiň deňlemesindäki x, y, z sanlaryň oruna berlen nokadyň koordinatalaryny goyup, ony tekizligiň normal wektorynyň uzynlygyna bölmeli we emele gelen sanyň absolýut ulylygyny almaly.*

8-nji m e s e l e. *M(2; 5; 7)* nokadyň *3x-2y+z-4=0* tekizlikden uzaklygyny tapmaly

Ç ö z ü l i ş i. (4-34) formulany ulanyp tapýarys.

$$\boldsymbol{d} = \left| \frac{3\cdot 2 - 2\cdot 5 + 1\cdot 7 - 4}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

3. Berlen bir nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

M(x₀; y; z₀) nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmak gerek dieliň. Goý,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

şol tekizligiň deňlemesi bolsun. Onda $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nokadyň koordinatalary bu tekizligiň deňlemesini kanagatlandyrar:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Ýokarky iki deňlemeden alarys:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (4\text{-}35)$$

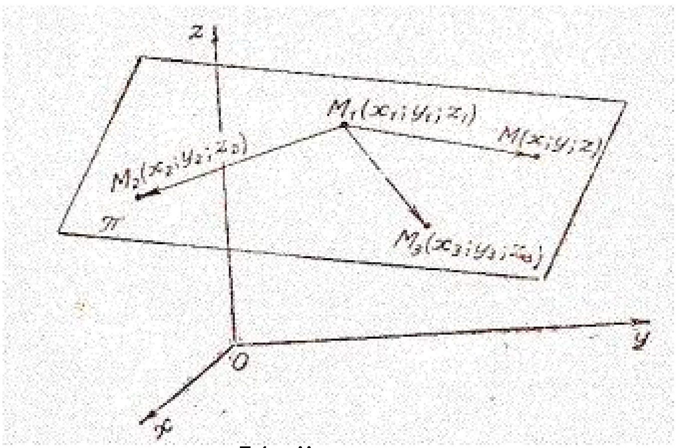
(4-35) deňleme *A, B, C* koeffisietleriň üçüsiniň bir wagda nula deň bolmadyk hallarynyň hemmesinde berlen $M(x_0;\ y;\ z_0)$

nokadyň üstünden geçýän tekizlikleriň deňlemesidir. *A, B, C* koeffisientleriň dürli bahalarynda *M(x₀; y; z₀)* nokadyň üstünden geçýän dürli tekizlikleri alarys.

Bir nokadyň üstünden geçýän tekizliklere *ilteşikli tekizlikler* diýilýär. Ilteşikli tekizlikleiň hemmesiniň geçýän nokadyna *işteşikli tekizlikleriň merkezi* diýilýär.

4.Berlen üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

Goý, bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan berlen $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini yazmak talap edilsin.M_1,M_2 we,M_3 nokatlaryň üstünden π tekizlik geçýär diýeliň. π tekizligiň üstünde erkin $M(x; y; z)$ nokat alalyň. $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$



54-nji surat.

wektorlar π tekizlikde ýatýarlar şoňa görä-de komplanar wektorlardyr.Wektorlaryň komplanarlyk şertine laýylykda alarys:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathbf{(4-36)}$$

Bu M_1 , M_2, M_3 nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesidir.

9-nji m e s e l e. $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(5;\ -3;\ 4)$ we $C(-3;\ 4;\ -2)$ nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i.(4-36) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 5-2 & -3-1 & 4-0 \\ -3-2 & 4-1 & -2-0 \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$4x+14y+11z-22=0.$$

5.Berlen iki nokadyň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesi

Berlen $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ we $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ iki nokadynyň üstünden geçýän tekizlikleriň deňlemesini ýazalyň.

Onuň üçün islendik bir $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ nokat alalyň we M_1 , M_2, M_3 nokatlaryň üstündan geçýän tekizligiň deňlemesini ýazalyň.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

M_3 nokat erkin bolany üçin x_3-x_1=λ_1, y_3-y_1=λ_2, z_3-z_1=λ_3 erkin sanlar bolýar. Diýmek, islendik λ_1, λ_2, λ_3 erkin sanlar üçin

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}=0$$

Alnan deňleme M_1, M_2 nokatlaryň üstünden geçýän tekizligiň deňlemesidir. Bu deňlemedäki λ_1, λ_2, λ_3 sanlara dürli bahalary berip, berlen M_1 we M_2 nokadyň üstünden geçýän dürli tekizlikleri alarys.

6. *Iki tekizligiň arasyndaky burç.* *Iki tekizligiň paralellik we perpendikulýarlyk şerti*

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ we $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
iki tekizligiň kesişmeginden emele gelýan ikigranly burçylaryň biri (φ) bu tekizliklere perpendikulýar bolan

$\vec{n}_1$={A_1; B_1; C_1} we $\vec{n}_2$={A_2; B_2; C_2}

wektorlaryň arasyndaky burça deň bolar. Şoňa görä-de

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (4\text{-}37)$$

Eger tekizlikler parallel bolsalar, onda olara perpendikulýar bolan $\vec{n}_1$;={A_1; B_1; C_1} we $\vec{n}_2$;={A_2; B_2; C_2}

wektorlar hem parallel bolarlar.Diýmek, wektorlaryň parallellik şertine görä

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (4\text{-}38)$$

Eger tekizlikler perpendikulýar bolsalar, onda olara perpendikulýar bolan $\vec{n}_1$ we $\vec{n}_2$ wektorlar hem özara perpendikulýar bolarlar. Wektorlaryň perpendikulýarlyk şertini görä

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (4\text{-}39)$$

(4-38), (4-39) deňlikler, degigişlilikde tekizlikleriň parallellik we perpendikulýarlyk şerti bolar.

10-nji m e s e l e. l-iň we m-iň haýsy bahalarynda $lx+5y-3z+2=0$ tekizlik $2x-my+9z+3=0$ tekizlige: a) parallel, b)perpendikulýar bolýar.

Ç ö z ü l i ş i. a)Berlen tekizlikleriň parallellik şertine görä

$$\frac{l}{2}=\frac{5}{-m}=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$$

bolýar. Bu ýerden $l=-\frac{2}{3}$; m=15.

b) Tekizlikleriň perpendikulýarlyk şertine görä $2l-5m-3\cdot 9=0$ bolýar. Bu erden

$$l=\frac{27+5m}{2}.$$

11-nji m e s e l e. $M_1(5;\ 3;\ 2)$ we $M_2(1;\ -3;\ 4)$ nokatlaryň üstünden geçýän hem-de $\vec{a}=\{2;\ 1;7\}$ wektora parallel bolan tekizligiň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Goý, π gözlenilýän tekizlik bolsun . π tekizlikde erkin $M(x;\ y;\ z)$ nokady alalyň. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{a}$ wektorlar komplanar bolarlar. Soňa görä-de

$$\left[\overrightarrow{M_1M},\ \overrightarrow{M_1M_2}\right]\cdot\overrightarrow{a}=0$$

ýa-da koordinata formasynda

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-2 \\ -4 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}=0$$

Bu erden

$$11x-8y-2z-27=0$$

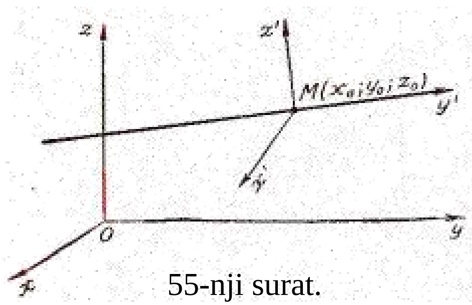
gözlenilýän tekizligiň deňlemesi bolýar.

§5. Geňişlikde göni çyzygyň deňlemeleri

1.*Giňişlikde göni çyzygyň umumy deňlemesi*

Ginişlikde haýsy-da bolsa bir *l* göni çyzyk hem-de *OXУZ* dekart koordinatalar sistemasy berilip, bu göni çyzygyň *OXУZ* koordinata sistemasyna görä deňlemesini çykarmak talap edilsin.

Goý, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ göni çyzygyň bir nokady dieliň. Koordinatalar başlangyjjyny M_0 nokada göçüreliň hem-de onuň haýsy-da bolsa bir oky, meselem *Oy'* oky, *l* göni çyzygyň ugry bilen gider ýaly edip ony käbir burça öwreliň.



55-nji surat.

Şonda göni çyzygyň islendik nokadynyň, täze koordinatalar sistemasyna görä abssisasy we aplikatasy nul bolar:

$x'=0 \quad y'=0 \quad (4\text{-}41)$

O'X'У'Z' koordinatalar sistemasyndan *OXУZ* koordinatalar sistemasyna (4-8) formula arkaly geçsek,(4-41) sistema aşakdaky görnüşi alar:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemanyň iki deňlemesi hem tekizligiň deňlemesidir. Diýmek, giňişlikde göni çyzyga iki tekizligiň kesişme çyzygy hökmünde garamak gerek .(4-42) sistema *göni çyzygynyň umumy deňlemesi* diýilýär.

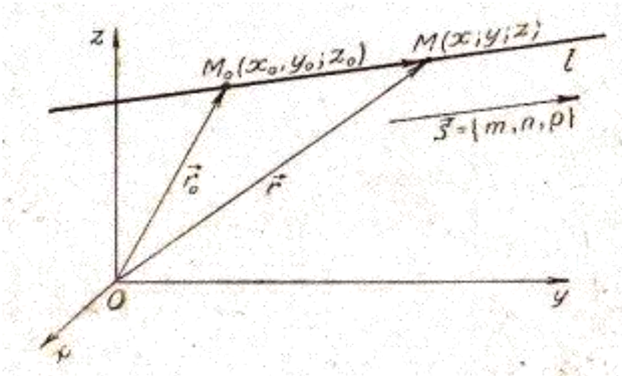
2.*Göni çyzygyň parametrik we kanonik deňlemesi*

l göni çyzygyň parametrik deňlemesi diýilýän, praktikada giňden ulanylýan, deňlemesini çykaralyň.

Göni çyzygyň $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ bir nokady we oňa parallel bolan $s=\{m;\ n;\ p\}$wektor berilse,onda giňişlikde *l* göni çyzygyň ýagdaýy gutarnykly kesgitli bolar (56-nji sur.).

Göni çyzyga parallel bolan $s=\{m;\ n;\ p\}$ wektora *ugrukdyryjy wektor* diýilýär.

Eger $M(x;\ y;\ z)$ göni çyzygyň üstündäki erkin nokat bolsa $\overrightarrow{M_0M}=\{x\text{-}x_0;\ y\text{-}y_0;\ z\text{-}z_0\}$ we $\overrightarrow{s}$ wektorlar kollinear bolarlar.



56-nji surat.

Diýmek, käbir t san üçin alarys:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}. \quad (4\text{-}43)$$

(4-43) deňleme *göni çyzygyň wektor formasyndaky deňlemesidir.* Hakykatdan-da, $M(x; y; z)$ nokat l göni çyzygyň üstünde bolsa, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ bolar we tersine islendik t san üçin $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. bolsa, M nokat berlen l göni çyzygyň üstünde ýatar. $M(x; y; z)$ nokat l çyzygyň üstünde ýatmasa $\overrightarrow{M_0M}$ wektor $\vec{s}$ wektora parallel bolmaz. Diýmek, $\overrightarrow{M_0M}$ wektor t-niň hiç bir bahasynda $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. deňligi kanagatlandyrmaz.

Göni çyzygyň wektor formasyndaky deňlemesinden koordinata formasyna geçip alarys:

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt. \end{cases} \quad (4\text{-}44)$$

(4-44) sistema *göni çyzygyň parametrik deňlemesi* diýilýär.
(4-44) sistemadan alarys:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (4\text{-}45)$$

Alnan deňlemä *göni çyzygyň kanonik deňlemesi* diýilýär.
(4-45) aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (a)$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (b)$$

$$\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (w)$$

Bu deňlemelere degişlilikde *Oz, Oy* we *Ox* oklara parallel tekizlikleriň deňlemesi hökmünde garamak bolar. Şoňa görä-de (a), (b), (w) deňlikler bilen berlen tekizliklere *l* göni çyzygy *proektirleýji tekizlikler* diýilýär.

3.*Berlen iki nokadyň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesi*

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ we $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ nokatlar berlip, bu nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini tapmaklyk talap edilsin. Ugrukdyryjy $\vec{s}$ wektor hökmünde $\overrightarrow{M_0M}=\{x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0\}$ wektory alsak, onda (4-45) formula görä

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \qquad (4\text{-}46)$$

ýazyp bileris. (4-46) gözlenilýän deňlemedir.

12- n j i m e s e l e. $A(3;\ 5;\ 0)$ we $B(2;\ 1;\ 8)$ nokatlaryň üstünden geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. (4-46) deňlemedäki M(x_0; y_0; z_0) nokadyň ornuna A(3; 5; 0) nokady, ugrukdyryji $\vec{s}$ wektoryň oruna $\overrightarrow{AB}$ ={-1; -4; 8} wektory alyp gözlenilýän çyzygyň deňlemesini aşakdaky ýaly ýazyp bileris.

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{-4}=\frac{z}{8}.$$

4.*Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek*

Göni çyzygyň umumy deňlemesini ýazalyň

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4\text{-}47)$$

Göni çyzygyň umumy deňlemesinden kanonik deňlemesine geçmek üçin (4-47)sistemadaky üýtgeýän ululyklaryň birini, meselem, z-i t bilen belläp galan x we y üýtgeýän ululyklary şol deňlemeden t-niň üsti bilen aňladýarlar.Netijede aşakdaky sistema alynýar:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=t. \end{cases}$$

Bu bilsa *göni çyzygyň parametrik deňlemesidir.* Bu sistemadan t-ni ýok edip gözlenilýän kanonik deňlemäni alarys:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z}{1}.$$

13-n j i   m e s e l e.

$$\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$$

göni çyzygyň kanonik deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. $z=t$ goýüp alarys:

$$\begin{cases} 3x+3y=2t+1 \\ 2x-y=-3t-2 \end{cases}$$

Sistemany x we y görä çözüp alarys:

$$x=-\frac{5}{9}-\frac{7}{9}t,$$

$$y=\frac{8}{9}+\frac{13}{9}t.$$

Diýmek, göni çyzygyň parametrik deňlemesi

$$x=\frac{5}{9}-\frac{7}{9}t,$$

$$y=\frac{8}{9}+\frac{13}{9}t,$$

$$z=t$$

bolýar. Göni çyzygyň kanonik deňlemesini almak üçin şol üç deňlemäniň her birinden t-ni tapyp özara deňeşdirip, gözlenilýän kanonik deňlemäni alarys:

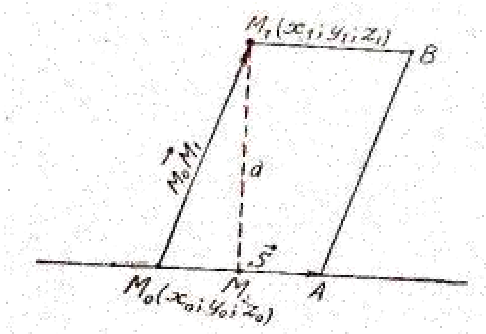
$$\frac{x+\frac{5}{9}}{-\frac{7}{9}}=\frac{y-\frac{8}{9}}{\frac{13}{9}}=\frac{z}{1}.$$

5.*Giňişlikde nokadyň göni çyzykdan uzaklygy*

Kanonik deňlemesi bilen berlen

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

göni çyzykdan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nokadyň uzaklygyny kesgitlemek gerek dieliň. Uzaklygy d bilen belläliň (57-nji sur.).



57-nji surat.

Göni çyzygyň üstünde islendik $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nokat alalyň we $\vec{M_0A}=\vec{s}, \vec{s}=\{m,n,p\}$ bolar ýaly edip M_0M_1, BA parallelogramy guralyň. Gözleýän d uzaklygymyz esasy $|\vec{s}|$ bolan M_0ABM_1 parallelogramyň beýikligi bolar. Parallelogramyň meýdanyny $d\cdot|\vec{s}|$ ýa-da $-\ |[\overrightarrow{M_0M},\vec{s}]|$ bilen aňlatmak bolar. Diýmek,

$$d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}. \qquad (4\text{-}48)$$

14-nji m e s e l e. $M(3;\ 4;\ 2)$ nokadyň $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{-4}$ göni çyzykdan uzaklygyny tapmaly.

Ç ö z ü l ü ş i. (4-48) formulany paýdalanalyň. $M_0(1;\ -3;\ 2)$

$$\overrightarrow{M_0M}=\{2;\ 7;\ 0\};\ \vec{s}=\{2;\ 3;\ -4\}$$

$$\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{s}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 7 & 0\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix}=\overrightarrow{28i}+\overrightarrow{8j}+\overrightarrow{8k}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{s}\right]\right|=\sqrt{28^2+8^2+8}=4\sqrt{57}$$

$$\left|\vec{s}\right|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$d=\frac{4\sqrt{57}}{\sqrt{29}}.$$

6.*Iki göni çyzygyň arasyndaky burç. Iki göni çyzygyň parallellik we perpendikulýarlyk şerti*

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ we\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

göni cyzyklaryň arasyndaky burç, bu göni çyzyklaryň ugrukdyryji $\vec{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$ we $\vec{s}_2=\{m_2;\ n_2;\ p_2\}$ wektorlarynyň arasyndaky burça deňdir. Berlen iki göni çyzygyň arasyndaky burçy φ bilen bellesek, onda alarys

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\qquad(4\text{-}49)$$

Eger göni çyzyklar parallel bolsalar, onda olaryň ugrukdyryji wektorlary paralleldir. Diýmek, iki çyzygyň parallelik şerti

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (4\text{-}50)$$

Eger göni çyzyklar perpendikulýar bilsalar, onda olaryň ugrudyryji wektorlary perpendikulýardyrlar. Diýmek, iki göni çyzygyň perpendikulýarlyk şerti

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0 \qquad (4\text{-}51)$$

15-nji m e s e l e.

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}} \text{ we } \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

göni çyzyklaryň arasyndaky ýiti burçy tapmaly.

Ç ö z ü l ş i.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{1-1+2}{\sqrt{1+1+2}\cdot\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}.$$

Bu erden

$$\varphi=\arccos\frac{1}{2}=60^0$$

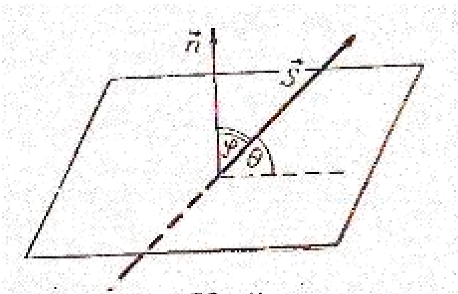
7.*Göni çyzygyň we tekizligiň arasyndaky burç. Göni çyzygyň tekizlige parallellik we perpendikulýarlyk şerti*

K e s g i t l e m e. **Göni çyzygyň we onuň tekizligi bolan proeksiýasynyň arasyndaky** $\frac{\pi}{2}$**–den kiçi bolan** θ

burça göni çyzygyň tekizlik bilen emele getirýän burçy diýilýär. (58-nji surata ser.**)**.

$\frac{x-x_1}{m}\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ göni çyzyk bilen $Ax+By+Cz+D=0$ tekizligiň arasyndaky burçy θ, göni çyzyk bilen tekizligiň normal $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$ wektorlaryň arasyndaky burça φ bilen belgiläp alarys:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$



58-nji surat

φ burçy kesgitlemegi biz bilýäris:

$$\mathbf{cos\varphi=} \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{\mathrm{n}}|\cdot|\vec{s}|}\ \textbf{.}\ \text{Emma}$$

$$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\theta}\ \textbf{.}$$

Diýmek,

$$\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\theta} = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ . \qquad \mathbf{(4-52)}$$

Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda göni çyzygyň ugrudyryjy $\vec{s}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna perpendikulýar bolar. Şoňa görä-de göni çyzygyň tekizlige parallellik şerti aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (4\text{-}53)$$

Eger göni çyzyk tekizlige perpendikulýar bolsa, onda göni çyzygyň ugrudyryji $\vec{s}$ wektory tekizligiň normal $\vec{n}$ wektoryna parallel bolar .Şoňa görä-de göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şerti üçin alarys:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4\text{-}54)$$

16-nji m e s e l e. $M(1; -2; 3)$ nokatdan geçýan we $3x+2y-z+5=0$ tekizlige: a) parallel, b) perpendikulýar bolan göni çyzygyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Goý, $\vec{s}=\{m;n;p\}$ wektor göni çyzygyň ugrukdyryji wektory bolsun.

a) Göni çyzygyň tekizlige parallelik şertini (4-53) formula boýunça alarys:

$$3m-2n-p=0.$$

$n=2$, $p=1$ erkin bahalary berip $m=-1$ tapýarys. $3x+2y-z+5=0$ tekizlige parallel bolan we $M(1; -2; 3)$ nokadyň üstünden geçýän tükeniksiz köp çyzyklaryň biriniň deňlemesi

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

b) Göni çyzygyň tekizlige perpendikulýarlyk şertini (4-54) formula boýunça tapýarys

$$\frac{m}{3}=\frac{n}{2}=\frac{p}{-1}.$$

Diýmek, göni çyzygyň deňlemesi

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

8. *Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokady*

Göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmak üçin, göni çyzygyň parametrik deňlemesini we tekizligiň deňlemesini bilelikde çözmek gerek, ýagny aşakdaky sistemany çözmeli:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Bu sistemanyň 2-nji, 3-nji we 4-nji deňlemelerinden ***x***–iň, ***y***-iň we ***z***-iň bahalaryny 1-nji deňlemede goýup alarys:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}. \qquad (4-55)$$

(4 – 55) deňlikden $Am+Bn+Cp \neq 0$ bolanda ***t*** ýeke – täk kesgitli bahasyny tapýarys. Ony göni çyzygyň parametrik deňlemesine goýup, göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokatlaryny tapýarys.

Eger (4 – 55) deňlemede $Am+Bn+Cn=0$ bolsa, onda ***t***-niň bahasy kesgitsiz bolar. $Am+Bn+Cp=0$ göni çyzygyň we tekizligiň parallellik şertidir. (4 – 53 formula ser.).

17 – n j i m e s e l e. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{5}$ göni çyzygyň $5x+3y-2z+2=0$ tekizlik bilen kesişme nokadyny tapmaly.

Çözülişi. Göni çyzygyň deňlemesini parametrik görnüşde ýazyp tekizligiň deňlemesi bilen bilelikde çözeliň

$$\begin{cases} 5x+3y-2z+2=0 \\ x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=3+5t. \end{cases}$$

Bu ýerden

$$t=-\frac{5\cdot 3-3\cdot 1-2\cdot 3+2}{5\cdot 2-3\cdot 1-2\cdot 5}=2\frac{2}{3}.$$

t – niň bahasyny göni çyzygyň parametrik deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$x=\frac{25}{3}; \qquad y=-\frac{11}{3}; \qquad z=\frac{49}{2}.$$

Indi ähli temalara degişli bolan birnäçe meselä garalyň:

18 – n j i m e s e l e. $A(2;\,3;\,5)$ nokadyň $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$ göni çyzyga bolan proýeksiýasyny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. $A(2;\,3;\,5)$ nokatdan $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{1}$ göni çyzyga geçirilen perpendikulýar bu göni çyzygy $A_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ nokatda kesýär diýeliň.

A we A_1 nokatdan geçýän göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{x-2}{x_1-2}=\frac{y-3}{y_1-3}=\frac{z-3}{z_1-5}.$$

bu göni çyzyklaryň perpendikulýarlygyndan

$$2(x_1-2)+3(y_1-3)+1(z_1-5)=0. \qquad (\alpha)$$

$A_1(x_1; y_1; z_1)$ nokat berlen göni çyzyga degişli bolany üçin

$$\frac{x_1-1}{2}=\frac{y_1+1}{3}=\frac{z_1+2}{1}=t\,.$$

Bu ýerden $x_1=2t+1$; $y_1=3t-1$; $z_1=t-2$ bolar x_1 – iň, $\boldsymbol{y_1}$ – iň, z_1 – iň tapylan bahalaryny (α) deňlige goýup, ondan t – ni tapýarys (t=1,5).

t – niň tapylan bahasyny ornuna goýup alarys:

$$x_1=4,\ y_1=3{,}5;\ z_1=-0{,}5.$$

19 – n j y m e s e l e. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{2}$ göni çyzyga görä $A(1; 2; -1)$ nokada simmetrik nokat tapmaly.

Çözülişi: Ilki A nokadyň berlen göni çyzyga bolan proýeksiýasyny tapalyň (öňki meseledäkä meňzeş tapýarys).

$$x_1=\frac{2}{7};\qquad y_1=\frac{20}{7};\qquad z_1=-\frac{17}{7}.$$

Goý, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ nokat berlen göni çyzyga görä $\boldsymbol{A}$ nokada simmetrik nokat bolsun. A_2 nokat AA_1 göni çyzygyň dowamynyň üstünde ýatar we $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1}\boldsymbol{A_2}$bolar.

$$\overrightarrow{AA_1} = \left\{ \frac{21}{7} - 1;\ \frac{20}{7} - 2;\ -\frac{17}{7} + 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \left\{ x_2 - \frac{2}{7};\ y_2 - \frac{29}{7};\ z_2 + \frac{17}{7} \right\}$$

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1} \boldsymbol{A_2}$ deňlikden alarys.

$$x_2 - \frac{2}{7} = \frac{2}{7} - 1;\ y_2 - \frac{20}{7} = \frac{20}{7} - 2; \qquad z_2 + \frac{17}{7} = -\frac{17}{7} + 1$$

ýa – da

$$x_2 = -\frac{3}{7}; \qquad y_2 = \frac{26}{7}; \qquad z_2 = -\frac{27}{7}$$

20 – n j i m e s e l e. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{-1}(l_1)$ we $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}(l_2)$ göni çyzyklaryň arasyndaky iň gysga uzaklygy tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Göni çyzyklar parallel bolan ýagdaýda ol uzaklyk bir göni çyzygyň islendik nokadyndan beýleki göni çyzyga çenli bolan uzaklyga deňdir. Biz bu meselä şu babyň 14 – nji meselesinde garapdyk.

Normal $\vec{n}$ wektory şol bir wagtda $\vec{s}_1 = \{2; 3; -1\}$ we $\vec{s}_2 = \{-1; 5; 4\}$ ugrukdyryjy wektorlara perpendikulýar bolan tekizlik $\boldsymbol{l_1}$ we $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzyklara paralleldir. Ol wektoryň $\vec{s}_1$ we $\vec{s}_2$ wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyna deňdigini biz bilýäris.

$$\overrightarrow{n}=[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=17\vec{i}-7\vec{j}+13\vec{k}.$$

Diýmek **$17x - 7y+13z+D=0$**

tekizlik $\boldsymbol{l_1}$ we $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzyklara parallel bolar. Bu tekizlik $\boldsymbol{l_1}$ göni çyzygyň üstünden geçer ýaly edip ***D*** sany kesgitläliň. Eger tekizlik $\boldsymbol{l_1}$ göni çyzygyň üstünden geçýän bolsa, onda onuň deňlemesini (3; -5; 1) nokadyň koordinatalary kanagatlandyrar, ýagny $17\cdot3+7\cdot5+13\cdot1+D=0$ ýa - da ***D* = -99.**

Diýmek,

$$\mathbf{17x - 7y + 13z - 99 = 0}$$

tekizlik $\boldsymbol{l_1}$ göni çyzygyň üstünden geçýän we $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzyga parallel tekizlikdir. Bu tekizligi ***Q*** tekizlik diýip atlandyralyň $\boldsymbol{l_1}$ we $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzyklaryň arasyndaky iň gysga aralygyň $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzygyň islendik nokadynydan ***Q*** tekizlige çenli bolan uzaklyga deňdigi aýdyňdyr. $\boldsymbol{l_2}$ göni çyzygyň üstünde ýatýan ***M*** **(-2; 1; -2)** nokatdan **17*x* – 7*y* + 18*z* – 99 = 0** tekizlige çenli aralyk

$$\boldsymbol{d}=\left|\frac{17(-2)-7\cdot1+13(-2)-99}{\sqrt{17^2+7^2+13^2}}\right|.$$

Bu ýerden gözlenilýän iň gysga aralyk $d=\frac{166}{\sqrt{507}}$.

V bap.

IKINJI TERTIPLI KÄBIR EGRI ÇYZYKLAR WE ÜSTLER

§ 1. Ellips

1. Ellipsiň kesgitlemesi we kanonik deňlemesi

K e s g i t l e m e. **Fokuslar diýlip atlandyrylýan F_1 we F_2 nokatlara çenli uzaklyklarynyň jemi F_1 we F_2 fokuslaryň arasyndaky uzaklykdan uly bolan hemişelik sany berýän tekizlikdäki nokatlaryň köplügine ellips diýilýär.**

Goý, F_1 we F_2 nokatlar tekizlikde berlen fokuslar bolsun, M $(x;\ y)$ nokat ellipse degişli islendik bir nokat bolsun. Kesgitlemä görä

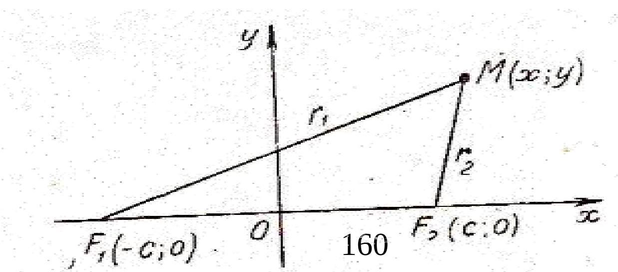
$$|F_1M| + |F_2M| = \text{const}$$

ýa-da deňligiň sag bölegindäki hemişelik sany **2*a*** bilen bellesek, onda

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \qquad (5\text{–}1)$$

Talaba görä $|F_1F_2| < 2a$. $|F_1F_2| = 2c$ bilen belläliň we $a > c$ diýip güman edeliň.

Indi ellipsiň, dekart koordinata sistemasyna görä, deňlemesini çykaralyň. Abssisa oky $F_1\ F_2$ kesimiň üstüne düşer ýaly we koordinatalar başlangyjy $F_1\ F_2$ kesimi deň ýarpa böler ýaly edip koordinatalar sistemasyny guralyň. (59 – njy sur.).



59 – njy surat.

59 – njy suratdan

$$|F_1M| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (5-2)$$

$$|F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (5-3)$$

***r*1** we ***r*2** – fokus radiuslary.(5 – 1), (5 – 2) we (5 – 3) deňliklerden alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,. \qquad (5-4)$$

(5 – 4) deňleme *ellipsiň deňlemesidir.* Ony käbir öwürmeleriň kömegi bilen has görnükli görnüşe getirmek bolar. (5 – 4) deňlikdäki kökleriň ikinjisini sag tarapa geçirip, alnan deňligiň iki tarapyny hem kwadrata götereliň:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx+c^2 + y^2$$

ýa – da

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Ýene bir gezek kwadrata götereliň:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

ýa – da

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2.$$

$\sqrt{a^2 - c^2}$ =b bilen belgiläliň. Soňky deňligiň hemme agzasyny a^2b^2 sana bölüp alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5-5)$$

(5 – 4) deňlemeden (5 – 5) deňlemäni almak üçin, ony iki gezek kwadrata göterdik, şonuň üçin onda del kökleriň peýda bolan bolmagy mümkindir, ýagny ellipse degişli bolmadyk nokatlaryň, (5 – 4) deňlemäni kanagatlandyrmaýan nokatlaryň koordinatalarynyň (5 – 5) deňlemäni kanagatlandyrmagy mümkindir. Emma (5 – 5) deňlemäni kanagatlandyrýan islendik nokadyň koordinatlarynyň (5 – 4) deňlemäni kanagatlandyrýandygy aňsatlyk bilen subut edilýär.

(5 – 5) deňlemä *ellipsiň kanonik deňlemesi* diýilýär.

Ellipsiň deňlemesiniň ikinji derejeli bolany üçin ol ilkinji tertipli egri çyzykdyr.

2. *Ellipsiň deňelemesiniň derňewi*

Biz şu punktda (5 – 5) deňlemäniň derňewine garajakdyrys.

Şol deňlemeden $|x| \le a,\quad |y| \le b$ gelip çykýar. Diýmek, ellipsiň $|x| \le a,\quad |y| \le b$ göniburçlykdan daşarda hiç bir nokady ýokdur.

Ellips ***OX*** ok bilen **A₁(*a; o*)** we ***A*₂(0; – *a*)** nokatlarda, ***OY*** ok bilen ***B*₁(*o; b*)** we ***B*₂ (*o; –b*)** nokatlarda kesişýär. Bu nokatlara ***ellipsiň depeleri*** diýilýär.

Ellipsiň deňlemesine ***x*** we ***y*** diňe jübüt derejede girýär, şoňa görä-de ellips *OX* we *OY* oklara hem-de koordinatalar başlangyjyna görä simmetrik figuradyr.

OX we *OY* oklara ***ellipsiň simmetriýa oklary*** diýilýär. Simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna ***ellipsiň merkezi*** diýilýär.

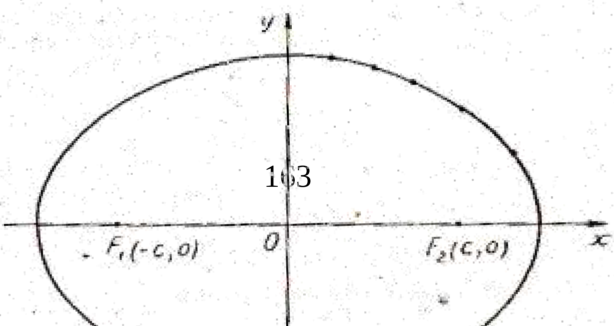
Ellips ***OX*** okdan ***2a*** deň kesimi kesip alýar, oňa ***ellipsiň uly oky*** diýilýär. (umuman ellipsiň fokuslarynyň ýatýan okuna ellipsiň uly oky diýilýär.) ellips ***OY*** okdan ***2b*** deň bolan kesimi keisp alýar, oňa ***ellipsiň kiçi oky*** diýilýär.

Eger ellipsiň ***OX*** we ***OY*** oklara görä simmetrik figuradygyny nazara alsak, onda ellipsi gurmak üçin onuň koordinata burçlarynyň birindäki, meselem, birinjisindäki, bölegini gurmak ýeterlikdir.

Ellipsiň koordinata burçynyň birinjisindäki bölegini gurmaga girişeliň. Ellipsiň kanonik deňlemesini ***y*** görä çözüp alarys:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (5 - 6)$$

Birinji koordinata burçynda ***y*** položitel bolany üçin biz köküň öňünde diňe plýus alamatyny goýduk. ***x*** sana nuldan ***a*** çenli birnäçe bahany berip, (5 – 6) deňlikden ***y*** kesgitleýäris we aşakdaky tablisany düzýäris.



60 – njy surat.

x	***0***	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{5}{6}a$	*a*
y	b	$\frac{b\sqrt{35}}{6}$	$\frac{b\sqrt{8}}{3}$	$\frac{b\sqrt{3}}{3}$	$\frac{b\sqrt{5}}{a}$	$\frac{b\sqrt{11}}{6}$	*0*

Bu nokatlary gurup, olary lekalo arkaly endigan egri çyzyk bilen birleşdirýäris.

B e l l i k. Ellipsi gurmak üçin, uçlary halkalyja uzynlygy **2*a*** deň bolan sapagyň halkajyklaryny ellipsiň fokuslarynda sünjülen iki iňňäniň daşyna geýdirmeli. Galamyň ujuny, sapagy dartgynly ýagdaýda sakladyp, tekizlikde aýlamaly. Ellipsi gurmagyň bu kadasy ellipsiň kesgitlemesinden gelip çykýar.(60-njy surat)

3. Ellipsiň ekssentrisiteti we direktrisalary

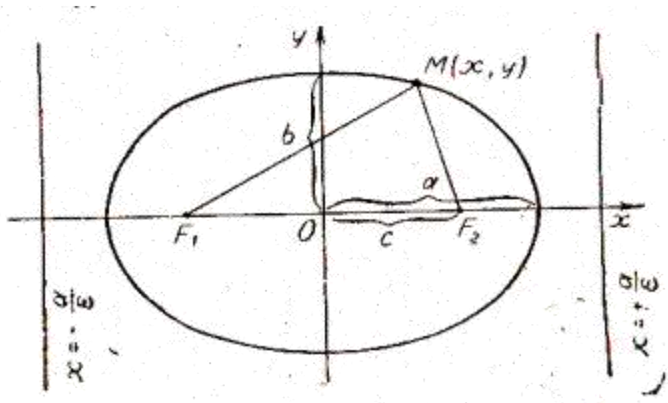
Ellipsiň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygyň ellipsiň uly okuna bolan $\frac{c}{a}$ gatnaşygyna ellipsiň ekssentrisiteti diýilýär.
Ol ε bilen belgilenýär. Diýmek,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad \textbf{(5 – 7)}$$

Deňlemeleri

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon} \qquad \textbf{(5 – 8)}$$

göni çyzyklara ***ellipsiň direktrisalary*** diýilýär. 61 – nji suratda ellipsiň direktrisalary görkezilendir.



61 – njy surat.

4. ***Ellips töweregiň tekizlige bolan proýeksiýasydyr. Ellips tekizligiň togalak silindr bilen kesişme çyzgydyr***

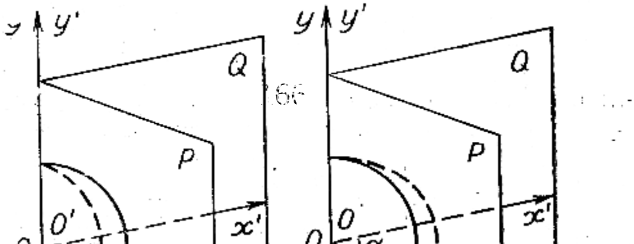
Goý, ***P*** we ***Q*** tekizlikler käbir *l* göni çyzyk boýunça kesişýän bolsun. ***P*** tekizlikde ***XOY***, ***Q*** tekizlikde ***X′ O′Y′*** koordinatalar sistemasynyň ikisi üçin hem *l* koordinata oky, ***O*** nokady koordinatalar sistemasynyň ikisi üçin hem başlangyç edip alalyň (62 – nji sur.). Eger biz ***P*** tekizlikdäki $x^2+y^2=R^2$ töweregiň hemme nokatlaryny ***Q*** tekizlige ortogonal proektirlesek, ýagny töweregiň islendik nokadyndan ***Q*** tekizlige perpendikulýar indermek bilen proektirlesek (62 – nji ***a*** sur.), onda ***X′O′Y′*** tekizlikde täze bir egri çyzyk emele geler. Onuň ***M***(***x′; y′***) nokadynyň koordinatalary töweregiň degişli ***M*** (***x; y***) nokatlarynyň koordinatlary bilen

$$\begin{cases} y = y' \\ x = \dfrac{x'}{\cos\alpha} \end{cases} \qquad (a)$$

baglanyşykda bolar.
Bu ýerde α burç ***P*** we ***Q*** tekizlikleriň arasyndaky burçdyr.

x – iň we ***y*** – iň bahalaryny berlen töweregiň deňlemesine goýup alarys:

$$\frac{x'^2}{\cos^2\alpha} + y'^2 = R^2$$



62 – nji surat.

ýa-da

$$\frac{x'^2}{R^2\cos^2\alpha}+\frac{y'^2}{R^2}=1.$$

Indi $\boldsymbol{R^2}$ $\mathbf{cos^2}\boldsymbol{a}$**=**$\boldsymbol{a^2}$ bilen bellesek ($\boldsymbol{a^2}$**<**$\mathbf{R^2}$)

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{R^2}=1,$$

(***x´ oy´***) tekizlikde ýatan ellipsiň deňlemesini alarys.

Bu ellipsde ***a*<*R*** bolany üçin ellipsiň fokuslary ***OY*** okda ýatýar.

Eger biz ***P*** tekizlikde $\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}$ töweregi ***Q*** tekizlige, töweregiň nokatlaryndan galdyrylan perpendikulýaryň ***Q*** tekizligi bilen kesişme nokatlary edip proektirlesek (62 – nji b sur.), onda degişli ***M*** (***x´; y´***) we ***M***(***x; y***) nokatlaryň koordinatalary özara

$$\begin{cases} y = y' \\ x = x'\cos\alpha \end{cases} \qquad \textbf{(b)}$$

baglanyşykda bolýar.

x we ***y*** – iň bahalaryny berlen töweregiň deňlemesine goýmak bilen alarys.

$$x'^2 \cos^2 a + y'^2 = R^2$$

ýa – da

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{R}{\cos\alpha}\right)^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1$$

Indi $\dfrac{R}{\cos\alpha} = a$ bellesek ýene – de $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{R^2} = 1$ ellipsi alýarys. Bu ýerde ***a***>***R*** bolany üçin ellipsiň fokuslary ***OX*** okda ýatar.

Töweregiň nokatlaryndan çykýan we onuň tekizligine perpendikulýar bolan göni çyzyklaryň geometrik ornunyň togalak silindri emele getirýändigini göz öňünde tutsak, onda biz soňky ellipse togalak silindriň tekizlik bilen kesişme çyzygy hökmünde hem garap bileris. Indi ellipse degişli käbir meselelere seredeliň.

1 – n j i m e s e l e.

$\boldsymbol{M_1}\left(3;\ \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ we $\boldsymbol{M_2}\left(2;\ \frac{\sqrt{12}}{4}\right)$ nokatlary belli bolan ellipsiň kanonik deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Ellipsiň merkeziniň koordinatalar başlangyjynda, fokuslarynyň bolsa absissa okunda ýatandygy üçin gözlenilýän ellipsiň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$\boldsymbol{M_1}\left(3;\ \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ $\boldsymbol{M_2}\left(2;\ \frac{\sqrt{12}}{4}\right)$ nokatlaryň koordinatalaryny ellipsiň deňlemesinde goýup, ***a*** we ***b*** sanlary kesgitleýäris:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{7}{16b^2}=1, \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{12}{16b^2}=1. \end{cases}$$

Bu ýerden

$\boldsymbol{a^2=16,\ b^2=1.}$ $\boldsymbol{a^2}$ we $\boldsymbol{b^2}$ tapylan bahalaryny ellipsiň deňlemesine goýup alarys:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{1}=1$$

2 – n j i m e s e l e. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}$ **=1** ellipsiň ***M*** nokadyndan çep fokusyna çenli uzaklyk sag fokusyna çenli bolan uzaklykdan 2 esse uludygy belli bolsa, ***M*** nokadyň koordinatalaryny tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Meseläniň şertine görä (61 – nji sur.)

$$F_1M=2F_2M. \qquad (a)$$

Ellipsiň F_1 ($-c$; o), **we** $F(c; o)$ **fokuslarynyň abssisasyny kesgitläliň:**

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8\,.$$

(***a***) deňlemäni ***F*₁, *F*₂, *M*** nokatlaryň koordinatalary arkaly ýazalyň:

$$\sqrt{(x+8)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-8)^2 + y^2}$$

ýa – da

$$3x^2 - 80x + 3y^2 + 192 = 0.$$

M **(*x; y*)** nokat ellipse degişli bolany üçin berlen ellipsiň deňlemesinden $y^2 = 36\left(1 - \frac{x^2}{100}\right)$ alyp soňky deňlige goýup alarys:

$$12x^2 - 500x + 1875 = 0$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{75}{2}; \qquad x_2 = \frac{25}{6}}.$$

$\boldsymbol{x = x_1}$ bolanda $\boldsymbol{y}$ – iň bahalary hyýaly bolany üçin diňe $\boldsymbol{x = x_2}$ köki almaly bolýarys. Onuň bahasyny ellipsiň deňlemesine goýup alarys:

$$y_{12} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{119}\,.$$

Şeýlelikde, berlen meseläniň şertini kanagatlandyrýan

$M_1\left(\frac{25}{6}; \frac{1}{2}\sqrt{119}\right)$ we $M_2\left(\frac{25}{6}; -\frac{1}{2}\sqrt{119}\right)$ iki nokat bardyr.

3 – n j i m e s e l e. Ekssentrisiteti $\frac{3}{\sqrt{17}}$, direktrisasynyň deňlemesi $x = \frac{17}{3}$ bolan ellipsiň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Meseläniň şertine görä $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{17}}$:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = \frac{17}{3},$$

ýagny

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{17}}; \qquad \frac{a^2}{c} = \frac{17}{3}.$$

Bu iki deňligi agzaba-agza köpeldip alýarys: $a = \sqrt{17}$. ***a*** – nyň tapylan bahasyny ornuna goýup $\boldsymbol{c = 3}$ alýarys. Ellipsiň kiçi ýarym oky

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17 - 9} = 2\sqrt{2}.$$

Diýmek, gözlenilýän ellipsiň deňlemesi $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ bolar.

§ 2. Giperbola

1. G*iperbolanyň kesgitlemesi we onuň kanonik deňlemesi*

K e s g i t l e m e. **Fokuslar diýlip atlandyrylýan *F_1* we *F_2* nokatlara çenli uzaklyklarynyň tapawudynyň absolýut ululygy nuldan tapawutlanýan hemişelik sana deň bolan, tekizlikdäki nokatlaryň köplügine goperbola diýilýär.**

Goý, F_1 we F_2 nokatlar tekizlikde berlen fokuslar bolsun, $M(x;\ y)$ nokat giperbola degişli islendik nokat bolsun. Kesgitlemä görä

$$\left||F_1M|-|F_2M|\right| = \text{const.}$$

Bu hemişeilk sany 2*a* bilen belläliň.

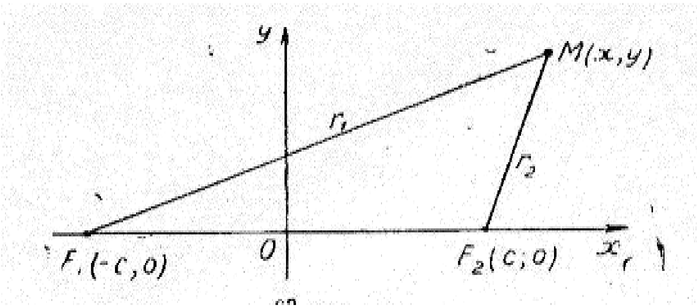
$$\left||F_1M|-|F_2M|\right| = 2a.$$

Bu deňligi modulsyz ýazalyň.

$$|F_1M|-|F_2M|=\pm 2a. \qquad (5–9)$$

fokuslaryň arasyndaky uzaklygy 2*c* bilen bellesek, ýagny $|F_1F_2| = 2c$ bellesek, kesgitlemä görä $0<2a<2c$ ýa – da

$$0<a<c. \qquad (5–10)$$



63 – nji surat.

Indi giperbolanyň dekart koordinatalar sistemasyna görä deňlemesini çykaralyň. Sadalyk üçin, abssissa oky F_1 F_2 kesimiň üstüne düşer ýaly we ordinata oky F_1F_2 kesimiň ortasyndan geçer ýaly edip koordinatalar sistemasyny saýlap alalyň (63 – nji sur.).63 – nji suratdan alarys:

$$|F_1M| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \qquad (5-11)$$

$$|\ F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \qquad (5-12)$$

(5 – 9), (5 – 11) we (5 – 12) deňlemelerden aşakdaky deňlik gelip çykar:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (5-13)$$

M*(*x*; *y*)** nokat sag tarapky ýarym tekizlikde ýatanda **2*a – nyň alamatynyň plýus boljakdygy, çep tarapky ýarym tekizlikde ýatanda minus boljakdygy 63 – nji suratdan aýdyň görünýär.

Ellipsiň kanonik deňlemesini çykaryşymyzdaka meňzeş operasiýalary geçirip (5 – 13) deňligi

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2y = a^2 (c^2 - a^2) \qquad (5 - 14)$$

görnüşe getirse bolar.

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ belläp we (5 – 14) deňligiň hemme agzalaryny a^2b^2 bölüp alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5 – 15)$$

Alnan deňlemä *giperbolanyň kanonik deňlemesi* diýilýär.

2. *Giperbolanyň deňlemesiniň derňewi*

Biz aşakda giperbolanyň deňlemesi diýenimizde onuň (5 – 15) deňleme bilen berilýän kanonik deňlemesini göz öňünde tutjakdyrys.Giperbolanyň deňlemesini ***y*** görä çözüp alýarys:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \qquad (5 – 16)$$

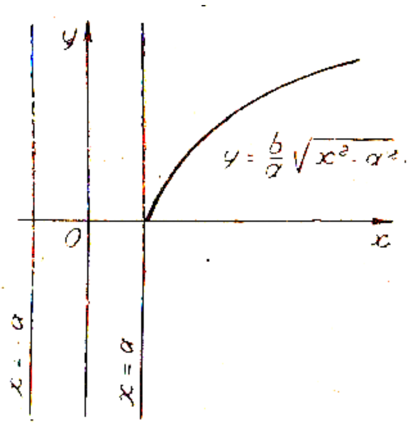
Bu ýerden $x = \pm a$ bolanda $y = 0$ bolýany görünýär. Diýmek, giperbola abssissa okuny $A_1(-a;\ 0)$ we $A_2(a;\ 0)$ nokatlarda kesýär; $|x| < a$ bolanda y – giň bahasy hyýaly san bolýar.

