TÜRKMENISTANYŇ BILIM MINISTRLIGI
HALKARA NEBIT WE GAZ UNIWERSITETI

“Çyzuw we materiallaryň garşylygy”

Uly mugallym: R.Huddyýewa

“ÇYZUWLY GEOMETRIÝA WE INŽENER GRAFIKASY”

dersi boýunça umumy okuwlaryň ýazgysynyň toplumy

Ähli fakultetleriň talyplary üçin

Aşgabat 2016

M E T O D I K I   G Ö R K E Z M E

Baky Bitarap, Garaşsyz Türkmenistan ýurdumyzda täze özgerişlikleriň döwri başlandy. Bu Galkynyş döwrüň belent meýilnamasy bilen baglylykda konstruktorlar we proýektirleýjiler çylşyrymly desgalaryň, konstruksiýalaryň we mehanizmleriň proýektlerini işläp düzýärler. Bu işleri ýerine ýetirijilerden proýeksion şekillendirmegiň teoriýasyndan, ýagny grafiki aňlatmak boýunça çuňňur bilimi talap edýär.

Diýmek, çyzuwly geometriýany, çyzuwy, surat çekmegi öwrenmeklik inženeriň kemala gelmeginde esasy orny eýeleýär. Bu dersler-bilimler inžener-mehanige maşynlary we mehanizmleri konstruirlemekde, arhitektora hem-de inžener gurluşykça jaýlary we desgalary proýektirlemekde we gurmakda, topografa ýeriň üstüni öwrenmekde, hudožnige surat çekmekde zerur gerekdir. Inženeriň praktiki işinde çyzmaly geometriýanyň ähmiýeti has-da möhümdir, sebäbi onuň döredijilik işi ýa-da desgalaryň taslamasyny döretmeklige, ýa-da taýýar taslamalar boýunça desgalary bina etmeklige gönükdirilendir.

Çyzuwly geometriýa giňişlikdäki jisimleriň tekizligiň üstündäki şekillerini – proýeksiýalaryny gurmagyň usullaryny öwredýän, metrik – ölçeg we pozision meseleleri işlemegiň ýollaryny öwredýän ylymdyr.

Çyzuwly geometriýada garalyp geçilýän meseleleriň iki ugry bardyr: **birinjisi,** şekillendirişdir. Munda giňişlik formaly jisimleriň proýeksion şekillerini almagyň düzgünleri we tärleri öwrenilýär. **Ikinjisi**, nazary ugrudyr. Munuň maksady şekillendirişiň kömegi bilen giňişlikli meseleleri çözmek we derňemek üçin esaslary bermekden ybaratdyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny **yzygiderli** we **çuňňur** öwrenmeklik **giňişleýin pikirlenmegiň ösmegine,** giňişlikleýin formaly predmetleri olaryň çyzgylary boýunça göz öňüne getirmegi başarmaga we täzeden proýektirlenýän predmetleri şekillendirmegi başarmaga ýardam edýär.

Talyplara çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik zerurdyr. Sebäbi, olara **ýyllyk** we **diplom taslamalaryny** ýerine ýetirmek, öz hünärleri boýunça ýörite edebiýatlary çuňňur özleşdirmek üçin bu ders esasy gural bolup hyzmat edýär.

Talyplar çyzuwly geometriýany ilki okap başlan döwürlerinde kä halatlarda uly kynçylyk bilen özleşdirýärler. Bu kynçylyklar, öňi bilen çyzmaly geometriýanyň talyplar üçin täze ders bolýanlygy, berlen geometrik formalary giňişlikde aýdyň göz öňüne getirmekligi talap edýänligi bilen baglanyşyklydyr. Çyzuwly geometriýany örän düşünjelilik bilen öwrenmek üçin ony öwrenmegiň ilkinji döwründe aýdyň şekilli çyzgylarda – suratlarda özüňi barlamak gerekdir.

Galyberse-de, ýönekeý modelleri taýýarlamaklyk ýa-da maketlerden peýdalanmaklyk peýdalydyr. Çyzuwly geometriýany has çuňňur öwrendigiňçe, proýeksiýalary okamaga endigiň kemala gelmegi bilen baglanşylylykda, **aýdyň şekilli çyzgylara bolan isleg kem-kemden azalmalydyr.**

Çyzuwly geometriýa kursuny öwrenmekde talyp kursuň esasy temalaryna aýratyn uly üns berilmelidir. Çyzuwly geometriýany öwrenmekde proýeksiýalaryň häsiýetlerini özleşdirmek aýratyn ähmiýete eýedir, **metrik**, şeýle hem **pozision** meseleleri çözmek üçin bolsa proýeksiýalaryň häsiýetleri esas bolup durýar.

Çyzuwly geometriýany beýan etmegiň gidişinde **ýönekeýden çylşyrymlylyga** geçilýär, umumy okuw dersinde kem - kemden materiallaryň çylşyrymlylygy artýar, beýan edilýän meseleler giňelýär we çuňlaşýar. Şonuň üçin başdaky temalary kemter özleşdirmek soňky materiallary özleşdirmekde uly päsgelçilik döredýär. **Her bir umumy okuwy onuň diňlenen gününde täzeden işläp geçmek möhümdir.**

Umumy okuw materiallary diňe umumy okuw üçin niýetlenen depderine konspektirlenen ýazgylardan okap öwrenmek bilen çäklenmän, eýsem olaryň üstüni okuw kitabynda giňden berlen materiallar bilen doldurmak hökmandyr. Umumy okuw ýazgylaryndaky ähli formulirowkalaryň dogrulygyny anyklamak, umumy okuw depderdäki ähli suratlary we çyzgylary has takyk hem-de dogry ýerine ýetirmek zerurdyr. Umumy okuw materiallaryň özleşdirilendigine göz ýetirmek üçin şol tema degişli meseleleriň ençemesini özbaşdak çözmek gerek. Her bir geçilen täze tema oňat düşünmek üçin şondan ozalky geçilen temanyň materiallaryna täzeden göz gezdirmek we şol boýunça okalanlary ýa-da salmak möhümdir. Islendik özbaşdak ýerine ýetirilen – çyzylan meseleler mydama çyzgy gurallaryny dogry ulanylyp talaba laýyklykda çyzyklaram, belgilerem – san bilen ýa-da harp bilen bellenende standarta gabat gelmelidir, bu talap mydama talyba sapak bolmalydyr.