Başgaça aýdanymyzda $x=\pm a$ göni çyzyklaryň arasyndaky tekizlik zolagynyň hiç bir nokady giperbola degişli däldir. Giperbola iki bölekden – şahadan ybarat bolan figuradyr. Giperbolanyň sag tarapky $x \geq a$ ýarym tekizlikde ýatýan bölegine giperbolanyň ***sag tarapky bölegi –şahasy,*** çep tarapky $x \geq -a$ ýarym tekizlikde ýatýan bölegine ***çep tarapky bölegi – şahasy*** diýilýär.

Giperbolanyň koordinata oklary bilen kesişme nokadyna onuň ***depeleri*** diýilýär. Giperbolanyň $A_1(-a;\ 0)$ we $A_2(a;\ 0)$ iki depesi bardyr.

Giperbolanyň deňlemesiniň ***x*** – a we ***y*** – ge görä diňe jübüt derejeli deňleme bolany üçin, giperbola koordinatalar başlangyjyna we koordinata oklaryna görä simmetrik figuradyr. Şonuň üçin hem koordinata oklaryna $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$ giperbolanyň ***simmetriýa oklary*** diýilýär. Giperbolanyň fokuslary ýerleşen oka giperbolanyň hakyky simmeriýa oky, beýleki oka bolsa hyýaly simmetriýa oky diliýär. Matematiki edebiýatlarda ***a*** sana giperbolanyň hakyky ýarym oky ***b*** sana bolsa giperbolanyň hyýaly ýarym oky diýlip hem aýdylýar. Giperbolanyň simmetriýa oklarynyň kesişme nokadyna onuň ***simmetriýa merkezi*** diýilýär.

Giperbola koordinata oklaryna simmetrik figura bolany üçin, onuň gurluşyny 1 – nji koordinata burçunda ýerine ýetirip, galan koordinata burçlarynda zerkal şekillendirmek arkaly amala aşyrmak bolar. Giperbolanyň 1 – nji koordinata burçunda nähili çyzykdygyna garalyň.



64 – nji surat.

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

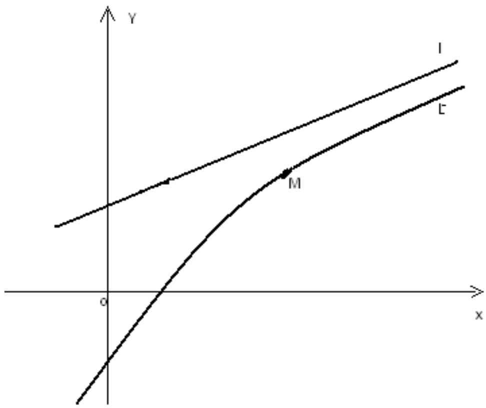
deňlikden ***x*** – iň, ***a*** – dan tükeniksizlige çenli artdygyça ***y*** – iň nuldan tükeniksizlige çenli artýanlygy görünýär. Eger ***M*** nokadyň traýektoriýasy giperbolany çyzýar diýip göz öňüne getirsek, onda onuň ***x*** oky bilen ***A*** (***a;*** **0**) nokatda umumy nokady bolup “saga” we “ýokaryk” tükeniksizlige çenli hereket edýändigine göz ýetirmek bolar (64 – nji sur.).

3. ***Giperbolanyň asimptotalary***

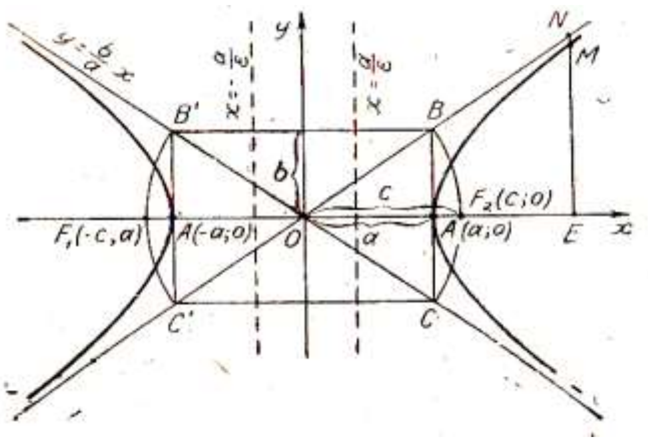
Haýsy – da bolsa bir ***L*** egri çyzygyň üstünde süýşýän ***M*** nokat koordinatalar başlangyjyndan tükeniksiz uzaklaşanda ***l*** göni çyzyk bilen onuň arasyndaky uzaklyk tükeniksiz kiçelýän bolsa, onda ***L*** egri çyzyk ***l*** göni çyzyga asimptotik ýakynlaşýar diýilýär. ***l*** göni çyzyga bolsa L egri çyzygyň asimptotasy diýilýär. (65 – nji sur.).

Meselem, ***y*** = ***a****ˣ* görkezijili funksiýanyň grafigini çyzýan ***M*** nokat bilen ***OX*** okuň arasyndaky uzaklyk ***M*** nokat koordinatalar başlangyjyndan çepe uzaklaşdygyça (***a*** < **1** bolanda) kiçelýär we ahyrynda bu uzaklyk nula ymtylýar. Diýmek, $\boldsymbol{y = 0}$ göni çyzyk $\boldsymbol{y = a^x}$ görkezijili funksiýanyň grafiginiň asimptotasy bolýar. (***a*** > **1** bolanda ***M*** nokat koordinatalar başlangyjyndan saga süýşende $\boldsymbol{y = 0}$ göni çyzyk $\boldsymbol{y = a^x}$ funksiýanyň asimptotasy bolýar.)

$\boldsymbol{y = \log_a x}$ funksiýanyň grafiginiň asimptotasy $\boldsymbol{x = 0}$ göni çyzyk bolýar. $\boldsymbol{y = tg\ x}$ funksiýanyň grafiginiň asimptotalary $\boldsymbol{x = (2k+1)}\dfrac{\pi}{2}$ göni çyzyklar bolýar.



65 – nji surat.



66 – njy surat.

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (5 - 17)$$

göni çyzyklar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolanyň asimptotalarydyr.

Ony subut etrmek üçin giperbolanyň we $y = \pm \frac{b}{a} x$ göni çyzygyň abssissasy x bolan M we N nokatlarynyň arasyndaky uzaklyga garalyň (66 – njy suratda M we N nokatlar 1 – nji koordinata burçunda görkezilendir).

$$MN = EN - EM$$

EN kesim $y = \frac{b}{a}x$ göni çyzygyň ordinatasy bolany üçin $EN = \frac{b}{a}x$; *EM* kesim giperbolanyň ordianatasy bolany üçin

$$EM = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

EN – iň we *EM* – iň bahalaryny ýokarky deňlikde ornuna goýalyň we ony sadalaşdyralyň.

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \times$$
$$\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Eger biz ***x*** sana barha uly bahalary berip başlasak maýdalawjy barha ulallar, emma sanawjy şol bir hemişelik sanlygyna galar, ýagny *x* – iň ulalmagy bilen $\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ drob kiçeler we $x \longrightarrow \infty$ bolanda drobuň ululygy nula ymtylar. Diýmek, giperbola $y = \frac{b}{a}x$ göni çyzyga asimptotik ýakynlaşar. Beýleki koordinata burçlary üçin hem edil şuňa meňzeş edip $y = \pm\frac{b}{a}x$ göni çyzyklaryň giperbolanyň asimptotalarydygyny görkezmek bolar.

Giperbolanyň asimptotalarynyň deňlemesinden olaryň giperbolanyň oklaryna görä simmetrik ýerleşen, taraplary *2a* we *2b* bolan gönüburçlugyň diagonallarydygy (66 – njy suratda $B'BCC'$ göniburçlugyň diagonalydygy) gelip çykýar. Gönüburçluk giperbolanyň formasyny kesgitleýär. Şonuň üçin hem ***oňa giperbolanyň esasy gönüburçlugy*** diýilýär.

Asimptotasy ***y = x*** göni çyzyk bolan giperbola deň taraply giperbola diýilýär. Deňtaraply giperbolada ***a = b*** bolýar.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{we} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

iki giperbola ***çatyrymly giperbolalar*** diýilýär.

4. *Giperbolanyň ekssentrisiteti we direktrisasy*

K e s g i t l e m e. **Giperbolanyň fokuslarynyň arasyndaky uzaklygyň onuň depeleriniň arasyndaky uzaklygyna bolan gatnaşygyna giperbolanyň ekssentrisiteti diýilýär.**
Giperbolanyň ekssentrisitetini ε bilen bellesek, onda

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (5-18)$$

Giperbolada ***c*** > ***a*** bolany üçin ε **>1** bolýandygyny belläliň. Giperbolanyň ekssentrisitetini ***a*** we ***b*** arkaly aňladalyň.

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Soňky deňlikden, giperbolanyň ekssentrisitetiniň $\frac{b}{a}$ gatnaşyk arkaly kesgitlenýändigini görýäris. $\frac{b}{a}$ gatnaşyk giperbolanyň formasyny kesgitleýär. Diýmek, ekssentrisitet giperbolanyň formasyny kesgitleýän atsyz sandyr:

Deňlemeleri

$$x=-\frac{a}{\varepsilon}; \qquad x=\frac{a}{\varepsilon} \qquad \textbf{(5 – 19)}$$

bolan göni çyzyklara ***giperbolanyň direktrisalary*** diýilýär. Giperbolanyň fokuslary *OX* okunda ýerleşen bolsa, onda (5 – 19) deňliklerden görnüşi ýaly, giperbolanyň direktrisalary fokuslar okuna perpendikulýar bolan iki sany göni çyzykdyr.

$\varepsilon > \mathbf{1}$ bolany üçin $x=-\frac{a}{\varepsilon} > -a;$ $\quad x=\frac{a}{\varepsilon} < a.$

Diýmek, giperbolanyň direktrisalary onuň iki depesiniň arasyndan geçýär (66 – njy suratda giperbolanyň direktrisalary punktir çyzyklar bilen görkezilendir). $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ göni çyzyga giperbolanyň ***çep tarapky direktrisasy,*** $x=\frac{a}{\varepsilon}$ göni çyzyga sag tarapky direktrisasy diýilýär.

Indi käbir meselelere seredeliň.

4 – n j i m e s e l e. Ekssentrisiteti ε = 1,25 bolan, fokuslary $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipsiň fokusynda ýatýan giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Ilki giperbolanyň fokuslaryny tapalyň.

Meseläniň şertine görä ellipsiň fokuslary giperbolanyň fokuslary bolup hyzmat edär. Ellips üçin

$\boldsymbol{c} = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{49-24}=5.$

Giperbolanyň fokuslary $\boldsymbol{F_1}$**(–5; 0)** we $\boldsymbol{F_2}$**(5; 0**) nokatlar bolýar. meseläniň şertine görä

$\dfrac{c}{a}$ = 1,25, bu ýerden $a = \dfrac{4}{5} \cdot c = \dfrac{4}{5} \cdot 5 = 4$.

Giperbola üçin hyýaly ýarym ok

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Diýmek, gözlenilýän giperbolanyň deňlemesi:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

5 – n j i m e s e l e. Bir asimptotasynyň deňlemesi $y = \dfrac{3}{2}x$, sag tarapky direktrisasynyň deňlemesi $x = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$ bolan giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Giperbolanyň asimptotasynyň deňlemesini umumy görnüşde ýazalyň: $y = \dfrac{b}{a}x$. Meseläniň şertine görä $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2}$ ýa – da $b = \dfrac{3}{2}a$. Giperbolanyň sag tarapky direktrisasynyň deňlemesi $x = \dfrac{c}{\varepsilon} = \dfrac{a^2}{c}$ deň. Meseläniň şertine görä $\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$ ýa – da $c = \dfrac{\sqrt{13}}{12}a^2$. $b^2 = c^2 - a^2$ deňlige **b** – niň we **c** – niň tapylan bahalaryny goýalyň.

$$\frac{9}{4}a^2 = \frac{13}{144}a^4 - a^2.$$

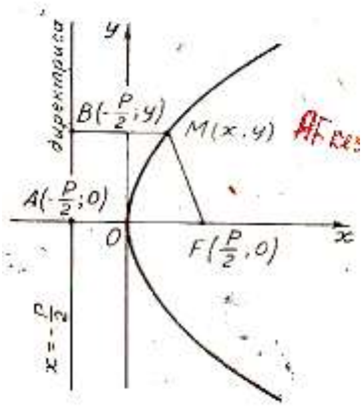
Bu deňlemäni çözüp $a = 6$ we soňra $b = 9$ tapýarys. Diýmek, gözlenilýän giperbolanyň deňlemesi

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1 \text{ bolar.}$$

§ 3. Parabola

1. *Parabolanyň kesgitlemesi we onuň kanonik deňlemesi*

K e s g i t l e m e. **Tekizlikde berlen göni çyzyga çenli uzaklygy, şol tekizlikde berlen nokada çenli uzaklyga deň bolan tekizligiň nokatlar köplügine parabola diýilýär.**
Tekizlikde berlen göni çyzyga ***parabolanyň direktrisasy***, berlen nokada bolsa ***parabolanyň fokusy*** diýilýär.



67 – nji surat.

Parabolanyň deňlemesini çykarmak üçin, abssissa okuny fokusyň üsti bilen direktrisa perpendikulýar edip geçireliň. Ordinata okuny bolsa AF kesimiň ortasyndan geçireliň (67 – nji sur.). Fokusdan direktrisa çenli uzaklygy ***p*** bilen belläliň.

Şonda fokusyň koordinatalary $\frac{p}{2}$ we **0** bolar. Fokus direktrisadan sag tarapda ýatsa (67 – nji suratdaky ýaly) direktrisanyň deňlemesi $\boldsymbol{x = -\frac{p}{2}}$ bolar.

Goý, ***M*** (***x; y***) nokat parabolanyň islendik bir nokady bolsun. ***M*** (***x; y***) nokatdan direktirsa inderilen perpendikulýaryň esasyny ***B*** bilen belläliň. Parabolanyň kesgitlemesine görä

$$|MB| = |MF| \qquad \textbf{(5 – 20)}$$

Bu deňligi nokatlaryň koordinatalary arkaly ýazalyň.

$$|MB| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Diýmek,

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem ilki kwadrata göterip, soňra ýönekeýleşdirip alarys:

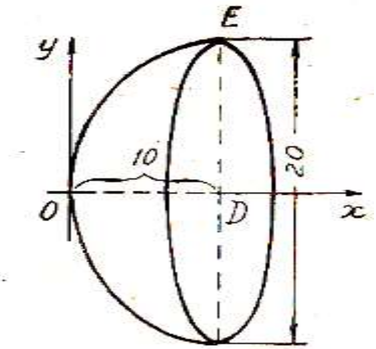
$$y^2 = 2px. \qquad (5 – 21)$$

Alnan deňlemä ***parabolanyň kanonik deňlemesi*** diýilýär.

2. *Parabolanyň deňlemesiniň derňewi*

Parabolanyň $y^2 = 2px$ deňlemesini derňäliň. Deňlemede y ikinji derejede bolany üçin parabola *Ox* oka görä simmetrik figuradyr. Şonuň üçin *OX* oka parabolanyň simmetriýa oky diýilýär. Diýmek parabolany gurmak üçin onuň *OX* okundan ýokarky bölegini gurup, soňra *OX* oka görä zerkal şekilini almak ýeterlikdir.

x – iň nuldan kiçi bahalarynda $y = \pm\sqrt{2px}$ bahasy ýokdur. Diýmek, parabolanyň *OY* okdan çep tarapda ýekeje nokady hem ýokdur.$x = 0$ bolanda $y = 0$ bolýar. $y^2 = 2px$ parabola koordinatalar başlangyjyndan geçýär. x nuldan tükeniksizlige çenli artanda y nuldan tükeniksizlige çenli artýar. $x = \frac{p}{2}$ bolanda $y = p$ bolýar, ýagny parabolanyň fokusyndan *OX* okuna geçirilen perpendikulýar göni çyzygyň parabolanyň içindäki bölegininň uzynlygy $2p$ deň bolýar. p san näçe uly bolsa parabola şonça – da ýaýraň bolýar. **p** sana ***parabolanyň parametri*** diýilýär. 67 – nji suratda $y^2 = 2px$ parabola görkezilendir.



68 – nji surat.

$y^2 = -2px$ deňleme – de parabolanyň deňlemesidir. $x > 0$ bolanda ordinatanyň hakyky bahasy ýokdur. Diýmek, bu parabolanyň *OY* okdan sag tarapda ýekeje – de nokady ýokdur.

6 – n j y m e s e l e. Awtomobiliň çyrasynyň doly gabynyň onuň agzyndaky tegelegiň diametriniň we onuň çür depesiniň üstünden geçýän tekizlik bilen kesişmesi parabolany berýär. Awtomobil çyrasynyň daş gabygynyň diamteri 20 *sm*, onuň

çuňlugy 10 *sm* bolsa, şol parabolanyň fokusyny tapmaly (68 – nji surata ser.).

Ç ö z ü l i ş i. Koordinatalar başlangyjy awtomobil çyrasynyň depesi bilen, abssissa oky *OD* bilen gabat geler ýaly edip koordinatalar sistemasyny guralyň. Şonda parabolanyň deňlemesi $y^2 = 2px$ bolar. *E* nokadyň koordinatalary (10,10)bolarlar,olary parabolanyň deňlemesine goýup alarys: $100\ cm^2 = 2p\ \ 10\ cm$; $p = 5\ cm$; $\frac{p}{2} = 2{,}5\ cm$. Parabolanyň fokusy $F(2{,}5;\ 0)$ nokat bolar.

§ 4. Ikinji tertipli egrilere galataşýan çyzyk

K e s g i t l e m e. **Kesiji $M_0\ M_1$ göni çyzygyň M_1 nokady egri çyzygyň üstünde bolmagyny dowam etmek bilen M_0 nokada çäksiz ýakynlaşandaky predel ýagdaýyna egri çyzygyň M_0 nokadyndaky galtaşýan çyzygy diýilýär.**

Ellipsiň, giperbolanyň we parabolanyň galtaşma çyzyklarynyň deňlemesini çykaralyň. M_0 (x_0; y_0) we M_1 (x_1; y_1) nokatlar egri çyzygyň nokatlary bolsun. Bu iki nokadyň üstünden geçýän kesiji göni çyzygyň deňlemesini ýazalyň:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} \text{ ýa – da } \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Ellipsiň galtaşma çyzygynyň deňlemesi

M_0 (x_0; y_0) we M_1 (x_1; y_1) nokatlar ellipse degişli bolsa, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ we $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ deňlikleri ýazyp bileris. Soňky iki deňligi biri – birinden aýryp alarys:

$$\frac{x_0^{\ 2}-x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}-y_1^{\ 2}}{b^2}=0$$

ýa – da

$$\frac{(x_0-x_1)(x_0+x_2)}{a^2}=-\frac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{b^2},$$

bu ýerden

$$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=-\frac{b^2(x_0+x_1)}{a^2(y_0+y_1)}. \qquad (5 - 23)$$

(5 - 23) deňlemeden $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$ üçin tapylan bahany kesiji çyzygyň deňlemesine, ýagny (5 – 22) deňlemä goýup alarys:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2(x_0+x_1)}{a^2(y_0+y_1)}.$$

bu deňligiň iki tarapyny hem $\frac{(y_0+y_1)(x-x_1)}{b^2}$ köpeldip alarys:

$$\frac{(y-y_1)(y_0+y_1)}{b^2}=-\frac{(x-x_1)(x_0+x_1)}{a^2}. \qquad \mathbf{(5-24)}$$

(5 – 24) deňleme ellipsi M_0 (x_0; y_0) we M_1 (x_1; y_1)nokatlarda kesip geçýän göni çyzygyň deňlemesidir. Bu kesiji göni çyzygyň M_1 (x_1; y_1) nokady M_0 (x_0; y_0) nokadyna tükeniksiz ýakynlaşýar we predel ýagdaýynda M_0 (x_0; y_0) nokadyň üstüne düşýär diýsek, onda biz ellipse M_0 (x_0; y_0) nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini alarys:

$$\frac{(y-y_0)\cdot 2y_0}{b^2}+\frac{(x-x_0)\cdot 2x_0}{a^2}=0$$

ýa – da

$$\frac{y_0y}{b^2}+\frac{xx_0}{a^2}=\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}.$$

bu galtaşýan çyzygyň deňlemesidir. M_0 (x_0; y_0) nokat ellipse degişli bolany üçin

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (5–25)$$

(5 – 25) deňleme ellipse M_0 (x_0; y_0) nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesidir.

Giperbolanyň we parabolanyň galtaşýan çyzyklarynyň deňlemesi ellipsiň galtaşýan çyzygynyň deňlemesine meňzeş edilip çykarylýar. Biz giperbolanyň we parabolanyň galtaşýan çyzyklarynyň gutarnykly deňlemelerini ýazarys. Siz olary özbaşdak hem çykaryp bilersiňiz.

Giperbolanyň galtaşýan çyzygynyň deňlemesi

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1\ . \qquad (5 - 26)$$

Parabolanyň galtaşýan çyzygynyň deňlemesi

$$y_0y = p\,(x+x_0) \qquad (5 – 27)$$

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5 – 28)$$

Göni çyzygyň ellipsiň galtaşma çyzygy bolmagy üçin haýsy şertiň zerurdygyna garalyň. Ellipsiň galtaşma çyzygynyň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0 \qquad (5-25')$$

(5 – 25’) we (5 – 28) deňlemeler ellipsiň M_0 (x_0; y_0) nokadynda galtaşýan şol bir göni çyzygy deňlemesi boljak bolsalar, onda (4 – 17) formula laýyklykda

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right) : A = \left(\frac{y_0}{b^2}\right) : B = -1 : C$$

bolmaly. Bu ýerden alarys:

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C};\ y_0 = -\frac{Bb^2}{C}.$$

M_0 (x_0; y_0) nokat $Ax + By + C = 0$ göni çyzyga – da degişli bolany üçin

$Ax_0 + By_0 + C = 0$ ýazyp bileris. Bu deňlikde x_0 – iň we y_0 – iň bahalaryny ornuna goýup alarys:

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0. \qquad (5-29)$$

(5 – 29) formula $Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse galtaşýan göni çyzyk bolmagynyň şertini aňladýar.

$Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbola galtaşýan çyzyk bolmagynyň şerti

$$A^2a^2 - B^2b^2 - C^2 = 0. \qquad (5-30)$$

$Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň $y = 2px$ parabola galtaşýan göni çyzyk bolmagynyň şerti

$$pB^2 - 2\,AC = 0. \qquad (5-31)$$

$Ax + By + C = 0$ göni çyzygyň giperbola we parabola galtaşýan bolmak şerti, göni çyzygyň ellipse galtaşýan bolmak şertiniň tapylyşy ýaly tapylýar.

7 – n j i m e s e l e. Eger $x + y + 5 = 0$ we $x - 4y - 10 = 0$ göni çyzyklar ellipse galtaşýan bolsalar we ellipsiň oklary koordinata oklary bilen gabat gelýän bolsa, onda ellipsiň deňlemesini tapmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Biziň gözleýän ellipsimiziň deňlemesi meseläniň şertine görä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a we b sanlary kesgitlemek üçin göni çyzygyň ellipse galtaşma şertini, ýagny (5 – 29) deňligi ulanýarys.

$$1^2a^2 + 1^2b^2 - 25 = 0$$

we

$$1^2a^2 + 4^2b^2 - 100 = 0$$

Bu iki deňligi bilelikde çözüp $b^2 = 5$, $a^2 = 20$ tapýarys. Şeýlelikde, biziň gözleýän ellipsimiziň deňlemesi

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ bolýar.}$$

8 – n j i m e s e l e. $x - y - 2 = 0$ göni çyzyk oklary koordinata oklary bilen gabat gelýän giperbola M (**4; 2**) nokatda galtaşýar. Giperbolanyň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Goý, gözlenilýän giperbolanyň deňlemesi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ bolsun. a^2 we b^2 sanlary kesgitläliň. Giperbola üçin galtaşma nokadyň koordinatalary

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C}; \quad y_0 = \frac{Bb^2}{C}$$

bolýar. (özbaşdak çykaryň). Meseläniň şertine görä

$$x_0 = 4; y_0 = 2; A = 1, B = -1, C = -2.$$

Bu sanlary ýokarky deňlige goýup alarys: $a^2 = 8$ we $b^2 = 4$.

Şeýlelikde, gözlenilýän giperbolanyň deňlemesi

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ bolýar.}$$

9 – n j y m e s e l e. $y^2 = 4x$ parabola we oňa galtaşýan $x + 3y + 9 = 0$ göni çyzyk berlen. Galtaşma nokadyny tapmaly

Ç ö z ü l i ş i. Parabola üçin galtaşma nokadyň koordinatalary $x_0 = \frac{C}{A}; y_0 = \frac{Bp}{A}$ bolýar. (Özbaşdak çykaryň.)

Meselede, $A = 1$, $B = 3$, $C = 9$ we $p = 2$ berlen. Ýokarky deňlikden $x_0 = 9$, $y_0 = 6$ tapýarys. Biz tekizlikdäki käbir egri çyzyklaryň deňlemelerine garap geçdik. Indiki paragraflarda käbir üstleriň deňlemelerine gararys.

§ 5. Silindrik üst

K e s g i t l e m e. **Haýsy bolsa – da bir göni çyzyk öz – özüne parallelligini saklap, başga bir berlen çyzygyň ugry bilen hereket edip üst emele getirýän bolsa, onda ol üste silindrik üst diýilýär.**

Öz – özüne parallelligini saklap hereket edýän göni çyzyga *emele getiriji* diýilýär. Emele getirijiniň hereket edýän çyzygyna *ugrukdyryjy* diýilýär.

69 – njy suratda silindrik üstüň bir bölegi görkezilendir. ***AB*** göni çyzyk silindriň emele getirijisi, ***AC*** egri çyzyk bolsa onuň ugrukdyryjysy. Silindrik üstüň deňlemesini çykarmak üçin, silindrik üstüň emele getirijisiniň ugry we ugrukdyryjysynyň deňlemesi gerek.

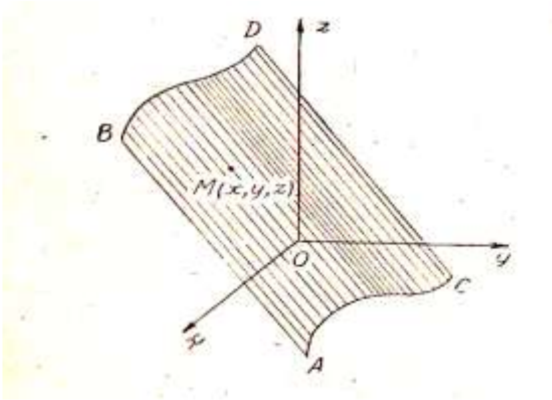
Goý, silindriň emele getirijisi $\overrightarrow{a} = \{m,\ n,\ p\}$ wektora parallel bolsun we

$$\begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \phi(u) \\ z = \theta(u) \\ a \le u \le b \end{cases}$$

silindriň ugrukdyryjysynyň deňlemesi bolsun. Ugrukdyryjynyň islendik M_1 (x_1; y_1; z_1) nokadyndan geçýän emele getirijiniň deňlemesi

$$\begin{cases} x - x_1 = mt \\ y - y_1 = nt \\ z - z_1 = pt \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 32)}$$

$$-\infty < t < \infty$$



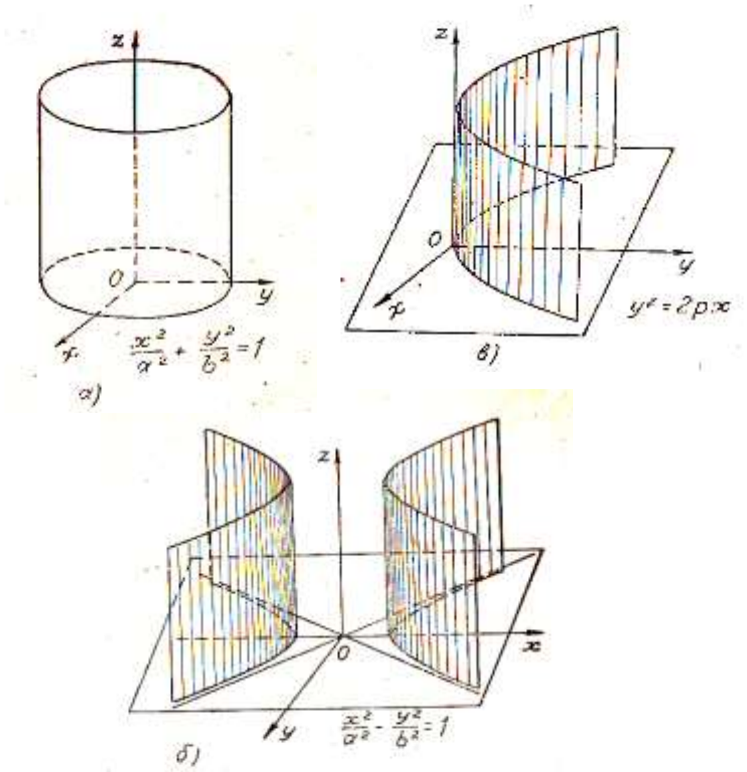
69 – njy surat.

bolar. M_1 nokat ugrukdyryjynyň nokady bolany üçin $x_1 = \varphi(u)$, $y_1 = \phi(u)$, $z_1 = \theta(u)$ bolar. Bu bahalary (5 – 23) deňlige goýup alarys:

$$\begin{cases} x - \varphi(u) = mt \\ y - \phi(u) = nt \\ z - \theta(u) = pt \end{cases} \qquad (5-33)$$

(5 – 33) deňleme *silindrik üstüň parametrik deňlemesidir*. Goý indi ugrukdyryjy ***XOY*** tekizliginde ýatsyn we silindriň emele getirijisi ***OZ*** oka parallel bosun. Onda ugrukdyryjynyň deňlemesi ***F*** **(*x*; *y*) = 0** bolar. Bu ýagdaýda ugrukdyryjynyň islendik ***M*₁** (***x*₁; *y*₁**) nokadyndan geçýän emele getirijiniň deňlemesi aşakdaky ýaly bolar:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$



70 – nji surat.

M_1 (x_1; y_1) nokat emele getirijä degişli bolan üçin, silindriň deňlemesi $F(x; y) = 0$ diýip ýazyp bileris.

Şeýlelikde, xOy tekizliginde ýatýan islendik çyzygyň deňlemesine, giňişlikde emele getirijisi Oz oka parallel bolan silindrik üstüň deňlemesi hökmünde garalýar. Şoňa görä – de bu hili silindrik udrukdyryjynyň ady bilen atlandyrylýar. Meselem, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ deňleme giňişlikde emele getirijisi Oz

oka parallel bolan silindrik üstüň deňlemesidir. Oňa *giperbolik silindr* diýilýär. 70 – nji a, b, w suratda elliptik, giperbolik, parabolik silindrler görkezilendir.

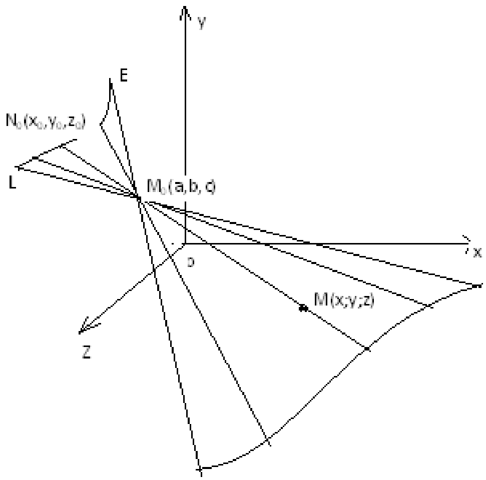
§ 6. Konik üst

K e s g i t l e m e. **Gozganmaýan bir nokady bolan göni çyzyk, başga bir berilen çyzyk boýunça hereket edip üst emele getirýän bolsa, ol üste konik üst diýilýär.**

Göni çyzygyň gozganmaýan nokadyna *konik üstüň depesi* diýilýär. Üstü emele getirýän göni çyzyga *konik üstüň emele getirijisi* diýilýär. Emele getirijiniň hereket edýän çyzygyna *ugurkdyryjy* diýilýär. Goý M_0 ($a; b; c$) nokat emele getirijiniň gozganmaýan nokady bolsun,

$$\begin{cases} F(x; y; z) = 0 \\ \Phi(x; y; z) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 34)}$$

ugrukdyryjynyň deňlemesi bolsun.



71 – nji surat.

Konik üstüň islendik $\boldsymbol{M(x;y;z)}$ nokadynyň koordinatalarynyň kanagatlandyrjak deňlemesini, ýagny konik üstüň deňlemesini çykaralyň. Goý, $\boldsymbol{N_0}$ $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0};\ \boldsymbol{z_0})$nokat ugrukdyryjy çyzyga degişli nokat bolsun. Onda $\boldsymbol{N_0}$ $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0};\ \boldsymbol{z_0})$ nokadyň koordinatalary ugrukdyryjynyň deňlemesini kanagatlandyrar, ýagny

$$\begin{cases} F(x_0;\ y_0;\ z_0) = 0 \\ \Phi(x_0;\ y_0;\ z_0) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 35)}$$

$\boldsymbol{M_0}$ we $\boldsymbol{N_0}$ nokatlardan geçýän emele getirijiniň deňlemesi

$$\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y-b}{y_0-b} = \frac{z-c}{z_0-c} \qquad \textbf{(5 – 36)}$$

bolar.

(5 – 35) we (5 – 36) deňlemeleriň üçüsinden $\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0};\ \boldsymbol{z_0}$ näbellileri tapyp we olaryň tapylan bahalaryny dördünji deňlemä goýup, konik üstüň deňlemesini alarys. Konik üstüň ugrukdyryjysy töwerek bolsa oňa tegelek konik üst diýilýändigini belläliň.

10 – n j y m e s e l e. Ugrukdyryjysy

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{10} = 1 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{6} = 1 \end{cases}$$

bolan, depesi koordinatalar başlangyjynda ýatýan konik üstüň deňlemesini ýazmaly.

Ç ö z ü l i ş i. Konik üstüň deňlemesini (5 – 35) we (5 – 36) deňlemeler görnüşinde ýazalyň:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^2}{3} + \dfrac{y_0^2}{5} + \dfrac{z_0^2}{10} = 1 \\ \dfrac{x_0^2}{2} + \dfrac{y_0^2}{9} + \dfrac{z_0^2}{6} = 1 \\ x = x_0 t; \ y = y_0 t; \ z = z_0 t \end{cases}$$

***x*₀**

x_0 – iň, y_0 – iň, z_0 – iň bahalaryny ugrukdyryjynyň deňlemesine goýup alarys

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{10} = t^2 \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{6} = t^2 \end{cases}$$

Bu ýerden

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{10} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6}$$

ýa – da

$$\frac{x^2}{6} - \frac{4y^2}{45} + \frac{z^2}{15} = 0$$

§ 7. Aýlanma üst

K e s g i t l e m e. **Haýsy – da bolsa bir çyzygyň nokatlary, ok diýlip atlandyrylan göni çyzygyň töwereginde, şol okdan uzaklygyny üýtgetmän şol oka perpendikulýar tekizlik boýunça 2π burç öwrülip üst emele getirýän bolsa, onda ol üste aýlanma üst diýilýär.** Ýönekeýlik üçin aýlanýan çyzyk oka perpendikulýar bolan islendik tekizlik bilen diňe bir nokatda kesişýär diýeliň.
Goý, deňlemesi

$$\begin{cases} F(x; y; z) = 0 \\ \Phi(x; y; z) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 37)}$$

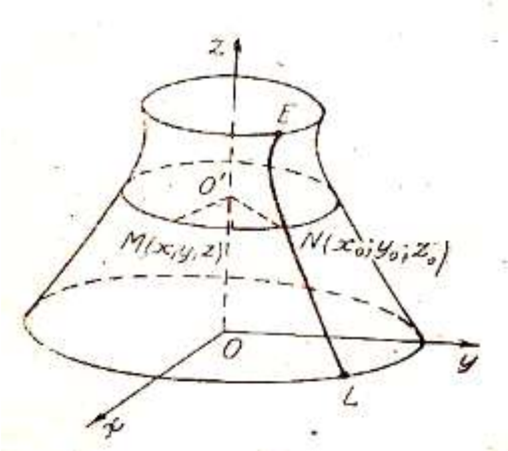
bolan ***LE*** çyzyk ***Oz*** okuň töwereginde aýlanyp üst emele getirýär diýeliň (72 – nji sur.).

Bu üste degişli islendik bir ***M*** (***x; y; z***) nokady alalyň. ***M*** nokadyň üsti bilen aýlanma okuna perpendikulýar tekizlik geçireliň. Bu tekizlik ***LE*** çyzygy käbir ***N*** (***x0, y0, z0***) nokatda, oky bolsa käbir ***O`*** nokatda keser`
(5 – 37)deňlikden ***x*** we ***y*** sanlary ***z*** arkaly aňladyp alays:

$$\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \lambda(z) \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 38)}$$

N (***x0; y0; z0***) nokat ***LE*** çyzyga degişli bolany üçin onuň koordibnatalary (5 – 38) deňlikleri kanagatlandyrar.
Şoňa görä – de

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(z_0) \\ y_0 = \lambda(z_0) \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 39)}$$



72 – nji surat.

72 – nji suratdan $|O'M| = |O'N|$.

(şol bir töweregiň radiuslary bolany üçin) $\boldsymbol{z = z_0}$ alarys.

Ýene – de

$$O`M^2 = x^2 + y^2 \qquad (5-40)$$

$$O`N^2 = x_0^2 + y_0^2 = [\varphi\ (z^0)]^2 + [\lambda\ (z_0)]^2 =$$

$$= [\varphi\ (z)]^2 + [\lambda\ (z)]^2. \qquad (5-41)$$

Bu iki deňlikden aýlanma üstüň deňlemesini alarys:

$$x^2 + y^2 = [\varphi\ (z)]^2 + [\lambda\ (z)]^2. \qquad (5-42)$$

N e t i j e. *Eger aýlanma üsti käbir egriniň koordinata oklarynyň biriniň töwereginde, meselem, Oz okuň töwereginde, aýlanmagy bilen emele getirilýän bolsa, onda aýlanma üsti emele getirýän çyzygyň deňlemesini*

$$x = \varphi(z)$$

$$y = \lambda(z)$$

parametrik görnüşinde ýazmaly. *Ox* ýa – da *Oy* okuň töwereginde aýlanmagy bilen üst emele getirýän egri çyzygyň parametrik deňlemesini degişlilikde aşakdaky ýaly

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \lambda(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \varphi(y) \\ z = \lambda(y) \end{cases}$$

görnüşinde ýazmak amatly bolýar.

8. A*ýlanma ellipsoidy we ellipsoid*

Goý, *XOZ* tekizliginde ýatýan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellips *Oz* okuň töwereginde aýlanýan bolsun. Berlen ellipsiň deňlemesini iki üstüň kesişmesi görnüşinde, (3 – 37) deňleme görnüşinde ýazalyň.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ &y = 0 \end{aligned}\right\}$$

Bu deňleme sistemasyny ***x*** we ***y*** görä çözeliň hem – de kwadrata götereliň:

$$\left.\begin{aligned} &x^2 = \frac{a^2}{c^2}\left(c^2 - z^2\right), \\ &y^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Bu iki deňligi goşup alarys:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - z^2)}$$

ýa –da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5-43)$$

(5 – 43) deňleme bilen berlen üste *aýlanma ellipsoidy* diýilýär.

(5 – 43) deňleme bilen berilýän aýlanma ellipsoidyny koordinata oklaryna perpendikulýar tekizlikler bilen keseliň we kesiklerde nähili çyzyklaryň emele gelýändigine garalyň.

1) Goý $\boldsymbol{x = h}$ tekizlik bilen kesýäris diýeliň, onda (5 – 43) deňlikden alarys:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

Bu deňligiň çep bölegi položitel san; sag böleginiň hem položitel san bolmagy üçin $|h| \le |a|$ bolmaly $|h| > |a|$ bolanda $\boldsymbol{x}$ – $\boldsymbol{h}$**,** tekizlik bilen aýlanma ellipsoidy kesişmeýärler. Soňky deňlemäniň hemme agzalaryny $1 - \frac{h^2}{a^2}$ bölüp

$$\frac{y^2}{a^2 h^2} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1 \qquad \boldsymbol{(5-44)}$$

ellipsi alarys.

2. Goý, ***y* = *h*** tekizlik bilen kesýäris diýeliň. Onda (5 – 43) deňlikden alarys:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right) \qquad (5-45)$$

Munuň $|h|\le|a|$ bolanda ***xOz*** tekizlige parallel tekizlikde ýatýan ellipsdigini görmek aňsatdyr. $|h|>|a|$ bolanda ***y* = *h*** tekizlik aýlanma ellipsiody bilen kesişmeýär.

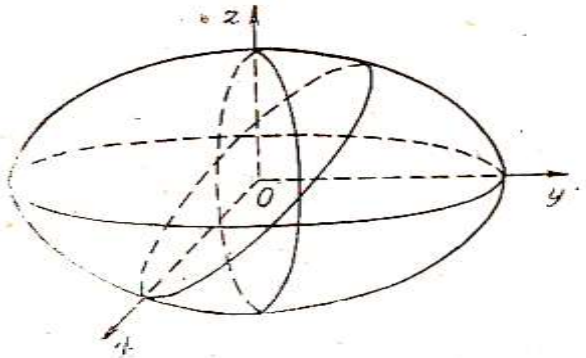
3. Goý, ***z* = *h*** tekizlik bilen kesýäris diýeliň. Onda (5 – 43) deňlikden alýarys.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right) \qquad (5-46)$$

$|h|>|c|$ bolanda bu egriniň *xOy* tekizlige parallel tekizlikde ýatýan, $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ radiusly töwerekdigini görmek kyn däldir. $|h|>|c|$ bolsa z = h tekizlik aýlanma ellipsiody bilen kesişmeýär.

Aýlanma ellipsiodyny aýlanma okuna perpendikulýar tekizlik bilen kessek, onda kesikde töwerek, beýleki oklara perpendikulýar tekizlikler bilen kessek bolsa ellips emele gelýär.

Üç kesiginde hem ellips emele geler ýaly üsti almaga synanyşalyň. (5 – 44) we (5 – 45) deňliklerde deňligiň çep tarapyndaky goşulyjylaryň maýdalawjylary dürli bolany üçin kesiklerde ellips emele geldi. (5 – 46) deňlikde deňligiň çep bölegindäki goşulyjylaryň maýdalawjylarynyň deň bolany üçin kesikde töwerek emele geldi. Diýmek, hemme kesikde ellips almak üçin aýlanma ellipsiodynyň deňlemesindäki ***x, y*** we ***z*** ululyklaryň maýdalawjylaryny dürli sanlar etmek gerek.



73 – nji surat.

Meselem,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5-47)$$

üst üç kesiginde hem ellipsi berýän üstdir. (5 – 47) deňleme bilen aňladylýan üste *ellipsiod* diýilýär. Ol *a*, *b*, *c* sanlar dürli bolanda hiç bir çyzygyň okuň töwereginde aýlanmagyndan emele gelip bilmez, ýagny ol aýlanma üst däldir.

a, *b*, *c* sanlara ellipsiodyň *ýarym oklary* diýilýär. 73 – nji suratda ellipsoid görkezilendir.

§ 9. Bir boşlukly aýlanma giperboloidi.

Bir boşlukly giperboloid

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

giperbolany ***Oz*** okuň töwereginde aýlamadan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5-48)$$

aýlanma üsti alýarys. Muňa *bir boşlukly aýlanma giperboloidy* diýilýär. Bir boşlukly aýlanma giperboloidini koorinata oklaryna perpendikulýar tekizlikler bilen, ýagny ***x* = *h*, *y* = *h*** we ***z* = *h*** tekizlikler bilen keseliň hem – de kesikde nähili figuranyň emele gelýändigine garalyň.

1. ***z* = *h*** bolanda alarys:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}. \qquad (5-49)$$

Soňky deňlik radiusy $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ bolan töwerekdir.

2. ***x* = *h*** bolanda alarys:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \qquad (5-50)$$

(5 – 50) deňlik bilen aňladylýan figura $h \neq a$ bolanda giperbolany berýär. ***h* = *a*** bolanda bolsa

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ýa – da

$$\frac{y}{a}=\frac{z}{c} \text{ we } \frac{y}{a}=-\frac{z}{c},$$

ýagny göni çyzyklary alýarys.

3. $\boldsymbol{y = h}$ bolanda, $\boldsymbol{x = h}$ bolandaky ýagdaý gaýtalanýar.

Iki kesiginde $\boldsymbol{h \neq a}$ bolanda giperbola, üçünji kesiginde ellips emele geler ýaly üsti almaga synanyşalyň. (5 – 48) deňlikdäki $\boldsymbol{y}$ – iň maýdalawjysyny $\boldsymbol{b}$ bilen çalşyralyň. Şonda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \mathbf{(5-51)}$$

alarys. (5 – 51) deňlik bilen aňladylýan üste *bir boşlukly giperboloid* diýilýär. Ol $\boldsymbol{a \neq b \neq c}$ ýagdaýda aýlanma üst däldir. Bir boşlukly giperboloid $\boldsymbol{z=h}$ tekizlik bilen kesişende

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

ellips berýär.

B e l l i k. Bir boşlukly aýlanma giperboloidi we bir boşlukly giperboloid hemme tarapa tükeniksizlige çenli uzalyp gidýän üstdir, çünki $\boldsymbol{x=h; \ y=h, \ z=h}$ tekizlikler $\boldsymbol{h}$ sanyň islendik bahasynda bir boşlukly aýlanma giperboloidi we giperboloid bilen kesişýärler. Aýlanma ellipsoidi we ellipsoid çäkli üstdir, çünki **x=h, y=h, z=h** tekizlikler degişlilikde $|h| > |a|, |h| > b, |h| > |c|$ bolanda aýlanma ellipsoid bilen kesişmeýär.

Indi bir boşlukly giperboloidyň üstüni göni çyzyklaryň örtýändiini, özünem bir boşlukly giperboloida degişli her bir nokadyň üstünden iki dürli göni çyzygyň geçýändigini görkezeliň. (5 – 51) deňlemäni aşakdaky ýaly edip ýazalyň.

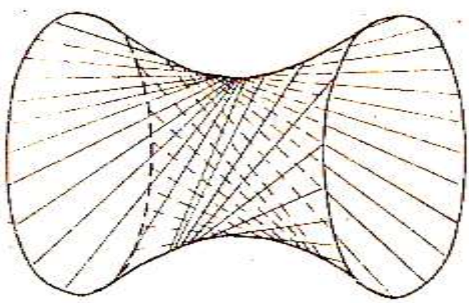
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

ýa – da

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right). \qquad \textbf{(5 – 52)}$$

(5 – 52) deňleme iki dürli göni çyzyk sistemasyny berýär.

a)
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \alpha\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\alpha}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 53)}$$



74 – nji surat.

b)
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \beta\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\beta}\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(5 – 54)}$$

(5 – 53) we (5 – 54) sistema ***a*** we β sanlaryň kesgitli bahasynda kesgitli göni çyzyklary berýär. ***a*** – nyň we β – niň bahalaryny üýtgedip göni çyzyklaryň iki dürli sistemasyny alarys. (5 – 53) we (5 – 54) sistemanyň deňlemelerini agzaba-agza köpeltsek (5 – 52) deňlemäni alarys. Diýmek, (5 – 53) ýa – da (5 – 54)sistemany kanagatlandyrýan islendik (***x***; ***y***; ***z***) nokat bir boşlukly giperboloidanyň üstünde ýatýar.

Haýsy – da bolsa (x_0; y_0; z_0) nokat ***a*** sanyň kesgitli bahasynda (5 – 53) sistemany kanagatlandyrýan bolsa, onda şol nokadyň (5 – 54) sistemany kanagatlandyryp biljek kesgitli β sany tapmak bolar. Diýmek, giperboloidyň her bir nokadynyň üstünden (5 – 53) sistema bilen berilýän bir göni çyzyk we (5 – 54) sistema bilen berilýän başga bir göni çyzyk geçýär.

Bir boşlukly giperboloidyň üstüni göni çyzyklar örtýänligi üçin oňa emele getirijisi göni çyzyk bolan üst diýlip garalýar. Emele getirijisi göni çyzyklar bolan bir boşlukly giperboloidy gurmak aňsat, konstruksiýasynyň ýeňil we mäkäm bolany üçin ol minaralar gurlanda peýdalanylýar. Bir boşlukly giperboloidy gurluşykda ulanmak ideýasy rus inženery W.G. Şuhowa (1853 – 1939) degişlidir. Şuhowyň shemasy boýunça Moskwanyň telewizion minarasy gurlandyr. Ol umumy aýlanma oky bolan bir boşlukly aýlanma giperboloidy 74 – nji suratda görkezilendir.

§ 10. Iki boşlukly aýlanma giperboloidy.