Çyzuwly geometriýa kursuny çuňňur öwrenmeklik her bir talybyň yzygiderli okamaklygyny, onuň özbaşdak meseleleri çözmekligini talap edýär.

Nazaryýetiň esasy düzgünlerini özleşdirmekde mesele çözmegiň uly ähmiýeti bardyr. Amaly okuwyň öň ýanynda nobatdaky amaly okuwyň mazmuny bilen tanyşmak, meseläniň soraglaryna jogaplar taýýarlamak, **öýe berlen meseleleri özbaşdak çözmek gerek.** Meseleleri dogry çözmek üçin onuň şertini üns berip okamaly, berlen geometrik elementleri giňişlikde aýdyň göz öňüne getirmeli, **meseleleri çözmegiň plan-shemasyny düzmeli,** soňra öwredilen usullardan, düzgünlerden we kadalardan peýdalanyp, mesele çözmäge girişmeli. Usulyýetiň düzgüni boýunça talap edilişi ýaly, amaly okuwlarda meseleleri talyplar özbaşdak işleýärler.

Mugallym bolsa, meseleleri takyk işlemek üçin olara meýilnama düzmekde ugrukdyryjy görkezme berýär. Diýmek, her bir amaly okuwa yzygiderli taýýarlanmak bilen, talyp işçi depderinde bar bolan ähli meseleleri dershanalarda çözmäge ukyply bolup biler.

Umumy okuw wagtyndaky material gaýtadan işlenenden soň, her kim özüne berlen barlag işleri özbaşdak ýerine ýetirmäge girişip biler. Barlag işleriniň maksady bolsa nazary materialy berkitmekdir, alnan bilimi amaly okuwda, tejribede ulanmagy başarmakdyr, Grafiki işleri takyk ýerine ýetirmekdir we esasan-da talybyň giňişlikde göz öňüne getirmegini ösdürmekdir.

Her bir meseläniň çözgüdi iki bölümden ybarat bolmalydyr:

1. Meseläniň giňişlikdäki çözgüdi şonda gözlenýän geometrik elementi kesgitlemek üçin giňişlikde nähili çyzyklaryň, tekizlikleriň ýa-da üstleriň yzygiderli geçirilmelidigi anyklanylýar.

2. Meseläniň proýeksiýalardaky çözgüdi munuň özi çyzmaly geometriýanyň nukdaý nazaryndan garanyňda esasy zatdyr.

Meseleleri üstünlikli çözmek üçin talypdan, ozaly bilen, **elementar geometriýanyň, planimetriýanyň** we **stereometriýanyň** esasy teoremalaryny oňat bilmeklik hem-de epýurdan – çyzgydan baş çykarmagy başarmaklyk talap edilýär. Epýura oňat düşünmeklik talyba has kyndyr, şonuň üçin hem bu işde **mydama mugallymyň yzygiderli, ýadawsyz amaly we usuly kömegi gerekdir.**

Tema 1
Giriş.Çyzuwly geometriýa dersiniň ähmiýeti. Proýektirlemegiň usullary: (Merkezi we parallel proýektirlemek).Tekizlige merkezi we parallel proýektirleme. Parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetleri.

Sapagyň meýilnamasy:

1. **Çyzuwly geometriýa dersiniň ähmiýeti.**
2. **Proýektirlemegiň usullary: (merkezi we parallel proýektirleme).**
3. **Parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetleri.**

1.ÇYZUWLY GEOMETRIÝA - geometriyanyň bir bölümi bolmak bilen daş töweregimizdäki geometriki figuralaryň - jisimleriň giňişlikdäki formalaryny hem-de olara degişli kanunalaýyklykda tekizlikde şekillendirmek usuly bilen meşgullanýar.

Çyzuwly geometriýa çyzuwyň nazary esasydyr, ýagny grammatikasydyr. Çyzuwly geometriýada **çyzgy** predmetleriň, geometriki figuralaryň- jisimleriň gurluşlaryny öwredýän esasy gural bolup hyzmat edýär. Her bir çyzgy dürli şekillendirilmegiň usullarynyň kömegi blen çyzylýar. Şonuň üçin-de çyzmaly geometriýanyň esasy meseleleri şu aşakdakylardan ybaratdyr:

Ozal bar bolan, şeýle hem täzeden döredilýän şaýlaryň - gurallaryň şekillerini dogry we takyk çyzmagyň usullaryny öwrenmek.

Çyzgynyň kömegi bilen predmetiň formalaryny hem-de ölçeglerini kesgitlemegiň usullaryny öwrenmek / çyzgyny okamak /.

Giňişlikdäki geometrik formalara degişli meseleleri tekizlikde şekillendirip çözmegiň usullaryny öwrenmek.

Diňe bir tehnikada ulanylýandygyndan başga-da, giňişlikdäki jisimleriň gurluşyny-formalaryny öwrenmekdäki iň bir gymmatly serişdeleriň biri hökmünde çyzuwly geometriýanyň ylmy hem-de umumy bilim ähmiýeti örän uludyr.Täzeligiň döredijilikli gözlenilýän ýerinde, täze tehniki çözgütler barada erjel pikir edilýän hem-de kabul edilýän mahalda, konstruktirlenilýän hem-de proýeksion çyzgyny we onuň nazary esasyny - çyzuwly geometriýany oňat bilmeklik talyplara örän zerurdyr.

GYSGAÇA TARYHY MAGLUMAT.

Çyzuwly geometriýanyň ýüze çykmagy kanunalaýyk hökmanylyk bolmak bilen, ol adamzadyň asyrlar dowamynda gündeki amaly işiniň netijesinde emele gelendir.

Daş töwerekdäki predmetleri şekillendirmeklige bolan islegiň adamzat taryhynyň irki döwürlerinde ýüze çykanlygy bellidir.

Predmetleri söz bilen suratlandyrmagy öwrenmezden ozal, adamlar olaryň suratlaryny - şekillerini çekipdirler.

Köşkleriň, ýaşaýyş jaýlarynyň, köprüleriň we beýleki gurluşygy baryp gadymy Müsürde şekillendirmegiň elementar usullaryny döretmeklige getiripdir. Häzirki zaman ylymynyň nukdaý nazarynda seredeniňde olar örän ýönekeýje bolupdyrlar. Şeýle-de bolsa, geometriýanyň ýüze çykmagynyň ilkinji köklerini gadym eýýamyň ösen medeniýetli halklarynyň şol sanda türkmen halkynyň taryhyndan gözlemek gerek.

Biziň döwrümize gelip ýeten rus ýadigärlikleriniň proeksion çyzgylary XVII-nji asyra degişlidir. Bular Petr 1-niň görkezmesi boýunça Remizowyň çeken Nowgorod we Pskow şäherleriniň planydyr, Moskwanyň 1619 - njy ýyla degişli çyzgysydyr, Sibir şäherleriniň we ýerleriniň çyzgy kitabydyr. Ýokarda atlary tutulan çyzgylarda jaýyň plany hem-de fasady frontal we gorizontal proýeksiýalaryň geljekdäki nusgasy /proobrazy/ bolup durýar.

XVIII - nji asyrda **proýektirlemek - şekillendirmek** sungaty we konstruktiw çyzgylary ýerine ýetirmegiň tehnikasy örän kämilleşipdir. Heniz şol döwre çenli çyzuwly geometriýa ylym hökmünde formirlenmändir.

Şeýle-de bolsa, öz-özünden öwrenen oýlap tapyjy N. I. Kulibiniň /1735-1818ý.ý./, I.I.Polzunowyň /1726ý./, binagärler B.I.Baženowyň, M.F.Kazakowyň çyzgylary çyzuwly geometriýanyň nukdaý nazarynda seredeniňde örän **dogry** we ussatlyk bilen **takyk** ýerine ýetirilipdir.

Şeýlelik bilen, çyzgylary çyzmakda XVIII - nji asyryň aýagyna çenli uly tejribe toplanypdyr, şekillendirmegiň metodyna - usullaryna degişli aýry-aýry nazary işler edilipdir. Çyzuwly geometriýa özbaşdak ylmy ders hökmünde geometriýanyň has ýaş pudaklarna degişlidir.

1798-nji ýylda fransuz alymy Gaspar Monž / 1746-1818ý.ý./ **“Çyzuwly geometriýa” kursyny çap etdiripdir. G. Monžyň işiniň esasy çyzgynyň tekizligi bilen utgaşdyrlan iki sany özara perpendikulýar bolan şekiller tekizliklere göniburçly şekillendirmekdir.**

Russiýada çyzuwly geometriýanyň okuw dersi hökmünde Peterburgyň ýol inženerleri korpusy institutynda /häzir Leningradyň demir ýol transporty inženerçilik instituty/ düýbi tutulandyr we 1810-njy ýylda özbaşdak ders hökmünde okadylyp başlanypdyr.

1816-njy ýylda institutyň mugallymy Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow /1796-1849/ ilkinji çyzuwly geometriýa kursuny rus dilinde çap etdiripdir, şunuň bilen ol şu ders boýynça watançylyk edebiýatyň başlangyjyny goýupdyr.

1821-nji ýylda ol “Çyzuwly geometriýanyň esasy’’ kursuny düzüpdir we çap etdiripdir, munuň özi şu ugurdan çap edilen daşar ýurt kitaplaryndan özüniň möçberi, hili we mazmuny boýunça has giň bolupdyr.

1824-nji ýylda Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanowa Russiýada çyzuwly geometriýanyň ilkinji professor diýen at dakylypdyr. Çyzuwly geometriýada rus terminologiýalaryny işläp düzmeklik onuň bu ugurda bitiren uly hyzmatydyr.

Geçen asyryň otuzynjy ýyllarynyň başlarynda Rusýanyň tehniki okuw jaýlarynyň ählisinde diýen ýaly çyzmaly geometriýa okadylyp başlanypdyr. Muňa Ýakow Aleksandrowiç Sewostýanow hem-de beýleki rus alymlarynyň çyzmaly geometriýadan çap edilen ilkinji işleri ýardam edipdir.

Akademik I.I.Somow, professorlar P.P.Durow, A.H.Reder we başgalar Russiýada çyzmaly geometriýanyň ösmeginde uly goşant goşan alymlardyr.