Iki boşlukly giperboloid

$$\left.\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right\}$$

$$\boldsymbol{y = 0}$$

giperbolany hakyky okuň töwereginde aýlasak, onda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$

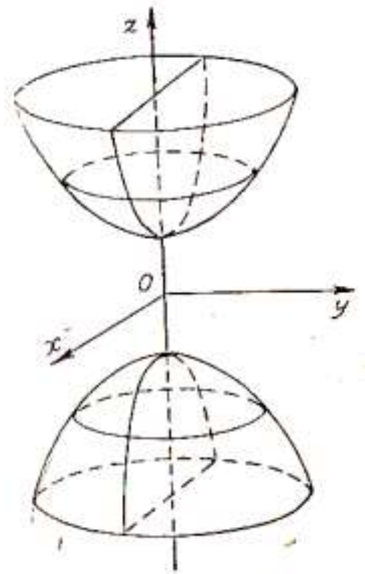
ýa – da

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \textbf{(5 – 55)}$$

aýlanma üsti alarys. Bu üst iki bölekden ybarat üstdir. Şoňa görä – de oňa *iki boşlukly aýlanma giperboloidy* diýilýär. Iki boşlukly giperboloid 75 – nji suratda görkezilendir.

Indi bu üsti koordinata oklaryna perpendikulýar tekizlikler bilen keseliň we kesiklerde nähili figuranyň emele gelýändigine garalyň.

1. $\boldsymbol{z = h}$ bolanda (5 – 55) deňlik aşakdaky görnüşi alar:



75 – nji surat.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

ýa – da

$$x^2+y^2=a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right),$$

ýagny töweregi berýär.

$|h| < |c|$ bolnda soňky deňligiň sag bölegi otrisatel san bolýar, çep bölegi bolsa hemişe položitel san. Diýmek, ***z* = – *c*** tekizlikden ***z* = *c*** tekizlige çenli iki boşlukly giperboloidiň ýekeje nokady hem ýokdur.

2. ***x* = *h*** bolanda (5 – 55) deňlik aşakdaky görnüşi

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2},$$

ýagny giperbolany berýär.
3. ***y* = *h*** bolanda hem kesikde giperbola alynýar.

(5 – 55) deňlikden bir kesiginde ellips, beýleki iki kesiginde bolsa giperbola berýän üsti almaga synanyşalyň. Onuň üçin ***y*** – iň maýdalawjysyny ***b*²** sana çalyşmak ýeterlikdir. Şonda biz *iki boşlukly giperboloid* diýilýän

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \textbf{(5 – 56)}$$

üsti alarys. Iki boşlukly giperboloid ***a* ≠ *b* ≠ *c*** bolanda hiç bir egri çyzygyň okuň töwereginde aýlanmagyndan emele gelip bilmez.

§ 11. Aýlanma paraboloidy. Elliptik paraboloid

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

parabolany ***Oz*** okuň töwereginde aýlasak, onda aýlanma paraboloidy diýilýän

$$y^2 + x^2 = 2pz \qquad (5-57)$$

üsti alarys.

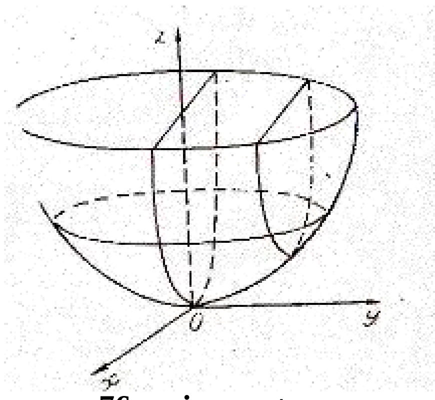
Biz bu üsti koordinata oklaryna perpendikulýar tekizlikler bilen kessek $z = h$ bolanda kesikde radiusy $\sqrt{2ph}$ bolan töweregi $x = h$ ýa – da $y = h$ bolanda degişlilikde kesiklerde $y^2 = 2pz - h^2$ we $x^2 = 2pz - h^2$ parabolany alarys.

Üç kesigiň birinde ellips, beýleki ikisinde bolsa parabola berip biljek üsti almak üçin (5 – 53) deňlikdäki x we y sanlary dürli sanlara bölmek gerek, meselem

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (5-58)$$

görnüşinde ýazmak gerek.

(5 – 58) deňleme bilen aňladylýan üste *elliptik paraboloid* diýilýär. Ol hiç bir çyzygyň okuň töwereginde aýlanmagyndan emele gelip bilmez. Elliptik paraboloid 76 – njy suratda görkezilendir.



76 – njy surat.

§ 12. Giperbolik paraboloid

Elliptik paraboloidiň deňlemesindäki ***q*** sany –***q*** bilen çalyşsak, onda *giperboloik paraboloid* diýilýän

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \textbf{(5 – 59)}$$

üsti alarys. Bu üsti ***z = h*** tekizlik bilen kessek kesikde

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$$

giperbolany alarys.
x = h we ***y = h*** kesiklerde degişlilikde

$$y^2 = 2pz - \frac{qh^2}{p} \quad \text{we} \quad x^2 = 2pz - \frac{p \cdot h^2}{q} \qquad \textbf{(5 – 60)}$$

parabola alnar.

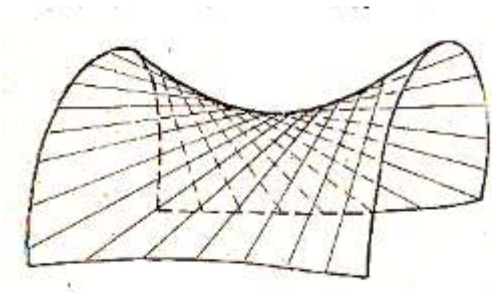
Giperbolik paraboloidiň deňlemesini çyzykly köpeldijilere dagydyp ýazalyň.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \qquad \textbf{(5 – 61)}$$

Bu ýerden

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=2az\\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}\right\}\text{ we }\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=2\beta z\\ \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\beta}\end{aligned}\right\}$$

göni çyzyklaryň iki dürli deňlemesini alarys. Şeýlelikde, giperbolik paraboloidiň üstüni göni çyzyklaryň iki sistemasy örtýär. Giperbolik paraboloidiň her bir nokadynyň üstünden bu üste degişli iki dürli göni çyzyk geçýär. (Bir boşlukly giperboloide seret.) Giperbolik paraboloid 77 – nji suratda görkezilendir.



77 – nji surat.

VI bap

ÇYZYKLY WE ÝEWKLID GIŇIŞLIGI

§ 1. Çyzykly giňişligiň kesgitlemesi we oňa degişli mysallar

Belli bir obýektleriň toplumyna *köplük*, şol toplumyň islendik obýektine *köplügiň elementi* diýilýär. Meselem, bitin položitel sanlaryň toplumy natural sanlar köplügini; bitin položitel we otrisatel sanlaryň hem – de nul sanyň toplumy bitin sanlar köplügini; položitel we otrisatel droblaryň we bitin sanlaryň toplumy rasional sanlar köplügini; rasional we irrasional sanlaryň toplumy hakyky sanlar köplügini; hakyky we hyýaly sanlar kompleks sanlar köplügini emele getirýär.

Biz köplügiň özüni latyn elipbiýiniň baş harplary, köplügiň elementlerini bolsa kiçi harplar bilen belgilejekdiris. $\boldsymbol{a}$ element $\boldsymbol{M}$ köplügiň elementi bolsa, ony gysgaça $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}$ bilen belgileýärler. $\in$ belgi degişlilik belgisidir. $\boldsymbol{b}$ element $\boldsymbol{M}$ köplügiň elementi bolmasa, ony $\boldsymbol{b} \bar{\in} \boldsymbol{M}$ bilen belgileýärler. $\bar{\in}$ belgi degişli dällik belgisidir. Meselem, $\boldsymbol{B}$ bitin sanlar köplügi bolsa, onda $\mathbf{5} \in \boldsymbol{B}$; $\mathbf{-\ 12} \in \boldsymbol{B}$; $\mathbf{7} \in \boldsymbol{B}$; $\mathbf{3{,}4} \bar{\in} \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{\pi} \bar{\in} \boldsymbol{B}$ we ş.m. bolarlar. Eger $\boldsymbol{A}$ köplügiň elementleriniň hemmesi $\boldsymbol{B}$ köplügiň elementleri bolsalar, onda $\boldsymbol{A}$ köplüge $\boldsymbol{B}$ köplügiň bölek köplügi diýýärler we ony $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ bilen belgileýärler. Matematikada “giňişlik” diýilýän düşünje bar. ol matematikanyň esasy düşünjeleriniň biridir.

K e s g i t l e m e. **Elementleriniň üstünde belli – belli şertleri kanagatlandyrýan operasiýalar kesgitlenen köplüge giňişlik diýilýär.**

Şu bapda giňişliklerden *çyzykly* we *Ýewklid giňişligi* diýilýän iki giňişlige gararys. Berlen $\boldsymbol{M}$ köplügiň islendik $\boldsymbol{x}$ we $\boldsymbol{y}$ elementleri üçin olaryň jemi diýip atlandyrylýan we $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ bilen belgilenilýän, şol köplüge degişli bolan üçünji bir element kesgitlenen bolsa, onda biz ***M*** köplükde goşmak operasiýasy kesgitlenen diýjekdiris. Eger ***M*** köplügiň islendik ***x*** elementi we islendik hakyky **λ** san üçin olaryň köpeltmek hasyly diýip atlandyrylýan we **λ*x*** bilen belgilenilýän ***M*** köplüge degişli bolan ikinji bir element belli bolsa, biz ***M*** köplükde sana köpeltmek operasiýasy kesgitlenen diýjekdiris. Islendik köplükde bu iki operasiýany kesgitlemek kyn däl. Emma şol operasiýalar belli bir düzgünlere – kanunlara boýun bolmasalar, olary ulanmak – da, manyly netijeler almak – da kyn bolýar. Şoňa görä – de goşmak we sana köpeltmek operasiýalary käbir kanunlara boýun bolan köplüklere garaýarlar. Olaryň iň ähmiýetlileriniň we ýönekeýleriniň biri – de çyzykly giňişlikdir.

Aşakda ***x, y, z*** we ş. m. bilen ***M*** köplügiň elementleri, **λ, μ** we ş. m. grek harplary bilen bolsa hakyky sanlar belgilenýär.

Goý, ***M*** köplükde goşmak we sana köpeltmek operasiýasy kesgitlenen bolsun hem – de ol operasiýalar aşakdaky kanunlara boýun bolsunlar.

a) Goşmak operasiýasy üçin:

1. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ goşmagyň utgaşdyrma kanuny. Bu ýerde ***x, y, z*** elementler ***M*** köplügiň islendik elementleri.

2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ goşmagyň orun çalşyrma kanuny. ***x*** we ***y*** – islendik elementler.

3. ***M*** köplükde nul element bolup, ony 0 bilen belgilesek, islendik ***x*** element üçin

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$$

bolmalydyr.

4. ***M*** köplügiň islendik ***x*** elementi üçin bu köplükde – ***x*** bilen belgilenilýän oňa garşylykly bolan element bar, ol

$$(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

deňligi kanagatlandyrýar.
M köplükde nul elementiň ýeke – täkdigini we ***x*** elemente garşylykly – ***x*** elementiň ýeke – täkdigini belläp geçeliň.

b) Sana köpeltmek operasiýasy üçin

5. Islendik **λ, μ** we ***x*** üçin $\boldsymbol{\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x}$.

6. islendik ***x*** üçin $1 \cdot x = x$

7. islendik ***x*** üçin (-1) $\boldsymbol{x = -x}$.

8. islendik ***x*** üçin $\boldsymbol{0 \bullet x = 0}$.

9. islendik **λ** üçin $\boldsymbol{\lambda \bullet 0 = 0}$.

Sana bölmeklik, λ sana ters bolan $\frac{1}{\lambda}$ sana köpeltmek bilen çalşyrylýar $\left(\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}\right.$ formula arkaly amala aşyrylýar$\left.\right)$.

Goşmak we sana köpeltmek operasiýalary biri – biri bilen aşakdaky ýaly baglanyşykda bolmaly.

10. $(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\lambda x} + \boldsymbol{\mu x}$.

11. $\boldsymbol{\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y}$.

K e s g i t l e m e. **Haýsy – da bolsa *R* köplükde goşmak we sana köpeltmek operasiýalary kesgitlenen bolsa hem – de şol operasiýalar 1 – 11 kanuna boýun egýän bolsa, onda *R* köplüge çyzykly giňişlik diýilýär.**

Ç y z y k l y g i ň i ş l i g e d e g i ş l i k ä b i r m y s a l l a r a g a r a l y ň. a) üç ölçegli giňişlikdäki wektorlaryň köplügi çyzykly giňişligi emele getirýän köplükdir, çünki olar üçin III bapda kesgitlenen goşmak we sana köpeltmek operasiýalary 1 – 11 kanunlaryň hemmesini doly kanagatlandyrýar. b) Hakyky sanlar köplügi adaty goşmak we biri- birine köpeltmek operasiýalary bilen çyzykly giňişligi emele getirýär. w) Derejesi n sandan kiçi ýa – da n sana deň bolan köpagzalaryň köplügi adaty goşmak we sana köpeltmek operasiýalary bilen çyzykly giňişligi emele getirýär. $n = 0, 1, 2, \ldots$ bahalary alanda her bir indiki çyzykly giňişlik öňki çyzykly giňişligi öz içine alýar. Meselem, 3 – nji derejeli köpagzalaryň çyzykly giňişligi 0 – njy, 1 – nji, 2 – nji derejeli köpagzalaryň çyzykly giňişligini öz içine alýar.

Üç ölçegli wektorlaryň çyzykly giňişligi islendik bir Q tekizligine parallel bolan wektorlaryň çyzykly giňişligini öz içine alýar; Q tekizlige parallel bolan wektorlaryň çyzykly giňişligi öz gezeginde Q tekizliginde ýatýan islendik göni çyzyga parallel bolan wektorlaryň çyzykly giňişligini öz içine alýar. Görnüşi ýaly, köplükleriň bir näçesi çyzykly giňişligi emele getirýär we şol bir wagtyň özünde çyzykly giňişligi emele getirýän başga bir köplügiň bölek köplügi bolýar. Şular ýaly köplügiň emele getirýän çyzykly giňişligine *bölek çyzykly giňişlik* diýilýär.

Meselem, 3 – nji derejeli köpagzalaryň emele getirýän çyzykly giňişligi 5 – nji derejeli köpagzalaryň çyzykly giňişliginiň bölek çyzykly giňişligidir.

Bölek çyzykly giňişlik has doly aşakdaky ýaly kesgitlenilýär.

Eger M çyzykly geçişlik bolsa we $M_1 \subset M$ bolsa, hem – de M_1 köplük M giňişlikde kesgitlenýän operasiýalara laýyklykda çyzykly giňişligi emele getirýän bolsa, onda M_1 köplüge M çyzykly giňişligiň bölek çyzykly giňişligi diýilýär.

Çyzykly giňişlikleriň esasy we şeýle – de ýönekeý mysallarynyň biri bolup ***n*** – ölçegli wektorlar giňişligi hyzmat edýär. Islendik ***n*** sanyň tertipleşdirilen toplumyna ***n*** ölçegli wektor diýilýär. Ol $\vec{a} = \{x_1, x_2, ... x_n\}$ bilen belgilenýär. $x_1, x_2, ... x_n$ sanlara wektoryň koordinatalary diýilýär. ***n*** – ölçegli wektorlary goşmak we sana köpeltmek operasiýalary edil üç ölçegli wektorlar üçin kesgitlenilişi ýaly kesgitlenilýär. Ol operasiýalaryň 1 – 11 kanunlara boýundygy şübhesizdir. Diýmek, ***n*** – ölçegli wektorlaryň toplumy çyzykly giňişligi emele getirýär. Oňa ***n*** – ölçegli wektor giňişligi diýilýär.

§ 2. Çyzykly giňişligiň ölçegi

Goý, $p_1, p_2, ..., p_n$ elementler ***M*** çyzykly giňişligiň elementleri diýeliň.

1 – n j i k e s g i t l e m e. **Eger hemmesi nula deň bolmadyk $c_1, c_2, ..., c_n$ hakyky sanlar üçin $c_1 p_1 + c_2 p_2 + ... + c_n p_n = 0$ deňlik ýerine ýetse, onda $p_1, p_2, ..., p_n$ elementlere çyzykly baglanyşykly elementler diýilýär. Eger – de $c_1 p_1 + c_2 p_2 + ... + c_n p_n = 0$ deňlik diňe $c_1 = c_2 = c_3 = ... c_n = 0$ ýagdaýda mümkin bolsa, onda $p_1, p_2, ... , p_n$ elementlere çyzykly baglanyşyksyz elementler diýilýär.**

2 – n j i k e s g i t l e m e. **Çyzykly giňişligiň çyzykly baglanyşyksyz elementleriniň iň köp sanyna çyzykly giňişligiň ölçegi diýilýär.**

Eger giňişligiň iň köp çyzykly baglanyşyksyz elementleriniň sany ***n*** tükenikli bolsa, onda oňa ***n*** – ölçegli çyzykly giňişlik diýilýär, eger – de giňişligiň iň köp çyzykly baglanyşyksyz elementleriniň sany tükeniksiz bolsa, onda tükeniksiz ölçegli çyzykly giňişlik diýilýär .Hakyky sanlar köplügi bir ölçegli çyzykly giňişligi emele getirýär, çünki bu köplügiň islendik elementini beýleki bir elementiniň çyzykly kombinasiýasy hökmünde görkezmek bolar. Biziň III bapda garap geçen wektorlarymyzyň çyzykly giňişligi üç ölçeglidir, çünki ondaky çyzykly baglanyşyksyz wektorlaryň iň köp sany üçdi. Şonuň ýaly hem komplanar wektorlarynyň çyzykly giňişligi iki ölçegli, kollinear wektorlarynyň çyzykly giňişligi bir ölçegli çyzykly giňişlikdir.

n ölçegli wektor giňişliginde çyzykly baglanyşyksyz $\vec{e}_1$ **= {1, 0, ..., 0}**, $\vec{e}_2$ **= {0, 1, 0, ..., 0}, ...** $\vec{e}_n$ **= {0, 0, ..., 1}** (***e*;** wektoryň ***n*** koordinatasy bolup, onuň ***n*** – **1** kooordinatasy nula deň) wektor bar we şolaryň üsti bilen islendik beýleki wektor çyzykly aňladylýar. Eger – de bu giňişlikde ***n*** – den az sandaky şu häsiýetli wektorlar toplumy bar bolsady, onda $\vec{e}_1, \vec{e}_2 ......\vec{e}_n$ wektorlaryň çyzykly baglanyşyklygy gelip çykardy. Bu bolsa bolup bilmejek ýagdaýdyr.

n derejeli köpagzalaryň çyzykly giňişliginiň ***n*** + **1** ölçegi bolýar. Dogrudan hem, ***n*** derejeli köpagzalaryň koeffisiýentleri (***n*** **+ 1**) ölçegli wektor giňişligini emele getirýär.

Eger köpagzalar çyzykly baglanyşykly bolsa, onda olaryň koeffisiýentlerinden düzülen wektorlar hem şeýledir, bu tassyklama ters tassyklama – da dogrudyr.

K e s g i t l e m e. **Eger çyzykly giňişligiň käbir p_1, p_2, ... p_k elementleri çyzykly baglanyşyksyz bolsalar hem – de onuň beýleki elementleriniň islendigini p_1, p_2, ... , p_k elementleriň çyzykly kombinasiýasy bilen aňladyp bolýan bolsa, onda p_1, p_2, ... , p_k elementlere çyzykly giňişligiň bazisi diýilýär.**

Bu kesgitlemeden görnüşe görä, çyzykly giňişligiň bazisi tükeniksiz köp dürli usul bilen alnyp bilner.

Meselem, çyzykly giňişligiň bazisi edip III bapda garan wektorlarymyz üçin komplanlar däl islendik üç wektory almak bolýandygyny belläliň. Çyzykly giňişligiň islendik bazisiniň şol bir sandaky elementlerden durýandygyny subutsyz belläp geçýäris. Diýmek çyzykly giňişligiň ölçegi onuň islendik bazisindäki bazis elementleriniň sanyna deň bolýar. Bazis elementler tükeniksiz köp bolsa, onda çyzykly giňişligiň ölçegi tükeniksiz bolar. Galan ýagdaýlarda çyzykly giňişlige tükenikli ölçegli çyzykly giňişlik diýilýär.

§ 3. Ýewklid giňişligi. Wektoryň normasy. Koşiniň deňsizligi. Üçburçluk deňsizligi

Eger çyzykly giňişlik tükenikli ölçegli bolsa hem – de onuň islendik $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ iki elementine hakyky sany degişli edýän $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ bilen belgilenilýän binar gatnaşyk kesgitlenen bolsa we şunlukda şol binar gatnaşyk.

1 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,

2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$ (bu ýerde deňlik alamaty diňe $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ bolanda mümkin),

3. (islendik hemişelik $\boldsymbol{\alpha}$ üçin $(\boldsymbol{\alpha x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,

4. giňişligiň islendik üç elementi üçin $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ kanunlara boýun egýän bolsa, onda ol giňişlige Ý e w k l i d g i ň i ş l i g i diýilýär. Adatça çyzykly giňişligiň elementlerine wektorlar diýilýär. $(\vec{a}, \vec{b})$ binar gatnaşyga bolsa $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly diýilýär.

Üç ölçegli giňişlikdäki wektorlaryň toplumy (olaryň üstünde kesgitlenen goşmak, sana köpeltmek we skalýar köpeltmek hasyly bilen) Ýewklid giňişligini emele getirýär. $\boldsymbol{n}$ ölçegli wektor giňişliginde islendik iki $\vec{a} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ we $\vec{b} = \{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_n}\}$ wektor üçin skalýar köpeltmek hasyly

$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 y_1 + + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ formula arkaly kegsgitlesek, onda ol Ýewklid giňişligine öwrüler.

Ýewklid giňişliginiň islendik bölek giňişligi Ýewklid giňişligidir. Meselem, üç ölçegli giňişligiň komplanar wekotrlarynyň toplumy Ýewklid giňişligini emele getirýär.

Ýewklid giňişliginde *wektoryň uzynlygy* ýa – da *normasy* diýen düşünje girizilýär. $\vec{x}$ *wektoryň öz – özüne bolan skalýar köpeltmek hasylyndan alnan kwadrat köküň arifmetik bahasyna şol wektoryň uzynlygy ýa – da normasy diýilýär we* $|\vec{x}|$ *bilen bellenilýär:*

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}. \qquad \textbf{(6 – 1)}$$

$(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ kanundan nula deň bolmadyk wektoryň normasynyň nuldan uludygy gelip çykýar. Eger wektoryň normasy bire deň bolsa, onda oňa *normirlenen wektor* diýilýär. Ýewklid giňişliginiň 2– nji kanunyndan we wektoryň normasyna berlen kesgitlemeden alarys:

$$|\lambda \vec{x}| = \sqrt{(\lambda \vec{x}, \lambda \vec{x})} = \sqrt{\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x})} = |\lambda| |\vec{x}|.$$

Islendik $\vec{x}$ wektory $|\vec{x}|$ bölüp, *normirlenen wektory* alyp bileris. $\vec{x}$ wektordan normirlenen wektory almak operasiýasyna, *wektory normirlemek* diýilýär.

Indi islendik $\vec{x}$ we $\vec{y}$ iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň absolýut ululygynyň wektorlaryň normalarynyň köpeltmek hasylyndan uly bolup bilmejekdigini, $(\vec{x}, \vec{y}) \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$) subut edeliň. Hakykatdan – da, islendik **λ** san üçin $\left|x + \lambda y\right| \geq \mathbf{0}$ ýa – da $\left|x + \lambda y\right|^2 = \left|x + \lambda y,\ x + \lambda y\right| \geq \mathbf{0},$

bu ýerden $(\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y})\lambda + (\vec{y}, \vec{y})\lambda \geq 0$ alýarys. Bu deňligiň çep bölegine **λ** görä kwadrat üççlen hökmünde garasak, onda onuň **λ** – nyň islendik bahasynda uly bolmagy üçin diskriminantynyň nuldan kiçi bolmagy hökmandyr. Diýmek,

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leq 0 \text{ bolmaly.}$$

Ahyrky deňsizlikden alarys

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})} \leq |\vec{x}||\vec{y}|, \text{ ýagny}$$

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq |\vec{x}||\vec{y}| \qquad \mathbf{(6-2)}$$

(6 – 2) deňsizlige Koşiniň deňsizligi diýilýär.

Koşiniň deňsizligini ulanyp, üçburçluk deňsizligi diýilýän deňsizligi çykarmaga girişeliň.

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) \leq$$

$$\leq |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2,$$

ýa – da

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 \le (|\vec{x}|+|\vec{y}|)^2 \text{ ýa – da}$$

bu ýerden

$$|\vec{x}+\vec{y}| < |\vec{x}|+|\vec{y}| \qquad \textbf{(6 – 3)}$$

gelip çykýar. (6 – 3) deňsizlige *üçburçluk deňsizligi* diýilýär. Onuň sebäbi Ýewklid giňişliginde islendik iki wektoryň jemini formal görnüşde 18 – nji suratdaky ýaly edip gursak, onda (6 – 3) deňsizlik üçburçlugyň iki tarapynyň uzynlyklarynyň jeminiň üçünji tarapynyň uzynlygyndan kiçi däldigini aňladýar. ***n*** ölçegli giňişlikde Koşiniň deňsizligi $\vec{a} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ we $\vec{b} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ iki wektor üçin $|x_1, y_1 + +x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots +x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \times \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n}$ görnüşde, üçburçluk deňsizligi bolsa

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \le \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^2 + \dots + x_n^{\ 2}}$$
$$+ \sqrt{y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + \dots + y_n^{\ 2}}$$

görnüşde ýazylýar. $\overrightarrow{c}$ = $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ islendik wektor bolsa, onda

$\vec{a} - \vec{b} = (\vec{a} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{b})$ bolýar we ahyrky deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazmak bolar.

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \le$$

$$\le \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} +$$

$$+\sqrt{(z_1-y_1)^2-(z_2-y_2)^2-\ldots-(z_n-y_n)^2}.$$

§ 4. Iki wektoryň arasyndaky burç. Wektorlaryň ortogonal ulgamy

Koşiniň deňsizliginden $\left|\frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}\right| \leq 1$ gelip çykýar. Diýmek, käbir φ burç üçin

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} \qquad \textbf{(6 – 4)}$$

bolýar. Formal taýdan **φ** burça $\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlaryň arasyndaky burç diýilýär. we ol $\widehat{\vec{x},\vec{y}}$ bilen belgilenilýär. (6 – 4) deňlikden

$$(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\varphi$$ alýarys.

Bu bolsa bize III bapdan belli bolan iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylynyň kesgitlemesidir. $\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlar kollinear, ýagny $\vec{x}=\lambda\vec{y}$ bolsa, onda ***cos*φ** = **±1** we $\widehat{\vec{x},\vec{y}}=0$ (**λ> 0** bolanda), $\widehat{\vec{x},\vec{y}}$ =**180º** (**λ< 0** bolanda) bolýar.

$\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlar kollinear bolamasalar, (6 – 4) deňligiň sag bölegi birden kiçi bolany üçin $\widehat{\vec{x},\vec{y}}$ burç **0º** uly, emma **180º** – dan kiçi burçy berer. Diýmek, (6 – 4) deňlik bilen kesgitlenilýän burç üçin

$\mathbf{0^o} \leq \vec{x},\!^\wedge\,\vec{y} \leq \mathbf{180^o}$ ýazyp bileris.

$\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlaryň arasyndaky burç $\frac{\pi}{2}$ deň bolsa, onda olara *ortogonal wektorlar* diýilýär. Başgaça aýdanyňda $\vec{x}$ we $\vec{y}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly nula deň bolsa, onda olara ortogonal wektorlar diýilýär.

Meselem, ***n*** ölçegli wektor giňişliginde $\vec{a} = \{\mathbf{1, 0 \ldots, 0}\}$, $\vec{b} = \{\mathbf{0, 1, 0, 0, ..., 0}\}$ wektorlar ortogonal wektorlardyr.

Hiç biri nul wektor bolmadyk $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$,wektorlar jübüt – jübütden ortogonal bolsalar, onda olara özara ortogonal wektorlar diýilýär. (Nul wektor islendik wektora ortogonaldyr.)

1 – n j i t e o r e m a. ***Hiç biri nul wektor bolmadyk, özara ortogonal bolan*** $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ **wektorlar çyzykly baglanyşyksyz wektorlardyr.**

S u b u d y. $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlaryň çyzykly

$$c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 + \ldots + c_n \vec{p}_n = 0 \qquad (6-5)$$

baglanyşygy bar diýeliň.
$\boldsymbol{c_i}$ ($\boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, ..., }\,\boldsymbol{n}$) koeffisiýentleriň hemmesiniň nula deňdigini görkezeliň. (6 – 5) deňligi $\vec{p}_i$ wektora skalýar köpeldip alarys:

$$c_1 \vec{p}_1 \vec{p}_i + c_2 \vec{p}_2 \vec{p}_i + \ldots + c_n \vec{p}_n \vec{p}_i = 0, \quad (\, i = \overline{1,n}\,)$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ wektorlar özara ortogonal bolanlygy sebäpli, isendik $j \neq i$ üçin $\vec{p}_j, \vec{p}_i = 0$ bolar we ahyrky deňliklerden islendik $i = \overrightarrow{1,n}$ üçin $c_i = 0$ alarys.

Diýmek, $\vec{p}_i$ (***i*** **= 1, 2, ... n**) wektorlaryň triwial bolmadyk çyzykly baglanyşygy ýok, ýagny olar çyzykly baglanyşyksyz wektorlardyr.

(Teorema subut edildi).

Islendik Ýewklid giňişliginde wektorlary özara ortogonal bolan bazis bardyr. Ol bazise ortogonal bazis diýilýär.

Ýewklid giňişliginde bazis edip, ortogonal bazisi almaklyk has amatly bolýar. onuň sebäbi bu giňişligiň islendik $\vec{x}$ wektory ortogonal bazisde dagydylanda, onuň dagydylyş koeffisiýentlerini tapmaklygyň aňsat bolmagydyr. Hakykatdan – da, $\vec{x}$ wektory $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ ortogonal bazisde dagydyp ýazalyň.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p}_1 + \alpha_2 \vec{p}_2 + \dots + \alpha_n \vec{p}_n \qquad \mathbf{(6-6)}$$

(6 – 6) deňligi $\vec{p}_i$ (***i*** **= 1, 2, ... ,** ***n***) wektora skalýar köpeldip alarys:

$$\vec{x} \cdot \vec{p}_i = \alpha_i \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i = \alpha_i | \vec{p}_i^{\,2} |$$

Bu ýerden

$$\alpha_i = \frac{(\vec{x}_i \cdot \vec{p}_i)}{(\vec{p}_i \cdot \vec{p}_i)}.$$

2 – n j i t e o r e m a. ***Ýewklid giňişliginde ortogonal bazisi hemişe saýlap almak bolar.***

S u b u d y. Goý, $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$, ... , $\overrightarrow{q_n}$ wektorlar islendik bazis wektorlar bolsunlar.

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{q_1} \\ \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{q_2} + \alpha_{12}\overrightarrow{p_1} \\ \overrightarrow{p_3} = \overrightarrow{q_3} + \alpha_{13}\overrightarrow{p_1} + \alpha_{23}\overrightarrow{p_2} \\ \overrightarrow{p_4} = \overrightarrow{q_4} + \alpha_{14}\overrightarrow{p_1} + \alpha_{24}\overrightarrow{p_2} + \alpha_{34}\overrightarrow{p_3} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \overrightarrow{\mathrm{p_n}} = \overrightarrow{q_n} + \alpha_{1n}\overrightarrow{p_1} + \alpha_{2n}\overrightarrow{p_2} + \ldots + \alpha_{n-1,n}p_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{(6 – 7)}$$

deňlikler arkaly täze $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlary girizeliň.

Bu ýerde $\boldsymbol{\alpha_{1j}}$ häzirlikçe kesgitlenmedik näbelli sanlar, $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ sanlaryň islendik bahasynda $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlaryň bazis boljagy (6 – 7) deňliklerden aýdyňdyr. Bu ýerden $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlaryň çyzykly baglanyşyksyzlygy we islendik $\boldsymbol{i}$ üçin $|\vec{p}_i| \neq 0$ bolýandygy gelip çykýar. Indi $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ (***i*** **= 1, 2, ... ,** ***n*** **– 1;** ***j*** **= 2, ... ,** ***n***) koeffisiýentleri $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlar özara ortogonal bolar ýaly edip saýlap alalyň.

(6 – 7) sistemanyň ikinjisinden başlap onuň deňliklerini $\vec{p}_1$ wektora skalýar köpeldip we $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlaryň ortogonal bolmalydygyny göz öňünde tutup alarys:

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{q_2} + \alpha_{12} \cdot \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_1} = 0 \\ \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{q_3} + \alpha_{13} \cdot \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_1} = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \overrightarrow{\mathrm{p}_1}\overrightarrow{q_n} + a_{1n} \cdot \overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{p_1} = 0. \end{cases} \qquad \mathbf{(6-8)}$$

(6 – 8) sistemany çözüp tapýarys.

$$\alpha_{1j} = \frac{\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{q_j}}{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1)}, \text{ bu ýerde } \boldsymbol{j = 2, 3, \ldots, n.}$$

(6 – 7) sistemanyň 3 – njisinden başlap, onuň deňlikleiniň hemmesini $\overrightarrow{p_2}$ wektora skalýar köpeldip we alnan deňlikleri çözüp alarys:

$$\alpha_{2j} = \frac{\overrightarrow{p_1} \cdot \overrightarrow{q_j}}{(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1)} \quad , \text{ bu ýerde } \boldsymbol{j = 3, 4, \ldots, n.}$$

Şuňa meňzeş usul bilen $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ wektorlar özara ortogonal bolar ýaly edip, a_{ij} sanlary tapyp bileris. Berlen

islendik bazisden ortogonal bazise geçmek usulyna *bazisi ortogonallaşdyrmak* usuly diýilýär.

Normirlenen wektorlardan ybarat bolan ortogonal bazise *Ýewklid bazisi* diýilýär.

Indi özara ortogonal $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$ wektorlaryň jeminiň modulyna garalyň. Görşümiz ýaly

$$\left|\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \dots + \overrightarrow{p_n}\right|^2 = \left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_3} + \dots \overrightarrow{p_n}\right) \times$$

$$\times \overline{\left(\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \dots + \overrightarrow{p_n}\right)} = \left|\overrightarrow{p_1}\ \right|^2 + \left|\overrightarrow{p_2}\right|^2 + \dots + \left(\overrightarrow{p_n}\right)^2$$

bolýar. Bu ýerden

$$\left|\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} + \dots + \overrightarrow{p_n}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{p_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{p_2}\right|^2 + \dots + \left|\overrightarrow{p_n}\right|^2} \quad \textbf{(6 – 9)}$$

(6 – 9) deňlikde iki wektor bilen çäklensek, onda biz Pifagoryň teroemasyny alarys (18 – nji surata ser.),

$$|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 = |\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_2|^2$$

Diýmek, (6 – 9) deňlik Pifagoryň teoremasynyň islendik Ýewklid giňişligine umumylaşdyrylmagydyr.

Şonuň üçin (6 – 9) deňlige *Pifagoryň teoremasy* hem diýilýär.

VII bap

MATRISALAR

§ 1. Esasy kesgitlemeler

1 – n j i k e s g i t l e m e. ***m*** **setirli,** ***n*** **sütünli** ***m*** **×** ***n*** **sandan ybarat bolan gönüburçly tablisa matrisa diýilýär** we aşakdaky ýaly

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ýa – da gysgaça $\{a_{ij}\}_m^n$ belgilenýär.

Berlen matrisany düzýän $\boldsymbol{a_{ij}}$ ($\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n}$) sanlara *matrisanyň elementleri* diýilýär. $\boldsymbol{a_{ij}}$ elementiň birinji indiksi $\boldsymbol{i}$ onuň setir nomerini, ikinji indiksi $\boldsymbol{j}$ onuň sütün nomerini görkezýär.

Adatça matrisa baş harplar bilen belgilenýär. Meselem:

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_m^n \,;\ \boldsymbol{B} = \{b\}_p^q \,;\ \boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}_r^s \,;\ \boldsymbol{D} = \{d_{ij}\}_k^l$$

Eger iki matrisanyň sütünleriniň we setirleriniň sany degişlilikde deň bolsa, onda şeýle matrisalara deň ölçegli matrisalar diýmek kabul edilen

Matrisa bir setirden ýa – da bir sütünden ybarat bolup biler, bular ýaly matrisa degişlilikde setir – matrisa we sütün – matrisa diýilýär. Meselem

$$(5 \quad 7 \quad 9) \text{ – setir – matrisa,}$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{- sütün matrisa.}$$

2 – n j i k e s g i t l e m e. H**emme elementleri nula deň bolan matrisa nul matrisa diýilýär.**

Matrisanyň setiriniň we sütüniniň sany $\boldsymbol{m = n}$ deň bolsa, onda oňa *kwadrat matrisa* diýilýär.

Meselem,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \,, \\ . & . & . & . & . & . & ., \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kwadrat matrisadyr, oňa $\boldsymbol{n}$ tertipli matrisa diýilýär.

3 – n j i k e s g i t l e m e. **Kwadrat matrisanyň elementleriniň tertibi üýtgedilmezden düzlen kesgitleýjä matrisanyň kesgitleýjisi diýilýär** we ol köplenç Δ ($\boldsymbol{A}$) bilen belgilenýär.

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitlemeden diňe kwadrat matrisanyň kesgitleýjisiniň bolup biljekdigi gelip çykýar.

4 – n j i k e s g i t l e m e. **Esasy diagonallardaky elementlerden başga elementleriniň hemmesi nul bolan kwadrat matrisa diagonal matrisa diýilýär.**

Meselem,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \text{diag}\ (a_{11}\ a_{22}\ a_{23})$$

Diagonal matrisanyň diagonaldaky elementleri birlikden ybarat bolsa, onda oňa birlik matrisa diýilýär we ol $\boldsymbol{E}$ bilen belgilenýär.

Meselem,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 – n j i k e s g i t l e m e. $A = \{a_{ij}\}_m^n$ **we** $B = \{b_{ij}\}_p^q$ **matrisalaryň setirleriniň we sütünleriniň sany hem – de olaryň degişli elementleri biri – birine deň bolsa,** $a_{ij} = b_{ij}$ **bolsa, onda bu matrisalara özara deň matrisalar diýilýär we** $A = B$ **ýazýarlar.**

§ 2. Matrisalar üstünde geçirilýän amallar

1. *Matrisalary goşmak we aýyrmak*

Setirleriň we sütünleriň sany degişlilikde deň bolan iki

$$A = \{a_{ij}\}_m^n \text{ we } B = \{b_{ij}\}_m^n$$

matrisanyň jemi diýlip $\{a_{ij} + b_{ij}\}_m^n$ matrisa, tapawudy diýlip $\{a_{ij} - b_{ij}\}_m^n$ matrisa aýdylýar we degişlilikde jemi A+B, tapawut A-B bilen belgilenýär.

Ýaýraň görnüşde bu deňlikler şeýle ýazylýarlar:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$
=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots. & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots. & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots. & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Tapawut hem edil şuňa meňzeş ýazylýar.
Şu kesgitlemeden matrisalaryň jemine degişli aşakdaky häsiýetler gelip çykýar.

a) $\boldsymbol{A + (B + C) = (A + B) + C}$

b) $\boldsymbol{A + B = B + A}$

w) $\boldsymbol{A + 0 = A}$

2. *Matrisany sana köpeltmek*

$A=\{a_{ij}\}_m^n$ matrisanyň hemme elementlerini **λ** sana köpeltmek bilen alynýan $\{\lambda a_{ij}\}_m^n$ matrisa *A* matrisanyň **λ** sana köpeltmek hasyly diýilýär we ol **λ***A* bilen belgilenýär.

Meselem:

$$
\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{pmatrix}.
$$

Matrisany sana köpeltmek we matrisalary goşmak operasiýalary aşakdaky häsiýetlere eýedirler:

a) $\mathbf{1 \bullet \mathit{A} = \mathit{A},}$

b) $\mathbf{0 \bullet \mathit{A} = 0,}$

w) $\boldsymbol{\alpha\, (\beta \mathit{A}) = (\alpha\beta)\, \mathrm{A},}$

g) $\boldsymbol{(\alpha + \beta)\, \mathit{A} = \alpha \mathit{A} + \beta \mathit{A},}$

d) $\boldsymbol{\alpha(\mathit{A} + \mathit{B}) = \alpha \mathit{A} + \alpha \mathit{B},}$

bu ýerde ***A*** we ***B*** deň tertipli matrisalardyr,**α**we **β** hakyky sanlardyr.

Matrisany haýsy – da bolsa **λ** sana bölmeklik matrisany **λ** sana ters bolan $\frac{1}{\lambda}$ sana köpeltmek bilen ýerine ýetirilýär.

3. *Matrisany matrisa köpeltmek*

Goý, $A = \{a_{ij}\}_m^n$ we $B = \{b_{ij}\}_p^q$ iki matrisa berlen bolsun. Eger *A* matrisanyň sütünleriniň sany *B* matrisanyň setirleriniň sanyna, ***n* = *p*** bolsa, onde her bir elementi

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}\, b_{ij} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}}$$

(bu ýerde $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, q}$) formula bilen kesgitlenýän üçünji $C = \{c_{ij}\}_m^q$ matrisa bu iki matrisanyň köpeltmek hasyly diýilýär hem – de ol aşakdaky ýaly belgilenilýär.

$$C = A \cdot B$$

Diýmek, ***A*** matrisany ***B*** matrisa köpeltmek üçin ***A*** matrisanyň tertibi $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ bolsa, ***B*** matrisanyň tertibi $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$ bolmaly, (***m*** we ***q*** islendik položitel san). Şu ýagdaýda ***A •B = C*** matrisanyň tertibi $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{q}$ bolýar.

A we ***B*** matrisalaryň köpeltmek hasylynyň islendik elementiniň nähili alynýandygyny düşündireliň.

C = ***A •B*** matrisanyň ***i*** – nji setiri bilen ***j*** – nji sütüniniň kesişmesindäki c_{ij} elementi almak üçin, ***A*** matrisanyň ***i*** – nji setirindäki elementleri ***B*** matrisanyň ***j*** - nji sütünindäk degişli elementlere köpeltmek hasyllarynyň jemini almak gerek.

Başga sözler bilen aýdanyňda, ***A*** matrisanyň ***i*** – nji setirine we ***B*** matrisanyň ***j*** – nji sütünine wektor hökmünde garap, şol wektorlaryň skalýar köpeltmek hasylyny tapmak gerek.

Aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin mysallara ýüzleneliň.

M e s e l e: Aşakda berlen ***A*** we ***B*** matrisalar üçin ***A •B*** we ***B •A*** matrisalary tapmaly.

$$1)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ç ö z ü l i ş i.

1) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3+2\cdot 6 & 5\cdot 1+6\cdot 5 \\ 7\cdot 3+2\cdot 4 & 7\cdot 1+4\cdot 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 35 \\ 29 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5+1\cdot 7 & 3\cdot 6+1\cdot 4 \\ 2\cdot 5+5\cdot 7 & 2\cdot 6+5\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 22 \\ 45 & 32 \end{pmatrix}.$$

2. $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ manysy ýok, çünki ***A*** matrisanyň üç sütüni bar, ***B*** matrisanyň bolsa iki setiri bar.

$$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 5+1\cdot 3 & 3(-7)+1\cdot 2 & 3\cdot 6+1\cdot 1 \\ 2\cdot 5-(-4)\cdot 3 & 2(-7)+(-4)\cdot 2 & 2\cdot 6-(-4)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & -19 & 19 \\ -2 & -29 & 8 \end{pmatrix}.$$

3) $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ manysy ýok (näme üçin?)

$\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ manysy ýok (näme üçin?)

Garalan mysallardan görnüşi ýaly, ***A*** matrisany ***B*** matrisa köpeldip bolýan ýagdaýda, tersine, ***B*** matrisany ***A*** matrisa köpeldip bolmazlygy hem mümkin, köpeldip bolaýanda hem ***AB≠BA*** bolmagy mümkin ((1)mysala seredeliň). Diýmek, umumy ýagdaýda ***A*** we ***B*** matrisalaryň köpeltmek hasyly orun çalşyrma kanuna boýun egmeýär, şoňa görä – de matrisalar köpeldilende olaryň orunlaryna pugta üns bermek gerek. ***A •B = B •A*** bolsa, onda ***A*** we ***B*** matrisalara orun çalşyrymly matrisalar diýilýär. Birlik ***E*** matrisa şol tertipdäki islendik kwadrat ***A*** matrisa bilen orun çalşyrymlydyr, ýagny ***AE = EA.***

Matrisalaryň köpeltmek hasyllary aşakdaky kanunlara boýundyr, ýagny aşakdaky deňlikleri ik bölegindäki amalllary ýerine ýetirmek mümkin bolsa islendik ***A, B, C*** üç matirsa we **α** san üçin:

1) $\boldsymbol{A}\ (\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\ \boldsymbol{C}$

2) $\boldsymbol{\alpha}\ (\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{\alpha A})\ \boldsymbol{B}$
3) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}.$
4) $\boldsymbol{C}\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA} + \boldsymbol{CB}.$

Bu häsiýetleriň dogrudygyna şol deňlikleriň iki bölegindäki operasiýalary ýerine ýetirmek bilen göz ýetirmek bolar.
Geljekde gerek boljak bir teoremany subut edeliň.

T e o r e m a. **Eger A we B matrisalar şol bir tertipdäki kwadrat matrisalar bolsalar, onda**

$$\Delta (\boldsymbol{AB}) = \Delta (\boldsymbol{A}) \bullet \Delta (\boldsymbol{B}). \qquad (7-3)$$

S u b u d y. Bu teoremanyň subudyny ikinji tertipli matrisalar üçin geçireliň.

Goý

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Berlen matrisalar bolsun. Bu ýerden

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta (\boldsymbol{AB}) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

tapýarys. Kesgitleýjileriň häsiýetlerini ulanyp $\Delta(\boldsymbol{AB})$ dört kesgitleýjiniň jemi görnüşinde ýazyp bileris, ýagny

$$\Delta (\boldsymbol{AB}) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} a_{22}b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

Soňra ol kesgitleýjileriň sütünlerindäki umumy köpeldijileri kesgitleýjiniň belgisiniň daşyna çykaryp alarys:

$$\Delta\,(\boldsymbol{AB}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} \boldsymbol{b_{11}b_{12}} + \boldsymbol{b_{11}b_{12}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+\,\boldsymbol{b_{21}b_{12}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + \boldsymbol{b_{21}\,b_{22}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Birinji we dördünji kesgitleýjiler birmeňzeş sütünleri bolany üçin nula deň bolarlar. Üçünji kesgitleýjiniň sütünleriniň ornuny çalşyryp we alamatyny üýtgedip, Δ **(*AB*)** üçin gerek bolan deňligi alarys:

$$\Delta\,(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{b_{11}\,b_{12}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \boldsymbol{b_{12}\,b_{21}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{b_{11}\,b_{12} - b_{12}\,b_{21}}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta(\boldsymbol{B}) \bullet \Delta\,(\boldsymbol{A}) = \Delta\,(\boldsymbol{A}) \bullet \Delta\,(\boldsymbol{B}).$$

Şuňa meňzeş edip, islendik deň tertipdäki kwadrat iki matrisa üçin hem teoremany subut etmek bolar (subudyny özbaşdak geçiriň).

§ 3. Transponirlenen matrisa

$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ berlip, $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}$ matrisanyň islendik $\boldsymbol{b_{ij}}$ elementi $\boldsymbol{b_{ij} = a_{ji}}$ formula arkaly kesgitlense, onda ***B*** matrisa ***A*** matrisa görä transporlenen matrisa diýilýär we $\boldsymbol{B = A^*}$ bilen belgilenýär. başga sözler bilen aýdanyňda, ***A*** matrisanyň $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$

setirlerini degişlilikde $\boldsymbol{i = 1, 2, ..., n}$ sütün edip, täze matrisa alsak, oňa $\boldsymbol{A}$ matrisa görä transponirlenen matrisa diýilýär.

Meselem,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisa görä transponirlenen $\boldsymbol{A^*}$ matrisa aşakdaky bolar:

$$\boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Setir matrisany transponirlesek sütün – matrisa, sütün – matrisany transponirlesek setir – matrisa emele geler. Meselem:
$A = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ setir – matrisa bolsa, onda

$$\boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \text{ sütün – matrisa bolar.}$$

Matrisalary transpornirlemek operasiýasy aşakdaky häsiýetlere eýedir.
1. *Iki gezek transponirlenen matrisa berlen matrisa deňdir, ýagny*

$$\boldsymbol{A^{**} = (A^*)^* = A.}$$

2. *Transponirlenen iki matrisanyň jemi bu matrisalaryň jeminiň transponirlenmegine deňdir, ýagny*

$$\boldsymbol{A^* + B^* = (A + B)^*}.$$

3. *Iki matrisanyň köpeltmek hasylynyň transponirleneni, ol matrisalaryň transponirlenenleriniň ters tertipde köpeldilmegine deňdir:*

$$\boldsymbol{(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*}.$$

4. Eger $\boldsymbol{A}$ matrisa kwadrat matrisa bolsa, onda

$$\Delta(\boldsymbol{A}) = \Delta\,(\boldsymbol{A^*}).$$

1 – 4 häsiýetiň dogrudygyna gös – göni barlamak bilen göz ýetirmek bolar.

Eger $\boldsymbol{A}$ *matrisa özüniň transponirlenen* $\boldsymbol{A^*}$ *matrisasy bilen gabat gelse, ýagny* $\boldsymbol{A = A^*}$ *bolsa, onda oňa simmetrik matrisa diýilýär.*

Bu kesgitlemeden simmetrik matrisanyň kwadrat matrisadygy we onuň esasy diagonala görä simmetirk elementleriniň özara deňdigi gelip çykýar.
5. $\boldsymbol{A}$ *matrisanyň transponirlenen* $\boldsymbol{A^*}$ *matrisa köpeltmek hasyly simmetrik matrisadyr*. Hakykatdan – da
$\boldsymbol{C = AA^*}$ matrisany transponirläp alarys:

$$\boldsymbol{C^* = (AA^*)^* = A^{**} \cdot A^* = A \cdot A^* = C}.$$

§ 4. Ters matrisa

Ters matrisa düşünjesi kwadrat matrisalar köplügi üçin kesgitlenýär.
Berlen $\boldsymbol{A}$ matrisa ters matrisa diýip $\boldsymbol{BA = AB = E}$ ($\boldsymbol{E}$ – birlik matrisa) deňligi kanagatlandyrýan islendik $\boldsymbol{B}$ matrisa aýdylýar.
$\boldsymbol{A}$ matrisanyň ýeke – täk ters matrisasy bardyr. Dogrudan hem, goý $\boldsymbol{B_1}$ matrisa hem $\boldsymbol{AB_1 = B_1A = E}$ deňligi kanagatlandyrýar

diýeliň. $\boldsymbol{B_1A = E}$ deňligi $\boldsymbol{B}$ matrisa köpeldip, $\boldsymbol{B_1AB = EB = B}$ alarys (çünki $\boldsymbol{EB = B}$). Ikinji tarapdan $\boldsymbol{B_1AB = B_1 (AB) = B_1E = B_1}$ (çünki $\boldsymbol{AB = E}$ we $\boldsymbol{B_1E = B_1}$). Diýmek, $\boldsymbol{B_1 = B}$ bolar. Bu ýeke – täk ters matrisa $\boldsymbol{A^{-1}}$bilen belgilenýär. Diýmek, $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisa $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$ deňligi kanagatlandyrýar. Islendik kwadrat matrisanyň ters matrisasy barmy? Bu soraga jogap bermek üçin berlen $\boldsymbol{A}$ matrisanyň we oňa ters bolan $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisanyň kesgitleýjileriniň köpeltmek hasylyna garalyň.

$$\Delta(\boldsymbol{A}) \cdot \Delta(\boldsymbol{A^{-1}}) = \Delta(\boldsymbol{AA^{-1}}) = \Delta(\boldsymbol{E}) = \mathbf{1}$$

bolýar, bu ýerden alarys:

$$\Delta(\boldsymbol{A^{-1}}) = \frac{1}{\Delta(A)} \qquad \mathbf{(7-5)}$$

Diýmek, $\boldsymbol{A}$ matrisa ters $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisanyň bolmagy üçin hökmany $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$ bolmaly (bu şert (7 – 5) deňlikden gelip çykýar). *Kesgitleýjisi nula deň bolmadyk kwadrat matrisa aýratyn däl matrisa diýilýär.*

Goý bize aýratyn däl matrisa berilsin:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Delta(\boldsymbol{A})$ kesgitleýjiniň a_{ij} elementiniň algebraik doldurgyjyny $\boldsymbol{A_{ij}}$ bilen belgiläp, täze

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisany alalyň we $\boldsymbol{B}$ matrisanyň $\boldsymbol{A}^{-1}$ matrisa bolýandygyny subut edeliň.

Kesgitlemä görä, $\boldsymbol{B}$ matrisanyň $\boldsymbol{A}$ matrisanyň ters matrisasy bolmagy üçin $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ deňligi kanagatlandyrmaly. $\boldsymbol{AB}$ we $\boldsymbol{BA}$ matrisalary aýratynlykda tapalyň. Alarys

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots\ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots\ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots\ldots & c_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)}\, \boldsymbol{C}.$$

Bu ýerde $\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1}A_{1j} + a_{i1}A_{2j} + \ldots a_{in}A_{nj}}$.

kesgitleýjiniň islendik setiriniň (ýa – da sütünininiň) elementleriniň degişlilikde beýleki islendik setiriniň (ýa – da sütünininiň) elementleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň $i \neq j$ bolanda nula deňdigine görä $i \neq j$ bolanda $c_{ij} = \mathbf{0}$.

Kesgitleýjiniň islendik setiriniň (ýa – da sütüniniň) elementleriniň özleriniň algebraik doldurgyçlaryna köpeltmek hasyllarynyň jeminiň berlen kesgitleýjä deňdigine görä

$c_{ii} = \Delta(A)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ alarys.

Aýdylanlaryň esasynda aşakdakyny ýazyp bileris:

$$AB = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} \Delta(A) 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 \quad \Delta(A) \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \qquad \Delta(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \quad 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 \quad 1 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \quad 0 \ldots\ldots 1 \end{pmatrix} = E$$

Edil şunuň ýaly edilip $BA = E$ boljakdygy subut edilýär. Diýmek, B matrisa A matrisanyň tersidir we biz $B = A^{-1}$ýa – da ýaýbaň görnüşde

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ýazyp bileris. Biz şeýlelikde islendik aýratyn däl matrisanyň ters matrisasynyň barlygyny subut etdik we ony tapmagyň usulyny görkezdik.

Indi ters matrisanyň käbir häsiýetlerine garalyň.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bu deňlik kesgitlemeden gelip çykýar.

2. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

Hakykatdan – da

$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ we

$\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})\cdot\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AE}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}.$

Diýmek, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ matrisa $\boldsymbol{AB}$ matrisanyň ters matrisasy eken.

3. $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*.$

Hakykatdan – da, kesgitlemä görä, $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}.\ \boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{E}.$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ matrisany transponirläliň.

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^{-1})^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}.$

Diýmek,

$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}^{-1})^*\boldsymbol{A}^*$ bolýar. Bu deňligiň iki bölegini hem sagdan $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ köpeldip, alarys:

$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*.$

Indi ters matrisany tapmaga degişli bir mysala garalyň.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$ matrisanyň ters matrisasyny tapmaly.

$\Delta(\boldsymbol{A}) = -64$ bolany üçin $\boldsymbol{A}$ aýratyn däl matrisadyr.

$\boldsymbol{A}^{-1}$ matrisanyň elementlerini tapalyň.

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -43; \quad \boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 63; \quad \boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -19;$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \boldsymbol{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 25; \quad \boldsymbol{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = -53; \quad \boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Diýmek,

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{64}\begin{pmatrix} -43 & 63 & -19 \\ 1 & 3 & -7 \\ 25 & -53 & 17 \end{pmatrix}$$

Tapan matrisamyzyň ***A*** matrisa ters matrisadygyny barlap görüň.

§ 5. Matrisanyň minory we rangy

K e s g i t l e m e. **Matrisanyň birnäçe setiriniň we sütüniniň üstüni çyzyp, galan elementleriniň ornuny üýtgetmezden alnan kesgitleýjä *A* matrisanyň minory diýilýär.** Kesgitleýjiniň kwadrat görnüşlidigine görä, ***A*** matrisanyň minorlaryny almak üçin onuň setirleriniň we sütünleriniň birnäçesiniň üsti çyzylandan soň galan setirleriniň we sütünleriniň sany deň bolmalydyr.

Aýdylanlara oňat düşünmek üçin mysala ýüzleneliň.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

A matrisanyň her gezek bir sütüniinň üstüni çyzsak, onda ***A*** matrisanyň 4 sany 3 – nji tertipli minoryny alarys, bir setiriniň iki sütüniniň üstüni çyzsak ***A*** matrisanyň 18 sany ikinji tertipli minoryny alarys, iki setiriniň we üç sütüniniň üstüni çyzsak, onda ***A*** matrisanyň 12 sany birinji tertipli minoryny alarys. Bu mysaldan görnüşi ýaly, ***A*** matrisanyň dürli tertipli ençeme minory bolýar.

Eger ***A*** matrisanyň ölçegi ***m***×***n*** bolsa, onda bu matrisanyň 1 – den tä ***m*** we ***n*** sanlaryň kiçisine çenli tertipdäki minorlary bolup biler. ***A*** matrisanyň käbir tertipdäki minorlarynyň hemmesi nula deň, emma beýleki tertipdäki minorlarynyň iň bolmanda biri nuldan tapawutly san bolmagy mümkin. Haýsy tertipdäki minoryň nuldan tapawutlanýandygy uly rol oýnaýar. Şoňa görä – de *matrisanyň rangy* diýlen düşünje girizilýär

K e s g i t l e m e. **Matrisanyň nuldan tapawutly iň uly minorynyň tertibine *A* matrisanyň rangy diýilýär.**

Meselem, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Matrisanyň üçünji tertipli minorlarynyň hemmesi nula deň, emma ikinji tertipli minorlarynyň içinde nuldan tapawutlanýany bar, meselem $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$**.** Diýmek, ***A*** matrisanyň rangy 2 deňdir. Biz ***A*** matrisanyň rangyny ***r*(*A*)** bilen belgileýäris. Biziň garan mysalymyzda ***r*(*A*) = 2** bolar.

Matrisanyň rangyny gözlemegiň usulyny salgy berýän teoremany subut edeliň.

T e o r e m a. ***m*×*n* ölçegli matrisanyň *k* tertipli minorlarynyň hemmesi nula deň bolsa, onda *k* +*1* tertipli minorlarynyň hem hemmesi nula deňdir.**

S u b u d y. Matrisanyň islendik ***k* +*1*** tertipli minoryny alalyň we ony Δ_{k+1} bilen belgiläliň. Δ_{k+1} kesgitleýjini islendik setiriniň elementlerine görä (1 – 16) we (1 – 17) fromula laýyklykda dagydyp ýazalyň.

$$\Delta_{k+1} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots a_{i(k+1)} A_{i(k+1)}.$$

A_{ij} sanlar plýus ýa – da minus alamaty bilen berlen matrisanyň ***k*** tertipli minoryna deň. Şerte görä ***k*** tertipli minorlaryň

hemmesi nula deň. Diýmek, hemme $A_{ij} = 0$, onda $\Delta_{k+1} = 0$ bolar.
Matrisanyň rangyny tapmak üçin bu teoremadan ugur alyp, aşakdaky kadany gollanmak bolar.
1. Kiçi tertipdäki minordan uly tertipdäki minora geçmeli.
2. Eger matrisanyň k tertipli minorynyň biri nuldan tapawutly bolsa, onda şol minoryň daşyna agyl bolýan setirleri we sütünleri çyzmak arkaly düzülýän $k+1$ tertipl minorlara garamaly. Eger şonda $k+1$ tertipli minorlaryň hemmesi nula deň bolsa, onda matrisanyň rangy $r = k$ bolar. Eger $k+1$ tertipli minorlaryň biri nuldan atapawutly bolsa, onda ýokardaky usuly şol nuldan tapawutly $k+1$ tertipli minora ulanyp, $k+2$ tertipli minorlaryň nula deňdigine ýa – da deň däldigine garamaly we ş. m. Biziň ýaňyja rangyny tapan matrisamyzda bu aýdylanlary düşündireliň.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ minoryň daşyna agyl bolýan setirler we sütünler arkaly üçünji tertipli minorlary hasaplalyň.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Diýmek, matrisanyň rangy $r = 2$.
Matrisanyň bir setiri ýa – da sütüni beýleki setirlerinden ýa – da sütünlerinden çyzykly kombinasiýa arkaly alnan bolsa, onda ol setire ýa – da sütüne beýleki setirler bilen çyzykly baglanyşykly setir ýa – da sütün diýilýär. Matrisanyň rangy onuň näçe setiriniň ýa – da sütüniniň çyzykly baglanyşyksyzdygyny görkezýär. Şoňa görä – de matrisanyň nula deň bolmadyk iň uly minoryna *matrisanyň bazis minory* diýilýär.

Matrisanyň bazis minoryna girmeýän islendik sütüniň (setiriň) bazis minorynyň sütünleri (setirleri) bilen çyzykly baglanyşygynyň barlygyny hem belläp geçeliň.
Ýokarda aýdylanlaryň düşnükli bolmagy üçin aşakdaky matrisalara garalyň.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A matrisanyň rangy ***r*(*A*) = 3**, ýagny ***A*** matrisanyň setirleri (sütünleri) çyzykly baglanyşyksyz, ***B*** we ***C*** matrisalaryň ranglary ***r*(*B*) = 2; *r*(*C*) = 2,** ýagny olaryň iki setiri (ýa –da sütüni) çyzykly baglanyşyksyz, bir setiri (ýa – da sütüni) beýleki setirlerine (ýa – da sütünlerine) çyzykly baglanyşykda. ***B*** matrisanyň üçünji setiri birnji we ikinji setiriň jeminden ybarat. ***C*** matrisanyň üçünji sütüni birinji we ikinji sütüniniň tapawudyndan ybarat.
Matrisalaryň kömegi bilen, şol bir ölçegli giňişlikde berlen wektorlaryň çyzykly baglanyşygynyň bardygyny ýa – da ýokdugyny kesgitlemek aňsat bolýar. Meselem, goý bize dört ölçegli giňişlikde

$$\vec{x}_1 = \{3, 2, 0, 1\}; \qquad \vec{x}_2 = \{1, 0, 0, 2\}$$

$$\vec{x}_3 = \{2, -1, 0, 0\}; \qquad \vec{x}_4 = \{1, 0, 3, 2\}$$

wektorlar berlen bolsun. Bu wektorlaryň çyzykly baglanyşygy barmy? Başga sözler bilen aýdanyň – da, berlen wektorlar bazis wektorlar bolup bilermi? Berlen wektorlaryň koordinatalaryny matrisalaryň sütünleri (ýa – da parhy ýok, setirleri) edip alalyň

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{-39 \neq 0.}$$

Bu ýerden ***A*** matrisanyň sütünleriniň çyzykly baglanyşyksyzdygy gelip çykýar. Diýmek, $\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_4$ wektorlar çyzykly baglanyşyksyz wektorlar, ýagny olar bazis bolup bilerler.

§ 6. Matrisalary elementar özgertmek

Berlen matrisanyň: a) setirleriniň ýa – da sütünleriniň ornuny çalşyrmak bilen; b) setiriniň ýa – da sütününiň ähli elementlerini nula deň bolmadyk sana köpeltmek bilen; w) bir setiriň ýa – da sütüniň ähli elementlerini bir sana köpeldip, başga bir setiriniň sütüniň degişli elementlerine goşmak bilen täze matrisa alynsa, berlen matrisada elementar özgertmeler geçirildi diýilýär. Belli bir mukdardaky elementar özgertmeler arkaly alynan matrisa berlen matrisa ekwiwalent matrisa diýilýär. Bu iki matrisanyň ranglarynyň deňdigini subut etmek bolar.

Ekwiwalent matrisalaryň ranglarynyň deňligi matrisalaryň rangyny tapmagyň oňat ýoluny salgy berýär.
Dogrudan hem, goý, bize $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ ölçegli ($\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n}$ hasap ederis)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa berilsin. ***A*** matrisanyň $\boldsymbol{a_{11}}$ $\boldsymbol{a_{22}}$ $\boldsymbol{a_{33}}$ **. . . . .** $\boldsymbol{a_{mm}}$ elementlerini saklaýan diagonalyna *esasy diagonal* diýmegi kabul edeliň. Eger ***A*** matrisada esasy diagonaldan sag ýokarky böwürde ýerleşýän elementleriň hemmesini elementar özgertmeler arkaly nula öwrüp bilsek, onda matrisanyň rangynyň esasy diagonaldaky elementleriniň nuldan tapawutlanýanlarynyň sanyna deň boljagy aýdaýňdyr.
Diýmek, biz ***A*** matrisanyň sag ýokarky böwrüniň elementleriniň hemmesini nula öwürmäge synanyşmaly. Ol şeýle gazanylýar.
Eger ***A*** matrisa nul matrisa bolmasa, $\boldsymbol{a_{11}} \neq \boldsymbol{0}$ hasap etmek bolar. Dogrudan hem, eger $\boldsymbol{a_{11}} = \boldsymbol{0}$ bolsa, setirleriň hem – de sütünleriň ornuny çalşyrmak arklay (ýagny rangy üýtgetmän) $\mathbf{a_{11}}$ elementleriň ornunda duran nuldan tapawutly element alyp bileris. Şonuň üçinem $\boldsymbol{a_{11}} \neq \boldsymbol{0}$ hasap ederis. ***A*** matrisanyň birinji setiriniň ähli elementini $\mathbf{a_{11}}$ böleliň we soňra birinji sütüni yzygiderli $-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ ($\boldsymbol{j}$ **= 2, 3, ...** $\boldsymbol{n}$) sana köpeldip $\boldsymbol{j}$ – nji sütüniň elementleri bilen goşsak, berlen matrisa ekwiwalent bolan täze matrisa alarys.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots\ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots\ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Eger hemme $\boldsymbol{b_{ij}} = \mathbf{0}$ **(*i* = 2,3 . . . , *m*, *j* = 2,3, . . . , *n*)** bolsa, matrisanyň rangy 1 – e deň bolar. Eger – de $\boldsymbol{b_{ij}}$ elementleriň içinde nuldan tapawutlysy bar bolsa, birinji setir birinji sütünden beýleki setirleriň we sütünleriň ornuny çalşyryp, $\boldsymbol{b_{22}}$ elementleriň ornunda nula deň bolmadyk element alyp bileris. Şonuň üçinem $\boldsymbol{b_{22} \neq 0}$ hasap edeliň. ***B*** matrisanyň 2 – nji setiriniň hemme elementlerini $\boldsymbol{b_{22}}$ bölüp, soňra 2 – nji sütüni yzygiderli $-\frac{b_{2j}}{b_{22}}$ (***j* = 3, 4, 5, ..., *n***) sana köpeldip, degişlilikde ***j* –** nji sütüniň elementleri bilen goşup,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots\ldots & c_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots\ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisany alarys. Eger ähli $\boldsymbol{c_{ij}} = \mathbf{0}$ (***j* = 3,4, ... *n*; *i*=3,4 ..., *m***) nul bolsa, onda matrisanyň rangy 2 – ä deň bolar. $\boldsymbol{c_{ij} \neq 0}$ (***i* = 3,4, ..., *m*; *j* = 3,4, ..., *n***) bar bolsa, onda 1 – nji we 2 – nji setir we sütünden beýleki setirleriň we sütünleriň ornuny çalşyrmak bilen, $\boldsymbol{c_{33}}$ ornuna nula deň bolmadyk element getirip bileris. Şonuň üçinem $\boldsymbol{c_{33} \neq 0}$ diýip, ýokardaky ***A*** we ***B*** matrisalarda geçirilen operasiýalarymyzy ***C*** matrisa üçin, soňra beýleki matrisalar üçin gaýtalaýarys. Şonda biz ahyrky $\boldsymbol{k}$ sütünden sagdaky sütünleriň hemmesinde nul alarys. Matirsanyň rangy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}$ bolar ($\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{m}$)

$\boldsymbol{A}$ we $\boldsymbol{B}$ matrisalar ekwiwalent matrisalar bolmagy $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ bilen belgilenýär.

1 – n j i m e s e l e. Matrisanyň rangyny kesgitlemeli.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diýmek berlen matrisanyň rangy üçe deň.

§ 7. Çyzykly deňlemeler ulgamynyň matrisalar usuly bilen çözülişi

Goý, bize aşakdaky sistema berlen bolsun.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}\ x_n = f_1 \\ a_{21}\ x_2 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}\ x_n = f_2 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}x_2 + .\ .\ . + a_{nn}x_n = f_n \end{cases} \qquad \textbf{(7 – 7)}$$

(7 – 7) sistemanyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden, näbellileriniň özlerinden hem – de azat agzalaryndan matrisalar düzeliň.

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . . . . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . . . . & a_{2n} \\ . . . . & . . . . & . . . . & . . . . \\ . . . . & . . . . & . . . . & . . . . \\ a_{n1} & a_{n2} & . . . . & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix}
$$

A matrisany ***X*** matrisa sagdan köpeltsek, (7 – 7) sistemanyň çep bölegini berer. Şoňa görä – de sistemany matrisa görnüşde ýazyp bileris:

$$
\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{F} \qquad \textbf{(7 – 8)}
$$

Eger $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$ bolsa, onda ***A*** matrisa ters $\boldsymbol{A}^{-1}$matrisanyň bardygyny bilýäris. (7 – 8) deňligi çepden $\boldsymbol{A}^{-1}$ matrisa köpeldeliň.

$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}$ ýa –da $\boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$ bolýanyny nazara alsak, onda

$$
\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F} \qquad (7 – 9)
$$

bolar. (7 – 9) deňlik bilen tapylan ***X*** (7 – 7) sistemanyň çözüwidir.

2 – nji mesele. Aşakdaky çyzykly deňlemeler sistemasyny matrisa usuly bilen çözmeli.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ç ö z ü l i ş i.
A*; *X*; *F matrisalary düzeliň.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berlen sistemany matrisa görnüşde ýazalyň.

$$\boldsymbol{AX = F}.$$

A matrisanyň kesgitleýjisini tapalyň.

$$\Delta(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{5 \neq 0}$$

A^{-1} ters matrisany tapalyň

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1;} \qquad \boldsymbol{A}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{3;}$$

$$\boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-2;}$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{-3;} \qquad \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1;}$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ýokarda görkezilen formula boýunça

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6+9-10 \\ -18+3+5 \\ 6-6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ýa – da iki matrisanyň deňlik şertinden alarys:

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = -2; \qquad x_3 = 3.$$

Çyzykly deňlemeler sistemasyny çözmegiň matrisa metody arkaly alnan çözüwiniň II bapdaky Krameriň metody arkaly alnan çözüw bilen birmeňzeşdigini görkezmek aňsatdyr.
Indi berlen deňlemeler sistemasy haýsy halda kökdeş bolýarlar we haýsy halda kökdeş bolmaýarlar diýen soraga garalyň.
Goý, çyzykly deňlemeler sistemasynyň ***n*** näbellisi we ***m*** deňlemesi bolsun.

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots . + a_{n1}x_n = f_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots . + a_{2n}x_n = f_2 \\ \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots . + a_{mn}x_k + f_n \end{cases} \qquad \mathbf{(7-10)}$$

(7 – 10) sistemanyň näbellileriniň koeffisiýentlerinden düzülen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \,.\;.\;.\;. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \,.\;.\;.\;. & a_{2n} \\ . \;.\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & . \\ . \;.\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \,.\;.\;.\;. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa sistemanyň matrisasy, (7 – 10) sistemanyň koeffisiýentlerinden we azat agzalaryndan düzülen

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \,.\;.\;.\;. & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \,.\;.\;.\;. & a_{2n} & f_2 \\ . \;.\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & . & \\ . \;.\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & .\;.\;.\;.\;. & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \,.\;.\;.\;. & a_{mn} & f_n \end{pmatrix}$$

matrisa sistemanyň ýaýraňlandyrylan matrisasy diýilýär.
Ýokarda goýlan soraga Kroneker – Kapelliniň teoremasy jogap berýär.

T e o r e m a. ***(7 – 10) sistemanyň kökdeş bolmagy üçin onuň matrisasynyň rangynyň, ýaýraňlandyrylan matrisasynyň rangyna deň bolmagy zerur we ýeterlik şertdir.***

Diýmek, sistemanyň matrisasynyň rangy ýaýraňlandyrylan matrisanyň rangyndan kiçi bolsa, ýagny ***r*(*A*)** < ***r*(*B*)** bolsa, onda sistemanyň çözüwi ýokdur (***r*(*A*)** we ***r*(*B*)** degişlilikde ***A*** we ***B*** matrisanyň ranglary).

Eger ***r* = *n*** bolsa, onda sistemanyň ýeke – täk çözüwi bardyr.

Aýdylan tassyklamalaryň düşnükli bolmagy üçin käbir mysallara garalyň.

3 – n j i m e s e l e. Aşakdaky sistemalaryň kökdeşdiklerini ýa – da kökdeş däldiklerini derňemeli.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

w) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$

Ç ö z ü l i ş i. Sistemalaryň matrisalarynyň we ýaýraňlandyrylan matrisalarynyň ranglaryny hasaplalyň.

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 5 & 3 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0.}$$

Diýmek, $\boldsymbol{r(A) = 3}$ we $\boldsymbol{r(B) = 3}$**.**
Sistema kökdeş we onuň ýeke – täk çözüwi bar.

b) $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0,}$$

ýagny $\boldsymbol{r(A) = 2.}$ $\boldsymbol{B}$ matrisanyň aşakdaky minory

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ ýagny } \boldsymbol{r\ (B) = 3.}$$

$\boldsymbol{r\ (A) \neq r\ (B)}$ sistema kökdeş däl.

w) $\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

ýagny $\boldsymbol{r(A)}$ = **2.** $\boldsymbol{B}$ matrisanyň $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ kesgitleýjisini agyllaýan setirleri we sütünleri arkaly düzülen 3 – nji tertipli minorlary

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & 13 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

şoňa görä –de $\boldsymbol{r(B)}$ **= 2.** Bu sistema üçin $\boldsymbol{r(A)} = \boldsymbol{r(B)} = \mathbf{2}$ näbellileriň sany bolsa 3. Diýmek, sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bar (haýsy iki näbelliniň koeffisiýentlerinden düzülen kesgitleýji nula deň bolmasa şol iki näbelli, üçünji näbelli arkaly kesgitlenýär. Üçünji näbelli bolsa erkin bahalary kabul eder).

§ 8. Çyzykly birjynsly deňlemeler sistemasynyň çözüwleriniň giňişligi

Bir jynsly

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{(7-11)}$$

çyykly deňlemeler sistemana garalyň. (7 – 11) sistemany matrisalar görnüşinde ýazalyň.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ýa – da gysgaça

$$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(7-12)}$$

Bu ýerde $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_n^n$, $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Eger $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$ bolsa, berlen sistemanyň ýeke – täk triwial çözüwiniň bardygyny biz bilýäris. Şoňa görä – de $\Delta(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ diýeliň.

1 – n j i t e o r e m a. ***Eger*** $\vec{X}$ **(7 – 11)** ***sistemanyň çözüwi bolsa, onda c*** $\vec{X}$ ***hem onuň çözüwidir.*** **(*c* - const).**

Eger $\vec{X}^{(1)}$ we $\vec{X}^{(2)}$ (7 –11) sistemanyň çözüwi bolsa, onda $\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}$ hem onuň çözüwidir.

Hakykatdan – da, eger

$\boldsymbol{A}\vec{X} = \mathbf{0}$ bolsa, onda $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}\vec{X}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{A}\vec{X} = \mathbf{0}$, diýmek, $\boldsymbol{c}\vec{X}$ (7 – 11) deňlemäniň çözüwi eken.Eger $\boldsymbol{A}\vec{X}^{(1)} = \mathbf{0}$ we $\boldsymbol{A}\vec{X}^{(2)} = \mathbf{0}$ bolsa, onda $\boldsymbol{A}(\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) = \boldsymbol{A}\vec{X}^{(1)} + \boldsymbol{A}\vec{X}^{(2)} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$,

Diýmek $\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}$ hem (7 – 11) sistemanyň çözüwi eken.
Bu teoremadan (7 – 11) sistemanyň çözüwleriniň islendik çyzykly kombinasiýasynyň hem onuň çözüwi bolýandygy gelip çykýar. Diýmek, (7 – 11) sistemanyň trawial bolmadyk bir çözüwi bar bolsa, onda onuň tükeniksiz köp çözüwi bardyr. Bu çözüwleriň köplügi çyzykly giňişligi emele getirýär. Ol giňişlige wektorlar giňişligi hökmünde garamak bolar.
Eger $\boldsymbol{n}$ näbellili çyzykly bir jynsly deňlemeler sistemasynyň $\boldsymbol{A}$ matrisasynyň rangy $\boldsymbol{r}$ bolsa, onda çözüwler giňişliginiň ölçegi $\boldsymbol{k = n - r}$ bolýar.
Çözüwler giňişliginiň bazisine çözüwleriň fundamental sistemasy diýilýär.
(7 – 11) sistemanyň çözüwleriniň fundamental sistemasynyň tapylyşyny aşakdaky mysal arkaly görkezeliň.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Berlen sistemanyň matrisasyny ýazalyň.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ matrisanyň 2 – nji tertipli minory

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Emma onuň 3 – nji tertipli minorlarynyň hemmesi nula deň. Diýmek, $r = 2$. Bu ýerden ilkinji iki deňlemäniň çyzykly baglanyşyksyz deňlemedigi, soňky iki deňlemäniň bolsa 1 – nji we 2 –nji deňlemeleriň çyzykly kombinasiýasydygy gelip çykýar. Şoňa görä – de berlen sistemanyň soňky iki deňlemesini taşlap bileris. Birinji we ikinji deňlemeleri özgerdip ýazalyň

$$x_1 - x_2 = -5x_3 + x_4$$
$$x_1 + x_2 = 2x_3 - 3x_4$$

Goý, $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$ diýeliň. Onda ýokarky sistemadan alarys.

$$x_1 = \frac{-3c_1 - 2c_2}{2}; \qquad x_2 = \frac{7c_1 - 4c_2}{2}.$$

Diýmek, sistemanyň islendik çözüwi

$$\vec{x} = \left\{ \frac{-3c_1 - 2c_2}{2}, \quad \frac{7c_1 - 4c_2}{2}, \; c_1, \; c_2 \right\}$$

görnüşde bolar.

c_1 we c_2 sanlara $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ bahalary berip $\vec{x}^{(1)} =$ $= \left\{ -\frac{3}{2}; \; \frac{7}{2}; \; 1, \; 0 \right\}$ çözüwi, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ bahalary berip

$\vec{x}^{(2)} = \{-1; \; -2; \; 0, \; 1\}$ çözüwi alýarys. $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ wektorlar çyzykly baglanyşyksyz wektorlar. Şoňa görä – de $\vec{x}^{(1)}$ we $\vec{x}^{(2)}$ wektorlar çözüwleriň fundamental sistemasy bolarlar. Dogrudan hem, c_1 we c_2 sanlaryň islendik bahalary üçin

$$\vec{x} = \left\{ \frac{-3c_1 - 2c_2}{2},\ \frac{7c_1 - 4c_2}{2},\ c_1,\ c_2 \right\} = \quad \boldsymbol{c_1} \vec{x}^{(2)} + \boldsymbol{c_2} \vec{x}^{(2)}$$ bolar,

ýagny galan çözüwler bu iki çözüw bilen hemişe çyzykly baglanyşykda bolýarlar. Bu ýerde tygşytlylyk üçin ulgamyň çözüwini setir matrisa ýa –da wektor görnüşinde ýazdyk.

VIII bap

ÇYZYKLY ÖWÜRMELER WE KWADRATIK FORMA

§ 1. Çyzykly öwürmeler

P *we* ***Q*** tekizlerde degişlilikde x_1ox_2 we y_1Oy_2 dekart koordinatalar sistemalaryny alalyň we P tekizligiň islendik $M(x_1; x_2)$ nokady aşakdaky

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (8\text{-}1)$$

deňlikler arkaly Q tekizligiň $N(y_1, y_2)$ nokadyna öwrülýär diýeliň. (x_1, x_2) we (y_1, y_2) koprdinatalaryň (8-1) deňliklerde çyzykly baglanşykda bolýandyklary sebäpli şeýle öwürme çyzykly öwürme diýilýär. $N(y_1, y_2)$ nokatda şekil, $M(x_1, x_2)$ nokatda bolsa nusga diýilýär. P tekizligiň hemme nokatlarynyň şekilleriniň köplügi Q tekizligiň hemme nokatlaryndan durar ýa-da ol Q tekizlikde käbir köplügi emele getirer. Aşakdaky.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \end{pmatrix} = X^*; \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \hline y_2 \end{pmatrix} = Y^* \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$$

Belgilemeleri girizip (8-1) öwürmäni $\vec{Y}^* = A\vec{X}^*$ ýa-da $X^* \overset{A}{\Rightarrow} Y^*$ görnüşde ýazyp bileris. A matrisa öwürmäniň matrisasy diýilýär. $\vec{X}^*$ we $\vec{Y}^*$ wektorlaryň degişlilikde $M(x_1, x_2)$ nusgany we $N(y_1, y_2)$ şekili kesgitleýändikleri sebäpli olara hem degişlilikde nusga we şekil diýmäni kabul edeliň.

Bu ýagdaýda $X^* \overset{A}{\Rightarrow} Y^*$ aňlatma $\vec{X}^*$ nusga *A* matrisanyň üsti bilen (1-nji deňlikleriň üsti bilen) $\vec{Y}^*$ şekili geçýär diýip okalýar. $X^* \overset{A}{\Rightarrow} Y^*$ çyzykly öwürmäniň iki esasy häsiýeti bar. Eger $\vec{X}^* \overset{A}{\Rightarrow} \vec{Y}^*$ bolsa islendik *c* hemişelik san üçin

$c\vec{X}^{*} \overset{A}{\Rightarrow} c\vec{Y}^{*}$ boljagy aýdyňdyr. Bu häsiýete çyzykly öwürmäniň bir jynslylygy diýilýär. $\vec{X}_1 \overset{A}{\Rightarrow} \vec{Y}_1; \vec{X}_2 \overset{A}{\Rightarrow} \vec{Y}_2$ bolsa $\vec{X}_1 + \vec{X}_2 \overset{A}{\Rightarrow} \vec{Y}_1 + \vec{Y}_2$ boljagy hem düşnükli. Bu häsiýete bolsa çyzykly öwürmäniň addimiwligi diýilýär. Garalan iki häsiýet çyzykly öwürmäniň kanonik häsiýetidir. Aşakda bu iki häsiýete eýe bolan islendik öwürmäniň çyzykly boljakdygyny subut ederis. $\{x_1\ x_2\ x_3 ....x_n\}$ tertipleşdirilen n sandan durýan köplüge n ölçegli wektor $x_1\ x_2\ x_3.........x_n$ sanlara bolsa onuň koordinatalary diýilýär we ol adatça üstünde strelka goýulan latyn harpy bilen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ we ş.m belgilenilýär. Eger şol wektorlar toplumynda edil üç ölçegli wektorlara meňzeşlikda goşmak we sana köpeltmek operasiýalaryny girizsek, onda n ölçegli çyzykly giňişlik emele geler. Ol giňişlik R^n bilen belgilenilýär. R^n giňişlikde ýatan $\vec{X}$ wektory tekizlige meňzeşlikde $M(x_1, x_2, x_3.........x_n)$ görnüşde ýazyp , oňa R^n giňişligiň nokady diýmek bolar. Goý R^m we R^n giňişlikler berilen bolsun, $M(x_1, x_2, x_3.........x_m) \in \mathrm{R}^m$ we $N(y_1, y_2, y_3........y_n) \in \mathrm{R}^n$ nokatlary alalyň.Eger – de $\boldsymbol{R^m}$ giňişligiň islendik $\boldsymbol{M(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ nokady

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \end{cases} \qquad \mathbf{(8-2)}$$

deňlikler arkaly R^n giňişligiň käbir ***N*** (***y₁, y₂, ..., yₙ***) nokadyna öwrülýän bolsa, onda şeýle öwürmä çyzykly öwürme ***M*** nokada nusga, ***N*** nokada bolsa şekil diýilýär.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{X}^*; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{Y}^*; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_m)$, $\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ belgilemeleri girizip, (8 – 2) öwürmäni $\vec{Y}^* = \boldsymbol{A}\vec{X}^*$ ýa – da $\vec{X} \xrightarrow{A} \vec{Y}$ görnüşde ýazyp bileris.(8 – 2) öwürme additiwlik we birjynslylyk kanunyna boýundyr. Dogrudan hem, goý $\vec{X} \xrightarrow{A} \vec{Y}$ we ***c*** hemişelik san bolsun. $\vec{X} \xrightarrow{A} \vec{Y}$ aňlatmany $\boldsymbol{Y^*} = \boldsymbol{A}\vec{X}^*$ görnüşde ýazyp, deňligiň iki bölegini – de ***c*** köpeldip: $c\vec{Y}^* = cA\vec{X}^* = Ac\vec{X}^*$ ýa –da $\overrightarrow{cX} \xrightarrow{A} \overrightarrow{cY}$ alarys. Diýmek, (8 – 2) öwürme birjynslydyr.

Goý, $\overrightarrow{X_1} \xrightarrow{A} \overrightarrow{Y_1}$ we $\overrightarrow{X_2} \xrightarrow{A} \overrightarrow{Y_2}$ bolsun. Bu aňlatmalary deňgüýçli $\vec{Y}_1^* = \overrightarrow{AX_1}^*$ we $\vec{Y}^*_2 = \boldsymbol{A}\vec{X}^*_2$ görnüşde ýazyp we degişlilikde goşup $\vec{Y}^*_1 + \vec{Y}^*_2 = \boldsymbol{A}\left(\overrightarrow{X_1}^* + \overrightarrow{X_2}^*\right)$ alarys. Bu bolsa $\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} \xrightarrow{A} \overrightarrow{Y_1} + \overrightarrow{Y_2}$ diýmekdir. Şeýlelikde, (8 – 2) öwürmede berlen nusgany sana köpeldip alnan täze nusganyň şekili berlen nusganyň şekiliniň şol sana köpeldilemegine deňdir (öwürmäniň birjynslylygy), berlen iki nusganyň jeminiň

şekili şol nusgalaryň şekilleriniň jemine deňdir (öwürmäniň additiwligi).
Indi şu iki esasy (birjynslylyk we additiwlik) häsiýete eýe bolan R^m we R^n giňişlikler arasyndaky islendik öwürmäniň çyzykly boljakdygyny subut etmäge girişeliň.
K e s g i t l e m e. **R^m giňişlikdäki islendik M (x_1, ... , x_m) nokada (ýa –da $\overrightarrow{X}$ = {x_1; x_2; . . . ; x_m}) wektora (belli bir kanuna laýyklykda R^n giňişligiň käbir N (y_1, . . . , y_n)) nokady ($\overrightarrow{Y}$ = {y_1; . . . , y_n} wektor) degişli edilýän bolsa, onda R^m giňişligiň R^n giňişlige bolan f öwürmesi berlipdir diýilýär** we ol $\overrightarrow{Y}$ = f $\overrightarrow{X}$ ýa – da $\overrightarrow{X} \overset{f}{\Longrightarrow} \overrightarrow{Y}$ görnüşde belgilenýär.
T e o r e m a. Eger –de $\overrightarrow{X} \overset{f}{\Longrightarrow} \overrightarrow{Y}$ öwürme islendik c san üçin we islendik $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$ є R^m wektorlar f üçin

$$f\,(c\,\overrightarrow{X}\,) = c\,f\,\overrightarrow{X} \qquad (8-3)$$
$$f\left(\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}\right) = f\,\overrightarrow{X_1} + f\,\overrightarrow{X_2} \qquad (8-4)$$

birjynslylyk we additiwlik häsiýete eýe bolsa, onda ol çyzykly öwürmedir.
S u b u d y. R^m giňişlikde $\overrightarrow{e_1}$ ={1, 0, 0, . . . , 0}; $\overrightarrow{e_2}$ = {0, 1, . . . , 0}… ; $\overrightarrow{e_m}$ = {0, 0, . . . , 0, 1} bazis wektorlary, R^n giňişlikde bolsa $\overrightarrow{\tau_1}$ = {1, 0, 0, . . . , 0}, . . . , $\overrightarrow{\tau_n}$ = {0, 0, . . . , 0, 1} bazis wektorlary alalyň. Goý, $\overrightarrow{fe_i}$ = $\overrightarrow{S_i}$ (***i* = 1, 2 . . ; *m***) bolsun.
$\overrightarrow{S_i}$ wektorlary $\overrightarrow{\tau_1}$, . . . , $\overrightarrow{\tau_n}$ bazisde dagydyp alarys:

$$s_i = \overrightarrow{a_{i1}\tau_1} + \overrightarrow{a_2\tau_2} + \ldots + \overrightarrow{a_{in}\tau_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \mathbf{(8 – 5)}$$

Islendik $\vec{X} \in R^m$ wektory alalyň we $\vec{X}$ wektoryň şekilini $\vec{Y}$ bilen ýa – da $f\ \vec{X}$ bilen belgiläliň. $\vec{X}$ **we** $\vec{Y}$ wektorlary degişlilikde $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, . . . , $\overrightarrow{e_m}$ we $\overrightarrow{\tau_1}$, . . . , $\overrightarrow{\tau_n}$ bazislerde dagydyp alarys:

$$\begin{cases} \vec{X} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_m\overrightarrow{e_m} \\ \vec{Y} = y_1\overrightarrow{\tau_1} + y\overrightarrow{\tau_2} + \ldots + y_n\overrightarrow{\tau_n} \end{cases} \qquad \mathbf{(8 – 6)}$$

(8 – 3) we (8 – 4) häsiýetleri ulanyp ýazýarys:

$$\overrightarrow{Y} = f\overrightarrow{X} = f\left(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_m\overrightarrow{e_m}\right) = x_1 f\overrightarrow{e_1} + x_2 f\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_m f\overrightarrow{e_m} =$$

$$= x_1\left(a_{11}\overrightarrow{\tau_1} + a_{12}\overrightarrow{\tau_2} + \ldots + a_{1n}\overrightarrow{\tau_{\mathrm{n}}}\right) + x_2\left(a_{21}\overrightarrow{\tau_1} + a_{22}\overrightarrow{\tau_2} + \ldots + a_{2n}\overrightarrow{\tau_n}\right) +$$

$$+ \ldots + x_m\left(a_{m1}\overrightarrow{\tau_1} + a_{m2}\overrightarrow{\tau_2} + \ldots + a_{mn}\overrightarrow{\tau_n}\right).$$

$$\overrightarrow{Y} = x_1(a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + a_m a_{mn})\overrightarrow{\tau_1} + \ldots + \left(x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + \right.$$

$$\left. + x_m a_{mn}\right)\overrightarrow{\tau_{\mathrm{n}}} \ .$$

Bu ýerden (8 – 6) deňlikleriň ikinjisini göz öňünde tutup tapýarys.

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m$$
$$y_2 = a_{21}x + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{Y}^*; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{X}^*; \text{we} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = A$$

belgilemäni girizip alarys.

$$\vec{Y}^* = A\vec{X}^*$$

Şuny subut etmek gerekdi.

Subut eden teoremamyzyň esasynda (8 – 3) we (8 – 4) häsiýetlere eýe bolan islendik öwürmä çyzykly öwürme diýip bileris. Şuňa meňzeşlikde ölçegleri tükeniksiz bolan giňişliklerde hem şol iki häsiýete eýe bolan öwürmelere çyzykly öwürmeler diýilýär.

§ 2. Çyzykly özgertmeler

R^n* giňişligiň öz – özüne bolan çyzykly öwürmesine *R^n* giňişligi çyzykly özgertmek diýilýär,** ýagny ***R^n giňişligiň çyzykly özgertmesi $\overrightarrow{Y} = \boldsymbol{f}\ \overrightarrow{X}$ ýa –da $\overrightarrow{Y^*} = \boldsymbol{A}\ \overrightarrow{X^*}$ görnüşde ýazylyp bilner. Bu ýerde $\overrightarrow{X} = \{\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}\}$, $\overrightarrow{Y} = \{\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n}\}$, ***A*** matrisa ***n×n*** ölçegli kwadrat matrisa bolar.

$\vec{Y}^* = \boldsymbol{A}\,\vec{X}^*$ deňlik ýaýbaň görnüşde şeýle ýazylar.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad \mathbf{(8-7)}$$

Eger –de $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{fX}$ özgertmede $\boldsymbol{R^n}$ giňişligiň islendik $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots, y_n})$ nokady, käbir $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n})$ nokadyň şekili bolsa, onda $\boldsymbol{A}$ matrisanyň kesgitleýjisi nuldan tapawutly bolar. Dogrudan hem, Δ(A)= **0** diýeliň, onda $\boldsymbol{A}$ matrisanyň setirleriniň arasynda triwial bolmadyk çyzykly baglanyşyk, ýagny $\sum_i^n \alpha_i a_{ij} = 0$, $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n}$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq \mathbf{0}$ bolar.

(8 – 7) sistemanyň deňlemelerini degişlilikde $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ sanlara köpeldip we goşup alarys:

$$\boldsymbol{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0.}$$

Diýmek, $\boldsymbol{R^n}$ giňişlik berlen özgertmede özi bilen gabat gelmeýän bir bölegine geçer. Bu bolsa şerte garşy gelýär. Tersine, Δ($\boldsymbol{A}$) ≠ **0** bolanda, $\boldsymbol{A}$ matrisa ters $A^{-1} = \{b_{ij}\}_n^n$ matrisany tapyp, (8 – 7) deňligi $\overrightarrow{X*} = \boldsymbol{A^{-1}} \overrightarrow{Y*}$ ýa – da

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \ldots + b_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn}y_n \end{cases} \qquad \mathbf{(8-8)}$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerden islendik $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n})$ nokadyň käbir $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n})$ nokadyň şekili boljakdygy gelip çykýar. Ýokarda aýdylanlardan $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{0}$ bolanda islendik $\boldsymbol{N}$ nokadyň diňe bir $\boldsymbol{M}$ nokadyň şekili bolýandygy we tersine, islendik $\boldsymbol{M}$ nokadyň diňe bir $\boldsymbol{N}$ nokadyň nusgasy boljakdygy gelip çykýar.

Goý, $\overrightarrow{X*} = \boldsymbol{A}\ \overrightarrow{Y*}$, $\Delta(\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{0}$ özgertme berlen bolsun. $\boldsymbol{R^n}$ giňişlikde koordinatalary

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \qquad \mathbf{(8-9)}$$

deňligi kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügine garalyň. Goý, $\boldsymbol{M}$ $(\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n})$ nokat şol nokatlaryň islendik biri bolsun, $\boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n})$ nokat bolsa onuň şekili bolsun. (8 – 8)sistemanyň deňlemelerine görä $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$ koordinatalary $\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n}$ koordinatalaryň üsti bilen aňladyp we (8 – 9) deňlige goýup

$$\beta_0 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_n y_n = 0 \qquad \mathbf{(8-10)}$$

görnüşdäki deňligi alarys. Ýagny koordinatalary (8 – 9) deňligi kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügi $\vec{X}^* = A\vec{Y}^*$ özgertmede koordinatalary (8 – 10) deňligi kanagatlandyrýan köplüge geçýär. Şuňa meňzeşlikde özara çyzykly baglanyşyksyz (8 – 9) deňlemeleriň birnäçesini kanagatlandyrýan nokatlaryň köplügi – de şeýle özgertmelerde koordinatalary şol sandaky şol görnüşdaki çyzykly baglanyşyksyz deňlemeleri kanagatlandyrýan nokatlar köplügine geçer.

Mysal üçin, üç ölçegli giňişlkde çyzykly özgertme

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y_1 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z_1 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

görnüşde ýazylar.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

deňleme tekizligi,

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

çyzykly baglanyşyksyz deňlemeler sistemasy bolsa göni çyzygy aňladýar. Diýmek, üç ölçegli giňişlik çyzykly özgerdilende tekizlik tekizlige özgerýär, göni çyzyk bolsa göni çyzyga özgerýär.

Çyzykly özgertmeleriň esasylarynyň biri – de ortogonal özgertmelerdir. $\boldsymbol{R^n}$ giňişlikde matrisasy $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^*}$şerti kanagatlandyrýan $\overrightarrow{Y^*} = \boldsymbol{A}\,\overrightarrow{X^*}$ çyzykly özgertmä *ortogonal özgertme* diýilýär. $\boldsymbol{A^{-1}} = \boldsymbol{A^*}$ şerti kanagatlandyrýan matrisa bolsa *ortogonal matrisa* diýilýär. Ortogonal özgertmeleriň esasy häsiýetleriniň biri aşakda subut edilýär.

T e o r e m a. Goý, $\boldsymbol{N_1}$ we $\boldsymbol{N_2}$ nokatlar $\overrightarrow{Y^*} = \boldsymbol{A}\,\overrightarrow{X^*}$ ortogonal özgertmede degişlilikde $\boldsymbol{M_1}$ **we** $\boldsymbol{M_2}$ nokatlaryň şekilleri bolsunlar. Onda $\boldsymbol{M_1 M_2 = N_1 N_2}$, ýagny ortogonal özgertme uzaklygy üýtgetmeýän özgertmedir.