Russiýada çyzuwly geometriýany okatmak usulynyň ösmegini Peterburgly professorlar N.A.Makarow /1844-1904/ bilen W.I.Kurdýumowyň /1858-1904/ pedagogik we ylmy işleri uly täsir edipdir.

W.I.Kurdýumowyň işleri özüniň nazary çuňlygy, ylmy durnuklylygy we mazmunynyň dolylygy bilen aýratyn tapawutlanýar, bu bolsa şekillendirmek usuly oblastynda şol işleri klassiki işler hökmünde hasap etmäge doly esas döredýar. Onuň esasy hyzmaty aýry-aýry meseleleriň çözülişini derňemegiň, ozal kabul edilen usulyndan ýüz öwürüp, inžinerçilik tejribesinden mysallar getirmek bilen, nazary meseleleri giňden beýan edilenliginden ybaratdyr.

Öz işlerinde çyzuwly geometriýanyň ägirt uly **praktiki - amaly** ähmiýetiniň bardygyny görkezen N.A.Rynin /1877-1942ý.ý./ mugallymy - professor W.I.Kurdýumowyň işlerini dowam etdirijidir.

Professorlar M.L.Deşewoý, D.G.Ananow, Ý.S.Fedorow rewolýusiýadan önki hem-de soňky döwürlerde şekillendirmegiň usuly boýunça işlediler. Bu ugurda zähmetine sarpa goýmaly alymlaryň sany sowet döwründe has-da artdy. Professorlar N.A.Glagolew /1888-1945ý.ý./ A.I.Dobrýakow /1895-1948ý.ý./, D.I.Kargin /1880-1949ý.ý./ , N.F.Çetweruhin /1891-1974ý.ý./, S.M.Kolotow /1880-1965/, W.O.Gordon /1892-1970ý.ý./ we N.Ý.Gromow /1884-1963ý.ý./ ýaly görnükli alymlaryň atlarny tutmak hem-de olaryň bitiren uly ylmy – usuly işlerini aýratyn belläp geçmek bolar.

2. TEKIZLIGE MERKEZI WE PARALLEL PROÝEKTIRLEMEK

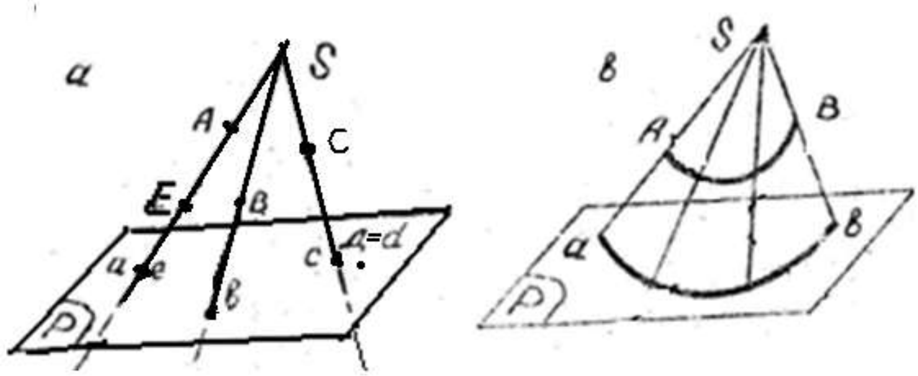
Proýektirlemek - şekillendirmek usuly şekili çyzmagyñ - çekmegiň esasy edilip goýulandyr.

Tekizlikde predmetleriñ şekilini gurmagyñ düzgüni proýektirlemek usulyny ulanmaklygyna esaslanandyr. Proýektirleýji göni çyzyklaryñ / proýektirleýji şöhleleriñ/ kömegi bilen proýeksiýa tekizligine predmetleriñ şekilini gurmaklyk prosessine **p r o ý e k t i r l e m e k– -ş e k i l l e n d i r m e k** diýilýär. **Merkezi** hem-de **parallel** proýektirlemeklik bolmak bilen, olara degişlilikde merkezi we parallel proýeksiýalar bardyr. Häzir bu usullaryň her haýsysyna aýratynlykda serederis.

2.1. Merkezi proýektirlemek.

Giñişlikde erkin proýeksiýa - şekillendirme merkezi bolan S nokady /I-nji a – surat/ we **P** proýeksiýalar - şekiller tekizligini alýarys. Şeýlede giñişlikde ýerleşen - berlen **A, B, C, E** we **D** nokatlary **P** tekizligine proýektirlemek üçin **P** proýeksiýalar tekizligi bilen **a, b, c, d** we **e** nokatlarda kesişýänçä **S** proýeksiýa merkeziniň üstünden **SA, SB, SC** we **SD** göni çyzyklary geçirmek gerek. **a, b, c, d** we **e** nokatlar **A, B, C, E** hem-de **D** nokatlaryñ merkezi proýeksiýalarydyr. **SA, SB, SC, SD** we **SE** göni çyzyklar bolsa **proýektirleýji göni çyzyklar ýa-da proýektirleýji şöhlelerdirler.**

AB egri çyzyga degişli birnäçe nokady merkezi proýektirlemek bilen, onuñ **P** tekizligindäki **ab** merkezi proýeksiýasyny almak bolar /I-nji b – surat/.