S u b u d y. Goý, $\boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n})$; $\boldsymbol{M_2}(\boldsymbol{x_1`, x_2`, x_3`, \ldots, x_n`})$; $\boldsymbol{N_1}(\boldsymbol{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n})$; $\boldsymbol{N_2}(\boldsymbol{y_1`, y_2`, y_3`, \ldots, y_n`})$ bolsun. $|M_1M_2|$ we $|N_1N_2|$ uzaklyklaryň kwadratlaryny tapalyň

$|M_1M_2|^2 = \sum_{i=j}^{n}(x_i - x_i')^2$; $|N_1N_2|^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_1 - y_1')^2$. Bu deňlikleriň sag bölegini matrisa görnüşinde ýazalyň.

$$|M_1M_2| = (x_1 - x_1`,\ x_2` - x_2`,\ \ldots\ x_n - x_n`)\begin{pmatrix} x_1 - x_1' \\ x_2 - x_2' \\ x_n - x_n' \end{pmatrix};$$

$$|N_1N_2|^2 = (y_1` - y_1`,\ y_2` - y_2`, \ldots y_n - y_n`)\begin{pmatrix} y_1 - y_1' \\ y_2 - y_2' \\ y_n - y_n' \end{pmatrix}.$$ M_1, M_2, N_1, N_2 nokatlaryň radius wektorlaryny $\overrightarrow{X_1}$, $\overrightarrow{X_2}$, $\overrightarrow{Y_1}$, $\overrightarrow{Y_2}$ bilen belgilesek, onda

$$|| M_1M_2|^2 = \left|\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right| \cdot \left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)*, |N_1N_2|^2 = \left(\overrightarrow{Y_2} - \overrightarrow{Y_1}\right)\left(\overrightarrow{Y_2} - \overrightarrow{Y_1}\right)*$$

alarys. $\overrightarrow{Y*} = \overrightarrow{X*}A$ deňligi $\vec{Y} = \vec{X}A^*$ görnüşde ýazyp soňky deňlige goýalyň:

$$|N_1N_2|^2 = \left(\overrightarrow{X_2}A* - \overrightarrow{X_1}A*\right)\left(\overrightarrow{X_2}A* - \overrightarrow{X_1}A*\right)* = \left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)A*$$
$$\left(\left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)A*\right)* = \left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)A* \cdot \boldsymbol{A}\left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)* = \left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)\ \left(\overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1}\right)* =$$
$$= |M_1M_2|^2.$$

Teorema subut edildi.

Tersine, uzaklygy saklaýan islendik çyzykly özgertmäniň ortogonal özgertme boljakdygyny subut etmek hem kyn däl.

Indi ortogonal matrisanyň esasy häsiýetlerini öwrenmäge girişeliň.

$\boldsymbol{A^{-1} = A^*}$ bolany sebäpli $\boldsymbol{A \bullet A^* = AA^{-1} = E}$ ýazyp bilýäris. Bu ýerden

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{\ 2} = 1; \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2} = 1; \text{ we } \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{kj} = 0$$ (***i*** **≠** ***k*** bolanda),

$\sum_{i-1}^{n} a_{ik}$ $\boldsymbol{a_{ij}}$ = **0** (***k*** **≠*j*** bolanda) deňlikler gelip çykýar. Diýmek, ortogonal matrisanyň islendik sütüniniň ýa – da setiriniň elementleriniň kwadratlarynyň jemi bire deň, islendik iki setiriniň (sütüniniň) elementleriniň jübüt – jübütden köpeltmek hasyllarynyň jemi nula deň bolýar. Bu häsiýet ortogonal matrisanyň kanonik häsiýetidir, ýagny şu häsiýetlere eýe bolan matrisa ortogonal matrisadyr. Dogrudan hem, eger (8 – 10) deňlikler ýerine ýetseler, onda ***AA**** **=** ***A*A*** **=** ***E*** bolýany aýdyňdyr. Bu bolsa ***A**** **=** $\boldsymbol{A^{-1}}$ diýmekdir. Mysal hökmünde ikinji tertipli ortogonal matrisa we degişli ortogonal özgertmä garalyň. Eger – de ***A*** **=** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ortogonal matrisa bolsa, onda $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1;$ $a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1;$

$\boldsymbol{a_{11}\ a_{21} + a_{12}\ a_{22} = 0}$ **(*a*)** deňlikler ýerine ýeter. Käbir **φ**we **ψ** burçlar üçin $\boldsymbol{a_{11} = \cos\varphi}$; $\boldsymbol{a_{12} = \sin\varphi}$, $\boldsymbol{a_{22} = \cos\psi}$, $\boldsymbol{a_{21} = -\sin\psi}$ boljakdygy aýdyňdyr.

(*a*) deňligi – ***cosφ sinψ*** **+** ***sinφ cosψ*** **= 0** ýa – da ***sin*** **(ψ- φ) = 0** görnüşde ýazalyň. Bu ýerden ***ψ = φ +k π***

Şeýlelikde ***A*** matrisa

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ýa – da

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

görnüşde bolup biler. Şoňa görä – de ortogonal özgertme

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 = y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(8 – 11)}$$

ýa – da

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(8 – 12)}$$

görnüşde ýazylar.

Belli bolşy ýaly (8 – 11) sistema tekizlikde gönüburçly koordinatalar sistemasynyň aýlanma özgertmesini, (8 – 12) sistema bolsa iki ýönekeý özgertmeden, ýagny birinji gönüburçly koordinatalar sistemasynyň φ burça aýlanmagyndan, ikinjiden täze alnan koordinatalar sistemasyn $\boldsymbol{x_1}$ okuna görä zerkal öwürme geçirilmeginden durýar.

Üç ölçegli giňişlikde hem ortogonal özgertmäniň berlen gönüburçly koordinatalar sistemasynyň özgertmelerinden durýandygy şeýle subut edilýär.

B e l l i k. Goý, R^n giňişligiň $\overrightarrow{Y*} = A\overrightarrow{X*}$ özgertmesi A matrisa arkaly berlen we Δ (A)$\neq 0$ bolsun. Onda belli bolşy ýaly, A^{-1} ters matrisa bardyr we $\overrightarrow{Y*} = A\overrightarrow{X*}$ özgertme $\overrightarrow{X*} = A^{-1}\overrightarrow{Y*}$ görnüşde ýazylyp bilner. $\overrightarrow{X*} = A^{-1}\overrightarrow{Y*}$ çyzykly özgertmä berlen f özgertmä ters özgertme diýilýär we f^{-1} bilen belgilenýär.

§ 3. Öwürmeleriň kompozisiýasy

Eger Q wektor giňişligi A matrisa arklay P wektor giňişligine f çyzykly öwrülýän bolsa, P wektor giňişligi B matrisa arkaly R wektor giňişligine q çyzykly öwrülýän bolsa, onda biz Q giňişliginiň R giňişlige bolan käbir h öwürmesini alarys.

Öwürmeleriň yzygiderli ýerine ýetirilmegine *öwürmeleriň kompozisiýasy* diýilýär we $h = qof$ bilen belgilenilýär. Q giňişligiň R giňişlige bolan h öwürmesiniň çyzykly öwürme boljakdygyny subut edeliň we onuň matrisasyny A we B matrisalaryň üsti bilen aňladalyň.

Goý, Q giňişligiň islendik $\vec{X}$ wektorynyň P giňişligindäki şekili $\vec{Y}$ wektor bolsun, ýagny

$$\overrightarrow{Y*} = A\overrightarrow{X*} \qquad (8-13)$$

bolsun. P giňişlikdäki erkin $\overrightarrow{Y*}$ wektoryň R giňişlikdäki şekili $\vec{Z}$ wektor, ýagny

$$\vec{Z}^* = B\vec{Y}^* \qquad (8-14)$$

bolsun. P, Q, R giňişlikleriň ölçegleri degişlilikde n, m, r sanlara deň diýeliň, onda $A = \{a_{ij}\}_n^m$, $B = \{b_{ij}\}_m^r$ tertipli matrisalar bolar. (8 = 13) we (8 – 14) deňliklerden $\overrightarrow{Z*} = BA\overrightarrow{X*}$ alarys. Diýmek, Q giňişligi R giňişlige öwürýän h öwürme çyzykly öwürme bolýar we ol $\overrightarrow{Z*} = BA\overrightarrow{X*}$ deňlik bilen berilýär. Ol öwürmäniň matrisasy bolsa BA matrisa deň bolýar.

1 – n j i m y s a l.

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ y_2 = x_1 - 2x_2, \\ y_3 = 7x_2 - 4x_3. \end{cases} \qquad \overrightarrow{Y*} = A\vec{X}^*$$

we

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 + y_2, \\ z_2 = y_2 + 2y_3, \\ z_3 = y_1 - 5y_3; \end{cases} \qquad \overrightarrow{Z*} = B\overrightarrow{Y*}$$

çyzykly öwürmeler berlen, z_1, z_2, z_3 näbellileri x_1, x_2, x_3 arkaly aňladýan çyzyky öwürmäni ýazmaly.
Ç ö z ü l i ş i. Berlen öwürmeleriň matrisalary

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

Gözleýän öwürmämiziň matrisasy $H = BA$ bolýar:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 6 \\ 1 & 12 & -8 \\ 5 & -36 & 23 \end{pmatrix}$$

Bu ýerden

$$\overrightarrow{Z*} = H\overrightarrow{X^*} \text{ ýa –da } \begin{cases} z_1 = 11x_1 - 4x_2 + 6x_3 \\ z_2 = x_1 + 12x_2 - 8x_3 \\ z_3 = 5x_1 - 36x_2 + 23x_3. \end{cases}$$

§ 4. Matrisanyň mahsus sanlary we mahsus wektorlary

Goý, $\boldsymbol{f}\ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y}$ ýa – da $\overrightarrow{X} \overset{A}{\Longrightarrow} \overrightarrow{Y}$ $\boldsymbol{R^n}$ giňişligiň öz – özüne bolan çyzykly öwürmesi bolsun. Şeýle öwürmä $\boldsymbol{R^n}$ giňişligi özgertmek diýipdik. Eger –de R^n giňişlikde $f\ \vec{X} = \lambda \vec{X}$ deňligi kanagatlandyrýan $\vec{X}$ wektor bar bolsa, onda ol wektora f özgertmäniň *mahsus wektory*, λ sana bolsa f özgertmäniň *mahsus sany* diýilýär. f özgertme A matrisa arkaly doly kesgitlenýändigi sebäpli λ sana A matrisanyň mahsus sany we $\vec{x}$ wektora A matrisanyň λ mahsus sanyna degişli bolan mahsus wektory diýilýär. şeýle mahsus sanlar we wektorlar barmyka, eger bar bolsa, olary nähili tapmaly?

Bu meseläni çözmäge girişeliň. $f\ \vec{X} = \lambda \vec{X}$ deňligi $\overrightarrow{AX}^* = \lambda \vec{X}$ ýa – da $(A - \lambda E)\ \vec{X}^* = 0$ görnüşde ýazalyň. Goý, $A = \{a_{ij}\}_n^n$; $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bolsun; onda ýokardaky deňlik

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \ .... \ + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ .... \ + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ .... \ + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ýa – da

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ ... \ + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ ... \ + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ ... \ + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(8 – 15)}$$

birjynsly deňlemeler sistemasy görnüşde ýazylýar. Bu sistemasynyň triwial däl çözüwiniň bolmagy üçin onuň kesgitleýjisiniň nula deň bolmagy zerurdyr, ýagny

$$\Delta(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \; .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \; ... & a_{2n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} \; .... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \mathbf{(8-16)}$$

Bu deňlik **λ** görä ***n*** – nji derejeli deňleme diýilýär. Oňa ***A*** matrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesi diýilýär. Diýmek, matrisanyň mahsus sanlary onuň häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri bolmaly. Şoňa görä – de, olaryň sany ***n*** – den köp bolup bilmez. Goý, $\boldsymbol{\lambda_0}$ harakteristik deňlemäniň köki bolsun, $\boldsymbol{\lambda_0}$ mahsus sana degişli mahsus wektory tapmak üçin $\boldsymbol{\lambda_0}$ sany (8 – 15) sistemada **λ** - niň ýerine goýup täze

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ ... + a_{1n}x_n + 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_0)x_2 + \ ... + a_{2n}x_n = 0 \\ . \; . \\ . \; . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ ... + (a_{1n}-\lambda_0)x_n = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{(8-17)}$$

sistemany alarys.

Goý, $\boldsymbol{x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o}$ (8 – 17) sistemanyň çözüwleriniň biri bolsun. Onda $\overrightarrow{X}$ = { $\boldsymbol{x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o}$ } wektor ***A*** matrisanyň $\boldsymbol{\lambda_0}$ mahsus sanyna degişli bolan mahsus wektory bolar. (8 – 17) sistemany birjynsly bolany sebäpli, onuň çözüwler köplügi çyzykly giňişligi emele getirýär. Ol giňişligiň ölçegi ***A*** matrisanyň tertibine baglydyr. Eger ***A*** matrisa ***n*** tertipli bolsa,

giňişligiň ölçegi birden $\boldsymbol{n}$ – e çenli sanlaryň islendigi bolmagy mümkin.
Mysal üçin, 3 – nji tertipli matrisalara garalyň.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisa üçin islendik $\overrightarrow{X}$ = {$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$} wektor mahsus wektordyr. ($\overrightarrow{AX^*} = \mathbf{2}\overrightarrow{X^*}$). Diýmek, 2 mahsus sana degişli bolan mahsus wektorlaryň giňişliginiň ölçegi 3 – e deňdir.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrisanyň mahsus sanlaryny tapyň:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3 - \lambda)^2(4 - \lambda) = 0,$$

bu ýerden $\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 4}$ mahsus sanlardyr, $\boldsymbol{\lambda_1 = 3}$ mahsus sana degişli mahsus wektorlary tapmak üçin (8 – 17) sistemany düzeliň.

$$\begin{cases} (3-3)x_1 = 0 \\ (3-3)x_2 = 0 \\ (4-3)x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu ýerden $\overrightarrow{X_1}$ **= {1, 0, 0},** $\overrightarrow{X_2}$ **= {0, 1, 0}** mahsus wektorlary taparys. Galan mahsus wektorlar şu iki wektoryň çyzykly kombinasiýasyndan ybarat bolany üçin degişli çyzykly giňişligiň ölçegi 2 bolar. Şeýle hem $\boldsymbol{\lambda_2}$ = **4** sana degişli çyzykly giňişligiň ölçegiň bire deň bolmagy aýdyňdyr. ***A*** matrisa hakyky bolanda hakyky mahsus sana hakyky çyzykly wektor, kompleks mahsus sana kompleks mahsus wektor (ýagny koordinatalaryň käbiri kompleks san bolan wektor) degişli bolar. Dogrudan hem, eger $\boldsymbol{\lambda_0}$ kompleks mahsus san bolsa we oňa $\overrightarrow{x_0}$ hakyky mahsus wektor degişli bolsa, onda bir wagtda

$\overrightarrow{AX}{*}=\boldsymbol{\lambda_0}\overrightarrow{X_0}{*}$, $\quad A\vec{X}_0^{*}=\overline{\lambda}_0\vec{X}_0$ deňlikler we şol esasda

$\lambda_0\vec{X}_0^{*}=\overline{\lambda}_0\vec{X}_0^{*}$ deňlik ýerine ýeterdi. Bu ýerde $\boldsymbol{\lambda_0}$, $\overline{\lambda}_0$ sanlar kompleks çatyrymly sanlardyr. $\overrightarrow{X_0}\neq \mathbf{0}$ bolany üçin, soňky deňlikden $\boldsymbol{\lambda_0}=\overline{\lambda}_0$ ýa – da $\boldsymbol{\lambda_0}$ sanyň hakykylygy gelip çykýar. Indi örän möhüm teoremalaryň birini subut etmäge çalyşalyň. Goý, $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_n^n$ matrisa berlip $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$ onuň mahsus sanlary $\overrightarrow{\tau_1}, \overrightarrow{\tau_2}, \ldots, \overrightarrow{\tau_n}$, - şol sanlara degişli mahsus wektorlar bolsun.

1 – n j i t e o r e m a. ***Eger*** $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$ ***sanlar hakyky we dürli bolsa, onda A matrisanyň şol sanlara degişli*** $\overrightarrow{\tau_1}, \overrightarrow{\tau_2}, \ldots, \overrightarrow{\tau_n}$, ***wektorlary çyzykly baglanyşyksyz wektorlardyr.***

Teoremany tersinden subut edeliň, ýagny olaryň arasynda çyzykly baglanyşyk bar diýeliň. Onda hemmesi nula deň bolmadyk käbir α_i (i = 1, 2, ..., n) sanlar üçin

$$\alpha_1\vec{\tau}_1+\alpha_2\vec{\tau}_2+\ldots+\alpha_n\vec{\tau}_n=0 \qquad \textbf{(8 – 18)}$$

deňligi alarys. Onda transponirlenen (8 – 18) deňligiň iki bölegini hem ***A*** matrisa çepden yzygiderli (***n*** – **1**) gezek köpeldip we $\overrightarrow{A\tau_i}$ * = $\boldsymbol{\lambda_i}\overrightarrow{\tau_i}$ * deňligi göz öňünde tutup taparys:

$$\begin{cases} \alpha_1\overrightarrow{\tau_1}*+\alpha_2\overrightarrow{\tau_2}*+\ \ldots\ +\alpha_n\overrightarrow{\tau_n}*=0 \\ \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{\tau_1}*+\alpha_2\lambda_2\overrightarrow{\tau_2}*+\ \ldots\ +\alpha_n\ \lambda_n\overrightarrow{\tau_n}*=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\lambda_1^{\ n-1}\overrightarrow{\tau_1}*+\alpha_2\lambda_2^{\ n-1}\overrightarrow{\tau_2}*+\ \ldots\ +\alpha_n\lambda_n^{\ n-1}\overrightarrow{\tau_n}*=0 \end{cases}$$

Bu sistemanyň koeffisiýentlerinden düzülen

$$\boldsymbol{W} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{\ n-1} & \lambda_2^{\ n-1} & \ldots & \lambda_n^{\ n-1} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjä W a n d e r m o n d y ň k e s g i t l e ý j i s i diýilýär we $\boldsymbol{\lambda_1}$**,** $\boldsymbol{\lambda_2}$**, …,** $\boldsymbol{\lambda_n}$ sanlar özara deň bolmanlarynda nuldan tapawutlydyr. Şoňa görä ýokarky sistemadan $\alpha_1\overrightarrow{\tau_1}$ = 0, $\alpha_2\overrightarrow{\tau_2}$ = 0, . . . $\alpha_n\overrightarrow{\tau_n}$ = 0 alarys. $\overrightarrow{\tau_i}$ ≠ 0 (*i* = 1, 2, . . . , *n*) bolany sebäpli bu deňliklerden $\alpha_i = o \quad i = (1, 2, \ldots, n)$ gelip çykýar. Bu bolsa α_i sanlaryň hemmesiniň nula deň däldigine garşy gelýär. Alynan garşylyk hem teoremany subut edýär.

N e t i j e. *Eger* ***n*** *tertipli* ***A*** *matrisanyň mahsus sanlary hakyky we dürli bolsa, onuň mahsus wektorlary* ***n*** *ölçegli çyzykly giňişligiň bazisi bolup biler.*
Indi elementleri hakyky bolan simmetrik matrisalaryň mahsus sanlaryny we wektorlaryny öwrenmäge girişeliň.

T e o r e m a. ***Simmetrik matrisanyň mahsus sanlary hakyky sanlardyr.***
S u b u d y. Goý, λ kompleks san ***A*** simmetrik matrisanyň mahsus sany we $\overrightarrow{X}$ şoňa degişli mahsus wektor bolsun. Onda $\boldsymbol{A}\overrightarrow{X}^* = \lambda\overrightarrow{X}^*$ we $\boldsymbol{A}\overline{\overrightarrow{X}}^* = \bar{\lambda}\overline{\overrightarrow{X}}^*$ deňlikler ýerine ýeter. Bu ýerde $\overline{\overrightarrow{X}} = \{\overline{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\}$; harplaryň üstündäki kese çyzyk kompleks çatyrymly sany aňladýar.
Deňlikleriň birinjisini $\overline{\overrightarrow{X}}$ wektora, ikinjisini $\overrightarrow{X}$ wektora çepden köpeldip $\overline{\overrightarrow{X}}\boldsymbol{A}\overrightarrow{X}^* = \lambda\overline{\overrightarrow{X}}\,\overrightarrow{X}^*$ we $\overrightarrow{X}\boldsymbol{A}\overline{\overrightarrow{X}}^* = \bar{\lambda}\,\overrightarrow{X}\,\overline{\overrightarrow{X}}$ deňlikleri alarys. ***A*** matrisa simmetrik bolany sebäpli, deňlikleriň çep bölekleri özara deň bolar. Diýmek, olaryň sag bölekleri hem özara deňdir, ýagny $\overline{\lambda\overrightarrow{X}}\,\overrightarrow{X}^* = \bar{\lambda}\,\overrightarrow{X}\,\overline{\overrightarrow{X}}^*$, Emma

$$\overline{\overrightarrow{X}}\ \overrightarrow{X}^{*}=\left(\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_n}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2=\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right)\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \overline{x} \end{pmatrix}=\overrightarrow{X}*\overline{\overrightarrow{X}}\neq 0$$

bolany üçin, bu ýerden $\lambda=\overline{\lambda}$ gelip çykýar.

Alnan deňlik **λ** san kompleks sandyr diýen şerte garşy gelýär. Diýmek, **λ** mahsus san hakyky sandyr.
B e l l i k. Matrisanyň mahsus sanlary onuň häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri bolandygy üçin subut edilen teoremany “Simmetrik matrisanyň häsiýetlendiriji deňlemesiniň kökleri hakyky sanlardyr ”diýip hem aýdyp bileris.

2 – n j i t e o r e m a. ***Eger A matrisa simmetrik we onuň häsiýetlendiriji köpagzasynyň kökleri*** $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n}$ ***dürli bolsalar, onda olara degişli*** $\overrightarrow{\tau_1}$, $\overrightarrow{\tau_2}$, . . . , $\overrightarrow{\tau_n}$ ***wektorlar ortogonal wektorlardyr.***

Hakykatdan – da

$$A\vec{\tau}_i^{\,*}=\lambda_i\vec{\tau}^{\,*}{}_i\,,$$
$$A\vec{\tau}^{\,*}{}_j=\lambda_j\vec{\tau}^{\,*}{}_j\,.$$

Bu deňlikleriň birinjisini $\vec{\tau}_j$ wektora, ikinjisini $\vec{\tau}_i$ wektora çepden köpeldip, biri – birinden aýralyň. Şonda $\overrightarrow{\tau_i}\ \overrightarrow{\tau_j}\,^* = \overrightarrow{\tau_i}\ \overrightarrow{\tau_j}\,^*$ boljakdygyny göz öňünde tutup

$$\mathbf{0 = (}\lambda_i \ \mathbf{-}\lambda_j\ \mathbf{)}\ \overrightarrow{\tau_i}\ \overrightarrow{\tau_j}^{\,*}$$

alarys. Çünki simmetrik ***A*** matrisa üçin $\overrightarrow{\tau_i}\ \boldsymbol{A}\ \overrightarrow{\tau_j}\,^* = \overrightarrow{\tau_j}\ \boldsymbol{A}\ \overrightarrow{\tau_i}\,^*$ toždestwo ýerine ýetýär. Şerte görä $\boldsymbol{i \neq j}$ bolanda, $\boldsymbol{\lambda_i \neq \lambda_j}$.
Diýmek, $\mathbf{(}\overrightarrow{\tau_i}\ \mathbf{,}\ \overrightarrow{\tau_j}\ \mathbf{)\ =\ 0,}$ ýagny $\overrightarrow{\tau_i}$ we $\overrightarrow{\tau_j}$ wektorlar ortogonal wektorlardyr.

N e t i j e. *Simmetrik* ***A*** *matrisanyň* $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}$ *mahsus sanlary dürli bolsa, onda olara degişli mahsus wektorlar* ***R*** *giňişligiň ortogonal bazisini emele getirer.*
Ýokarda alnan netijeden has güýçli aşakdaky teklibi hem subut etmek bolardy.

T e o r e m a. ***Islendik n tertipli simmetrik matrisanyň özara ortogonal n mahsus wektory bardyr.***
Teoremany subutsyz kabul ederis. Ýöne ortogonal mahsus wektorlaryň (8 – 15) sistemadan tapylýandygyny belläp geçmek möhümdir.
Berlen simmetrik matrisany diagonal görnüşe getirmek meselesine geçeliň. Düşnüklilik üçin üçünji tertipli matrisalara garamak bilen çäkleneris. Goý,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisanyň **λ1, λ2, λ3** mahsus sanlary. Olara degişli $\overrightarrow{\tau_1}$, $\overrightarrow{\tau_2}$, $\overrightarrow{\tau_3}$ wektorlary normirläliň, ýagny olary öz uzynlyklaryna böleliň:

$$\overrightarrow{\tau_1^{\ 0}} = \frac{\overrightarrow{\tau_1}}{\left|\overrightarrow{\tau_1}\right|}; \quad \overrightarrow{\tau_2^{\ 0}} = \frac{\overrightarrow{\tau_2}}{\left|\overrightarrow{\tau_2}\right|}; \quad \overrightarrow{\tau_3^{\ 0}} = \frac{\overrightarrow{\tau_3}}{\left|\overrightarrow{\tau_3}\right|}.$$

Alnan wektorlar ýene – de şol **λ1, λ2, λ3** sanlara degişli mahsus wektorlar bolarlar we olaryň uzynlyklary bire deň bolar.

Goý, $\overrightarrow{\tau_1^{\ 0}}$ = $\{b_{11}, b_{21}, b_{31}\}$, $\overrightarrow{\tau_2^{\ 0}}$ = $\{ b_{12}, b_{22}, b_{32}\}$, $\overrightarrow{\tau_3^{\ 0}}$ = $\{b_{13}, b_{23}, b_{33}\}$ bolsun. $\overrightarrow{\tau_1^{\ 0}}$ $\overrightarrow{\tau_2^{\ 0}}$ $\overrightarrow{\tau_3^{\ 0}}$ wektorlaryň birlik wektorlar hem – de özara ortogonal wektorlar bolanlary üçin aşakdaky deňlikler alarys:

$\boldsymbol{b^2_{11} + b^2_{21} + b^2_{31} = 1; b^2_{12} + b^2_{22} + b^2_{32} = 1;}$

$\boldsymbol{b^2_{13} + b^2_{23} + b^2_{33} = 1}$

$\boldsymbol{b_{11} b_{12} + b_{21} b_{22} + b_{31} b_{32} = 0; b_{11} b_{13} + b_{21} b_{23} + b_{31} b_{33} = 0}$

$\boldsymbol{b_{12} b_{13} + b_{22} b_{23} + b_{32} q_{33} = 0.}$

Bu bolsa

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

matrisa ortogonal matrisa, ýagny $B^* = B^{-1}$ diýmekdir. Indi $B^{-1}AB$ matrisany tapmaga çalyşalyň. $A\vec{\tau_i}^{\,*} = \lambda \vec{\tau}_i$ $\quad$ $i = 1, 2, 3$ deňligi ulanyp tapýarys.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} =$$

$$=B \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$B^{-1}AB = B^{-1}B \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Umuman islendik kwadrat A matrisa üçin B matrisa tapylýan bolsa we $B^{-1}AB$ = diag (λ_1, λ_2, λ_3) bolsa onda B matrisa A matrisany diagonal görnüşe getirýän matrisa diýilýär.

Diýmek, ýokarda alan netijämiz esasynda “islendik simmetrik matrisa ortogonal matrisanyň kömegi bilen diagonal görnüşe getirilýär” diýen teoremany formulirläp bileris.

B e l l i k: Islendik n tertipli simmetrik däl matrisa hem özara baglanyşykly bolmadyk mahsus wektorlary bar ýagdaýynda şolardan düzülen, ýagny mahsus wektorlaryň koordinatalary degişlilikde birinji sütüniň, ikinji sütüniniň we ş.m. elementleri edip düzülen matrisanyň kömegi bilen diagonal görnüşe getirilýär.

A matrisa diagonal görnüşe getirilende diagonal matrisanyň elementleriniň A matrisanyň mahsus sanlaryndan ýa –da onuň häsiýetlendiriji deňlemesiniň köklerinden durýandygyny belläp geçmek zerurdyr.

2 – n j i m y s a l. Aşakdaky matrisany diagonal görnüşe getirmeli.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ç ö z ü l i ş i. ***A*** matrisanyň harakteristik deňlemesini ýazalyň.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ýa – da $\boldsymbol{\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0.}$
Bu deňlemäniň kökleri $\boldsymbol{\lambda_1 = 6; \lambda_2 = \lambda_3 = -3.}$ ***A*** matrisanyň $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ mahsus sanlaryna degişli bolan $\overrightarrow{\tau_1} = \{\boldsymbol{b_{11}, b_{21}, b_{31}}\}$; $\overrightarrow{\tau_2} = \{\boldsymbol{b_{12}, b_{22}, b_{32}}\}$; we $\overrightarrow{\tau_3} = \{\boldsymbol{b_{13}, b_{23}, b_{33}}\}$ mahsus wektorlaryny tapalyň.

$$\boldsymbol{A}\,\overrightarrow{\tau_1}\,^{*} = \boldsymbol{\lambda_1}\,\overrightarrow{\tau_1}\,^{*}$$

ýa – da

$$\begin{cases} -5b_{11} + 2b_{21} - 4b_{31} = 0 \\ 2b_{11} - 8b_{21} - 2b_{31} = 0 \\ -4b_{11} - 2b_{21} - 5b_{31} = 0 \end{cases}$$

sistemany alýarys. Bu sistemanyň matrisasynyň rangy $r = 2$. Şoňa görä – de bu sistemanyň birinji iki deňligini b_{11} we b_{12} sanlara görä çözüp alarys:

$$b_{11} = -b_{31};\ b_{21} = -\frac{1}{2}b_{31}.$$

b_{31} sana erkin baha bereliň. Goý, $b_{31} = 2$ bolsun, onda $\overrightarrow{\tau_1} = \{-2; -1; 2\}$ bolýar. $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$ bolanda $\overrightarrow{\tau_2}$ we $\overrightarrow{\tau_3}$ wektorlary tapmak üçin

$$\begin{cases} 4b_{1i} + 2b_{2i} - 4b_{3i} = 0 \\ 2b_{1i} + b_{2i} - 2b_{3i} = 0 \\ -4b_{1i} - 2b_{2i} + 4b_{3i} = 0 \end{cases}$$

sistemasyny alarys. (bu ýerde $i = 2,3$). Bu sistemanyň matrsasynyň rangy $r = 1$. Şoňa görä – de onuň islendik deňlemesinden $b_{ij}(i = 1,3;\ j = 1, 2, 3)$ sanlaryň birini beýleki ikisi arkaly kesgitläris. $i = 2$ bolanda bu sistemadan $\overrightarrow{\tau_2}$ wektoryň proýeksiýalary (koordinatalary) $2b_{12} + b_{22} - 2b_{32} = 0$ deňlikden kesgitlenýär. $b_{22} = 2$; $b_{23} = 1$ erkin bahalary berip $b_{21} = -2$ alarys. $\overrightarrow{\tau_2} = \{-2; 2; -1\}$ bolýar. $\overrightarrow{\tau_3}$ wektoryň koordinatalaryny $2b_{13} + b_{23} - 2b_{33} = 0$ bolar ýaly hem – de ol $\overrightarrow{\tau_2}$ wektora ortogonal bolar ýaly edip, ýagny

$$\overrightarrow{\tau_2} \cdot \overrightarrow{\tau_3} = -2b_{13} + 2b_{23} - b_{33} = 0$$

bolar ýaly edip kesgitläliň. Şonda $b_{33} = 2$ goýup taparys:

$$\overrightarrow{\tau_3} = \{1; 2; 2\}.$$

Biz simetrik $\boldsymbol{A}$ matrisanyň sepli kökleri bolanda hem sany matrisanyň tertibine deň bolan ortogonal mahsus wektorlaryny tapdyk. $\boldsymbol{B}$ we $\boldsymbol{B}^{-1}$ matrisalary düzeliň.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Bu ýerden

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad \boldsymbol{B}^{-1} =. \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

§ 5. Kwadratik formalar

K e s g i t l e m e. **x_1, x_2, . . . , x_n üýtgeýänlerden düzülen we her bir agzasynyň üýtgeýänleriniň dereje görkezijileriniň jemi 2–ä deň bolan birjynsly köpagza şol üýtgeýänleriň kwadratik formasy diýilýär.**

x_1, x_2, x_3 üýtgeýänleriň kwadratik formasy

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

Görnüşde ýazylýar. Bu ýerde $\boldsymbol{a_{11}}$; $\boldsymbol{a_{22}}$; $\boldsymbol{a_{33}}$; $\boldsymbol{a_{12}}$; $\boldsymbol{a_{13}}$; $\boldsymbol{a_{23}}$ berlen käbir hemişelik sanlar. Olara *kwadratik formanyň koeffisiýentleri* diýilýär.

Umumy görnüşde kwadratik forma $\boldsymbol{F} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ görnüşde ýazylýar we $\boldsymbol{a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \ldots, n}$ kabul edilýär. Şol koeffisiýentlerden düzülen simmetrik

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrisa *kwadratik formanyň matrisasy* diýilýär.Kwadratik formany aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{x_1} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \right) + \boldsymbol{x_2} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \right) + \ldots + \boldsymbol{x_n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right).$$

Ýaýdaky aňlatmalary degişlilikde

$$y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

belgiläp F formany

$$F = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

görnüşde ýazyp bileris.

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \ \vec{Y}^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = A\vec{X}^*$$

belgiläp

$$F = \vec{X}\vec{Y}^* = \vec{X} A \vec{X}^* \qquad \textbf{\textit{(8 – 19)}}$$

alarys ýa –da ýaýbaň görnüşde

$$\boldsymbol{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ \ldots \ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ \ldots \ a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(8 – 20)}$$

Berlen ***F*** kwadratik formany ýönekeýleşdirmäge girişeliň.

Goý,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \ b_{12} \ \ldots \ b_{1n} \\ b_{21} \ b_{22} \ \ldots \ b_{2n}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} \ b_{n2} \ \ldots \ b_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa ***A*** matrisanyň mahsus wektorlaryndan düzülen ortogonal matrisa bolsun. $\overrightarrow{X}$ * = $B\overrightarrow{Y}$ * ýa – da

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + ... + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + ... + b_{2n}y_n \\ .... \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + ... + b_{nn}y_n \end{cases}$$

özgertme geçireliň we bu özgertmede ***F*** formanyň nähili görnüşe geçjekdigine garalyň. (8 – 19) aňlatmada $\overrightarrow{X}$ - iň bahasyny goýup taparys:

$$F = \overrightarrow{Y}\, B^*AB\, \overrightarrow{Y^*}\ .$$

B matrisa ortogonal bolany üçin ***B* = B***$^{-1}$ we şoňa görä – de ***B*AB = B***$^{-1}$***AB =*** diag ($\lambda_1, \lambda_2, . . . , \lambda_n$) bolar.

Diýmek,

$$\vec{F} = \vec{Y} \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, . . . , \lambda_n)\ \vec{Y}^*$$

ýa – da

$$F = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \qquad (8 – 21)$$

alarys. (8 – 21) görnüşe kwadratik formanyň kanonik görnüşi diýilýär. şeýlelikde, islendik kwadratik forma ortogonal özgertmäniň kömegi bilen kanonik görnüşe getirilýär diýen teoremany subut etdik.

Indi ikinji tertipli egri çyzyklaryň we üstleriň deňlemelerini kanonik görnüşe getirmekden käbir mysallara garalyň.

3 - n j i m y s a l. $\mathbf{5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 = 5}$ deňlemäni koordinat oklaryny parallel süýşürmek we käbir burça aýlamak arkaly kanonik görnüşe getireliň.

Ç ö z ü l i ş i:

$$F = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Kwadratik formanyň matrisasy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A matrisanyň mahsus sanlaryny we mahsus wektorlaryny taplyň.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \mathbf{0} \text{ ýa –da } \mathbf{(5 - \lambda)^2 = 16;\ \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 9.}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{0},\ \overrightarrow{\tau_1} = \mathbf{\{1;\ -1\}}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ deňlikden } \overrightarrow{\tau_2}\ \mathbf{\{1;\ \ 1\}},$$

$$\overrightarrow{\tau_1^{\,0}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \overrightarrow{\tau_2^{\,0}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Diýmek,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ortogonal matrisanyň kömegi bilen ***A*** matrisa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ diagonal görnüşe

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

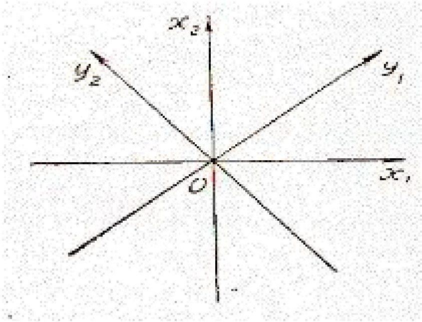
$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

ortogonal özgertmäniň kömegi bilen bolsa ***F*** kwadratik forma

$$(y_1\ y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 9y_2^2$$

kanonik görnüşe getririlýär.

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2)$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(- y_1 + y_2)$ özgertme x_1Ox_2 koordinatalar sistemasyndan koordinatalar başlangyjynyň töwereginde $\varphi = 45^o$ burça aýlanyp, täze y_1Oy_2 sistema geçmek diýmekdir. (78 – nji sur.).



78 – nji surat.

Berlen egri çyzygyň deňlemesini

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}} \text{ we } \boldsymbol{x_2} = \frac{-y_1 + y_2}{\sqrt{2}}$$

deňlikleri ulanyp, täze koordinatalar sistemasyna görä ýazalyň:

$$\boldsymbol{y_1 + 9y_2^2 - 3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) \boldsymbol{- 4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) \boldsymbol{- 5 = 0}$$

ýa – da

$$\boldsymbol{y_1^2 + 9y_2^2 +} \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{y_1 -} \frac{7}{\sqrt{2}}\boldsymbol{y_2 - 5 = 0.}$$

Soňky deňlikden iki agzanyň doly kwadratlaryny bölüp ýazalyň:

$$\left(y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 9\left(y^2 - \frac{7}{18\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 9\left(\frac{7}{18\sqrt{2}}\right)^2 = 5.$$

Indi

$$\overline{y_1} = y_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad \overline{y_2} = y_2 - \frac{1}{18\sqrt{2}}$$

bilen bellesek, ýagny y_1Oy_2 sistemasynyň koordinata oklarynyň ugurlaryny üýtgetmezden, onuň başlangyjjyny $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};\ \frac{7}{18\sqrt{2}}\right)$ nokada göçürsek, alarys.

$$\bar{y}_1^{\,2} + 9_1\bar{y}_2^{\,2} = \frac{209}{36}$$

Soňky deňleme ellipsiň deňlemesidir.

4 – n j i m y s a l.

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + \sqrt{7}\,x_1 = 4$$

üstüň deňlemesini kanonik görnüşe getirmeli.

Ç ö z ü l i ş i.

$$F = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

kwadratik formanyň matrisasy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisanyň mahsus sanlary **$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_2 = -3$,** mahsus wektorlary $\overrightarrow{\tau_1}$ **{- 2; -1; 2},** $\overrightarrow{\tau}$ **={-2, 2; -1},** $\overrightarrow{\tau_3}$ **{1; 2; 2}.** Diýmek,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ortogonal matrisanyň kömegi bilen ***A*** matrisa

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal görnüşe getirilýär. Diýmek,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\left(-2y_1 - 2y_2 + y_3\right) \\ x_2 = \frac{1}{3}\left(-y_1 + 2y_2 + 2y_3\right) \\ x_3 = \frac{1}{3}\left(2y_1 - y_2 + 2y_3\right) \end{cases} \qquad (\alpha)$$

ortogonal özgertme ***F*** kwadratik formany

$$\boldsymbol{F = 6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2}$$

kanonik görnüşe getirer. Şu ýerde (**α**) özgertmäniň ***$Ox_1x_2x_3$*** dekart koordinatalar sistemasyndan ***$O\ y_1\ y_2\ y_3$*** dekart koordinatalar sistemasyna geçmegi aňladylýandygyny belläp geçmek zerurdyr. ***x_1*, *x_2*, *x_3*** ululyklaryň ***y_1*, *y_2*, *y_3*** ululyklar arkaly aňladylýan bahalaryny üstüň berlen deňlemesine goýup alarys:

$$\mathbf{6y_1^2 - 3y_2^2 - 3y_3^2 - 2y_1 - 2y_2 + y_3 - 4 = 0.}$$

Bu deňlikden iki agzanyň doly kwadratlaryny bölüp aýryp

$$\mathbf{6}\left(y_1 - \frac{1}{6}\right)^2 - 3\left(y_2 + \frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(y_3 - \frac{1}{6}\right)^2 = 4 + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

we soňra $\overline{y_1} = y_1 - \frac{1}{6}; \overline{y_2} = y_2 + \frac{1}{3}; \overline{y_3} = y_3 - 6$ bilen belgilesek, ýagny koordinatalar ***O*** (***0***, ***0***, ***0***) başlangyjyny oklaryň ugruny üýtgetmezden, ***O`*** $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$ nokada göçürsek

$$\mathbf{6}\,\overline{y}_1^2 - \mathbf{3}\,\overline{y}_2^2 - \mathbf{3}\,\overline{y}_3^2 = \frac{15}{4}$$

ýa –da

$$\frac{\overline{y_1}^2}{\frac{15}{24}} - \frac{\overline{y_2}^2}{\frac{30}{24}} - \frac{\overline{y_3}^2}{\frac{30}{24}} = 1$$

bir boşlukly aýlanma giperbolidi alarys.

IX bap

PROÝEKTIW GEOMETRIÝANYŇ ESASY DÜŞÜNJELERI

Bu geometriýanyň proýektiw ady onuň easy düşünjeleriniň, ideýalarynyň proýektirlemek operasiýalaryny öwrenmekden gelip çykanyny aňladýar.

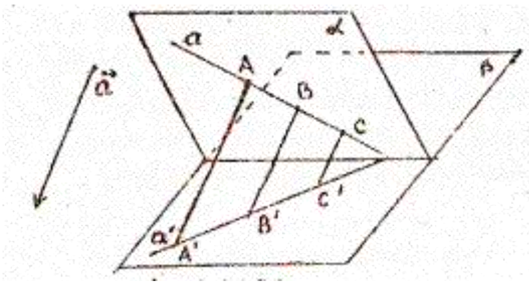
Elbetde, ol ideýalaryň ösüp täze bir dissipluna öwrülmegine köp wagtyň hem köp alymlaryň tutumly işleriniň gerek bolandygy öz-özünden düşnüklidir. Belli bolşy ýaly fransuz alymlarynyň Ž. Dezargyň, (1639 ý.) B Paskalyň (1640 ý.) we H. B. Ponseleniň (822ý.) işleri proýektiw geometriýanyň gözbaşy hasaplanýar. Emma bu geometriýanyň easy düşünjesi bolan perspektiwa degişliligi ýokarda ady tutulanlardan has ozal meşhur italýan alymy Leonardo da Binçiniň işlerinde gabat gelýär.

Beýle bolmagynyň düýp sebäbini perspektiwa degişliliginiň şekillendiriş sungatynyň easy guraly bolmagyndan hem-de beýik italýan alymynyň şol sungatyň düýbüni tutanlaryň biridigi bilen düşündirmek bolar.

Bu bölüm proýektiw geometriýanyň esasy düşünjelerini öz içine alýar. Ol esasan uniwersitetiň hem-de pedagogik institutlaryň birinji kurslarynyň studentleri üçin ýazylan bolsa-da onuň sada görnüşde beýan edilmegi, kitapçany mekdeplerde okuwdan daşary işler üçin ulanmaga mümkinçilik berýär.

Esasy düşünjeler.

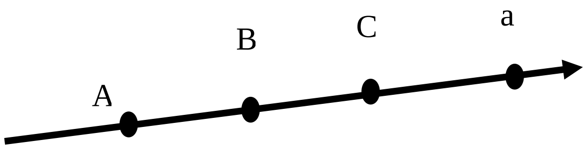
Geometriýanyň baş bölüminde gabat gelýän özgertmelere seredeliň. Olaryň iň ýönekeýi perspektiw-affin özgertmesi. Giňişlikde kesişýän iki α bilen β tekizliklerini hem-de olara parallel bolmadyk käbir $\vec{a}$ wektor alalyň (1-nji çyzgy)



79-nji surat

α tekizligiň A nokadyndan $\vec{a}$ wektora parallel bolan göni geçireliň we onuň β tekizlik bilen kesişýän A' nokadyny alalyň. A nokada nusga, A' nokada şekil diýilýär. Şeýle usul bilen biz α tekizligiň her bir nokadyna β tekizligiň ýeke-täk nokadyny degişli ederis. Şeýle degişlilige perspektiw-affin degişliligi diýilýär. Oňa biz α tekizligiň β tekizlige bolan özgertmesi hökmünde hem garap bileris. Indi biz $\vec{\alpha}$ tekizligi β tekizlik bilen kesişme okynyň töwereginde aýlap iki tekizlik gabat geler ýaly edeliň hem-de alnan ýeke-täk tekizlikde A nokada A' nokady, B nokada B' nokady degişli edeliň. Onda biz α tekizligiň öz-özüne bolan perspektiw-affin özgertmesini alarys. Bu özgertmäniň esasy häsiýetlerine garalyň.

Eger $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde göni çyzyk alsak, onda onuň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikdäki $\underset{\sim}{a}.'$ şekili hem göni çyzyk bolar. Bu özgertmäniň kollinearlyk häsiýeti atlandyrylýar. Ondan başga-da, eger A nokat $\underset{\sim}{a}$ gönä degişli bolsa, onuň şekili A' hem $\underset{\sim}{a}.'$ gönä degişli bolar. Diýmek, bir tekizligiň gönüsiniň we nokadynyň özara degişliligi, olaryň ikinji tekizlikdäki şekilleriniň hem özara degişliligini ykrar edýär. Özgertmäniň ikinji häsiýetine seretmek üçin bir gönininiň üstünde ýatan üç nokadyň ýönekeý gatnaşygyny girizeliň.



80-nji surat.

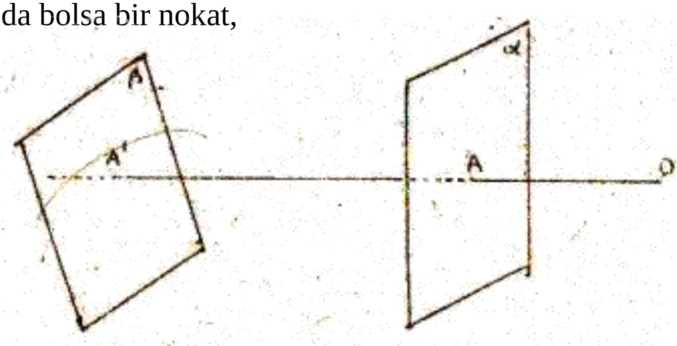
$\underset{\sim}{a}$ gönüniň üstünde A, B, C-üç nokat alalyň. (2-nji çyzgy) we belli bir položitel ugur alalyň. Goý AB, BC ugrukdyrylan kesimler bolsunlar. Onda:

$$\frac{AB}{BC} = (ABC)$$

gatnaşyga üç A, B, C nokadyň ýönekeý gatnaşygy diýilýär. Görnüşi ýaly, ol gatnaşyk C nokat AB kesimiň daşynda ýatsa položitel bolýar, içinde ýatsa-otrisatel bolýar. Goý A', B', C' nokatlar perspektiw-affin özgertmesinde degişlilikde A, B, C nokatlaryň şekilleri bolsun. 1-nji çyzgydan görnüşi ýaly,

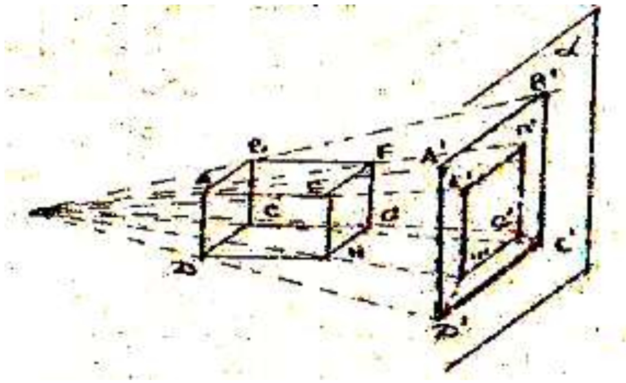
$\frac{AB}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ ýa-da (ABC) = (A' B' C') alarys. Şeýlelikde, biz aşakdaky netijä gelýäris. Perspektiw-affin özgertmede göni çyzyk-göni çyzyga, nokadyň gönä degişliligi nokadyň gönä degişliligine, üç nokadyň ýönekeý gatnaşygy olaryň şekilleriniň ýönekeý gatnaşygyna geçýär. Biz bu üç düşünjä bu özgertmäniň inwariýanty (ýagny üýtgemeýän düşünjesi) diýip bileris. Bulardan başga-da iki gönininiň parallelik düşünjesiniň, parallel kesimleriň gatnaşygynyň saklanýanlygyny anyklamak kyn däl. Bu özgertmäniň esasy häsiýetiniň biri-de α tekizligiň islendik nokadynyň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikde şekiliniň we tersine $\underset{\sim}{\beta}$ tekizligiň islendik nokadynyň α tekizlikde nusgasynyň barlygydyr. Umuman ýokardaky sanalan häsiýetleri saklaýan özgertmelere affin özgertmesi diýilýär. Olaryň köplüginiň topar emele getirýänligi öňden mälim.

Emma ýokarky häsiýetleri saklamaýan degişlilikler (özgertmeler) hem bar. Olaryň biri-de merkezi proeksiýanyň üsti bilen kesgitlenýän perspektiw degişlilikdir. Giňişlikde iki $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizligi alalyň. Goý, O şol tekizliklerde ýatmaýan haýsy-da bolsa bir nokat,



81-nji surat

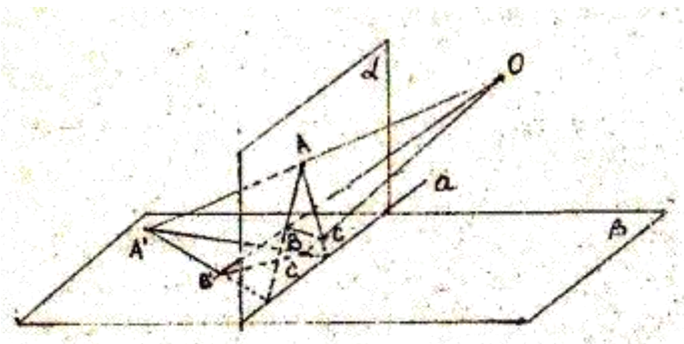
$\underset{\sim}{\alpha}$ tekizligiň islendik A nokadyny alalyň hem-de A we 0 nokatlaryň üstünden göni geçireliň. Ol göni $\underset{\sim}{\beta}$ tekizligi A' nokatda keser. A' nokada A nokadyň perspektiwasy diýilýär. Eger indi $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizligiň islendik A nokadyna onuň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikdäki perspektiwasyny degişli etsek, onda biz perspektiw degişliligi (ýa-da perspektiw özgertmäni) alarys. Perspektiw-affin özgertmesi perspektiw özgertmäniň O nokat tükeniksizlikde bolan hususy ýagdaýydyr. Perspektiw özgertmede $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikleriň paralell bolan ýagdaýyna garalyň. Şeýle halatda $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizligiň islendik A nokadynyň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikde A' perspektiwasynyň barlygy we tersine $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde $\underset{\sim}{\beta}$ tekizligiň islendik A' nokadyna perspektiw özgertmede geçýän A nokadyň barlygy aýdyň. Diýmek, $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ paralell ýagdaýynda perspektiw özgertme özara bir belgili **(**biýektiw**)** özgertmedir. Emma umumy ýagdaýda -$\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikleriň paralell bolmadyk ýagdaýynda-bu beýle däl. O nokatdan (3-nji çyzgy) $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlige paralell tekizlik geçireliň hem-de onuň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlik bilen kesişýän gönüsini b bilen, O nokatdan $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlige paralel tekizlik geçirip, onuň $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlik bilen kesişme gönüsini $\underset{\sim}{a}$ bilen belgiläliň. Gurluşdan aýdyň bolşy ýaly, $\underset{\sim}{a}$ göni $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde ýatýar. Onuň islendik nokadyňdan hem-de O nokatdan geçýän göni $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlige parallel bolýar, we ony kesmeýär. Şeýlelikde, $\underset{\sim}{a}$ gönüniň islendik nokadynyň $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikde perspektiwasy bolmaýar. Şunuň ýaly-da *b* gönüniň islendik nokadynyň şu özgertmede $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikdäki nusgasynyň ýoklugy belli bolýar. Şoňa görä, bu özgertme özara bir belgili özgertme däl. Ony affin özgertmeden tapawutlandyrýan başgada köp häsiýetler bar.



81- nji surat

Ol häsiýetlere düşünmek üçin kubuň ABCD granyna perpendikulýar simmetriýa okunyň üstünde ýatýan O nokat (4-nji çyzgy) we şol grana parallel $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlik alalyň. Kuby O nokatdan $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlige merkezi proektirläliň. Çyzgyda görnüşi ýaly $\angle$BAE $=90^0$, $\angle B'A'E' \neq 90^o$. AE kesim BF kesime parallel, emma $A'E'$ kesimi $B'F'$ kesime parallel däl, AE ≠ $A'E'$. Diýmek, perspektiw özgertmede iki gönininň parallellik häsiýeti, olaryň arasyndaky burç, kesimiň uzynlygy üýtgemeýän (inwariant) häsiet we ululyk däl.

Bu özgertmede hemme häsiýetler we ululyklar şeýlemikä, häsiýetleriň we ululyklaryň üýtgemeýänleri-de barmyka diýen sowalyň ýüze çykmagy mümkin. Olar ýaly häsiýetlerem, ululyklarda bar. Esasy häsiýetleriň biri nokadyň göni çyzygyň üstünde ýatmagy (insidentligi) ýa-da gönininň nokadyň üstünden geçmegidir. Eger $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde A nokat $\underset{\sim}{a}$ gönä insident bolsa, onda $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikdäki olaryň A' we a' perspektiwalary hem insident bolarlar. Ýagny nokadyň gönä insidentlik häsiýeti perspentiw özgertmäniň inwariantydyr. Indi çylşyrymlyrak häsiýetleriň biri bolan Dezargyň teoremasyny subut edeliň.

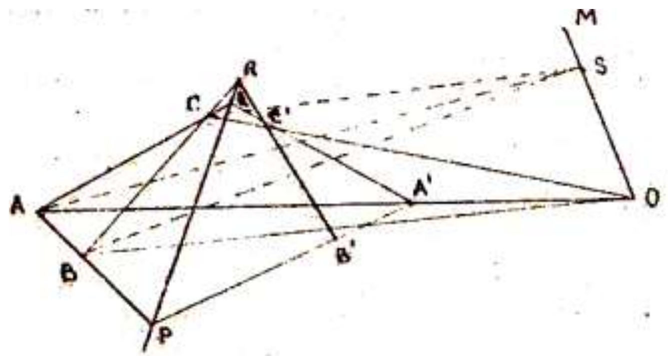


82-nji surat

Goý, kesişýän $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizliklerde iki ABC we degişli $A'B'C'$ üçburçlyk berilsin (5-nji çyzgy).

Teorema. Eger degişli nokatlaryň üstünden geçýän AA', BB', CC' gönüler bir O nokatda kesişseler, onda üçburçlyklaryň degişli taraplarynyň kesişme nokatlary bir gönüde ýatarlar.

Subudy. O nokat we AB gönüniň üstünden tekizlik geçireliň. Ol $A'B'$ gönüniň hem üstünden geçer. Bir tekizlikde ýatýan AB we $A'B'$ gönüler şol tekizlikde ýatýan bir P nokatda kesişerler. Çyzga görä, P nokat $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizliklere-de degişli. Şoňa görä, P nokat olaryň kesişme $\underset{\sim}{a}$ çyzgynyň ňstünde ýatar. Edil şular ýaly. AC we $A'C'$ gönüleriň, BC we $B'C'$ gönüleriň degişlilikde $\underset{\sim}{a}$ gönüniň ňstňnde ýatýan Q, R nokatlarda kesişjegi subut edilýär. Teorema subut edildi. Dezargyň teoremasyna ters teoremany hem subut etmek kyn däl, Ýagny, ABC we $A'B'C'$ üçburçlyklaryň degişli taraplary bir gönüniň üstünde ýatan nokatlarda kesişseler, onda olaryň degişli deperperinden geçýän gönüler bir nokatda kesişýärler. Biz Dezargyň teoremasyny degişli üçburçlyklar aýry tekizliklerde ýatanlarynda subut etdik. Emma ol iki ABC we A^1 B^1 C^1 üçburçlyklar bir tekizlikde ýatanlarynda hem dürsdür.



83-nji surat.

Subudy. Teoremanyň dürs bolmagy üçin $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde ýatmaýan A_1 B_1 C_1 üçburçlyk tapylyp, ABC, $A'B'C'$ üçburçlyklar A_1 B_1 C_1 üçburlygyň merkezi proýeksiýasy (aýry merkezlerden) bolýanyny subut etmek ýeterlik. Dogrudan hem ýokarda subut edilişine görä, şeýle ýagdaýda $A_1\,B_1\,C_1$ we ABC üçburçlyklaryň degişli taraplary şol üçburçlyklaryň tekizlikleriniň kesişme gönüsinde ýatýan nokatlarda kesişýärler. Edil şonuň ýaly-da $A_1B_1C_1$ we $A'B'C'$ üçburçlyklaryň degişli taraplary hem şol gönüniň üstünde kesişýärler. Diýmek, ABC we $A'B'C'$ üçburçlyklaryň degişli taraplary şol gönüniň üstünde kesişýärler. Indi teoremany subut etmek üçin şol $A_1B_1C_1$ üçburçlygy guralyň. $\underset{\sim}{\alpha}$ tekizlikde ýatmaýan käbir M nokady O nokat bilen birleşdireliň. (6-nji çyzgy) MO kesimde ýatýan S nokat alalyň we ony A, B, C nokatlar bilen birleşdireliň. Görnüşi ýaly, AO, BO, CO kesimler degişlilikde AS, BS, CS kesimleriň (M nokatdan) merkezi proýeksiýasy bolýar. A', B', C' nokatlaryň AO, BO, CO kesimlerde ýatýandyklary sebäpli, olar degişlilikde AS, BS, CS kesimlerde ýatýan A_1, B_1, C_1 nokatlaryň merkezi

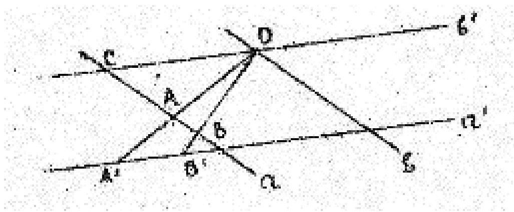
(M nokatdan) proeksiýalary bolýar, alnan $A_1B_1C_1$ üçburçlyk şol gözlenýän üçburçlykdyr. Teorema subut edildi.

Biz ýokarda perspektiw özgertmäniň esasy inwariýantlary hökmünde nokadyň gönä degişliligi we Dezargyň teoremasy barada durup geçipdik. Emma bu ýerde çiglik giden ýeri hem bar. Umumy ýagdaýda merkezi proýeksiýada käbir nokadyň perspektiwasynyň ýa-da tersine, käbir nokadyň nusgasynyň bolmazlygynyň mümkindigini belläp geçipdik. Şeýle ýagdaýda ýokardaky iki häsiýetiňde gümürtik bolýandygy düşnükli. Nähili edeninde şu ýetmezçiligi aýryp bolýar, agzalan şol häsiýetler, islendik perspektiw özgertmede inwariant bolar ýaly edip bolarmy diýen sowal ýüze çykýar. Ine, şu sowal hem proýektiw geometriýanyň gelip çykmagyna sebäp bolan meseleleriň biri diýip bileris.

Ol mesele $\underset{\sim}{\alpha}$ we $\underset{\sim}{\beta}$ tekizlikleriň arasyndaky perspektiw özgertmäniň özara bir belgili bolmanyndan gelip çykýar. Bu ýetmezçiligi düzetjek bolalyň.

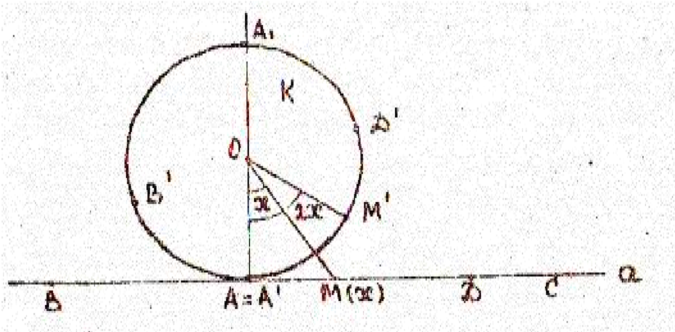
§ 2. Proýektiw göni

Düşnükli bolmagy üçin biz tekizlikde $\underset{\sim}{a}$ gönininiň $\underset{\sim}{a'}$ gönä bolan perspektiw özgermesine seredeliň. (7-nji çyzgy)



84-nji surat.

O nokatdan $\underset{\sim}{a'}$ gönä parallel $\underset{\sim}{b'}$ göni geçireliň. Ol a gönüni C nokatda keser. Görüşimiz ýaly, C nokadyň $\underset{\sim}{a'}$ gönüdäki perspektiwasy ýok. Eger O nokatdan $\underset{\sim}{a}$ gönä parallel $\underset{\sim}{b}$ göni geçirsek ol $\underset{\sim}{a'}$ gönüni C' nokatda keser. C' nokadyň şu özgertmede $\underset{\sim}{a}$ gönüde nusgasy ýok. Diýmek, bu özgertme, özara bir belgili däl. Şu ýetmezligi aýyrmak üçin $\underset{\sim}{a'}$ gönüniň nokatlarynyň köplügine ýene bir C'_∞ hususy däl nokat goşýarlar. $\underset{\sim}{a}$ gönüniň nokatlaryna C_∞hususy däl nokady goşýarlar. Şeýle element goşulan gönä ýaýbaň göni diýilýär. Ýaýbaň gönüler $\underset{\sim}{\overline{a}}$ $\underset{\sim}{\overline{a}'}$ belgiler bilen belgilenýär. Indi nokady C_∞ nokadyň prospektiwasy, C_∞ nokat şol özgertmede C'_∞ nokadyň nusgasy diýip kabul etsek, onda $\underset{\sim}{\overline{a}}$ we $\underset{\sim}{\overline{a}'}$ ýaýbaň gönüleriň arasyndaky özara birbelgili özgertmäni alaryş. Şeýle özgertmä $\underset{\sim}{\overline{a}}$ we $\underset{\sim}{\overline{a}'}$ ýaýbaň gönüleriň arasyndaky proýektiw özgertme diýilýär. Täze goşulan C_∞, C'_∞ nokatlara degişlilikde $\underset{\sim}{\overline{a}}$ we $\underset{\sim}{\overline{a}'}$ gönüleriň tükeniksiz uzaklykdaky nokatlary hem diýilýär. Ýaýbaň gönüni geometrik şekillendirmek üçin aşakdaky özara bir belgili degişliligi gurnalyň. (8-njy surat).



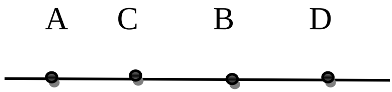
85 -nji surat.

$\underset{\sim}{\overline{a}}$ gönä A nokatda galtaşýan merkezi 0 nokatda bolan K töwerek alalyň. Goý, M şol gönüniň islendik nokady bolsun O, M nokatlardan geçýän gönüniň *OA* radius bilen emele getirýän we OA radiusdan başlap sagat diliniň tersine ölçenilýän burçuny $\underset{\sim}{x}$ bilen belgiläliň. Töwerekde OA radiusdan başlap (sagat diliniň tersine), $2\underset{\sim}{x}$ burçy ölçäp M' nokady alalyň we ony M nokada degişli edeliň. M_∞ tükeniksiz uzaklykdaky nokada A nokady degişli edeliň. Şeýlelikde, $\underset{\sim}{\overline{a}}$ göni bilen K töweregiň nokatlarynyň arasyndaky özra bir belgili özgertmäni alarys. Şoňa görä, $\underset{\sim}{\overline{a}}$ gönä geometrik nazardan töwerek hökmünde garamak bolar. $\underset{\sim}{\overline{a}}$ proýektiw gönüniň üstünde ýatýan üç B, A, D (8-njy çyzgy) nokady alalyň. B', A', D' şol nokatlaryň töwerekdäki şekilleri bolsun. Ýewklid göni çyzygynda (tükeniksiz daşdaky nokat goşulmadyk göni) islendik üç nokadyň biri hem-de diňe şol beýleki iki nokadyň arasynda ýatýar. Emma $\underset{\sim}{\overline{a}}$ -ýaýbaň gönüde bu düzgün dogry däl. Dogrudan hem K töweregiň üstündäki üç $A'B'C'$ nokadyň islendigi beýleki ikisiniň arasynda ýatýar. Diýmek, $\underset{\sim}{\overline{a}}$ ýaýbaň gönüniň üstünde ýatýan B,A,S nokatlar hem edil şu häsiýete eýe bolýar. K töweregiň üstünde ýatýan iki A', D' nokat iki A', M', D' we $D'A, A'$ duganyň ujy bolup hyzmat edýär. $\underset{\sim}{\overline{a}}$ ýaýbaň gönüniň üstünde ýatýan islendik iki nokat hem hut şeýle häsiýete eýedir.

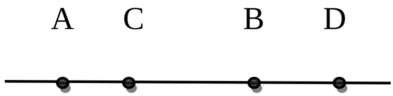
Belli bolşy ýaly, Ýewklid gönüniň üstündäki üç nokadyň ýönekeý gatnaşygy (ABC) şol nokatlaryň özara ýerleşişini anyklaýar we ol gatnaşyk affin özgertmäniň inwarianty bolýar. Emma bu gatnaşyk ýaýbaň gönüniň üstünde öz manysyny ýitirýär. Onuň üstüne-de ol perspektiw özgertmäniň inwarianty bolmaýar. Ýaýbaň gönüniň üstünde ýatýan üç nokadyň ýönekeý gatnaşygyny çalşyryp biljek nähili düşünje girizip bolarka diýen sowal ýüze çykýar. Belli bolşy ýaly, ol düşünje hökmünde dört A,B, C, D nokadyň çylşyrymly gatnaşygy alynýar. Ol (ABCD) bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä,

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

A,B-nokatlara esasy nokatlar, C D nokatlara bölýän nokatlar diýilýär. Bu täze gatnaşyk merkezi proeksiýanyň inwariantydyr. Eger A B CD nokatlar 86-njy a çyzgydaky



86-njy a surat



86-njy b surat

ýaly ýerleşse, onda C D nokatlar A B nokatlary bölýär diýilýär. Ol A B ÷ CD bilen belgilenýär. Eger olar 86-nji b çyzgydaky ýaly ýerleşseler, onda CD nokatlar A,B nokatlary bölmeýär diýilýär. Ol $AB \div\div CD$ bilen belgilenýär. Kesgitlemeden görnüşi ýaly, $AB \div CD$ ýagdaýda (ABCD)<0, $AB \div\div CD$ ýagdaýda (ABCD)> 0 bolýar. Indi proýektiw gönüniň kesgitlemesine geçeliň. Tekizlikde merkezi O nokatda bolan gönüleriň çogdamyny alalyň. Ony $\underset{\sim}{S}$ bilen belgiläliň.

Kesgitleme. Eger $\underset{\sim}{P}$ we $\underset{\sim}{S}$ çogdamyň arasynda biýektiw (özara bir belgili) özgertme bar bolsa onda $\underset{\sim}{P}$ köplüge proýektiw göni diýilýär. $\underset{\sim}{P}$ köplügiň elementlerine proektiw gönüniň nokatlary diýilýär.

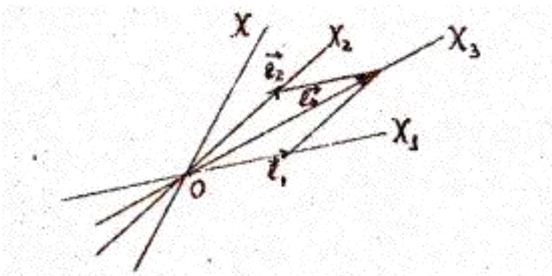
Kesgitlemä görä, islendik ýaýbaň göni çyzyk hem-de islendik $\underset{\sim}{S}$ çogdam proýektiw gönüdir. Dogrudan hem eger $\underset{\sim}{\bar{a}}$

ýaýbaň göni bolsa $\underset{\sim}{\bar{a}}$ -nyň daşynda ýatýan O nokatda merkezi bolan **S** çogdam alalyň. Ol çogdamyň islendik gönüsine onuň $\underset{\sim}{\bar{a}}$ ýaýbaň gönüni kesýän nokadyny degişli etsek hem-de çogdamyň $\underset{\sim}{\bar{a}}$ gönä parallel bolan gönüsine $\underset{\sim}{\bar{a}}$ gönüniň tükeniksiz uzaklykdaky nokadyny degişli etsek, onda $\underset{\sim}{\bar{a}}$- ýaýbaň gönüniň nokatlarynyň we $\underset{\sim}{S}$ çogdamyň arasynda biýektiw degişliligi alarys. $\underset{\sim}{S}$ çogdamyň proýektiw göni bolýanlygy has hem aýdyň. Eger $\underset{\sim}{S}$ çogdamyň islendik gönüsine onuň hut özüni degişli etsek, onda çogdamyň öz-özüne bolan biýektiw özgertmesini alarys. Şeýlelikde çogdam proýektiw göni bolýar. Onuň gönüleri şol proýektiw gönüniň nokatlary bolýar. Çogdamuň gönüleriniň özara deň ýagdaýda (hiç biriniň artykmaçlygy ýa-da kemligi ýok) bolany sebäpli, islendik proýektiw gönüniň nokatlary hem özara deň ýagdaýda bolarlar. Ondan başga hem, eger çogdamyň islendik gönüsini alsak, ony O merkeziň töwereginde $\underset{\sim}{\pi}$ burça öwürsek, ol çogdamyň hemme gönüsi bilen ýeke-ýeke gabat gelip, ýene öňki ýagdaýyna düşer. Munyň özi çogdamyň gönüleriniň ýa-da islendik proýektiw gönüniň nokatlarynyň köplňginiň ýapyk köplükdigini görkezýär. Bu ýagdaýy ýokarda hem görüp geçipdik. $\underset{\sim}{\bar{a}}$ ýaýbaň gönüniň nokatlaryny özara birbelgili özgertme bilen K töweregiň nokatlaryna geçirmekde, töweregiň nokatlarynyň ýapyk köplük bolany sebäpli, $\underset{\sim}{\bar{a}}$

ýaýbaň proýektiw gönüniň nokatlarynyň köplüginiň-de ýapyk boljagy düşnükli.

§3. Proýektiw gönüniň üstündäki koordinatalar sistemasy.

S merkezi O nokatdaky çogdam, $\underset{\sim}{\bar{a}}$ islendik proýektiw göni (biz proýektiw gönüni hem ýaýbaň göni ýaly $\underset{\sim}{\bar{a}}$ bilen belgileýäris) $\underset{\sim}{Q}$ bolsa, $\underset{\sim}{\bar{a}}$ we S-iň arasyndaky biýektiw degişlilik. Çogdamyň islendik $\underset{\sim}{X_1}$ we $\underset{\sim}{X_2}$ gönülerini we degişlilikde şol gönüleriň $\underset{\sim}{\vec{\ell}_1}$ we $\underset{\sim}{\vec{\ell}_2}$ ugrukdyryjy wektorlaryny alalyň. Olar merkezi O nokatda bolan affin koordinatalar sistemasyny emele getirýärler (10-nji çyzgy)



87-nji surat.

Ugrukdyryjysy $\underset{\sim}{\vec{\ell}_1}+\underset{\sim}{\vec{\ell}_2}$ wektor bolan ýene bir $\underset{\sim}{X_3}$ gönüni alalyň. Başlangyjy O nokatda ýerleşdirilen $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2$

wektorlaryň uçlaryny degişlilikde E_1, E_2 hem-de E harplar bilen belläliň. Goý $\underset{\sim}{X}$ şol çogdamyň islendik gönüsi $\vec{\ell}$ bolsa onuň haýsy-da bir ugrukdyryjy wektory. $\vec{\ell}$ wetor $\underset{\sim}{\vec{\ell}_1}, \underset{\sim}{\vec{\ell}_2}$, wektorlaryň üsti bilen $\vec{\ell} = \underset{\sim}{x_1}\vec{\ell}_1 + \underset{\sim}{x_2}\vec{\ell}_2$ görnüşde bir belgili kesgitlenýär. Tertipleşdirilen iki $\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}$ sana $\underset{\sim}{x}$-gönüniň bir jynsly koordinatalary diýilýär. Ol $X(\underset{\sim}{x_1}; \underset{\sim}{x_2})$ belgi bilen belgilenilýär. Eger $\underset{\sim}{\vec{\ell}^*}$ şol $\underset{\sim}{X}$ gönüniň özge bir ugrukdyryjysy bolsa, onda hökman $\vec{\ell}^* = k\vec{\ell}$ we $\vec{\ell}^* = \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x_1}\underset{\sim}{\vec{\ell}_1} + \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x_2}\underset{\sim}{\vec{\ell}_2}$ deňlik ýerine ýeter. Şoňa göräde $\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{x_2}$ sanlara hem, islendik $\underset{\sim}{k} \neq 0$ san üçin, şol X gönüniň bir jynsly koordinatlary diýilýär. Şunlukda, çogdamyň her gönüsiniň tükeniksiz köp bir jynsly koordinatalary bar. Bu köplügiň her elementi olaryň haýsy-da bolsa belli biriniň koordinatalaryny käbir $\underset{\sim}{k}$ sana köpeltmek bilen alynýar. $\bar{a}$ proýektiw gönüniň islendik A nokadyny alalyň. $\underset{\sim}{Q}$ özgertmede A nokada $\underset{\sim}{S}$ çogdamyň $\underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{x_1},: \underset{\sim}{x_2})$ gönisi degişli bolsun. Onda şerte görä, $x_1, \underset{\sim}{x_2}$ sanlara A nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýilýär. Bu fakt $A(\underset{\sim}{x_1} : \underset{\sim}{x_2})$ görnüşde ýazylýar. Şeýlelikde, $\bar{a}$ gönüniň islendik nokadynyň bir jynsly proýektiw koordinatalary belli bolýar. Bu ýagdaýa $\bar{a}$ proýektiw gönüde koordinatalar sistemasy kesgitlenen diýilýär. $\underset{\sim}{Q}$ özgertmede $X_1(1{,}0), X_2(0{,}1), X_3(1:1)$ gönülere $\bar{a}$ proektiw gönüniň $E_1(1{,}0), E_2(0{,}1), E_3(1:1)$ nokatlary degişli bolsun. E_1, E_2, E_3 nokatlara berlen koordinatalar sistemasynyň bazis nokatlary diýilýär. Bazis nokatlar koordinatalar sistemasyny doly kesgitleýär. Islendik E_1, E_2, E_3 nokatlaryň kesgitleýän koordinatalar sistemasyny $R(E_1, E_2, E_3)$ görnüşde belleýärler. Bu sistemanyň barlygyny, onuň ýeke-täkligini subut etmäge girişeliň.

$\bar{a}$ islendik proýektiew göni E_1, E_2, E_3 onuň islendik nokatlary bolsun. Biz $\bar{a}$ proýektiw gönüniň üstünde kesgitlenen proýektiw koordinatalar sistemasynyň bardygyny, onuň ýeketäkligini we şol sistemada E_1, E_2, E_3 nokatlaryň koordinatalarynyň (1:0), (0:1), (1:1) bolýanyny subut etmeli. $\bar{a}$ göni bilen merkezi O nokada bolan gönüleriň S çogdamynyň arasynda biýektiw degişlilik bar. Şoňa görä-de bu teklibi S çogdam üçin subut etmek ýeterlik. Goý $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2, \underset{\sim}{X}_3$ çogdamyň islendik üç gönüsi. $\underset{\sim}{X}_3$ gönüniň üstünde islendik E_3 nokat alalyň. OE_3 wektory $\underset{\sim}{X}_1, \underset{\sim}{X}_2$ gönüleriň üstünde $\vec{OE_3} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ bolar ýaly edip $\vec{\ell}_1$ we $\vec{\ell}_2$ wektorlary alalyň.

$\vec{\ell}_1 \ O \vec{\ell}_2$ -afin koordinatalar sistemasynda $\underset{\sim}{X_1}$ gönüniň (1:0) $\underset{\sim}{X_2}$ gönüniň (0:1) $\underset{\sim}{X_3}$ gönüniň –(1:1) koordinatalary bolýar $(\underset{\sim}{\vec{\ell}_1} \, O \, \underset{\sim}{\vec{\ell}_2})$ ýene bir koordinatalar sistemasy bar bolup, şol sistemada $\underset{\sim}{X_1}, \underset{\sim}{X_2}, \underset{\sim}{X_3}$ gönüleriň koordinatalary degişlilikde (1:0), (0:1), (1:1) bolýar diýeliň. $\underset{\sim}{\vec{\ell}_1}$ bilen $\underset{\sim}{\vec{\ell}'_1}$ wektoryň şol bir $\underset{\sim}{X_1}$ gönä, $\vec{\ell}_2$ we $\vec{\ell}'_2$ wektoryň - X_2 gönä, $\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ we $\underset{\sim}{\vec{\ell}'_1} + \underset{\sim}{\vec{\ell}'_2}$ wektoryň $\underset{\sim}{X_3}$ gönä kollinearlygy sebäpli, olar özara proporsional bolarlar. Ýagny

$$\vec{\ell}_1 = k\vec{\ell}'_1, \ \vec{\ell}_2 = k_2\vec{\ell}'_1, \ \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 = k_3(\vec{\ell}'_1 + \vec{\ell}'_2)$$

$$\text{ýa-da} \quad k_3(\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2) = \vec{\ell}_1 + {}_2\vec{\ell} = k_1\vec{\ell}_{,} + k_2\vec{\ell}_2,$$

Bu ýerden $k_1 = k_2 = k_3$ alarys.

Emma $(\vec{\ell}'_1 \ 0 \ \vec{\ell}'_2)$ *we* $(\vec{\ell}_1 \ 0 \ \vec{\ell}_2) = (k_3 \ \ell'_1 \ 0 \ k_3 \ \ell'_2)$

affin koordinatalar sistemalary çogdamda şol bir proýektiw koordinatalar sistemasyny kesgitleýärler. Bu ýerden üç $\underset{\sim}{X_1}, \underset{\sim}{X_2}, \underset{\sim}{X_3}$ göni bilen kesgitlenen proýektiw koordinatalar sistemasynyň ýeketäkligi gelip çykýar.

§ 4 Proýektiw koordinatalary özgertmek

Islendik $\underset{\sim}{\vec{\alpha}}$ proýektiw gönüniň üstünde iki üýtgeşik proektiw koordinatalar sistemasy berilsin. Şol sistemalarda $\underset{\sim}{\vec{\alpha}}$ gönüniň islendik A nokadynyň bir jynsly proektiw koordinatalary degişlilikde $(x_1 : x_2)$ *we* $(x_1' : x_2')$ bolsun. Bu koordinatalaryň arasyndaky baglanyşygy tapjak bolalyň.

$\underset{\sim}{S}$ merkezi O nokatdaky gönüleriň çogdamy. Ýokarda görşümiz ýaly, $\vec{\alpha}$ gönüniň üstündäki iki proektiw koordinatalar sistemasy degişlilikde $(\vec{\ell}_1\, 0\, \vec{\ell}_2)$ *we* $(\vec{\ell}_1'\, 0\, \vec{\ell}_2')$ affin koordinatalar sistemasynyň üsti bilen kesgitlenýär. Şoňa görä, A nokadyň $(x_1 : x_2)$ *we* $(x_1' : x_2')$ koordinatalaryna S çogdamdaky oňa degişli $\underset{\sim}{X}$ gönüniň şol iki sistemadaky koordinatalary hökmünde garap bileris. Indi $\vec{\ell}_1', \vec{\ell}_2'$ wektorlary $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ wektorlaryň üsti bilen aňladalyň.

$$\vec{\ell'}_1 = a_{11}, \vec{\ell}_1 + a_{12}, \vec{\ell}_2\ \ell$$
$$\vec{\ell'}_2 = a_{21}, \vec{\ell}_1 + a_{22}, \vec{\ell}_2 \qquad (9-1)$$

$\begin{vmatrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_2, \alpha_{22} \end{vmatrix}$ kesgitleýjiniň noldan üýtgeşikligi düşnükli. $\underset{\sim}{X}$ gönüniň bir jynsly koordinatalarynyň kesgitlenişine laýyklykda $x_1 \vec{\ell}_1 + x_2 \vec{\ell}_2 = \lambda\,(x'_1 \vec{\ell'}_1 + x'_2 \vec{\ell'}_2)$ alarys. Bu ýerde $\lambda \neq 0$ islendik hemişelik san. $\vec{\ell'}_1, \vec{\ell'}_2$ wektorlaryň bahalaryny (9-1) deňlikden alyp şu ýere goýsak.

$$x_1 \vec{\ell}_1 + x_2 \vec{\ell}_2 = \lambda\, x'_1(\alpha_{11} \vec{\ell}_1 + \alpha_{12} \vec{\ell}_2) + \lambda\, x'_2(\alpha_{21} \vec{\ell}_1 + \alpha_{22} \vec{\ell}_2)$$

deňligi, ýa-da oňa deň güýçli bolan.

$$x_1 = \lambda\,(\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2)$$
$$x_2 = \lambda\,(\alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2) \qquad (9-2)$$

deňlikleri alarys. Şeýlelikde, $\bar{a}$ proýektiw gönüde oky dürli proýektiw koordinatalar sistemasy berilse, onda A nokadyň şol sistemalardaky birjynsly koordinatalary özara (9-2) deňlikler bilen berlen baglanyşykda bolýarlar. Bu baglanyşyga biz bir jynsly proýektiw koordinatalaryň özgertmesi diýip bileris. Ol $\{\alpha_{1j}\}$ matrisa bilen doly kesgitlenýär. Proýektiw koordinatalaryň özgertmeleriniň köplüginiň topar emele getirýänligi hem şu ýerden aýdyň.

Belli bolşy ýaly $(x_1:x_2)$ A nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary bolsa $\frac{x_1}{x_2}$ gatnaşyga şol nokadyň bir proýektiw koordinatasy diýilýär. Eger $\frac{x_1}{x_2}=\xi$ bilen $\frac{x_1'}{x_2'}=\xi$ bilen bellesek, onda (9-2) deňlikleriň birinjisini ikinjisine agzaba-agza bölüp alarys:

$$\xi=\frac{\alpha_{11}\xi^{1}+\alpha_{21}}{\alpha_{12}\xi^{1}+\alpha_{22}} \qquad (9-3)$$

(9-3) deňlige $\bar{a}$ - proýektiw gönüniň üstünde berlen proýektiw koordinatalaryň özgertmesi diýilýär. Eger $\bar{A}_{j,}\ j=1,4,\overline{\alpha}$ proýektiw gönüniň nokatlary, $\xi_{j,j}=1,4$ olaryň proýektiw koordinatalary bolsalar, (3) özgertmeden soň, şol nokatlaryň koordinatalary $\xi_j^1,\ j=1,4$ bolar. Bu ýerde

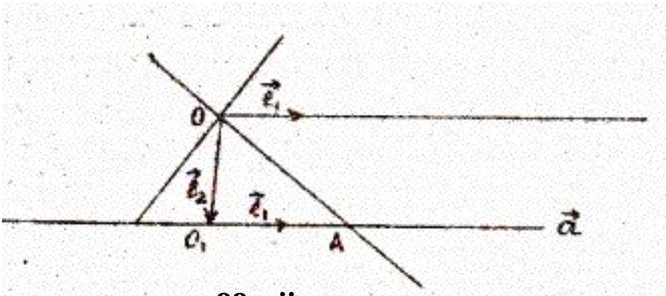
$$\xi_j=\frac{\alpha_{11}\xi_1'+\alpha_{21}}{\alpha_{12}\xi_j''+\alpha_{22}} \qquad (9-4)$$

Drob çyzykly funksiýanyň häsiýetine görä,

$$\frac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1-\xi_3}:\frac{\xi_4-\xi_2}{\xi_4-\xi_3}=\frac{\xi_1'-\xi_2'}{\xi_1'-\xi_3'}:\frac{\xi_4'-\xi_2'}{\xi_4'-\xi_5'} \qquad (9-5)$$

gatnaşyk ýerine ýeter. (9-5) gatnaşygyň her bölegine dört sanyň (nokadyň) angormonik gatnaşygy diýilýär. Diýmek, proýektiw koordinatalaryň (9-3) özgertmesi islendik dört nokadyň proýektiw koordinatalarynyň angormonik gatnaşygygyny üýtgetmeýän özgertmedir.

Indi $\bar{a}$ ýaýbaň göni bilen baglanyşykly bir jynsly proýektiw koordinatalaryň hususy ýagdaýyna garalyň. $\bar{a}$ -ýaýbaň gönüde $(0, \vec{\ell}_1)$ affin koordinatalar sistemasyny alalyň. Şu gönüniň A nokadynyň $(0, \vec{\ell}_1)$ sistemadaky affin koordinatasyny $\underset{\sim}{x}$ bilen beläliň. $\bar{a}$ -ýaýbaň gönüden daşarda O nokat alalyň hem-de merkezi O nokatda bolan S çogdamda $(\vec{\ell}_1, O\vec{\ell}_2)$ affin koordinatalar sistemasyny girizeliň (88-nji surat)



88-nji surat

$\vec{\ell} = x\vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ bolýanlygy sebäpli A nokadyň $(\vec{\ell}_1, 0\vec{\ell}_2)$ sistemanyň üsti bilen kesgitlenen birjynsly proýektiw koordinatalary $(x:1)$ bolar. Umuman islendik A nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary $(x_1 : x_2)$ bolsalar, onda $x = \frac{x_1}{x_2}$ boljagy aýdyňdyr. Şu sebäpe görä, $\vec{a}$ ýaýbaň gönüniň üstünde şeýle kesgitlenen $(x_1 : x_2)$ koordinatalara-bir jynsly affin koordinatalary diýilýär. $\vec{a}$ ýaýbaň gönüniň tükeniksiz uzaklykdaky $A\infty$ nokadynyň affin bir jynsly koordinatalary (I:0) bolar.

$\vec{a}$ ýaýbaň gönüniň üstünde dört A_1, A_2, A_3, A_4 nokady alalyň. x_1, x_2, x_3, x_4 -şol nokatlaryň affin koordinatalary. Biz ýokarda dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy diýip (A_1, A_2, A_3, A_4) sana aýdypdyk. Bu sanyň şol nokatlaryň proýektiw koordinatalarynyň angormonik gatnaşygy bilen näme baglanyşygy bar diýen sowal ýüze çykýar. Kesgitlemä görä,

$$(A_1A_2A_3) = \frac{A_1A_3}{A_2A_3}, (A_1A_2A_4) = \frac{A_1A_4}{A_2A_4}$$

Bu ýerde $A_1A_3, A_2A_3,\ A_1A_4, A_2A_4$ ugrukdyrylan kesimler. Olar $\vec{\ell}_1$ wektoryň ugry bilen kesgitlenýär. 11-njy çyzgydan görnüşi ýaly, $\bar{\alpha}$ ýaýbaň gönüniň tükenikli uzaklykda ýatýan nokatlarynyň proýektiw koordinatalary olaryň affin koordinatalary bilen gabat gelýär, tükeniksiz uzaklykdaky nokadynyň proýektiw koordinatasy bolup ∞ belgi hyzmat edýär. Başda $A_{j,}\ j=1,4,$ nokatlar tükenikli uzaklykdaky nokatlar diýeliň.

Onda

$$A_1A_3 = x_3 - x_1,\ A_1A_4 = x_4 - x_1,\ A_2A_3 = x_3 - x_2,\ A_2A_4 = x_4 - x_2$$

bolar. Diýmek

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

Alnan deňligiň esasynda proýektiw koordinatalaryň (9-3) özgertmesi islendik dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygyny üýtgetmän saklaýan özgertmedir diýip bileris. Şuňa meňzeşlikde islendik $\vec{a}$ proýektiw gönüniň dört nokadynyň çylşyrymly gatnaşygy diýip şol nokatlaryň käbir proýektiw koordinatalar sistemasyndaky proýektiw koordinatalarynyň angormonik gatnaşygyna aýtsak, onda ýokarda ýaýbaň göni üçin alnan netije islendik proýektiw göni üçin hem dogrudyr. Proýektiw geometriýa proýektiw özgertmede üýtgemeýän ululyklardyr düşünjeler bilen gyzyklanýar. Biz proýektiw gönüniň islendik dört nokadynyň çylşyrymly gatnaşygynyň proýektiw düşünjesi bolýandygyny anykladyk. Ýokarda proýektiw gönüniň iki jübüt A,B we SD nokatlarynyň özara S,D bölünýänligi düşünjesini giziripdik. Belli bolşy ýaly,(ABSD) çylşyrymly gatnaşyk noldan kiçi bolan halatynda. S, D nokatlar A,B nokarlary bölýär diýilýär. Çylşyrymly gatnaşygyň proýektiw özgertmäniň inwarýanty bolany üçin, onuň üsti bilen kesgitlenýän düşünjeler hem şeýle häsiýete eýe bolar. Diýmek iki jübüt A,B we S,D nokatlaryň bölünme düşünjesi-de proektiw geometriýanyň düşünjesidir.

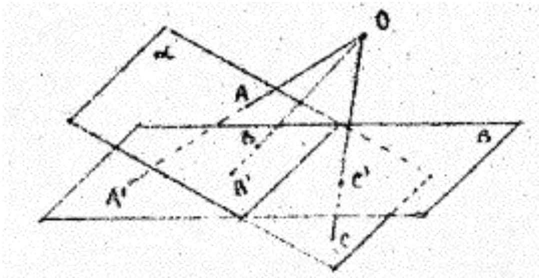
§5. ARIFMETIK PROÝEKTIW GÖNI.

Tertipleşdirilen $(x_1 : x_2)$ ikisi bir wagtda nola deň, bolmadyk, jübüt sanlar köplügine arifmetik proýektiw göni dýilýär. Bu ýagdaý islendik S çogdamyň gönüleri bilen ýokarky köplügiň elementleriniň arasyndaky bolan biýektiw degişliligiň barlygyndan gelip çykýar. Beýle degişliligi her bir $(x_1 : x_2)$ jübüt sana käbir koordinatalar sistemasynda çogdamyň, ugrukdyryjy wektorynyň koordinatalary şu $(x_1 : x_2)$ sanlar bolan, gönüsini degişli etmek bilen alyp bolar.

§6. Proýektiw tekizlik.

Käbir α tekizlik alalyň. $\vec{\ell}$ şol tekizlikde kesgitli ugur. $\vec{\ell}$ ugra parallel bolan gönülere $A_\infty^{\vec{e}}$-tükeniksiz uzaklykdaky nokady birikdireliň. Bu nokat şol gönüleriň her birine degişli diýeliň. Şeýle diýmek $\vec{\ell}$ ugra parallel gönüleriň her biri ýaýbaň gönä öwrülýär hem-de olar $A_\infty^{\vec{e}}$ nokatda kesişýärler diýmekdir. Islendik $\vec{\ell}$ ugur üçin α tekizlige birikdirilen $A_\infty^{\vec{e}}$ nokatlaryň köplügine α tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky gönüsi diýilýär. Tükeniksiz uzaklykdaky göni birikdirilen α tekizlige bolsa ýaýbaň tekizlik diýilýär. Ol $\bar{\alpha}$ belgi bilen belgilenýär. Ýaýbaň tekizlikde islendik iki göni çyzyk hökman kesişýär (α tekizligiň hususy nokadynda, ýa-da tükeniksiz uzaklykdaky nokadynda). Ýaýbaň tekizlik düşünjesiniň hem ýaýbaň göni ýaly perspektiw özgertmäni öwrenmekden gelip çykýanyny göreliň.

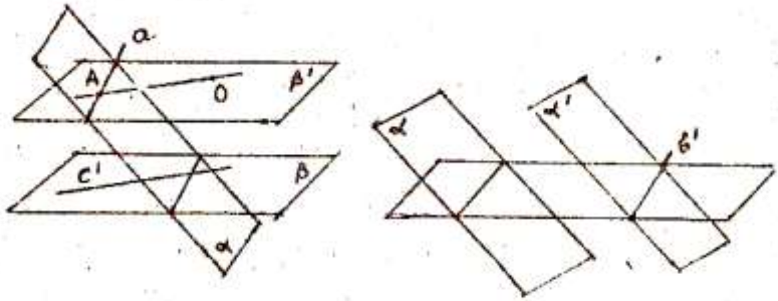
Giňişlikde α we β parallel bolmadyk tekizlikleri, olardan daşarda ýatýan O nokady alalyň. (89-njy surat) α tekizligi β tekizlige O nokatdan merkezi proektirläliň. α tekizligiň A, B, C nokarlarynyň β tekizlikdäki proeksiýalaryny A', B', C' bilen belläliň. A', B', C' nokatlara A, B, C nokatlaryň perspektiwasy ýa-da sekili, A, B, C nokatlara A', B', C' nokatlaryň nusgasy diýmegi kabul edeliň.



89-njy surat

α tekizligiň nokatlarynyň β tekizlige bolan şu özgertmesine perspektiw özgertme diýilýär. Eger O merkezden β tekizlige parallel tekizlik geçirsek ol α tekizligi käbir a göni boýunça keser (90-njy surat). Şol a gönüniň nokatlarynyň β tekizlikde perspektiwasy bolmaýar. Tersine, eger O nokatdan α tekizlige parallel α' tekizlik geçirsek, ol β tekizligi käbir $в'$ göni boýunça keser. $в'$ gönüniň nokatlarynyň α tekizlikde nusgalarynyň ýokdygyny hem aýdyň.

Şeýlelikde perspektiw özgertmäniň biýektiw özgertme däldigi ýüze çykýar. Özgertmäniň şu ýetmezçiligini aýyrmaga çalşalyň.



90-nji surat

A nokat a gönüde ýatsyn. O bilen A nokadyň üstünden göni geçireliň. Ol göni β' tekizlikde ýatany üçin β tekizligi kesmeýär. Başgaça aýdanymyzda, A nokadyň β tekizlikde perspektiwasy ýok. β tekizlikde ýatýan, OA gönä parallel gönüleriň çogdamyna seredeliň. S' şol çogdamyň islendik gönüsi bolsun. Bu gönüniň nokatlarynyň α tekizlikdäki nusgalaryny tapmak üçin O nokadyň we S' gönüniň üstünden γ tekizlik geçireliň. Bu tekizlik α tekizligi käbir **S** göni boýunça keser, OA gönüni özünde saklaýan γ tekizlik a gönüni ýeke-täk A nokatda keser. α tekizliginde ýatýan parallel däl a we S gönüleriň hem A nokatda kesişjegi düşnükli. Şeýlelikde, β tekizlikde ýatýan we S' gönüni özünde saklaýan parallel gönüleriň çogdamynyň islendik gönüsiniň nokatlarynyň nusgalary α tekizlikde A nokatdan geçýän gönüni emele getirýär. Şol çogdamyň gönüleriniň nusgalary bolsa α tekizlikde ýatýan hem-de merkezi **A** nokatda bolan çogdamy emele getirýär.

Indi $\bar{\alpha}$ *we* $\bar{\beta}$ ýaýbaň tekizliklere seredeliň. Olarda ýatýan gönüleriň hem ýaýbaň göni boljagyny ýatlalyň. β tekizlikde OA gönä parallel gönüleriň tükeniksiz uzaklykdaky $\vec{A'_\infty}$ nokadyny A nokada degişli (ýa-da perspektiwasy) hasap edeliň. Şeýle goşulmadan soň, a gönüniň perspektiwasy bolup $\bar{\beta}$ tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky gönüsi hyzmat eder. Edil şonuň ýaly-da β tekizligiň $в'$ gönüsiniň (90-nji surat) nusgasy bolup $\bar{\alpha}$ tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky a_∞ gönüsi hyzmat eder. α *we* β tekizlikleriň arasyndaky perspektiw özgertmäni giňeldip alnan $\bar{\alpha}$ we $\bar{\beta}$ ýaýbaň tekizlikleriň nokatlarynyň arasyndaky degişlilige proýektiw özgertme diýilýär. Ýaýbaň tekizlik proýektiw tekizlik düşünjesiniň hususy ýagdaýydyr. Şol düşünjäni kesgitläliň.

Giňişlikde O nokatdan geçýän gönüleriňdir tekizlikleriň köplügine çatryk diýilýär. Biz ony S^o belgi bilen belleýäris.

Kesgitleme. Käbiri nokat, käbiri göni çyzyk atlandyrylýan elementleriň π köplügi berilsin. π köplügiň nokatlary bilen S^o çatyrygyň gönüleriniň arasynda, π köplügiň gönüleri bilen S^o çatyrygyň tekizlikleriniň arasynda biýektiw degişlilik bar bolsun. π köplükde A nokat a gönüniň üstünde ýatýar (A nokat α gönä insident bolýar) diýen düşünje girizilen bolsun. A nokada S^o çatyrykdaky degişli göni, a gönä S^o çatyrykdaky degişli tekizligiň üstünde ýatan halatynda, diňe şol ýagdaýda A nokat a gönüniň üstünde ýatsyn. Ine, şu şertlerde π köplüge proektiw tekizlik diýilýär.

Eger S^o çatyrygyň islendik gönüsini hem-de tekizligini öz-özüne degişli etsek, onda S^o çatyrygyň öz-özüne bolan biýektiw özgertmesini alarys. Diýmek, S^o çatyryk proýektiw tekizlikdir.

$\bar{\alpha}$ -ýaýbaň tekizlik hem-de merkezi onuň daşynda ýatýan S^o çatyrygy alalyň. Çatyrygyň islendik tekizligine onuň $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligi kesýän gönüsini degişli edeliň. Çatyrygyň islendik gönüsine onuň $\bar{\alpha}$ - ýaýbaň tekizligi kesýän nokadyny degişli edeliň. Çatyrygyň $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizlige parallel γ tekizligine, $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň a_∞ tükeniksiz uzaklykdaky gönüsini degişli edeliň. Çatyrygyň γ tekizligiň üstünde ýatýan, islendik ℓ gönüsine $\bar{\alpha}$ tekizligiň ℓ gönä parallel ugra degişli tükeniksiz uzaklykdaky nokadyny degişli edeliň. Netijede $\bar{\alpha}$ *we* S^o arasynda biýektiw degişlilik alarys. Bu bolsa $\vec{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň hem proýektiw tekizlik boljagyny aňladýar. Proýektiw tekizlige hususy (tükenikli) tekizlikden özgelikde ýapyk köplük hökmünde garap bolar.