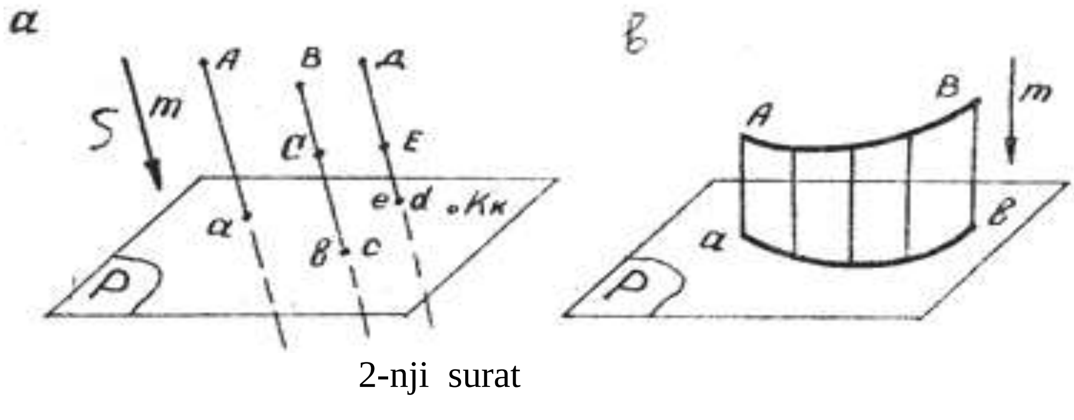
1-nji surat

AB egri çyzygyñ ähli nokatlarynyñ proýektirleýji göni çyzyklary konus şekilli käbir üsti emele getirerler. Şonuñ üçin merkezi proýektirlemeklige kä ýagdaýlarda **koniki** ýa-da **polýar** proýektirlemeklik hem diýilýär.

Merkezi proýeksiýalar has aýdyñ - düşnükli bolýarlar, emma olary gurmaklyk çylşyrymlydyr hem-de ölçeg geçirmeklikde çylşyrymly - oňaýsyz bolýarlar, şonuñ üçinde **maşyn gurlyşygy** çyzuwynda bu usul seýrek ulanylýar.

2.2. Parallel proýektirlemek.

Eger **S** proýeksiýa merkezi **P** proýeksiýalar tekizliginden tükeniksiz uzakda ýerleşen bolsa, onda proýektirleýji şöhleleri özara parallel diýip kabul edýäris. Şeýle proýektirlemege parallel proýektirlemek diýilýär /2-nji a-surat/.

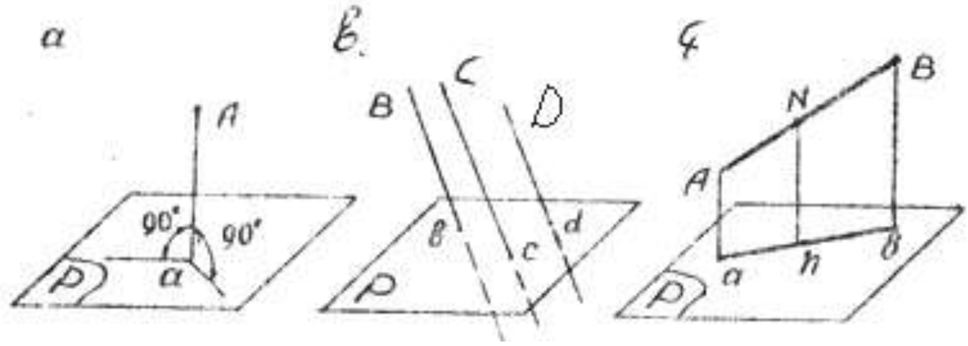


2-nji surat

Parallel proýektirlemekde tükeniksizlikde ýatan **S** nokada ugrukdyrylan proýektirlemegiñ **m** ugry hökman görkezilmelidir.

AB egri çyzygyñ /2-nji b-surat/ nokatlarynyñ üstünden geçirilen proýektirleýji göni çyzyklar **silindrik** üsti emele getirýärler. Şonuñ üçin şeýle proýektirlemeklige **silindrik** proýektirlemek hem diýilýär.

Parallel proýeksiýalar **göniburçly** /3-nji a,ç-surat/ we **ýapgytburçly – ýitiburçly** /3-nji b-surat/ proýeksiýalara bölünýär.



3-nji surat

Birinji ýagdaýda proýektirleýji şöhleler proýeksiýalar tekizligine perpendikulýardyrlar, ikinji ýagdaýda bolsa proýektirleýji şöhleleriň proýeksiýalar tekizligi bilen emele getirýän burçy gönüburçdan tapawutlydyr.

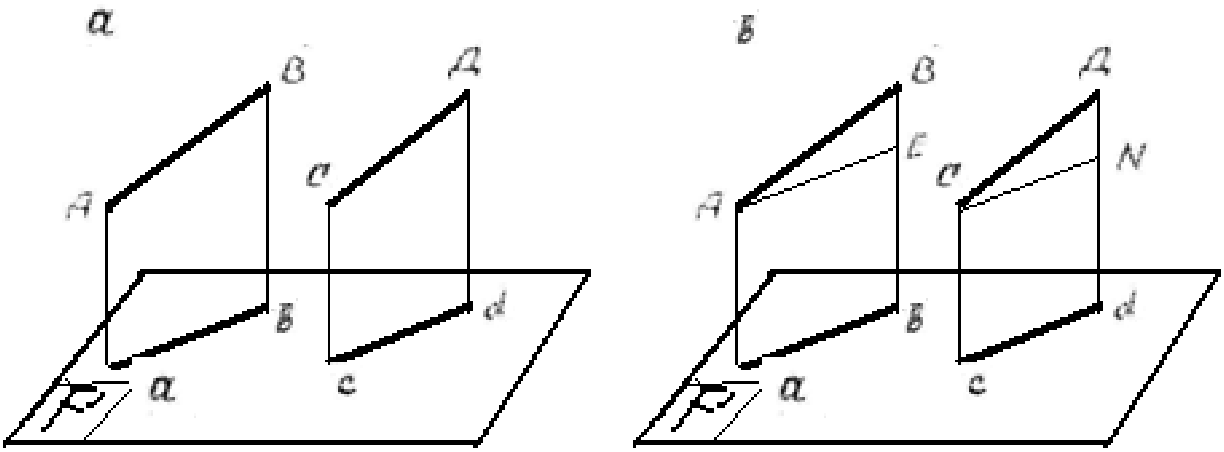
3. Parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetleri:

1. Giňişlikdäki her bir nokadyň we islendik çyzygyň ýagny islendik geometriki figuranyň proýeksiýalar tekizliginiň üstünde diňe bir proýeksiýasy bardyr /1-nji we 2-nji surat/.

2. Göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy olaryň proýeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir, ýagny $\frac{AN}{BN} = \frac{an}{nb}$ /3-nji ç surat/.

Munuň özi **Aa || Nn || Bb** göni çyzyklaryň kesimi proporsional böleklere bölünýändiklerinden hem görünýär.

3. Parallel göni çyzyklaryň biratly proýeksiýalary özara paralleldirler. Eger **AB || CD** bolsa, onda ab || cd /4-nji a surat/.



4-nji surat

Munuň özi **ABba** we **CDdc** iki parallel proýektirleýji tekizlikleriň üçünji tekizligi parallel göni çyzyklar boýunça kesýänliginden gelip çykar.

4. Iki parallel göni çyzygyň kesimleriniň gatnaşygy kesimleriň proýeksiýalarynyň gatnaşygyna deňdir. Goý **AB || CD** diýeliň. Bu ýerden $\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}$ bolýandygy aşakdaky ýaly subut edilýar /4-nji b surat/.

A nokadyň üstünden **ab || AE** göni çyzygy we **C** nokadyň üstünden **cd || CN** göni çyzygy geçirilýär. **ABE** we **CDN** göniburçly üçburçlyklar meňzeşdirler. Üçburçlyklaryň meňzeşliginden $\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{CN}$

ýa-da $\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}$ gelip çykýar. Subut etmelisi hem şundan ybaratdyr.

Parallel proýeksiýalaryň görkezilen şu häsiýetleri proýektirlemegiň ähli ugurlary boýunça hem saklanýar.

Iki ýa-da üç sany özara perpendikulýar bolan proýeksiýalar - şekiller tekizliklerine **göniburçly proýektirlemeklige ortogonal proýektirlemek** ýa-da **G.Monžyñ usuly** diýilýär. **Ortogonal proýektirlemek predmetiñ şekilini takyk gurmagy, oñaýly ölçegler geçirmekligi üpjün edýär we şonyñ üçin ol tehniki çyzgylary çyzmagyñ esasy usulydyr we durmuşda giňden ulanylýandyr.**

“Göniburçly” sözüni köplenç gadymy grek diliniñ **“göni”** we **“burç”** diýen sözlerinden düzülen **“ortogonal”** cözi bilen hem çalşyrýarlar.

Tema 2

Nokadyň proýeksiýasy.

Sapagyň meýilnamasy:

1. Nokadyň proýeksiýasy.
2. Iki proýeksiýalar tekizliklerine garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryň proýeksiýalary (çärýekler).
3. Üç proýeksiýalar tekizliklerine garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryň rpoýeksiýalary (oktandlar).

1.Ortogonal proýeksiýalar tekizlikleriniň birini adatça **gorizontal** ýerleşdirýärler we **gorizontal /kese/ proýeksiýalar tekizligi** diýip atlandyrýarlar, özüni hem **H** bilen belleýärler. Ikinjisi **wertikal – dik** ýerleşdirýärler, oňa **V** – **frontal /maňlaý - öňümizdäki/ proýeksiýalar tekizligi** diýilýär; üçünji hem dik wertikal ýerleşendir, oňa **W** – **profil /gapdal/** proýeksiýalar tekizligi diýilýär. Proýeksiýalar tekizlikleriniň kesişme çyzyklaryna **OX, OY, OZ proýeksiýalar oklary** diýilýär /5-nji a – surat/. Proýeksiýalar oklarynyň üçüsiniň hem kesişýän **O** nokada bolsa koordinata oklarynyň başlangyjy diýilýär.

Goý giňişlikde **A** nokat berlen bolsun. **A** nokatdan proýeksiýalar tekizlikleriniň üçüsine hem perpendikulýar çyzyklary geçirip, olaryň proeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän ýerinde **A** nokadyň ortogonal proeksiýalaryny alarys, olary $\mathbf{a}$, $\mathbf{a^1}$, $\mathbf{a^{11}}$, /nokadyň gorizontal – plan , frontal-fasad, profil proeksiýalary/ diýip belleýärler. Şeýlelik bilen, nokady haýsy hem bolsa bir şekiller tekizlige proektirlemek diýmek, şol nokatdan proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar indermek we onuň esasyny tapmak diýmekdir.