Ýokarda $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň $\bar{\beta}$ ýaýbaň tekizlige bolan ψ proektiw özgertmesini kesgitläpdik. ψ özgertmede $\bar{\alpha}$ tekizligiň islendik gönüsi hem-de islendik nokady degişlilikde $\bar{\beta}$ tekizligiň gönüsine we nokadyna geçýär. Goý, $\bar{a} \in \bar{\alpha}$ göni ψ özgertmede $\bar{a}' \in \bar{\beta}$ gönä geçsin. Onda şu özgertmäniň $\bar{a}$ we $\bar{a}'$ gönüleriň arasynda proektiw özgertmäni berýänligi aýdyňdyr. Şeýle bolsa, gönüniň üstünde ýatýan iki jübüt nokadyň bölünmek häsiýeti-de, şol gönüde ýatýan islendik dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygyda bu özgertmede üýtgemeýär. Bu özgertmäniň ýene-de nokadyň gönüniň üstünde ýatmak (nokat gönä insident) häsiýetini-de saklaýanyny ýatlasak, onda ψ özgertmäniň inwaryanty bolan esasy uç häsiýeti alarys: I. bir gönüde ýatýan iki jübüt nokadyň bölünmek häsiýeti, 2. bir gönüde ýatýan dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy 3. nokadyň gönä insidentligi. Agzalan inwariantalaryň üçünjisinden iki gönüniň kesişme häsiýetiniň hem ψ özgertmede üýtgemeýänligi gelip çykýar.

Ýokarda Dezargyň teoremasyny subut edenimizi ýatlalyň. Teoremada iki üçburçlygyň degişli taraplarynyň kesişme nokatlary bir gönüde ýatsalar, olaryň degişli depelerinden geçýän gönüleriň bir nokatda kesişýändikleri tassyklanýar. Görşümiz ýaly, Teoremanyň şertinde-de, onuň tassyklamasynda-da diňe nokadyň gönüde ýatmak (insidentlik), gönüleriň kesişme häsiýetleri ulanylýar. Bu iki häsiýetiň ψ proýektiw özgertmäniň inwaryanty bolýany sebäpli Dezargyň teoremasy hem edil şu häsiýete eýedir. Agzalan inwariantlaryň diňe ýaýbaň tekizlikleriň proýektiw özgertmesiniň däl-de islendik proýektiw tekizlikleriň proýektiw özgertmesiniň hem inwarianty bolýanyny aşakda subut ederis. Şu ýerde iki $\bar{\alpha}$ we $\bar{\beta}$ ýaýbaň tekizligiň proýektiw özgertmesine şol bir $\bar{\alpha}$ tekizligiň öz-özüne bolan proýektiw özgertmesi hökmünde hem garap bolýandygyny belläp geçeliň.

§7. Proýektiw tekizlikdäki proýektiw koordinatlar sistemasy.

π proektiw tekizlik, ψ bolsa şol tekizligiň nokatlarynyň hem-de gönüleriniň käbir S^o çatyrygyň tekizlikleri, gönüleri arasyndaky degişlilik bolsun, S^o çatyrykda merkezi O nokatda bolan, oklaryň ugrukdyryjy wektorlary $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ bolan (ýagny $O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$) affin koordinatalar sistemasyny alalyň. $\bar{a}$ -göni bilen A nokat şol π tekizlikde ýatsyn $\alpha(\bar{a})$ tekizlik we ℓ_A göni bolsa ψ özgertmede $\bar{a}$ -göni we A nokada degişli çatyrygyň elementleri bolsun. ℓ_A gönüniň käbir ugrukdyryjy wektorynyň $(O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ sistemasyndaky koordinatlaryny (x_1, x_2, x_3) bilen belläliň. Tertipleşdirilen (x_1, x_2, x_3) sanlara A nokadyň bir jynsly proýektiw, koordinatalary diýilýär. Bu fakt $A(x_1 : x_2 : x_3)$ görnüşde ýazylýar.

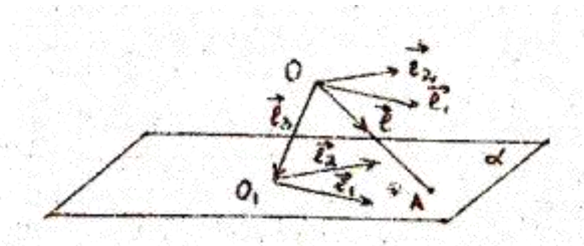
Eger $\alpha(\bar{a})$ tekizligiň şol affin sistemasyndaky deňlemesi $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ bolsa, onda tertipleşdirilen (u_1, u_2, u_3)

sanlara $\bar{a}$ gönüniň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýilýär. Bu fakt $\bar{a}\,(u_1 : u_2 : u_3)$ görnüşde ýazylýar. Şeýlelikde, $(O\,\vec{\ell}_1\,\vec{\ell}_2\,\vec{\ell}_3)$ sistemanyň üsti bilen π tekizligiň islendik nokadynyň hem-de gönüsiniň bir jynsly proýektiw koordinatalaryny kesgitledik.

Şeýle ýagdaý π proektiw tekizlikde proýektiw koordinatalar sistemasy girizilipdir diýilýär. Bu proýektiw koordinatalar sistemasy A nokadyň we $\bar{a}$ gönüniň koordinatalaryny ýeketäk kesgitlemeýär. Dogrudan hem islendik λ san üçin $(\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \lambda\, x_3)$ sanlar hem şol ℓ_A gönüniň ugrukdyryjy wektorynyň $(O\,\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ sistemadaky koordinatalary bolar. Şonuň üçin islendik $\lambda \neq 0$ san üçin $((\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \lambda\, x_3)$ sanlara-da şol A nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýilýär. Edil şunuň ýaly, islendik $\lambda \neq 0$ san üçin $\lambda\, u_1 x_1 + \lambda\, u_2\, x_2 + \lambda\, u_3 x_3 = 0$ deňleme hem şol $\alpha(\bar{a})$tekizligiň $(O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ sistemadaky deňlemesi bolar. Şonuň üçin $(\lambda\, u_1, \lambda\, u_2, \lambda\, u_3)$ sanlara-da $\bar{a}$ gönüniň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýilýär. Diýmek, proýektiw tekizligiň A nokadynyň bir jynsly koordinatalary diýip üç (x_1, x_2, x_3) sanlara aýdylman, şolary islendik $\lambda \neq 0$ sana köpeldip alynýan tertipleşdirilen $(\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \lambda\, x_3)$ sanlar toplumyna aýdylýar. $\bar{a}$ gönüniň bir jynsly koordinatalary hem edil şuňa meňzeşlikde $(\lambda\, u_1, \lambda\, u_2, \lambda\, u_3)$ sanlar toplumy bilen kesgitlenýär. Görşümiz ýaly, proýektiw tekizligiň islendik nokady, käbir proýektiw koordinatalar sistemasynda onuň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýip atlandyrylýan, tertipleşdirilen, hemmesi birden nola deň bolmadyk üç (x_1, x_2, x_3) san bilen kesgitlenýär.

Tersine, nokat atlandyrylýan, hemmesi birden nola deň bolmadyk, tertipleşdirilen üç $(x_1 : x_2 : x_3)$ san köplügini R_3 bilen belläliň. Islendik hemmesi birden nola deň bolmadyk u_1, u_2, u_3 san üçin bir jynsly proýektiw koordinatalary $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan R_3 köplüginiň nokatlarynyň toplumyna göni diýsek, onda R_3 köplük proýektiw tekizlik bolar. Bu teklibi okyjynyň özü-de aňsatlyk bilen subut eder. R_3 köplüge arifmetik proektiw tekizlik diýilýär.

Ýene bir düşünje girizeliň. $\bar{a}$ ýaýbaň tekizlik bolsun. Şonda $(O_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ affin koordinatalar sistemasyny guralyň. Tekizlikden daşda O nokat we S^o çatyrykda $(O \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ affin koordinatalar sistemasyna seredeliň. A nokat $\bar{\alpha}$ tekizlikde ýatsyn. A nokadyň $(O_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ sistemadaky affin koordinatalary (x, y) bolsun. A nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary hökmünde OA gönüň islendik $\vec{\ell}$ ugrukdyryjysynyň $(O \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ sistemadaky koordinatalaryny kabul etsek, onda (14-nji çyzgy) $\vec{\ell} = \lambda \, \overrightarrow{OA}$



91-nji surat

bolany sebäpli, ol koordinatalar $(x_1 = \lambda\, x,\ x_2 = \lambda\, y,\ x_3 = \lambda\,)$ bolar. Şu zeýilli koordinatalara affin bir jynsly koordinatalar diýilýär. Olar A nokadyň $\bar{\alpha}$ tekizlikdäki affin koordinatalary bilen

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$ gatnaşykda bolýarlar.

Eger $A\infty$ nokat $\bar{\alpha}$ tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky nokady bolsa, onuň bir jynsly affin koordinatalary bolup $(x_1 : x_2 : 0)$ sanlar hyzmat eder. Ýagny tükeniksiz uzaklykdaky nokatlar üçin, diňe şolar üçin bir jynsly affin proektiw koordinatalaryň üçünjisi hemişe nola deň.

Eger-de A nokat $\bar{a}$ gönä π tekizlikde insident bolsa (a gönüniň üstünde ýatsa), onda ψ degişliligiň kesgitlenişine görä, ℓ_A göni-de S^o çatyrykda $\alpha(\bar{a})$ tekizlige insident bolar.

$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ $\alpha(\vec{a})$ tekizligiň S^o çatyrykdaky deňlemesi bolsun. A nokadyň $(x_1 : x_2 : x_3)$ bir jynsly proýektiw koordinatalary ℓ_A gönüniň käbir nokadynyň $(O\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3)$ sistemadaky koordinatalary bolýanlygy sebäpli, olar

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

deňlemäni kanagatlandyrýarlar. Tersine, eger käbir $\tilde{A}$ nokadyň $(\tilde{x}_1 : \tilde{x}_2 : \tilde{x}_3)$ bir jynsly proýektiw koordinatalary $u_1\tilde{x}_1 + u_2\tilde{x}_2 + u_3\tilde{x}_3 = 0$ deňlemäni kanagatlandyrsalar, onda ugrukdyryjy wektorynyň koordinatalary $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ bolan S^o çatyrygyň gönüsi $\alpha(\bar{a})$tekizlikde ýatar. Diýmek, ψ degişlilikde ol gönä degişli bolan π proýektiw tekizligiň $\tilde{A}$ nokady hem $\bar{a}$ gönüde ýatmaly bolar. Şeýlelikde, aşakdaky teorema dürs bolar.

Teorema I. Proýektiw tekizlikde islendik gönüniň deňlemesi $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ görnüşde ýazylýar.

Ters teoremanyň, ýagny islendik $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ deňlemäniň proýektiw tekizligiň käbir gönüsiniň deňlemesi boljakdygynyň, subudyny okyjylaryň özleri geçirer.

Teorema 2. Proýektiw tekizlikde islendik gabat gelmeýän iki göni bir nokatda kesişýär.

<u>Subudy.</u> Gabat gelmeýän iki $\bar{a}_1$ we $\bar{a}_2$ gönä proýektiw tekizligi kesgitleýän ψ degişlilikde, S^o çatyrygyň gabat

gelmeýän α_1 we α_2 tekizlikleri degişli bolar. Ol tekizlikler käbir ℓ göni boýunça kesişer. ℓ göni ol tekizlikleriň ikisine-de insident. Diýmek proýektiw tekizligiň ℓ gönä degişli bolan *A* nokady α_1 we α_2 tekizliklere degişli bolan $\bar{a}_1$ we $\bar{a}_2$ gönüleriň ikisine-de insident bolar. Teorema subut edildi.

Teorema 3. Proýektiw tekizlikde islendik iki nokadyň üstünden diňe bir göni geçýär.

<u>Subudy.</u> Goý ψ proýektiw tekizlik we S^o çatyryk arasyndaky insidentligi saklaýan biýektiw degişlilik bolsun. Proýektiw tekizligiň A_1 we A_2 nokatlaryna S^o çatyrygyň ℓ_{A_1} we ℓ_{A_2} gönüleri degişli bolsun. Bu iki göni S^o çatyrykda ýeke-täk α tekizligi kesgitleýär.

α tekizlige proýektiw tekizlikde $\bar{a}$ göni degişli bolsun. Onda ℓ_{A_1} we ℓ_{A_2} gönülere degişli bolan A_1 we A_2 nokatlar şol $\bar{a}$ gönä insident bolar. Başgaça aýdanymyzda, $\bar{a}$ göni A_1 we A_2 nokatlaryň üstünden geçer. Ol gönüniň ýeke-täkligini subut etmesi galdy. Berlen nokatlaryň üstünden geçýän ýene bir $\bar{в}$ göni bar, oňa S^o çatyrykda β tekizlik degişli diýeliň. Onda β tekizlik ℓ_{A_1} we ℓ_{A_2} gönüleri saklamaly bolar. Bu ýerden α tekizlik β tekizlik bilen, olara degişli $\bar{a}$ göni $\bar{в}$ göni bilen gabat gelýänligi aýdyň bolýar.

Teorema subut edildi. Ýokarda getirilen teoremalaryň analitiki subudy has aňsat.

Dogrudan hem iki

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad \bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \bar{u}_3 x_3 = 0$$

gönüň kesişme nokadyny tapmak üçin aşakdaky deňlemeler sistemasyny çözmek ýeterlik.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

$$\bar{u}_1 x_1 + \bar{u}_2 x_2 + \bar{u}_3 x_3 = 0$$

Gönüler gabat gelmeseler $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \end{vmatrix}$ kesgitleýjileriň iň bolmanda biri noldan üýtgeşik bolmaly. (Ters ýagdaýda $\{u_1, u_2, u_3\}$ wektor $\left\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\right\}$ wektora kollinear bolardy, bu bolsa gönüleriň gabat gelmegine getirerdi). Mysal üçin $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Onda ýokarky deňlemeler sistemasyny x_1 *we* x_2 boýunça çözüp alarys.

$$x_1 = k_1 x_3$$
$$x_2 = k_2 x_3$$

Diýmek, berlen gönüler ýalňyz *(k2,k2,1)* nokatda kesişer.

Indi A $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ we B (x_1^o, x_2^o, x_3^o) nokadyň üstünden geçän gönüniň deňlemesini ýazalyň $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, şol gönüniň deňlemesi bolsun. Onda gönüniň islendik $M(x_1 : x_2 : x_3)$ nokady üçin

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$
$$u \bar{x}_1 + u_2 \bar{x}_2 + u_3 \bar{x}_3 = 0$$
$$u x_1^o + u_2 x_2^o + u_3 x_3^o = 0$$

deňlemeler sistemasy ýerlikli bolar. Bu bolsa kesgitleýji

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ x_1^o & x_2^o & x_3^o \end{vmatrix} = 0 \qquad (9-6)$$

bolanda hem-de diňe şol ýagdaýda şeýle. Görşümiz ýaly gözlenýän gönüniň islendik nokadynyň koordinatalary (9-6) deňlemäni kanagatlandyrýar. Şoňa görä ol gönüniň deňlemesi bolar.

§8. Tekizligiň proýektiw özgertmesi.

π proýektiw tekizlige hem-de S^o çatyryga garalyň. Çatyrykda iki dürli $(0\vec{\ell}_1\ \vec{\ell}_2\ \vec{\ell}_3)$ hem-de $(0\vec{\ell}'_1\ \vec{\ell}'_2\ \vec{\ell}'_3)$ affin koordinatalar sistemasyny girizeliň. Goý, $(x_1 : x_2 : x_3)$ we $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ nokadyň $(O\vec{\ell}_1\ \vec{\ell}_2\ \vec{\ell}_3)$ we $(0\vec{\ell}'_1\ \vec{\ell}'_2\ \vec{\ell}'_3)$ sistemalaryň üsti bilen kesgitlenen bir jynsly proýektiw koordinatalary bolsun. Olaryň arasyndaky baglanyşygy tapjak bolalyň. Belli bolşy ýaly, $(\vec{\ell}'_1\ \vec{\ell}'_2\ \vec{\ell}'_3)$ wektorlar $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ wektorlaryň üsti bilen ýeke-täk aňladylýar:

$$\vec{\ell}'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{i_j} \vec{\ell}_j, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (9-7)$$

Bu baglanyşygyň $\left|\alpha_{i_j}\right|$ kesgitleýjisiniň noldan üýtgeşikligi hem belli. Şoňa görä, biz (9-7) sistemany $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ wektorlara görä, çözüp.

$$\vec{\ell}_i = \sum_{j=1}^{3} в_{i_j} \vec{\ell}'_j, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (9-8)$$

ýazyp bileris. Düşnükli bolşy ýaly, $x_1\vec{\ell}_1 + x_2\vec{\ell}_2 + x_3\vec{\ell}_3$ we $x_1\vec{\ell}'_1 + x_2\vec{\ell}'_2 + x_3\vec{\ell}'_3$ şol bir ℓ_A gönüniň ugrukdyryjy wektory. Şonuň üçin olar proporsional bolmaly, ýagny

$$\lambda\,(x_1\vec{\ell}_1+x_2\vec{\ell}_2+x_3\vec{\ell}_3)=x_1'\vec{\ell}_1'+x_2'\vec{\ell}_2'+x_3'\vec{\ell}_3'$$

Bu ýerde $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$ wektorlary (9-8) deňlikden alnan bahalary bilen çalşyryp alarys

$$\lambda\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{i=1}^{3}в_{i_j}\vec{\ell}_j' = \sum_{i=1}^{3}x_i'\vec{\ell}_i' ,$$

$$\lambda\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3}в_{i_j}x_i)\,\vec{\ell}_j' = \sum_{j=1}^{3}x_j'\,\ell_j'$$

$\vec{\ell}_1', \vec{\ell}_2', \vec{\ell}_3'$ koordinata wektorlary özara baglanyşyksyz bolandyklary üçin bu ýerden

$$x_j' = \lambda\sum_{i=1}^{3}в_{i_j}x_j,\quad j=1,2,3 \qquad (9-9)$$

deňlikler alynar, (9-9) baglanyşyga π proýektiw tekizligiň bir jynsly kordinatalarynyň proektiw özgertmesi diýilýär. Biz (9-9) baglanyşygy (9-7) deňlikleri ulanyp,

$$\lambda\,x_j = \sum_{i=1}^{3}\alpha_{i_j}x_i' ,\quad j=1,2,3 \qquad (9-10)$$

görnüşde hem ýazyp bileris. (9-9) ýa-da (9-10) özgertme şol bir nokadyň täze hem köne proýektiw koordinatalar sistemasyndaky koordinatalaryň özara baglanyşygyny aňladýar. Beýle özgertmede islendik gönüniň hem gönä geçjegi aýdyň.

Teorema I**.** Nokadyň gönä insidentligi. 2. Bir gönüde ýatýan iki jübüt nokadyň bölünme häsiýeti. 3. Bir gönüde ýatýan dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy proýektiw tekizligiň islendik proýektiw özgertmesiniň inwaryantydyr.

Subudy. Teoremanyň birinji teklibi proýektiw özgertmede göni çyzygyň, gönä geçýäninden gelip çykýar. Ikinji hem üçünji teklibi subut etmek üçin proýektiw tekizligiň islendik proýektiw özgertmesine şol tekizligiň käbir gönüsiniň nokatlarynda seretsek, şol gönüniň proýektiw özgertmesini alýandygymyzy subut etmek ýeterlik. Sebäbi biz ozal proektiw göni çyzygyň islendik proýektiw özgertmesiniň şol çyzykdaky dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygyny saklaýandygyny subut edipdik.

$\vec{\alpha}$ proýektiw tekizligiň belli bir gönüsi, ψ bolsa şol tekizlik hem-de S^o çatyrygyň arasyndaky biýektiw, insidentligi saklaýan degişlilik. Proýektiw özgertme S^o çatyrykda alnan $(0\vec{\ell}_1\vec{\ell}_2\vec{\ell}_3)$ hem-de $(0\vec{\ell'}_1\vec{\ell'}_2\vec{\ell'}_3)$ affin koordinatalar sistemasy arkaly kesgitlensin.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \quad (9-11)$$

$$u'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' \quad (9-12)$$

$\bar{a}$ gönüniň täze hem-de köne proýektiw sistemalardaky deňlemesi. Belli bolşy ýaly,

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2\neq 0 \quad (u_1')^2+(u_2')^2+(u_3')^2\neq 0$$

Goý, $u_1\neq 0,$ $u_2\neq 0,$ $(x_1:x_2:x_3)$ *we* $(x_1':x_2':x_3')$ $\bar{a}$

gönüniň şol bir A nokadynyň köne hem täze sistemasyndaky bir jynsly proýektiw koordinatalary bolsun. Olar özara (9-9) ýa-da (9-10) deňlikler bilen baglanyşykly. $\bar{a}$ gönüniň A nokady $(x_2:x_3)$ bir jynsly koordinatalary bilen doly kesgitlenýär. Sebäbi x_1 şol gönüniň deňlemesinden x_2 we x_3-iň üsti bilen ýeke-täk aňladylýar. Şol A nokat täze koordinatalar sistemasynda $(x_1':x_3')$ bir jynsly koordinatalary bilen hem ýeke-täk kesgitlenýär. Eger indi (9-10) deňliklerde x_2'- iň ýerine onuň (9-12) deňlemeden tapylan bahasyny goýsak, onda

$$\lambda x_2=c_{11}x_1'+c_{12}x_3'$$
$$\lambda x_3=c_{21}x_1'+c_{22}x_3'$$

deňlikleri alarys. Belli bolşy ýaly, bu deňlikler $\bar{\alpha}$ gönüniň proýektiw özgertmesini kesgitleýär. Şuny-da subut etmek gerekli.

Proýektiw tekizligiň A nokadynyň bir jynsly proýektiw koordinatalary $(x_1:x_2:x_3)$ bolsa, onda $\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)$ sanlara şol nokadyň proýektiw koordinatalary diýilýär. (9-10) deňlikleriň birinji ikisiniň iki tarapyny üçünji deňligiň iki tarapyna degişlilikde bölüp

$$\frac{x_1'}{x_3'}=\frac{\sum_{i=1}^{3}в_{i1}x_i}{\sum_{i=1}^{3}в_{i3}x_i},\qquad \frac{x_2'}{x_3'}=\frac{\sum_{i=1}^{3}в_{i2}x_i}{\sum_{i=1}^{3}в_{i3}\ x_i}$$

ýa-da

$$\frac{x_1'}{x_3'}=\frac{в_{11}\frac{x_1}{x_3}+в_{21}\frac{x_2}{x_3}+в_{31}}{в_{13}\frac{x_1}{x_3}+в_{23}\frac{x_2}{x_3}+в_{33}},\quad \frac{x_2'}{x_3'}=\frac{в_{12}\frac{x_1}{x_3}+в_{22}\frac{x_2}{x_3}+в_{32}}{в_{13}\frac{x_1}{x_3}+в_{23}\frac{x_2}{x_3}+в_{33}}, \qquad (9\text{-}13)$$

deňlikleri alarys. Proýektiw koordinatalary $\frac{x_1}{x_3}=\xi_1,\ \frac{x_2}{x_3}=\xi_2,$

$\frac{x_1'}{x_3'}=\xi_1',\ \frac{x_2'}{x_3'}=\xi_2',$ bilen bellesek, onda (9-13) deňlikler

$$\xi_1'=\frac{в_{11}\xi_1+в_{24}\xi_2+в_{31}}{в_{13}\xi_1+в_{23}\xi_2+в_{33}}$$

$$(9-14)$$

$$\xi_2'=\frac{в_{12}\xi_1+в_{22}\xi_2+в_{32}}{в_{13}\xi_1+в_{23}\xi_2+в_{33}}$$

görnüşinde ýazylýar. (9-14) deňliklere proýektiw koordinatalaryň özgertmesi diýilýär.

Indi (8) proýektiw özgertmeler toplumynyň topar emele getirşini göreliň. Sadalyk üçin proýektiw tekizligiň nokatlarynyň bir jynsly proýektiw koordinatalaryny sütün görnüşde ýazsak hem-de ol özgertmäniň deňlikleriniň koeffisientlerinden B matrisa düzsek,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} - nokat, \qquad B = \begin{pmatrix} в_{11} & в_{21} & в_{31} \\ в_{12} & в_{22} & в_{32} \\ в_{13} & в_{23} & в_{33} \end{pmatrix}$$

onda (9-9) özgertmäni

$$X' = \lambda BX \qquad (9-15)$$

görnüşde ýazyp bileris. Üçünji tertipli, kesgitleýjileri nola deň bolmadyk matrisalar toplumynyň köpeltmek operasiýasy boýunça topar emele getirýändigi sebäpli, seredilýän proektiw özgertmeleriň toplumynyň yzly-yzyna ýerine ýetirmek operasiýasy boýunça topar emele getirjegi aýdyň. Şol topary G bilen belläliň. Onuň bölek toparynyň käbirine seredeliň.

Goý, $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizlik, $(0_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ şol tekizlikdäki affin koordinatalar sistemasy, M tekizligiň islendik nokady, (x,y) bolsa nokadyň $(0_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ sistemadaky affin koordinatalary. M nokadyň $(0_1 \vec{\ell} \vec{\ell}_2)$ sistema bilen baglanyşykly bir jynsly affin koordinatalary $(x_1 : x_2 : x_3)$ bolsun. Belli bolşy ýaly, M nokadyň bu iki koordinatalarynyň arasynda $x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$ gatnaşyk bar. $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky nokatlarynyň bir jynsly affin koordinatalary hemişe *(x1;x2:0)* görnüşde bolar. x_1, x_2 - sanlaryň kesgitlemä görä $(x_1; x_2; 0)$ nokadyň üstünden geçýän parallel gönüleriň çogdamynyň ugrukdyryjy wektorynyň koordinatalary bolýandygyny hem belläp geçeliň. G toparyň elementleriniň (proýektiw özgertmeleriň) $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky $\overline{a}_\infty$ gönüsini ýene özüne geçirýänlerine seredeliň. Düşnükli bolşy ýaly, G toparyň şeýle elementi (özgertmesi)

$$B = \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9-16)$$

matrisa arkaly (9-15) deňlik bilen kesgitlener. (9-16) görnüşdäki, kesgitleýjileri noldan üýtgeşik bolan, matrisalaryň toplumy hem köpeltmek operasiýasy boýunça topar emele getirýär. Diýmek, G toparyň $\bar{\alpha}$ tekizligiň tükeniksiz uzaklykdaky gönüsini ýene özüne öwürýän elementleri-de (proýektiw özgertmeleri) yzly-yzyna ýerine ýetirmek operasiýasy boýunça G_1 topar emele getirer. G_1 köplük G toparyň bölek toparydyr.

$\psi \in G_1$, käbir özgertmäni alalyň. Ol

$$\lambda x_1' = в_{11}x_1 + в_{12}x_2 + в_{13}x_3,$$
$$\lambda x_2' = в_{21}x_1 + в_{22}x_2 + в_{23}x_3,$$
$$\lambda x_3' = \qquad\qquad\qquad x_3$$

deňlikler bilen kesgitlener. Şularyň ýokarky ikisiniň sag hem çep taraplaryny degişlilikde üçünjiniň sag we çep taraplaryna bölüp alýarys.

$$\frac{x_1'}{x_3'} = в_{11}\frac{x_1}{x_3} + в_{12}\frac{x_2}{x_3} + в_{13},$$
$$\frac{x_1'}{x_3'} = в_{21}\frac{x_1}{x_3} + в_{22}\frac{x_2}{x_3} + в_{23}$$

Eger $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_1}{x_3} = y'$, $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ bolýangyny ýada salsak, ýokarky deňlikleri aşakdaky ýaly hem ýazyp bileris

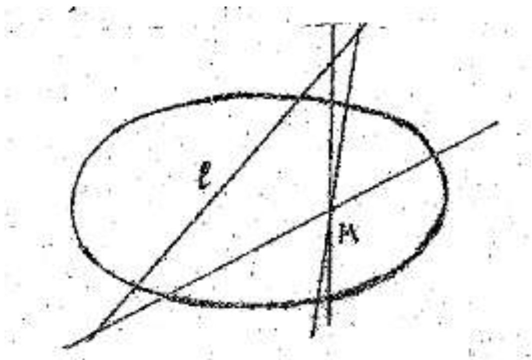
$$x' = в_{11}x + в_{12}y + в_{13},$$
$$y' = в_{21}x + в_{22}y + в_{23}. \qquad (9-17)$$

Şerte götä, $|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9-17)$ α tekizligiň affin özgertmesi. Diýmek, α tekizligiň affin özgertmeleriniň G_1 topary $\bar{\alpha}$ ýaýbaň tekizligiň proýektiw özgertmeleriniň G toparynyň bölek topary bolýar diýsek ýalňyşmarys. Siz affin geometriýasyny öwreneniňizde, tekizligiň hereket atlandyrylýan özgertmelerine hem seredensiňiz. Hereketi kesgitleýän G_2 özgertmeler köplüginiň tekizligiň affin özgertmeleriniň toparynyň bölek topary bolýandygyna hem üns berensiňiz. Netijede $G_2 \subset G_1 \subset G$ düzüm emele gelýär. Aşakdaky tablisa okyjylary gyzyklandyrsa gerek

Inwariantlar		
Hereket	Affin özgertme	Proýektiw özgertme
1. Uzynlyk	1.	1.
2. Burç	2	2
3. Parallelik	3. Parallelik	3.
4. Üç nokadyň bölünmegi	4. Üç nokadyň bölünmegi	4.
5. Nokadyň gönä insidentligi	5. Nokadyň gönä insidentligi	5. Nokadyň gönä insidentligi
6. Dört nokadyň bölünmegi	6. Dört nokadyň bölünmegi	6. Dört nokadyň bölünmegi
7. Dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy.	7.Dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy	7. Dört nokadyň çylşyrymly gatnaşygy

Belli bolşy ýaly hereketiň (G_2 toparyň) inwaryýantlaryny öwrenýän geometriýa metriki geometriýa atlandyrylýar. Ol esasan mekdepde öwrenilýär. Affin özgertmeleriň (G_1 toparyny) inwaryýantlaryny öwrenýän geometriýa affin geometriýasydyr. Proýektiw özgertmeleriň (G toparyň) inwaryýantlaryny öwrenýän geometriýa proýektiw geometriýa diýilýär. Görnüşi ýaly, G_3 G_1 G_2 toparlaryň hersi bir geometriýany kesgitleýär. Şu ýerde islendik K köplügiň üstünde kesgitlenen Q özgertmeler topary geometriýa kesgitlärmikä diýen pikir döreýär. Ine, şu ideýa nemes matematigi F. Kleýniň geometriýanyň umumy prinsipini kesgitleýşiniň esasynda ýatýar. Şol kesgitlemä görä, geometriýa figuralaryň käbir özgertmeler toparynyň täsirinde üýtgemeýän häsiýetlerini öwrenýär diýmek bolar. Bu ýerden geometriýanyň sanynyň tükeniksiz köplügi gelip çykýar.

Aşakda biz proýektiw tekizlikde islendik ikinji tertipli egrini hem-de onuň üçki hem daşky nokatlaryny kesgitläris. Şu maglumatlary ulanyp belli hasapdan Lobaçewskiniň (ýa-da Ewklidiňki bolmadyk) geometriýasyny kesgitläp bolar. Goý G proýektiw tekizligiň proýektiw özgertmeleriniň topary bolsun. Onuň käbir dargamaýan ikinji tertipli egriniň nokatlaryny özünde galdyrýan hem-de onuň içki nokadyny ýene-de içki nokada getirýän G_3 bölek toparyna garalyň. G_3 toparyň inwariantlaryny öwrenýän geometriýa Lobaçewskiniň geometriýasy atlandyrylýar. Eger garalýan ikinji tertipli egriniň içki nokatlaryna Lobaçewskiniň geometriýasynyň nokatlary hökmünde, proýektiw tekizligiň gönüleriniň şol egriniň içinde ýatýan böleklerine bolsa, şol geometriýanyň gönüleri hökmünde garasak onda biz Lobaçewskiniň geometriýasynyň modelini alarys. Şu model Lobaçewskiniň geometriýasynyň gönüsine onuň daşynda ýatýan nokatdan islendik köp parallel göni geçirip bolýandygyny aýdyň görkezýär. Dogrudan hem ℓ şol modeliň gönüsi we M ondan daşarda ýatýan nokat bolsun. ℓ gönüniň modelden daşda ýatýan (92-nji surat) islendik nokadyndan hem-de M nokatdan göni geçirsek, onda şu gönüniň modelde ýatýan bölegi M nokatdan geçer, özi-de ℓ gönüni kesmez. Diýmek, ol ℓ gönä parallel göni bolar.



92-nji surat

M nokatdan geçýän, ℓ gönä parallel gönüler görnüp durşy ýaly tükeniksiz köp,

§9. Ikinji tertipli egrileriň proýektiw klassifikasiýasy

$\bar{\alpha}$ -ýaýbaň tekizlikde $(0_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ affin koordinatalar sistemasyny guralyň. Tekizligiň nokatlarynyň şol sistemasyndaky koordinatalary (x, y), degişli proýektiw sistemasyndaky bir jynsly affin proýektiw koordinatalary $(x_1 : x_2 : x_3)$ bolsun. Belli bolşy ýaly, $x = \frac{x_1}{x_3}, \ y = \frac{x_2}{x_3}$ baglanyşyk bar. Eger ikinji tertipli egriniň $(0_1 \vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2)$ affin sistemasyndaky deňlemesi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

görnňşde bolsa, onda $x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$ baglanyşyklary ulanyp, şol deňlemäni proýektiw koordinatalar sistemasynda ýazyp bileris.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \qquad (9-18)$$

Indi islendik π proýektiw tekizlikde ikinji tertipli egrini kesgitlemäge mümkinçiligimiz bar.

Islendik π proýektiw tekizlikde birjynsly koordinatalary (9-18) deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlaryň geometrik ornuna ikinji tertipli egri ýa-da gysgaça kwadrika diýilýär. Islendik kwadrikany

$$\begin{aligned} x_1 &= в_{11}y_1 + в_{12}y_2 + в_{13}x_3, \\ x_2 &= в_{21}y_1 + в_{22}y_2 + в_{23}x_3, \qquad (9\text{-}19) \\ x_3 &= в_{31}y_1 + в_{32}y_2 + в_{33}y_3 \end{aligned}$$

proýektiw özgertmäniň kömegi bilen

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0 \qquad (9\text{-}20)$$

görnüşe getirip boljakdygy düşnükli. Bu ýerde λ_1 λ_2 λ_3 sanlaryň her biri diňe 0, 1,-1 bahalara eýe bolup bilýär.

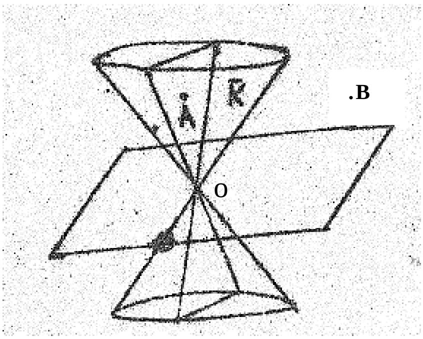
Diýmek, kwadrikanyň kanonik görnüşi diňe bäş tüýsli bolýar.

Olar aşakdaky tablisada berilýär:

1	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$	süýnmek töwerek
2	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$	boş kwadrika
3	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	Nokat
4	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	iki göni
5	$y_1^2 = 0$	iki gabat gelýän göni

Proýektiw tekizlikde $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ kwadrikanyň deňlemesini kanagatlandyrýan nokat ýok. Şonuň üçin oňa boş kwadrika diýilýär. Deňlemesi $y_1^2 + y_2^2 = 0$ bolan kwadrika bolsa diňe ýeke (0, 0, 1) nokatdan durýar.

Ýokarda getirilen bäş dürli kwadrikanyň öwrenmek üçin gyzyklysy diňe süýnmek töwerekdir (owal). Süýnmek töweregiň käbir häsiýetini öwreneliň. Başda islendik proýektiw özgertmede kwadrikanyň ýene kwadrika geçýändigini, şonuň üçin onuň proýektiw geometriýanyň elementi bolýandygyny bellemek zerur. Goý indi (9-18) deňlemäniň üsti bilen käbir süýnmek töwerek, hem-de $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ gönä berilsin. Olaryň kesişme nokatlaryny tapmaga girişeliň. Süýnmek töweregiň kanonik deňlemesinden görnüşi ýaly, oňa biz üç ölçegli Ewklid giňişliginde berlen, depesi (koordinatalar başlangyjy) aýrylan K konus hökmünde garap bileris. $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ gönä, koordinatalar başlangyjyndan geçýän şol giüişlikdäki tekizlik hökmünde serederis. Bu tekizlik we K konus ýa iki göni boýunça, ýa bir göni boýunça (galtaşýan ýagdaýy) kesişer, ýa-da düýbünden kesişmez, Diýmek, $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ göni hem berlen süýnmek töweregi ýa iki nokatda, ýa bir nokatda (galtaşýan ýagdaýy) keser, ýa-da düýbünden kesmez.



93-nji surat

Islendik süýnmek töweregiň içki hem daşky nokatlaryny kesgitläliň. K konusyň içinde A nokat alalyň (93-nji surat). O bilen A nokadyň üstünden tekizlik geçireliň. Ol tekizlik K konusy iki göni arkaly keser. Indi K konusyň daşynda B nokat alalyň, O bilen B nokadyň üstünden K konusy kesmeýän tekizlik geçireliň. Ol tekizligi OB okuň töwereginde aýlap, K konusa galtaşýan tekizlik edeliň. Diýmek, B bilen O nokadyň üstünden K konusa galtaşýan tekizlik geçirip bolýar, A bilen O nokadyň üstünden şeýle tekizlik geçirmek mümkin däl. Şeýlelikde, π -proýektiw tekizligiň käbir nokadyndan süýnmek töwerege galtaşýan geçirip bolýar. Şol nokatlaryň köplügine süýnmek, töweregiň daşky nokatlary diýilýär, käbir nokatdan galtaşýan geçirip bolmaýar, olaryň köplügine içki nokatlar diýilýär Başgaça aýdanymyzda, süýnmek töweregiň içki nokatlary proýektiw tekizligiň K konusyň içki nokatlaryna daşky nokatlary bolsa, şol konusyň daşky nokatlaryna degişli nokatlaryndan durýar.

(9-18) deňleme bilen berlen kwadrikanyň käbir $A_o(x_1^o : x_2^o : x_3^o)$ nokadyndan geçýän galtaşýanyň deňlemesini ýazmak kyn däl. Dogrudan hem (9-18) deňlemä üç ölçegli giňişlikdäki üstüň deňlemesi hökmünde garap hem-de oňa $A_o(x_1^o : x_2^o : x_3^o)$ nokatda galtaşýan tekizlik geçirip alarys.

$$x_1\sum_{i=1}^{3}\alpha_{1i}x_i^o + x_2\sum_{i=1}^{3}\alpha_{2i}x_i^o + x_3\sum_{i=1}^{3}\alpha_{3i}x_i^o = 0$$

Düşnükli bolşuna görä, bu deňleme kwadrika A_o nokatda galtaşýan gönüniň deňlemesi. Muny

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, X^o = \begin{pmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

belgileri girizip, gysgaça

$$X'AX^o = 0 \qquad (9-21)$$

görnüşde ýazmak bolar.

Eger X^o nokat $((x_1^o : x_2^o : x_3^o))$ $(9-18)$ deňleme bilen berlen süýnmek töwerekde ýatsa (9-21) deňleme süýnmek töwerege X^o nokatda gatnaşýan gönüniň deňlemesi bolýar. X^o nokat şol kwadrikada ýatmaýan halynda (9-21) göni X^o nokadyň (9-18) kwadrika bagly polýarasy atlandyrylýar. X^o nokada şol polýaranyň polýusy didýilýär. Islendik $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ gönüniň (9-18) kwadrika bilen bagly polýusyny tapmak üçin

$$\begin{aligned}
\lambda\, u_1 &= \alpha_{11}x_1^o + \alpha_{12}x_2^o + \alpha_{13}x_3^o, \\
\lambda\, u_2 &= \alpha_{21}x_1^o + \alpha_{22}x_2^o + \alpha_{23}x_3^o, \\
\lambda\, u_3 &= \alpha_{31}x_1^o + \alpha_{32}x_2^o + \alpha_{33}x_3^o
\end{aligned}$$

sistemany x_1^o, x_2^o, x_3^o boýunça çözmek ýeterlik. Bu sistemanyň islendik u_1, u_2, u_3, sanlar üçin ýeke-täk çözüwiniň barlygy $|A| \neq 0$ bolmagyndan gelip çykýar.

§10. Paskalyň teoremasy.

Käbir kwadrikanyň üstünde ýatýan A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 nokatlara A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 gönüler bilen bilelikde şol kwadrikanyň içinden çyzylan alty burçluk diýilýär. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 nokatlara onuň depeleri A_1A_2,

$A_2A_3, \ldots, A_6A_1$ gönülere onuň taraplary diýilýär. A_1A_2 we A_4, A_5, A_2, A_3, we A_5, A_6, A_3, A_4, we A_6, A_1 taraplara garşylykly taraplar, A_1 we A_4, A_2 we A_5, A_3 we A_6 nokatlara garşylykly depeler diýilýär.

Teorema. Islendik üçüsi bir gönä insident bolmadyk A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 nokatlar bir dargamaýan kwadrikada ýatsa onda depeleri şol nokatlarda bolan alty burçlugyň garşylykly taraplarynyň kesişme nokatlary bir gönä insident bolýar.

Subudy. Garalýan proýektiw tekizlikde proektiw özgertmäniň kömegi bilen kwadrikany $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ kanonik görnüşe getireliň. Şol özgertmede A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 nokatlar $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ kwadrikanyň üstünde ýatýan. B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 nokatlara geçer. Proektiw özgertmede nokadyň gönä hem-de kwadrika insidentligi saklanýanlygy sebäpli, Paskalyň teoremasyny $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ kwadrikanyň üstünde ýatýan B_i, $i = \overline{1, 6}$, nokatlar üçin subut etmek ýeterlik. Şu nokatlaryň her biriniň proektiw koordinatalarynyň üçünjisiniň noldan üýtgeşik bolýany sebäpli, biz şol koordinatalar bire deň diýip bileris. Diýmek B_i, $i = \overline{1, 6}$, nokatlaryň koordinatalary degişlilikde $x_1^i = \cos\varphi_i$, $x_2^i = \sin\varphi_i$, $x_3^i = 1$, $i = \overline{1,6}$ bolar. B_1 we B_2 nokatlardan geçýän gönüniň deňlemesini ýazalyň

$$(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)x_1 + (\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)x_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1)x_3 = 0$$

ýa-da

$$\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot x_1+\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}x_2-\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\cdot x_3=0.$$

Altyburçlygyň beýleki taraplarynyň deňlemesini edil şeýle görnüşde ýazalyň, onuň garşylykly taraplarynyň kesişme $P_{1,}\ P_2, P_3$ nokatlaryny tapalyň. Şolaryň koordinatalaryny degişlilikde birinji, ikinji we üçünji sütünlerde ýazyp, Δ kesgitleýji düzeliň

$$\Delta=\begin{vmatrix} sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot cos\frac{\varphi_5-\varphi_4}{2}-sin\frac{\varphi_4+\varphi_5}{2}\cdot cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} & \bullet & \bullet & \bullet \\ cos\frac{\varphi_4-\varphi_5}{2}\cdot cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}-cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\cdot cos\frac{\varphi_4-\varphi_5}{2} & \bullet & \bullet & \bullet \\ sin\frac{\varphi_4+\varphi_5-\varphi_1-\varphi_2}{2} & & & \end{vmatrix}$$

Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, bize $\Delta=0$ bolýandygyny subut etmek ýeterlik. P_1 bilen P_2 nokadyň ikisiniň üstünden göni çyzyk geçireliň. Onuň deňlemesi $\frac{x_2}{x_3}=\lambda$ bolar ýaly edip başda koordinatalar sistemasy saýlanyp alyndy diýeliň. Şonda, Δ kesgitleýjide

$$\frac{cos\,(\varphi_4+\varphi_6)/2\cdot cos\,(\varphi_1+\varphi_2)/2\cdot cos\,(\varphi_4-\varphi_5)/2}{\sin\,(\varphi_4+\varphi_5-\varphi_1-\varphi_2)/2}=\lambda$$

$$\frac{cos\ (\varphi_5+\varphi_6)/2\cdot cos\ (\varphi_3+\varphi_2)/2-cos\ (\varphi_2+\varphi_3)/2\ cos\ (\varphi_5-\varphi_6)/2}{\sin\ (\varphi_5+\varphi_6)-\varphi_2-\varphi_3)/2}=\lambda$$

deňlikler ýerine ýeter. Indi

$$\frac{cos\,(\varphi_6+\varphi_1)/2\cdot cos\,(\varphi_4+\varphi_3)/2-cos\,(\varphi_3+\varphi_4)/2\cdot cos\,\,(\varphi_6-\varphi_1)/2}{\sin\,(\varphi_6+\varphi_1)-\varphi_3-\varphi_4)}=\lambda$$

deňligiň ýerine ýetjekdigini subut etsek, onda Δ kesgitleýjide 2-nji, 3-nji setirler proporsional bolar hem-de Δ=0 deňlik ýerine ýeter. $tg\,\frac{\varphi_i}{2}=t_i,\, i=\overline{1,6},$ bellikleri girizeliň. Ýokardaky deňlikleriň çep tarapynyň sanawjysyny hem maýdalawjysyny degişlilikde $cos\,\frac{\varphi_1}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_2}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_4}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_5}{2}$,

$cos\,\frac{\varphi_2}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_3}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_5}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_6}{2}$, $cos\,\frac{\varphi_3}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_4}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_6}{2}\cdot cos\,\frac{\varphi_1}{2}$

aňlatmalara bölüp alarys:

$$\frac{t_2\cdot t_1-t_4\cdot t_5}{(t_4+t_5)(1-t_1\cdot t_2)-(t_1+t_2)(1-t_4\cdot t_5)}=\lambda,$$

$$\frac{t_3\cdot t_2-t_5\cdot t_6}{(t_5+t_6)(1-t_2\cdot t_3)-(t_2+t_3)(1-t_5\cdot t_6)}=\lambda.,$$

$$\frac{t_3\cdot t_4-t_1\cdot t_6}{(t_6+t_1)(1-t_4\cdot t_3)-(t_4+t_3)(1-t_1\cdot t_6)}=\lambda..$$

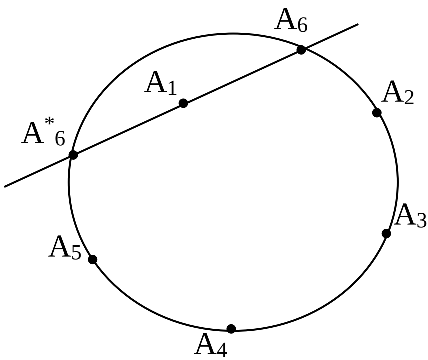
Proporsiýanyň häsiýetine görä

$$[t_6 - t_3)(t_2 t_1 - t_4 t_5) + (t_1 - t_4)(t_3 t_2 - t_5 t_6)]:$$
$$\{t_6 + t_3)[(t_4 + t_5)(1 - t_1 t_2) - (t_1 + t_2)(1 - t_4 \cdot t_5)] +$$
$$+ (t_1 - t_4)[(t_5 + t_6)(1 - t_2 t_3) - (t_2 + t_3)(1 - t_5 \cdot t_6)]\} = \lambda$$

ýazyp bileris. Şu ýerden ýönekeý amallardan soň, ýokarky deňlikleriň üçünjisi alynýar. Teorema subut edildi.

Ters teorema. Eger altyburçlygyň garşylykly taraplarynyň kesişme nokatlary bir gönä insident bolsa, onda alty burçlygyň depeleri bir kwadrikada ýatar.

Subudy. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 – altyburçlygyň depeleri. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 nokatlaryň ňstünden kwadrika geçireliň (bu mümkin), A_6, A_1 gönüniň şol kwadrikany kesip geçýän hem-de A_1 bilen gabat gelmeýän ikinji nokadyny A_6^* arkaly belläliň. Berlen altyburçlygyň garşylykly taraplarynyň N_1, N_2, N_3 kesişme nokatlarynyň ýatýan gönüsi ℓ bolsun. Gurluşa görä, (94-nji surat) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6^*$ nokatlar bir kwadrikada ýatýar. Diýmek, A_1A_2 we A_4A_5, A_2A_3 we $A_5 A_6^*$ A_3 A_4 we $A_6^* A_1$ taraplaryň M_1, M_2, M_3 kesişme nokatlary bir m gönüde ýatar.



94-nji **surat**

M_1 nokadyň N_1 nokat bilen, M_3 nokadyň N_3 bilen gabat gelýänligi sebäpli ℓ we m gönüler hem gabat geler. Şoňa görä-de N_2 nokat M_2 nokadyň üstüne düşer. Bu ýerden A_6A_5 -bilen $A^*_6A_5$ gönüleriň hem gabat geljegi aýdyň bolýar. (A_5 we N_2 nokadyň üstünden geçýän göni hökmünde). Görnüşi ýaly, A_6 bilen A_6^* nokatlaryň her biri iki A_6A_1 hem A_6N_2 gönüniň üstünde ýatýar, ýagny olaryň kesişme nokady bilen gabat gelýär. Şeýlelikde A_6 we A_6^* nokatlar hem gabat gelýär. Teorema subut edildi.