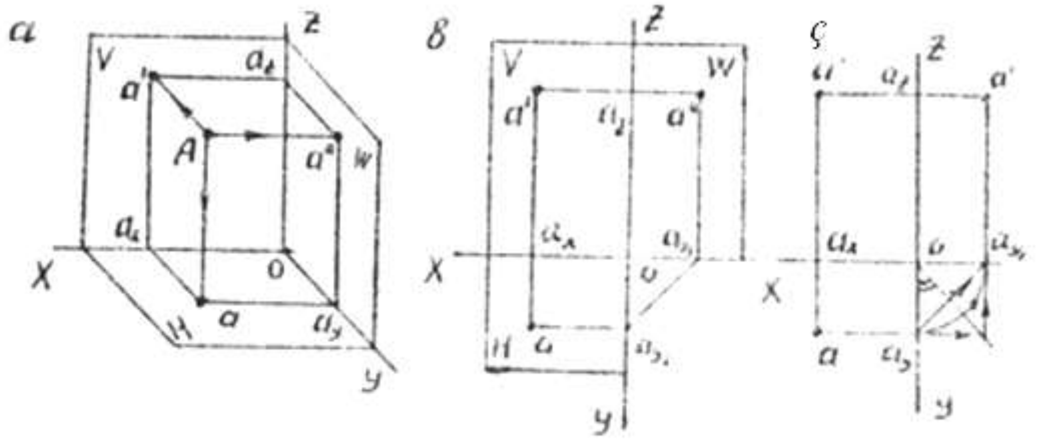
Gurlan parallelepipede **A** nokadyň parallepipedi diýilýär.

Ýokarda görkezilen proýeksiýalaryň bir tekizlikdäki çyzgysyny almak üçin **H** we **W** tekizliklere degişlilikde **OX** we **OZ** oklarynyň daşynda görkezilen ugur boýunça **V** tekizlik bilen utgaşýança aýlaýarlar /5-nji b surat/.

Proýeksiýalar tekizlikleriniň gyralaryny çäklendirýän çyzyklar ortogonal çyzgyda adatça görkezilmeýär
/5-nji ç surat/.

Şekiller tekizliklikleri utgaşdyrlandan soň alynýan şekile **kompleks çyzgy, ortogonal çyzgy** ýada **epýur** diýilýär.

Proýeksiýalar tekizlikleri şeýle utgaşdyrylanda, **a** gorizotal we $\mathbf{a^1}$ frontal proeksiýalar **OX** okyna geçirilen şol bir perpendikulýaryň üstüne ýatýandygy düşnüklidir, şeýle hem $\mathbf{aa_x}$ aralyk **A** nokatdan **V** frontal proýeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar, $\mathbf{a^1\ a_x}$ aralyk bolsa **A** nokatdan **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine çenli aralyga deň bolar. Edil şunuñ ýaly $\mathbf{a^1}$ frontal we $\mathbf{a^{11}}$ profil proýeksiýalar hem **OZ** okuna geçirilen şol bir perpendikulýaryñ üstünde ýatarlar.



5-nji surat

Nokadyñ proýeksiýalarny birleşdirýän $\mathbf{aa^1}$, $\mathbf{a^1a^{11}}$ göni çyzyklara proýeksiýalaryň **baglanşyk çyzyklary** diýilýär.

Nokadyñ berlen epýury boýunça, ýagny iki ýa-da üç proýeksiýasy boýunça nokadyñ giñişlikdäki ýagdaýyny kesgitlemek kyn däldir. Iki proýeksiýa boýunça üçünji proýeksiýany gurmak üçin töweregiñ dugasyndan ýa-da **OY** okuna 45 ^{0} burç bilen göçürlen ýapgyt göni çyzykdan peýdalanmak bolar /5-nji b - surat/.

Ortogonal proýeksiýalaryñ üsti bilen nokadyñ giñişlikde berilmegi nokadyñ göniburçly koordinatalarynyñ üsti bilen berildigi diýildigidir.

A nokadyñ ýagdaýyny kesgitlemek üçin /5-nji a – surat/ berlen **A** nokatdan **XOY**, **XOZ** we **ZOY** ýç koordinatalar tekizliklerine çenli aralyklary ölçeýärler:

X – san berlen nokatdan **ZOY** koordinatalar tekizligine /**W** profil proýeksiýalar tekizligine – çenli bolan $\mathbf{Aa^{11}}$ aralygy,

Y – berlen nokatdan **XOZ** koordinatalar tekizligine /**V** frontal proýeksiýalar tekizligine / çenli bolan $\mathbf{Aa^1}$ aralygy,

Z – berlen nokatdan **XOY** koordinatalar tekizligine **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine çenli bolan **Aa** aralygy añladar.

Görşümiz ýaly koordinata tekizliginiñ ornuna **H, V** we **W** proýeksiýalar tekizlikleri kabul edilendir, şonda olaryñ kesişme çyzyklary koordinata oklary bilen gabat gelýär. Adatça ýazgy şeýle alynyp barylýar. **A /15, 10, 25/.** Koordinatalaryñ şeýle ýazgylaryna **analitik usul** diýilýär. Şol, koordinatalar boýunça **A** nokadyñ proýeksiýalarny tapmak bolar, bu ýerde:

$$\mathbf{Aa = Z_A = 25 = a^1\, a_x = Oa_z = a^1\, a_y}$$
$$\mathbf{Aa^1 = Y_A = 10 = aa_x = Oa_y = a^{11}a_z}$$
$$\mathbf{Aa^{11} = X_A = 15 = aa_y = Oa_x = a^1a_z}$$

Nokadyñ üç sany göniburçly koordinatasy koordinata oklaryň san bahasy nokatlaryň onuñ giñişlikdäki ýagdaýyny mydama doly kesgitleýär.