§11. Proýektiw tekizlikde duallyk prinsipi.

Proýektiw tekizlikde käbir proektiw koordinatalar sistemasyny girizeliň. Şol sistemada islendik nokadyň üç sandan durýan bir jynsly proýektiw koordinatasy bar. Islendik göni çyzyk hem üç sandan durýan koordinatalary bilen kesgitlenýär. $M(x_1 : x_2 : x_3)$ nokadyň $(u_1 : u_2 : u_3)$ gönä insidentligi ýa-da gönüniň nokada insidentligi hem şol bir $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ görnüşde ýazylýar. Umuman, proýektiw tekizlikde nokat hem göni deň hukukly bolýar.

$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ gönüniň kwadrika insidentligi $(u_1 : u_2 : u_3)$ koordinatalary bolan nokadyň kwadrika insidentligi diýlip düşünilýär. Kwadrikanyň şeýle bir täsin häsiýeti bar.

$$\sum_{J,\, i=1}^{3} \alpha_{iJ} x_i x_j, \quad \alpha_{iJ} = \alpha_{iJ},$$

dargamaýan kwadrika garalyň.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

matrisa kwadrikanyň matrisasy diýilýär. Kwadrikany matrisalaryň häsiýetine görä $XAX' = 0$ görnüşde ýazyp bolar.

Bu ýerde $X = (x_1, x_2, x_3)$, X' transponirlenen X. Dargamaýan kwadrika üçin (diňe bir nokatdan durýan, mysal üçin $x_1^2 + x_2^2 = 0$ kwadrika dargaýan kwadrika diýip düşünýäris) A matrisanyň kesgitleýjisi noldan üýtgeşik bolar. Şoňa görä,

$(y_1, y_2, y_3)\, A^{-1} (y_1, y_2, y_3)^1 = 0$

kwadrika hem garamak derwaýys. Belli bolşy ýaly, berlen kwadrika $Y_o = (y_1^o : y_2^o : y_3^o)$ nokatda galtaşýan gönüniň deňlemesi $(y_1, y_2, y_3)\, A^{-1}(y_1^o, y_2^o, y_3^o)^1 = 0$

onuň koordinatalary bolsa $(y_1^o, y_2^o, y_3^o)A^{-1}$ bolar. Şu koordinatalary birinji kwadrikanyň deňlemesiniň çep tarapynda ornuna goýsak

$$(y_1^o, y_2^o, y_3^o)A^{-1}AA^{-1}(y^o, y_2^o, y_3^o)^1 = 0$$

$$(y_1^o, y_2^o, y_3^o)A^{-1}(y_1^o, y_2^o, y_3^o)^1 = 0,$$

ýagny $A^{-1}Y_o^1$ nokadyň $XAX' = 0$ kwadrikada ýatýanyny göreris.

Diýmek, $XAX' = 0$ kwadrikada ýatýan islendik nokadyň koordinatalary $XAX' = 0$ kwadrika galtaşýan gönüniň koordinatalary bolýar. Şoňa görä $XAX' = 0$ kwadrika insident göni diýip, oňa galtaşýan gönä hem aýdylýar.

Proýektiw tekizlikde teorema subut edilip, onuň şerti hem tassyklamasy nokat, göni, insident sözler arkaly berilen. Onda şol teoremada nokat hem-de göni sözleriň ýerini çalşyrsak hem teorema dogrulygyny saklaýar. Bu häsiýete duallyk prinsipi diýilýär. Birnäçe mysal getireliň.

I. Paskalyň teoremasy. Eger dargamaýan kwadrika insident alty nokat altyburçlyk emele getirse, onda onuň garşylykly taraplaryna insident nokatlar bir gönä insidentdir.

Dual teorema. Eger dargamaýan kwadrika insident alty göni altyburçlyk emele getirse, onuň

garşylykly depelerine insident gönüler bir nokada insidentdir. Paskalyň teoremasy hem-de oňa dual teorema Ewklid tekizligi üçin has düşnükli formulirlenýär. Ýagny dargamaýan, ikinji tertipli egriniň içinden çyzylan altyburçlygyň garşylykly taraplarynyň kesişme nokatlary bir gönüde ýatýar. (Paskalyň teoremasy).

Dargamaýan ikinji tertipli egriniň daşyndan çyzylan altyburçlygyň garşylykly depelerinden geçýän gönüler bir nokatda kesişýärler. (Dual teorema).

2. Paskalyň ters teoremasy. Altyburçlygyň garşylykly taraplaryna insident nokatlar bir gönä insident bolsalar onda şol altyburçlugyň depeleri hem bir kwadrika insident bolarlar.

Dual teorema. Altyburçlugyň garşylykly depelerine insident gönüler bir nokada insident bolsalar, onda şol alty burçlugyň taraplary hem bir kwadrika insident (galtaşýan) bolar.

3. Ýokarda Dezargin teoremasy proýektiw geometriýanyň täsin häsiýetleriniň biri diýip aýdylypdy. Onuň ýene bir täsin zady oňa dual bolan teorema onuň ters teoremasy bilen gabat gelýänligidir.

4. Proektiw tekizlikde islendik iki nokat bir gönä insidentdir (iki nokadyň üstünden bir göni geçýär).

Dual teklip: Proektiw tekizlikde islendik iki göni bir nokada insidentdir (iki göni bir nokatda kesişýär).

5. Islendik nokada insident gönüleriň içinde berlen kwadrika insident gönüniň sany ikiden köp däl.

Dual teklip. Islendik gönä insident nokatlaryň içinde berlen kwadrika insident nokadyň sany ikiden köp däl.

6. Eger käbir göni çyzyga insident her bir nokat berlen kwadrika insident bolsa, onda ol dargaýan kwadrikadyr.

Dual teklip. Eger käbir nokada insident gönüniň her biri berlen kwadrika insident (galtaşýan ýa-da bir nokatda kesýän) bolsa, ol dargaýan kwadrikadyr.

7. $(x_1 : x_2 : x_3)$, $(y_1 : y_2 : y_3)$, $(z_1 : z_2 : z_3)$ koordinatalary bilen berlen nokatlaryň bir gönä insident bolmagy üçin

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

şertiň ýerine ýetmegi zerur hem ýeterlik.

Dual teklip $(u_1 : u_2 : u_3), (\vartheta_1 : \vartheta_2 : \vartheta_3), (\omega_1 : \omega_2 : \omega_3)$ koordinatalary bilen berlen gönüleriň bir nokada insident, ýagny bir nokatdan geçmegi üçin

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0$$

şertiň ýerine ýetmegi zerur hem ýeterlik.

8. Islendik üçüsi bir gönä insident bolmadyk bäş nokat dargamaýan kwadrika insidentdir.

Dual teklip. Islendik üçüsi bir nokada insident bolmadyk bäş gönä dargamaýan kwadrika insidentdir. (Gatnaşýandyr). Dogrudan hem $(a_1^i : a_2^i : a_3^i),\ i=\overline{1,5}$, berlen gönüleriň koordinatalary $M_i(a_1^i : a_2^i, a_3^i),\ i=\overline{1,5}$, nokatlara garalyň. Olaryň islendik üçüsi bir gönä insident däl. Şoňa görä, nokatlaryň üstünden dargamaýan $XAX'=0$ kwadrika geçýär. Onda ýokarda aýdylyşy ýaly, $(a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + a_3^i x_3 = 0$ gönüler $XAX'=0$ kwadrika galtaşar.

§12. Proýektiw giňişlik

Bu düşünjäni girizmekde biz kynçylyk çekmeris. Sebäbi öwreniljek giňişligiň kesgitlemesi-de, onuň köp düşünjeleri-de ýokarda garalan proýektiw göni hem tekizlik düşünjelerine meňzeşlikde berilýär. R^4 affin giňişliginde O nokada hem-de ondan geçýän gönüleriň, tekizlikleriň (iki ölçegli), giper tekizlikleriň çatyrygyna garalyň. Çatyrygy gysgaça O harpy bilen belläliň. Eger M nokat a gönüde ýatsa, onda M nokat a gönä insident diýilýär. Tersine, eger a göni M nokadyň üstünden geçse, onda a göni M nokada insident diýilýär. Şunuň ýaly-da a göni α tekizlikde ýatsa, a göni α tekizlige insident bolýar, α tekizlik a gönüniň üstünden geçse, onda α tekizlik a gönä insident diýilýär.

Kesgitleme. Nokat, göni hem-de tekizlik diýilýän elementlerden durýan F köplük berilsin. Şol köplükde nokadyň gönä (gönüniň nokada) gönüniň tekizlige (tekizligiň gönä) insidentligi düşünjesi bar bolsun. F köplügiň nokatlaryny, gönüleriňi, tekizliklerini degişlilikde O çatyrygyň gönülerine, tekizliklerine hem-de giper tekizliklerine geçirýän F we O çatyrygyň arasynda bir belgili öwürme bar bolsa, öwürmede insidentlik düşünjesi saklanýan bolsa, onda F köplüge üç öçegli proýektiw giňişlik diýilýär. Ol P^3 bilen belgilenýär.

Proýektiw giňişlikleriň käbir wekillerine garalyň. O çatyrygyň gönüleriniň, tekizliklerini hem-de giper tekizliklerini degişlilikde nokat, göni hem tekizlik atlandyrsak, onda O çatryk proýektiw giňişlik bolar.

R^4 giňişlikde merkezi O nokatda bolan $(O, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4)$ koordinatalar sistemasyny girizeliň. Oňa O çatyrykdaky affin koordinatalar sistemasy diýilýär. Çatyrygyň islendik gönüsi öz ugrukdyryjy wektory ýa-da şol wektoryň şu koordinatalar sistemasyndaky (x_1, x_2, x_3, x_4) koordinatalary bilen kesgitlenýär. Göni çyzygyň ugrukdyryjylary köp bolany sebäpli, ony kesgitleýän (x_1, x_2, x_3, x_4) tertileleşdirilen san dörtlügi hem köp. Emma ol dörtlük erkin däl. Olaryň islendigi haýsy-da bolsa birini käbir λ sana köpeltmek bilen alynýar, ýagny $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ görnüşde bolýar. Şeýlelikde çatyrygyň islendik gönüsi özara proporsional bolan (x_1, x_2, x_3, x_4) dörtlügiň klasy bilen kesgitlenýär. Eger gönüler dürli bolsa, olary kesgitleýän klaslar hem dürlidir.

Şoňa görä-de özara dürli klaslara biz proýektiw giňişligiň nokatlary hökmünde garap bileris. Şeýle proýektiw giňişlige arifmetik proýektiw giňişlik diýilýär. Arifmetik giňişligiň M nokadynyň koordinatalary diýip hem şol nokady kesgitleýän klasyň islendik wekiline aýdylýar. Ol $M(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ görnüşde ýazylýar. x_1, x_2, x_3, x_4 sanlara M nokadyň bir jynsly proýektiw koordinatalary diýilýär. Olaryň hemmesiniň bir wagtda nola deň bolup bilmeýändigi düşnüklidir.

0 çatyrygyň islendik tekizligi şol tekizlikde ýatan islendik iki gönüsi bilen kesgitlenýär. $(x_1^o, x_2^o, x_3^o, x_4^o)$, $(y_1^o, y_2^o, y_3^o, y_4^o)$ şol gönüleriň ugrukdyryjy wektorlarynyň kordinatalary bolsa islendik, ikisi bir wagtda nola öwrülmeýän α bien β san arkaly şol tekizligiň islendik nokadynyň kordinatalary

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^o\alpha + y_1^o\beta, \\
x_2 &= x_2^0\alpha + y_2^0\beta, \qquad\qquad (9-22) \\
x_3 &= x_3^o\alpha + y_3^o\beta, \\
x_4 &= x_4^o\alpha + y_4^o\beta
\end{aligned}
$$

görnüşde ýazylar. Biz (9-22) deňliklere arifmetik giňişligiň $(x_1^o : x_2^o : x_3^o : x_4^o)$ we $(y_1^o : y_2^o : y_3^o : y_4^o)$ nokatlarynn geçýän gönüsiniň deňlemesi hököminde garap bileris.

O çatrygyň islendik gipertekizligi ýa-da arifmetik proýektiw giňişligiň oňa degişli bolan tekizligi

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0 \qquad (9-23)$$

deňleme bilen kesgitlenýär. Şeýlelikde, arifmetik proektiw giňişligiň doly kesgitlemesini alarys.

Proýekiw giňişligiň ýene bir wekili bolup, giňeldilen üç ölçegli affin giňişligi hyzmat edýär. Ol şeýle kesgitlenýär. *M(x, y, z)* üç ölçegli R^3 affin giňişligiň nokady bolsun,

$\frac{x}{x_4} = x, \quad \frac{x_2}{x_4} = y, \quad \frac{x_3}{x_4} = z$ deňlikleri kanagatlandyrýan

x_1, x_2, x_3, x_4 sanlara M nokadyň bir jynsly affin kordinatalary diýilýär. Bu $M(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ görnüşde ýazylýar. x_1, x_2, x_3, x_4 sanlar bilen bilelikde islendik $\lambda \neq 0$ san üçin $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4$ sanlar hem M nokadyň bir jynsly affin koordinatalary bolup hyzmat edýär. Şeýlelikde, M nokadyň bir jynsly affin koordinatalary özara proporsional bolan tertipleşdirilen x_1, x_2, x_3, x_4 san dörtlügiň klasyny emele getirýär. Şu klasyň işlendik x_1, x_2, x_3, x_4 san dörtlügi üçin $x_4 \neq 0$ deňsizlik ýerine ýetýär.

Bu klaslaryň toplumyny elementleri $(x_1, x_2, x_3, 0)$ görnüşdäki dörtlükden durýan klaslar bilen doldurýarlar. Beýle klaslara R^3 affin giňişligiň hiç bir nokady degişli däl. Şonuň üçin olara R^3 affin giňişligiň tükeniksiz uzaklykdaky nokatlary diýilýär. Şol nokatlar birikdirilen R^3 affin giňişligine giňeldilen affin giňişligi diýilýär. Ol $\bar{R}^3$ bilen bellenilýär. $\bar{R}^3$ giňeldilen affin giňişliginiň tükeniksiz uzaklykdaky nokatlaryna $(x_1 : x_2 : x_3)$ tertipleşdirilen san üçlügi hökmünde garasak, onda olaryň köplüginiň proýektiw tekizlik emele getirýändigini aňlamak kyn däl. Şol proýektiw tekizlige $\bar{R}^3$ giňeldilen affin giňişliginiň tükeniksiz uzaklykdaky tekizligi diýilýär.

Goý, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, 0)$ tükeniksiz uzaklykdaky nokady kesgitleýän dörtlügiň biri bolsun. $\bar{R}^3$ affin giňişlikde

$$\begin{aligned} x &= x^* + x_1^0 t, \\ y &= y^* + x_2^0 t, \qquad (9-24) \\ z &= z^* + x_3^0 t \end{aligned}$$

gönä seredeliň. Bir jynsly affin kordinatalara geçip alarys

$$x_1 = (x^* + x_1^0 t)x_4, \quad x_2 = (y^* + x_2^0 t)x_4, \quad x_3 = (z^* + x_3^0 t)x_4.$$

Şu ýerde $t = 1/x_4$ goýsak, soň $x_4 \to 0$ diýsek, predelde
$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0$

alarys. Diýmek $(x_1^0 : x_2^0, x_3^0, 0)$ $(9-24)$ gönüniň tükeniksiz uzaklykdaky nokady bolýar. (x^*, y^*, z^*) sanlaryň şu kesgitlemä hiç bir täsiriniň bolmanlygy sebäpli $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, 0)$ nokat (9-24) gönä parallel islendik gönüniň hem tükeniksiz uzaklykdaky nokady bolar.

Tükeniksiz uzaklykdaky nokady birikdirilen (9-24) gönüniň deňlemesini, $x_4 = \alpha,\ x_4 t = \beta$ bellemeleri girizip

$$x_1 = \overset{*}{x}\alpha + x_1^0\beta,$$
$$x_2 = \overset{*}{y}\alpha + x_2^0\beta,$$
$$x_3 = \overset{*}{z}\alpha + x_4^0\beta,$$
$$x_4 = \alpha$$

görnüşde ýazyp bolar. Bu ýerde α *we* β ikisi bir wagtda nola öwrülmeýän islendik san.

Edil şuňa meňzeşlikde tükeniksiz uzaklykdaky nokatlary birikdirilen $\bar{R}^3$ affin giňişliginiň islendik tekizliginiň deňlemesini bir jynsly affin kordinatalara geçip

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

görnüşde ýazyp bileris. Bu ýerde (u_1, u_2, u_3, u_4) hemmesi birden nola deň bolmadyk islendik san dörtlügi. Giňeldilen affin giňişligiň nokatlary, gönüleri hem tekizlikleri degişlilikde arifmetik proýektiw giňişligiň nokatlaryna, gönülerinidir tekizliklerine bir belgili öwrülýär. Üstesine-de şu öwürmede insidentlik häsiýeti saklanýar. Munuň özi giňeldilen $\bar{R}_3$ affin giňişligi hem proýektiw giňişlik emele getirýär diýmekdir. Biz proýektiw giňişlikleriň käbirine seretdik.

Proýektiw koordinatalar sistemasy we proýektiw özgertmeler.

P^3 proýektiw giňişlik. 0 dört ölçegli R^4 affin giňişligindäki çatyrym, F bolsa P^3 giňişligiň nokatlaryny, gönülerinidir tekizliklerini degişlilikde 0 çatyrymyň gönülerine, tekizliklerine hem giper tekizliklerine geçirýän öwürme. O çatrymda $(O\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4)$ affin koordinatalar sistemasyny girizeliň. α şol çatrymyň gönüsi, $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ şol gönüni kesgitleýän san dörtlüginiň klasy. $P\epsilon P^3$ F öwürmede α gönä degişli nokat. $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ sanlara P nokadyň bir jynsly proektiw koordinatalary diýilýär. Bu fakt

P$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ bilen bellenilýär. Hem-de P^3 giňişlikde proýektiw kordinatalar sistemasy girizilen diýilýär.

$E_1(1, O00), E_2(0I00), E_3(O,0I0), E_4(0,0,0,I),$ $E(1,1,1,)$ nokatlara proýektiw koordinatalar sistemasynyň bazis nokatlary diýilýär. $E(1,1,1,1)$ – nokada birlik nokat diýilýär.

Proektiw koordinatalar sistemasy $E_1, E_2, E_3, E_4 E$ bazis nokatlar arkaly bir belgili kesgitlenýär. Dogrudan hem 0 çatrykda $E_1, E_2, E_3, E_4 E$ nokatlara degişli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha$ gönülere garalyň α gönüniň üstünde islendik $\vec{\ell}$ ugrukdyryjyny alalyň, onuň $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gönülere bolan proýeksiýalaryny degişlilikde $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ bilen belläliň. $(O, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ affin sistemasy gözlenýän proýektiw koordinatalar sistemasyny doly kesgitleýär.

P^3 proýektiw giňişlikde iki proýektiw koordinatalar sistemasy berilipdir diýeliň. $(0\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4)$ we $(0\vec{\ell}_1', \vec{\ell}_2', \vec{\ell}_3', \vec{\ell}_4')$ degişli 0 çatrykdaky affin koordinatalar sistemalary bolsun. Birinji koordinatalar sistemasynda $P \in P^3$ nokadyň bir jynsly proektiw koordinatalary $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ ikinji sistemada $x_1' : x_2' : x_3' : x_4'$ bolsun. Beýle diýmek, $x_1 \vec{\ell}_1 + x \vec{\ell}_2, + x_3 \vec{\ell}_3 + x_4 \vec{\ell}_4$ hem-de $x_1' \vec{\ell}_1' + x_2' \vec{\ell}_2', + x_3' \vec{\ell}_3' + x_4' \vec{\ell}_4'$

wektorlar P nokada 0 çatrykda degişli bolan gönüniň ugrukdyryjylary bolýar diýmekdir.

Bu ýerden

$$\sum_{i=1}^{4} x_i' \vec{\ell}_i' = \lambda \sum_{i=1}^{4} x_i \vec{\ell}_i \qquad (9-25)$$

deňlik gelin çykýar $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ wektorlary $\vec{\ell}_1', \vec{\ell}_2', \vec{\ell}_3', \vec{\ell}_4'$ wektorlaryň üsti bilen aňladyp alarys:

$$\vec{\ell}_1 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{1i_i} \vec{\ell'}_i \qquad \vec{\ell}_2 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{2i} \vec{\ell}_i'$$

$$\vec{\ell}_3 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{3i} \vec{\ell}_i', \quad \vec{\ell}_4 = \sum_{i=1}^{4} \alpha_{4i} \vec{\ell}_i'$$

Bu ýerde $A = (\alpha_{i i_j})$ matrisanyň kesgitleýjisi noldan üýtgeşik $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, \vec{\ell}_4$ wektorlaryň bahalaryny (9-25) deňliklere goýup, alarys :

$$x_1' = \lambda \sum_{i=1}^{4} \alpha_{1_i} x_i , \qquad x_2' = \lambda \sum_{i=1}^{4} \alpha_{i2} x_i ,$$
$$(9-26)$$
$$x_3' = \lambda \sum_{i=1}^{4} \alpha_{i\,3_i} x_i , \qquad x_4' = \lambda \sum_{i=1}^{4} \alpha_{i4} x_i ,$$

(9-26) bilen berilýän özgertmä bir jynly proektiw koordinatalaryň proektiw özgertmesi diýilýär.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$$

bellemeleri girizip, (9-26) özgertmäni gysgaça $X' = AX$ görnüşde ýa-da $X = A^{-1}X'$ görnüşde-de ýazyp bolar. Proýektiw özgertmäniň kesgitleýjisi nola deň bolmadyk dördünji tertipli matrisa arkaly kesgitlenilýändigi sebäpli bu özgetmeleriň köplüginiň topar emele getirýändigi aýdyň. Proýektiw geometriýa proýektaw giňişligiň edil şu özgertmeleriň inwarianty bolan häsýetlerinidir ululyklaryny öwrenýär diýsek ýalňyşmarys.

Eger $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ proýektiw giňişligiň nokadynyň bir jynsly proektiw koordinatalary bolsa $\frac{x_1}{x_4}, \; \frac{x_2}{x_4}, \; \frac{x_3}{x_4}$

tertipleşdrilen sanlara şol nokadyň proýektiw koordinatalary diýýärler.(9-26) özgertmäniň birinji üç deňligini dördüjisine bölüp alarys:

$$\frac{x_1'}{x_4'} = \frac{\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 + \alpha_{41}x_4}{\alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 + \alpha_{44}x_4},$$

$$\frac{x_2'}{x_4'} = \frac{\alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 + \alpha_{42}x_4}{\alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 + \alpha_{44}x_4}$$

$$\frac{x_3'}{x_4'} = \frac{\alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{43}x_4}{\alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 + \alpha_{44}x_4}$$

ýa-da $\frac{x_1}{x_4} = \xi,\ \frac{x_2}{x_4} = \eta,\ \frac{x_3}{x_4} = \zeta\ ,\ \frac{x_1'}{x_4'} = \xi'\ ,\ \frac{x_2'}{x_4'} = \eta',\ \frac{x_3'}{x_4'} = \zeta'$

bellemeleri girizip alarys:

$$\xi' = \frac{\alpha_{11}\zeta + \alpha_{21}\eta + \alpha_{31}\xi + \alpha_{41}}{\alpha_{14}\xi + \alpha_{24}\eta + \alpha_{34}\xi + \alpha_{44}}\ ,$$

$$\eta' = \frac{\alpha_{12}\zeta + \alpha_{22}\eta + \alpha_{22}\xi + \alpha_{22}}{\alpha_{14}\xi + \alpha_{24}\eta + \alpha_{34}\xi + \alpha_{44}}\ , \qquad (9-26')$$

$$\zeta' = \frac{\alpha_{13}\zeta + \alpha_{23}\eta + \alpha_{31}\xi + \alpha_{33}}{\alpha_{14}\xi + \alpha_{24}\eta + \alpha_{34}\xi + \alpha_{44}}$$

$(9-26')$ M nokadyň köne sistemadaky$(\xi, \eta\ , \zeta\ )$Proýektiw koordinatalary bilen ,onuň täze sistemadaky proýektiw (ξ', η', ζ').koordinatalary arasyndaky baglanşygy berýär. (9-26)-a proýektiw koordinatalaryň özgetmesi diýilýär.

Proýektiw giňişlikde göni çyzygyň we tekizligiň deňlemesi. Olaryň häsiýetleri.

P^3 islendik proýektiw giňişlik. ℓ şol giňişlikdäki göni çyzyk. S arifmetik proýektiw giňişlik. (9-26) özgertme arkaly S giňişligi P^3 giňişlige özgerdeliň. P^3 giňişligiň nokatlarynyň koordinatalaryny $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ bilen S giňişligiň nokatlarynyň koordinatalaryny $(x_1'; x_2'; x_3'; x_4')$ bilen belläliň.

(9-26) özgertmede P^3 giňişligiň gönüleridir tekizlikleri degişlilikde S giňişligiň gönülerine, tekizliklerine geçýär. S giňişligiň göni çyzygynyň deňlemesi ýokarda bellenişine görä

$$x_i' = x_i^0\alpha + y_i^0\beta,\ i = \overline{1,4},$$

görnüşde, tekizliginiň deňlemesi bolsa

$$\alpha, x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' + \alpha_4 x_4' = 0$$

görnüşde bolýar.

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

bellemeleri girizsek, bu deňlemeler gysgaça şeýle ýazylýar

$$X' = \alpha\, X_0 + \beta\, y_0 \quad we \quad \alpha^* X' = 0.$$

Eger indi $X' = A'X$ özgertmeden $X' - i\check{n}$ bahasyny ýokarky deňliklerde ornuna goýsak onda P^3 giňişligindäki gönüniňdir tekizligiň deňlemesini alarys:

$$A^1 X = \alpha\, X_0 + \beta\, y_0 \qquad we \qquad \alpha^* A^1 X = 0$$

Ýa-da

$$X = \alpha\, \tilde{X}_0 + \beta\, \tilde{y}_0 \qquad we \qquad в X = 0$$

bu ýerde $в = \alpha^* A', \tilde{X}_0 = (A')^{-1} X_0, \tilde{y}_0 = (A')^{-1} y_0.$ Diýmek, gönüniň, tekizligiň deňlemesi P^3 giňişlikde hem edil arifmetik giňişlikdäki görnüşde ýazylýar. Käbir teklipleri subut edeliň.

Teorema Proýektiw giňişlikde islendik iki nokat diňe bir gönä insidentdir.

Subudy $M(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0), M(y_1^0 : y_2^0 : y_3^0 : y_4^0)$ berlen nokatlar,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \ X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix}, \ Y_0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix}, \ \tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^0 \\ \tilde{x}_2^0 \\ \tilde{x}_3^0 \\ \tilde{x}_4^0 \end{pmatrix}, \ \tilde{Y}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1^0 \\ \tilde{y}_2^0 \\ \tilde{y}_3^0 \\ \tilde{y}_4^0 \end{pmatrix},$$

belgilemeler girizeliň $X = \alpha X_0 + \beta Y_0$ berlen nokatlardan geçýän göni, $X \approx t \tilde{X}_0 + \tau \tilde{Y}_0$ şol nokatlardan geçýän ýene bir göni. Bu iki gönüniň gabat geljegini subut edeliň. Şerte görä

$X_0 = t_1 \tilde{X}_0 + \tau_1 \tilde{Y}_0, \ Y_0 = t_2 \tilde{X}_0 + \tau_2 \tilde{Y}_0$ şu bahalary $X = \alpha X_0 + \beta Y_0$ deňlemä goýup alarys:

$$X = (t_1 \tilde{X}_0 + \tau_1 \tilde{Y}_0)\alpha + (t_2 \tilde{X}_0 + \tau_2 \tilde{Y}_0)\beta = (t_1\alpha + t_2\beta)\tilde{X}_0 + (\tau_1\alpha + \tau_2\beta)\tilde{Y}_0$$

Berlen *X₀* we *Y₀* nokatlaryň gabat gelmeýändikleri sebäpli, kesgitleýji

$$\begin{vmatrix} t_1 & \tau_1 \\ t_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bu ýerden islendik t hem τ üçin

$$t_1\alpha + t_2\beta = t$$
$$\tau_1\alpha + \tau_2\beta = \tau$$

sistemanyň α bilen β boýunça çözüwiniň barlygy gelip çykýar. Diýmek, $X=\alpha X_0+\beta Y_0$ bilen $X=t\tilde{X}_0+\tau\tilde{Y}_0$ şol bir gönüdir. Teorema subut edildi.

Teorema Ptoektiw giňişlikde $M_1(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0), M_2(y_1^0:y_2^0:y_3^0:y_4^0),\ M_2(z_1^0:z_2^0:z_3^0:z_4^0)$ üç nokadyň bir gönüde ýatmazlygy üçin

$$A=\begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 & y_4^0 \\ z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangynyň üçe deň bolmagy zerur hem ýeterlik.

Subudy. Eger berlen nokatlar bir gönüde ýatsalar, onda käbir α *we* β san üçin $x_1^0=\alpha\, y_1^0+\beta\, z_1^0, x_2^0=\alpha\ y_2^0+\beta\, z_2^0$ $x_3^0=\alpha\, y_3^0+\beta\, z_3^0, x_4^0=\alpha\, y_4^0+\beta\, z_4^0$ deňlikler ýerine ýeter.

Bu A matrisanyň setirleriniň arasynda çyzykly baglanyşygyň barlygyny aňladýar. Beýle ýagdaýda A matrisanyň rangy 3-den kiçi bolar. Eger-de A matrisanyň rangy 3-den kiçi bolsa, onda onuň setirleriniň arasynda çyzykly baglanşyk bolar. Munuň özi şol üç nokat bir gönünde ýatýar diýmekdir. Teorema. subut edildi. Teorma Bir gönüde ýatmaýan $M,(x_1^0:x_2^0:x_3^0:x_4^0),\ M_2(y_1^0:y_2^0:y_3^0:y_4^0)\ \ M_3(z_1^0:z_2^0:z_3^0:z_4^0)$ nokatlaryň üstünden diňe bir tekizlik geçýär.

Subudy. Goý, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ şol nokatlardan geçýän tekizlik, $M_4\left(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3 : \bar{x}_4\right)$ berlen nokatlardan üýtgeşik şol tekizligiň islendik nokady bolsun.

M_1, M_2, M_3, M_4 nokatlar $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ tekizlikde ýatýar. Şoňa görä

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 + \alpha_3 x_3^0 + \alpha_4 x_4^0 = 0,\\
&\alpha_1 y_1^0 + \alpha_2 y_2^0 + \alpha_3 y_3^0 + \alpha_4 y_4^0 = 0,\\
&\alpha_1 z_1^0 + \alpha_2 z_2^0 + \alpha_3 z_3^0 + \alpha_4 z_4^0 = 0,\\
&\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 + \alpha_4 \bar{x}_4 = 0
\end{aligned}$$

deňlikler ýerine ýeter. Bu sistemanyň α_1, α_2, α_3, α_4 boýunça triwial çözüwden üýtgeşik çözüwi bolmagy üçin onuň kesgitleýjisiniň nola deň bolmagy zerur hem ýeterlik. Ýagny.

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 & x_4^0 \\ y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 & y_4^0 \\ z_1^0 & z_2^0 & z_3^0 & z_4^0 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9-27)$$

Kesgitleýjini soňky setiri boýunça dagadyp alarys:

$$a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + a_3 \bar{x}_3 + a_4 \bar{x}_4 = 0.$$

Ýokarda teoremada seredilen A matrisanyň rangynyň üçe deňligi sebäpli, a_1, a_2, a_3, a_4 sanlaryň hemmesi nola deň däl hem-de $a_1 = \lambda\alpha_1, a_2 = \lambda\alpha_2, a_3 = \lambda\alpha_3, a_4 = \lambda\alpha_4$ deňlikler ýerine ýeter. Şoňa görä $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$

şol ýeke-täk gözlenilýän tekizlik bolar.

Bellik. (9-27) deňlik islendik dört M_1, M_2, M_3, M_4 nokadyň komplanerlik şertidir.

Teorema. Proýektiw giňişlikde islendik gabat gelmeýän iki tekizlik bir göni boýunça kesişýär.

Subudy. $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$ we $в_1 x_1 + в_2 x_2 + в_3 x_3 + в_4 x_4 = 0$ berlen tekizlikler. Şerte görä

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ в_1 & в_2 & в_3 & в_4 \end{pmatrix}$$

matrisanyň rangy 2 deň. (Ters ýagdaýda ol tekizlikler gabat geler). Goý kesgitleýji $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ в_1 & в_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bolsun. Bu ýagdaýda tekizlikleriň deňlemelerini x_1 we x_2 tarapyndan çözüp taparys:

$$X_1 = A_1 x_3 + A_2 x_4$$
$$X_2 = B_1 x_3 + B_2 x_4$$

ýa-da $X_3=\alpha$, $X_4=\beta$ bellemeleri girizip alarys

$$X_1 = A_1\alpha + A_2\beta \ ,$$
$$X_2 = B_1\alpha + B_2\beta \ ,$$
$$X_3 = \alpha$$
$$X_4 = \beta$$

Alnan baglanşyklar gözlenýän göni çyzygyň deňlemesidir.

P^3 giňişlikde parallel tekizlikler ýok.

Teorema. Proýektiw giňişlikde göni çyzyk tekizlige insident bolýar ýa-da ony bir nokatda kesip geçýär. Subudy. Berlen tekizlik

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$
$$x_1 = \alpha_1 x_1^0 + \beta\ y_1^0 \ ,$$
$$x_2 = \alpha\ x_2^0 + \beta\ y_2^0 \ ,$$
$$x_3 = \alpha\ x_3^0 + \beta\ y_3^0 \ ,$$
$$x_4 = \alpha\ x_4^0 + \beta\ y_4^0$$

berlen göni. Tekizligiň deňlemesine, $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ näbelileriň gönüniň deňlemesinden alnan bahalaryny goýup alarys.

$$\alpha\ (\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 + \alpha_3 x_3^0 + \alpha_4 x_4^0) + \beta\,(\alpha_1 y_1^0 + \alpha_2 y_2^0 + \alpha_3 y_3^0 + \alpha_4 y_4^0) = 0$$

Soňky deňlikde ýaýlaryň içi nola deň bolsa, onda göni tekizlige insident bolar. ýaýlaryň biri nola deň bolmadyk ýagdaýynda, α *we* β parametrleriň birini beýlekisiniň üsti bilen aňladyp hem-de göni çyzygyň deňlemesine goýup, göni we tekizligiň kesişýän ýeke-täk nokadyny taparys.

Netije. Proýektiw giňişlikde özara parallel göni we tekizlik ýok.

Netije. Proýektiw giňişlikde gönüniň iki nokady bir tekizlige insident bolsa, onda onuň özi hem şol tekizlige insiden bolar.

Proýektiw giňişlikde hem edil proýektiw tekizlikde bolşy ýaly duallyk häsiýeti bardyr. Dogrudan hem $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0.$ berlen tekizlik. $\mu_0(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0)$ berlen nokat. $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4)$ sanlara şol tekizligiň koordinatlary diýilýär. M_0 nokadyň $(\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4)$ tekizlige we tersine şol tekizligiň M_0 nokada insidentligi bir $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i^0 = 0$ deňleme görnüşinde ýazylýar. Şoňa görä, insident, nokat, tekizlik sözlerini ulanyp şerti düzülen teorema dogry bolsa, şol şertlerde nokat we tekizlik sözleriň ýerine çalşyrmak bilen alnan teoremada dogrudyr. Meselem: Gönä insident iki nokat tekizlige insident bolsa, gönüniň özi hem şol tekizlige insidentdir.

Dual teklip: gönä insident iki tekizlik nokada insident bolsa, göniň özi hem şol nokada insidentdir.

Teklip. Islendik üç nokat bir tekizlige insidentdir.

Dual teklip. Islendik üç tekizlik bir nokada insidentdir.

§13.Proýektiw giňişlikde ikinji tertipli üstler.

Deňlemesi:

$$\sum_{i.j=1}^{4}\alpha_{i\,j}x_i x_j = 0 \qquad (9-28)$$

Görnüşdäki algebrik üste ikinji tertipli üst, $A=\{\alpha_{i\,j}\}$ matrisa onuň matrisasy diýilýär. Eger A matrisanyň $|A|$ kesgitleýjisi nola deň bolsa, onda üste bozuk üst diýilýär. Eger (9-28) deňlemaniň çep tarapy çyzykly köpeldijilere dargasa onda (9-28) dargaýan üst bolýar. Ikinji tertipli üstüň deňlemesini

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{pmatrix}$$

bellemeleri ulanyp,

$$X^{*}AX=0 \qquad (8)$$

görnüşde hem ýazyp bolar. Aşakda bu üsti gysgalyk üçin kwadroid atlandyralyň.

Teorema. Bütünleý kwadroidda ýatmaýan göni çyzyk kwadroidi ýa iki dürli nokatda, ýa-da iki gabat gelýän nokatda, ýa-da iki hyýaly nokatda keser.

Subudy. $X^{*}AX = 0$ berlen kwadroid, $X = \alpha X_0 + \beta\, Y_0$ berlen göni. Bu ýerde $X' = (x_2^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)\, Y_0' = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$.

X-iň gönüniň deňlemesinden alnan bahasyny kwadroidda ornuna goýup alarys:

$$\left[\alpha X_0' + \beta\, Y_0'\right] A\left[\alpha X_0 + \beta\, Y_0\right] = 0$$

ýa-da

$$\alpha^2 X_0' A X_0 + 2\alpha\beta\, X_0' A Y_0 + \beta^2 Y_0' A Y_0 = 0 \qquad (9-29)$$

Soňky deňleme $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ boýunça kwadrat deňleme. Eger onuň hemme koeffisienti nola deň bolsa, onda berlen göni bütünleý kwadroidda ýatar. Eger hemme koeffisienti nola deň bolmasa, onuň iki hakyky, ýa-da iki deň ýa-da iki hyýaly köki bolar. Beýle diýmek göni çyzyk kwadroidi iki dürli, ýa-da iki gabat gelýän, ýa-da iki hyýaly nokatda kesýär diýmekdir. Teorema subut edildi.

Kwadroidi iki gabat gelýän nokatda kesýän gönä galtaşýan göni çyzyk diýilýär. Goý X_0 galtaşma nokady, Y_0 galtaşýanyň üstünde ýatýan hem-de kwadroide degişli däl nokat bolsun. Onda galtaşýanyň deňlemesi $X = X_0\alpha + Y_0\beta$ bolar: (9-29) deňlik

$$2\alpha\beta\, X_0' A Y_0 + \beta^2 Y_0' A Y_0 = 0$$

görnüşe geler. Bu deňlemäniň kökleriniň gabat gelmegi üçin $X_0' A Y_0 = 0$ bolmagy zerur. Diýmek, $X_0' A X = 0$ tekizlikde ýatýan islendik $У_0$ nokat üçin, $X = \alpha\, X_0 + \beta\, У_0$ göni çyzyk kwadroida galtaşýan göni bolýar. Beýle tekizlige galtaşýan tekizlik diýilýär. Şeýlelikde,

$$X_0' A X = 0$$

deňleme berlen kwadroida $X_0 = (x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0)$ nokatda galtaşýan tekizligiň deňlemesi bolýar.

Bu deňleme X_0 nokadyň koordinatalary $AX_0 = 0$ $(X_0' A = 0)$ sistemany kanagatlandyranda manysyny ýitirýär. Beýle ýagdaý diňe $|A| = 0$ şertde, ýagny kwadroid bozyk şertinde bolup biler. Kwadroidda ýatýan hem-de koordinatalary $AX_0 = 0$ sistemany kanagatlandyrýan X_0 nokada kwadroidiň goşa nokady diýilýär. (9-29) deňlemeden görnüşi ýaly: goşa nokatdan geçýän islendik göni galtaşýan gönä bolýar, şol nokatdan geçýän islendik tekizlik bolsa, galtaşýan tekizlik bolýar.

Dargaýan kwadroida seredeliň. Onuň deňlemesi:

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} вi\; X_i\right) = 0 \qquad (9-30)$$

görnüşde ýazylar hem-de $\sum_{i=1}^{4}\alpha_i^2 \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{4}в_i^2 \neq 0$

şert ýerine ýeter. Biz

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \quad в = \begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \\ в_4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

bellemeleri ulanyp (9-30) deňligi

$$X'\alpha\, в'X = 0 \text{ ýa-da } X'в\alpha'\, X = 0$$

görnüşde ýazyp bileris. Şoňa görä, dargaýan kwadroidyň X_0 goşa nokadynyň koordinatalary $a\,в'X_0 = 0$, $вa'X_0 = 0$ sistemalary kanagatlandyrar. Bu ýerde X_0 nokatdyň koordinatalarynyň $a'\,X_0 = 0$ $в'X_0 = 0$ deňlemeleri kabagatlandyrjagy görünýär. Tersine X_0 nokadyň koordinatalary

$$\alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 + \alpha_3 x_3^3 + \alpha_4 x_4^0 = 0, \; в_1 x_1^0 + в_2 x_2^0 + в_3 x_3^0 + в_4 x_4^0 = 0$$

deňlemeleri kanagatlandyrsa, onda $в\alpha'X_0 = 0$ *we* $\alpha\, в'X_0 = 0$ deňlikler ýerine ýeter hem-de X_0 nokat goşa nokat bolar. Netijede, kwadroidi düzýän tekizlikleriň kesişme nokatlary goşa nokatlardan durýar. Kwadroidy düzýän tekizlikleriň gabat gelýän ýagdaýynda, şol tekizlikleriň islendik nokady goşa nokatdyr. Ýokarda aýdylanlary şeýle görnüşde jemläp bolar.

Kwadroidiň goşa däl X_0 nokadynyň üstünden ýeke-täk galtaşýan tekizlik geçýär, onuň deňlemesi $X_0'AX = 0$ görnüşde ýazylýar. Kwadroidiň X_0 goşa nokadynyň üstünden geçýän islendik tekizlik galtaşýan tekizlikdir.

Eger X_0 nokat $X'AX = 0$ kwadroidda ýatmasa, onda $X_0'AX = 0$ tekizlige X_0 nokadyň kwadroida görä polýarysy, X_0 nokada bolsa şol polýaranyň kwadroida görä polýusy diýilýär. X_0 nokadyň polýarasy kwadroidy $У_0$ nokatda kesse onda $X_0'AY_0 = 0$ deňlik ýerine ýeter. Bu deňligi $Y_0'AX_0 = 0$ görnüşde hem ýazyp bolýar. Soňky deňlik X_0 nokat berlen kwadroida $У_0$ nokatda geçirilen galtaşýan tekizlikde ýatýar diýmekdir.

Tersine X_0 nokatdan berlen kwadroida galtaşýan tekizligi geçireliň we $У_0$ galtaşma nokat bolsun. Kwadroida $У_0$ nokatda galtaşýan tekizligiň $Y_0'AX = 0$ deňlemesini ýazalyň.

X_0 nokadyň şol tekizlikde ýatýany sebäpli, $Y_0'AX_0 = 0$ deňlik ýa-da deň güýçli $Y_0'AY_0 = 0$ ýerine ýeter. Soňky deňlik $У_0$ nokadyň X_0 nokadyň polýarasynyň üstünde ýatýanyny aňladýar. Alnan netijäni teorema görnüşinde formulirläliň.

Teorema. Islendik X_0 (goşa däl) nokatdan kwadroida geçirilen galtaşýan tekizlikleriň galtaşma nokatlarynyň köplügi, şol kwadroidiň X_0 nokadyň polýarasy bilen kesişme nokatlaryndan durýar.

Tekizlik hem-de kwadriod arasynda şeýle gatnaşyklaryň bolmagy mümkin:

I. Tekizlik kwadroidi kesmeýär, ýagny olaryň umumy nokady ýok.

2. Tekizlik kwadroidi bir nokatda kesýär, ýagny olaryň bir umumy nokady bar.

3. Tekizlik kwadroidi dargamaýan, hususy nokatlary bar bolan, kwadrika arkaly kesýär.

4. Tekizlik kwadroidi dargaýan kwadrika arkaly kesýär.

5. Tekizlik kwadroidda ýatýar.

Mysallar getireliň.

I. $x_1 - 3x_4 = 0$ tekizlik $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ kwadroidi kesmeýär. Sebäbi bu iki deňlik diňe $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ýagdaýynda kanagatlanýar. Emma koordinatalary (0:0:0:0) bolan nokat proýektiw giňişlige degişli däl.

2. $x_1+x_2+x_3-3x_4=0$ tekizlik $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_4^2 = 0$ kwadroidi ýeke-täk (1:I:I:I) nokatda keser. Dogrudan hem bu iki deňligi bileleikde çözüp alarys.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0,$$
$$\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

3. $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ tekizlik $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ kwadroidi iki göni çyzyk arkaly kesýär. Bu deňlemeleri bilelikde çözüp alarys:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - (x_1 + x_2 - x_3)^2 = 0,$$
$$-2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0,$$
$$(x_1 - x_3)\,(x_3 - x_2) = 0$$

Diýmek, berlen göni bilen kwadroid dargaýan kwadrika arkaly kesişýär.

4. $x_1 = x_4$ tekizlik $x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_4^2 = 0$ kwadroidi dargamaýan hususy nokatlary bar bolan kwadrika arkaly keser. Bu deňlemeleri bilelikde çözüp alarys:

$$x_2^2 + x_3^2 = 2x_4^2$$

Teorema. Kwadroidi bir nokatda ýa-da dargaýan kwadrika arkaly kesýän tekizlik galtaşýan tekizlikdir.

Subudy. Eger tekizlik kwadroidi bir M_0 nokatda kese, onda şol nokatdan geçýän hem-de berlen tekizlikde ýatýan islendik göni galtaşýan göni bolar. Diýmek, seredilýän tekizlik galtaşýar. Tekizligiň kwadroidi iki gabat gelmeýän göni arkaly kesýän ýagdaýy hem edil şunyň ýaly. Şol gönüleriň kesişme nokadyndan geçýän hem-de berlen tekizlikde ýatýan eslendik göni galtaşýan bolýar. Şonuň özi tekizligiň galtaşýanlygyny aňladýar. Eger tekizlik iki gabat gelýän göni arkaly kwadroidi kesse onda şol gönüniň islendik nokadyndan geçýän we berlen tekizlikde ýatýan göni galtaşýan bolar. Diýmek, berlen tekizlik hem galtaşýar. Teorema subut edildi.

Kwadroidleriň proýektiw klassifikasiýasy:

Islendik $\sum_{i\,j=1}^{4} \alpha_{i\,j} x_i x_j$ deňleme bilen berlen kwadroidi

$$\begin{aligned}
x_1 &= в_{11}y_1 + в_{12}y_2 + в_{13}y_3 + в_{14}y_4,\\
x_2 &= в_{21}y_1 + в_{22}y_2 + в_{23}y_3 + в_{24}y_4,\\
x_3 &= в_{31}y_1 + в_{32}y_2 + в_{33}y_3 + в_{34}y_4,\\
x_4 &= в_{41}y_1 + в_{42}y_2 + в_{43}y_3 + в_{44}y_4.
\end{aligned}$$

Proektiw özgertmäni ulanyp:

$$\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_1^2 + \varepsilon_3 y_3^2 + \varepsilon_4 y_4^2 = 0 \qquad (9-31)$$

görnüşe getirip bolýar. Bu ýerde $\varepsilon_i \ i = \overline{I,4}, 0, 1, -1$ bahalara eýe bolýan hemişelikler. (9-31) deňlemä kwadroidiň kanonik deňlemesi diýilýär. Kanonik deňlemeleriň biri-birine proýektiw özgertme bilen geçirip bolmaýan görnüşlerini ýazalyň:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0 \qquad (I)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0 \qquad (2)$$

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0 \qquad (3)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0 \qquad (4)$$

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \qquad (5)$$

$$y_1^2 + y_2^2 = 0 \qquad (6)$$

$$y_1^2 - y_2^2 = 0 \qquad (7)$$

$$y_1^2 = 0 \qquad (8)$$

(I)-nji deňlemäni proýektiw giňişligiň hiç bir nokadynyň koordinatalary kanagatlandyrmaýar. (4)-nji deňlemäni diňe bir (0:0:0:I) nokadyň koordinatalary kanagatlandyrýar. (7) we (8) dargaýan kwadroidleriň kanonik görnüşi. Umuman, biz şeýle netijä gelýäris. Hakyky koeffisientli kwadroidleriň köplügi biri-birine proýektiw özgertme bilen geçirip bolmaýan sekiz klasa bölünýär. Ol klaslar proektiw özgertmäniň kömegi bilen degişlilikde 1- -8 kanonik görnüşe getirilýär.

Edebiýatlar

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň "Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin" Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. "Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry" Milli maksatnamasy. "Türkmenistan" gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. "Türkmenistanyň nebitgaz senagatyny ösdürmegiň 2030-njy ýyla çenli döwür üçin Maksatnamasy". Aşgabat, 2006.

MAZMUNY.