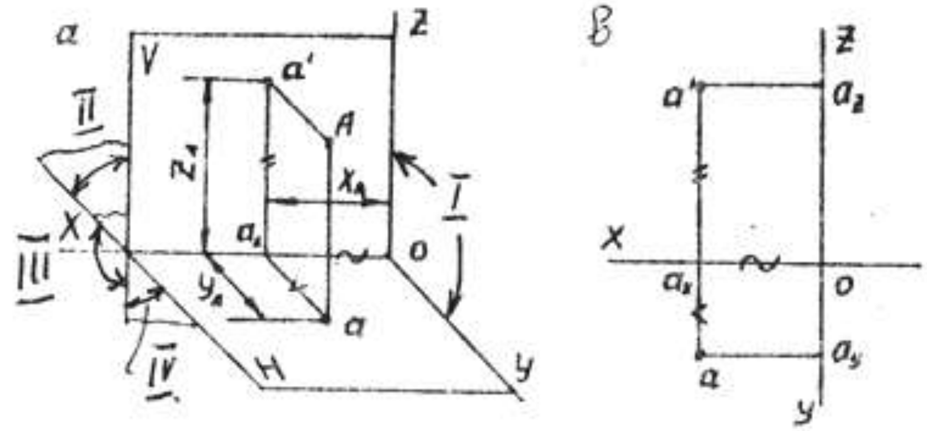
Nokadyñ her bir ortogonal proýeksiýasy koordinatalaryñ ikisi bilen kesgitlenýär, şeýlelikde, nokadyñ ortogonal proýeksiýalarnyñ ikisi bilelikde nokadyñ koordinatalaryñ üçüsini kesgitleýär.

Ortogonal çyzygynyñ tekizliginde nokadyñ ortogonal proýeksiýalarnyñ ikisi degişlikde bu nokadyñ giñişlikdäki ornuny-ýagdaýyny doly kesgitleýär. Şeýle proýeksiýalaryñ ikisi 5-nji b, ç suratlardan görnüşi ýaly, proýeksiýalar okuna perpendikulýar göni çyzygyñ **/proýeksion baglanşyk çyzygyñ/** üsti bilen biri-birine baglydyr.

2. Nokadyñ proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine proýeksiýasy.

Köp meseleleri çözmek üçin **predmetiñ** diñe gorizontal **/H /** we frontal **/V/** özara perpendikulýar proýeksiýalar tekizliklerindäki proýeksiýalarna garap geçmeklik ýeterlikdir. Şonuñ üçin proýeksiýalar tekizliklerniñ ikisiniñ sistemasy çyzmaly geometriýa dersinde giñden ulanylýar. **H** we **V** tekizlikleri özara kesişenlerinde giñişligi dört bölege /çärýege/ bölýär /6-njy a - surat/.

6-njy a – suratda **H** we **V** tekizliklerne ikisine **A /20, 15, 30/** nokadyñ proýeksiýalarnyñ şekili görkezilendir. Bu ýerde **A** nokadyñ **a** gorizontal proýeksiýasy, frontal proýeksiýasy hem $\mathbf{a^1}$ nokatdyr



6-njy surat

Ortogonal çyzygyny almak üçin **H** tekizligi **V** tekizlik bilen utgaşýança **OX** okuñ daşynda 90^0 aşaklygyna aýlaýarlar. Ortogonal çyzygynda /6-nji b - surat/ nokadyñ **a we** $\mathbf{a^1}$ proýeksiýalary **OX** oka geçirilen perpendikulýar, ýagny $\mathbf{aa^1}$ proýeksion baglanşyk çyzygynyñ üstünde ýatýarlar.

. Iki proýeksiýalar tekizliklerne garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryñ proýeksiýalary.

H we **V** şekiller tekizlikleri özara perpendikulýar bolup kesişmek bilen giñişligi çärýekler diýilip atlandyrylýan dört sany iki granly burça bölýärler. Olar **I, II, III, IV** sifrler bilen belgilenendirler. Epýurda nokadyñ proýeksiýalarnyñ ýagdaýy nokadyñ haýsy çärýekde ýerleşendigine baglydyr.

Giñişligiň dört çärýeginde ýerleşen **A, B, C** we **D** nokatlaryñ proýektirlenşine mysallar 7-nji a suratda aýdyñ görkezilendir. **A** nokat **I** çärýekde, **B** nokat **II** çärýekde, **C** nokat **III** çärýekde, **D** nokat bolsa **IV** çärýekde ýerleşendir.

7-nji b suratda berlen nokatlaryñ ortogonal proýeksiýalary gurulandyr. Birinji çärýekde ýerleşen **A** nokadyñ **a** gorizontal proýeksiýasy tekizlikler utgaşdyrylandan soñ **OX** okdan aşakda, $\mathbf{a^1}$ frontal proýeksiýasy bolsa **OX** okdan ýokarda ýerleşendir.

Ikinji çärýekde ýerleşen **B** nokadyñ proýeksiýasynyñ ikisi hem **b** we $\mathbf{b^1}$ tekizlikler utgaşdyrylandan soñ OX okdan ýokarda ýerleşendir.

Üçünji çärýekde ýerleşen **C** nokadyñ gorizontal proýeksiýasy **/c/** **OX** okdan ýokarda, frontal proýeksiýasy /$\mathbf{c^1}$/ bolsa **OX** okdan aşakda ýerleşýär.

Dördünji çärýekde ýerleşen **D** nokadyñ proýeksiýasynyñ ikisi hem **d** we $\mathbf{d^1}$ tekizlikler utgaşdyrylandan soñ **OX** okdan aşakda ýerleşendir.

7-nji a, b suratdan görnüşi ýaly, nokatlar giñişlikde ýerleşende olaryñ **X, Y** we **Z** koordinatalarynyñ belli bir san bahasy bolmalydyr.

A/40, 10, 30/, B /20, 30, 20/, C/50, 20, 20/, D /10, 30, 15/ .

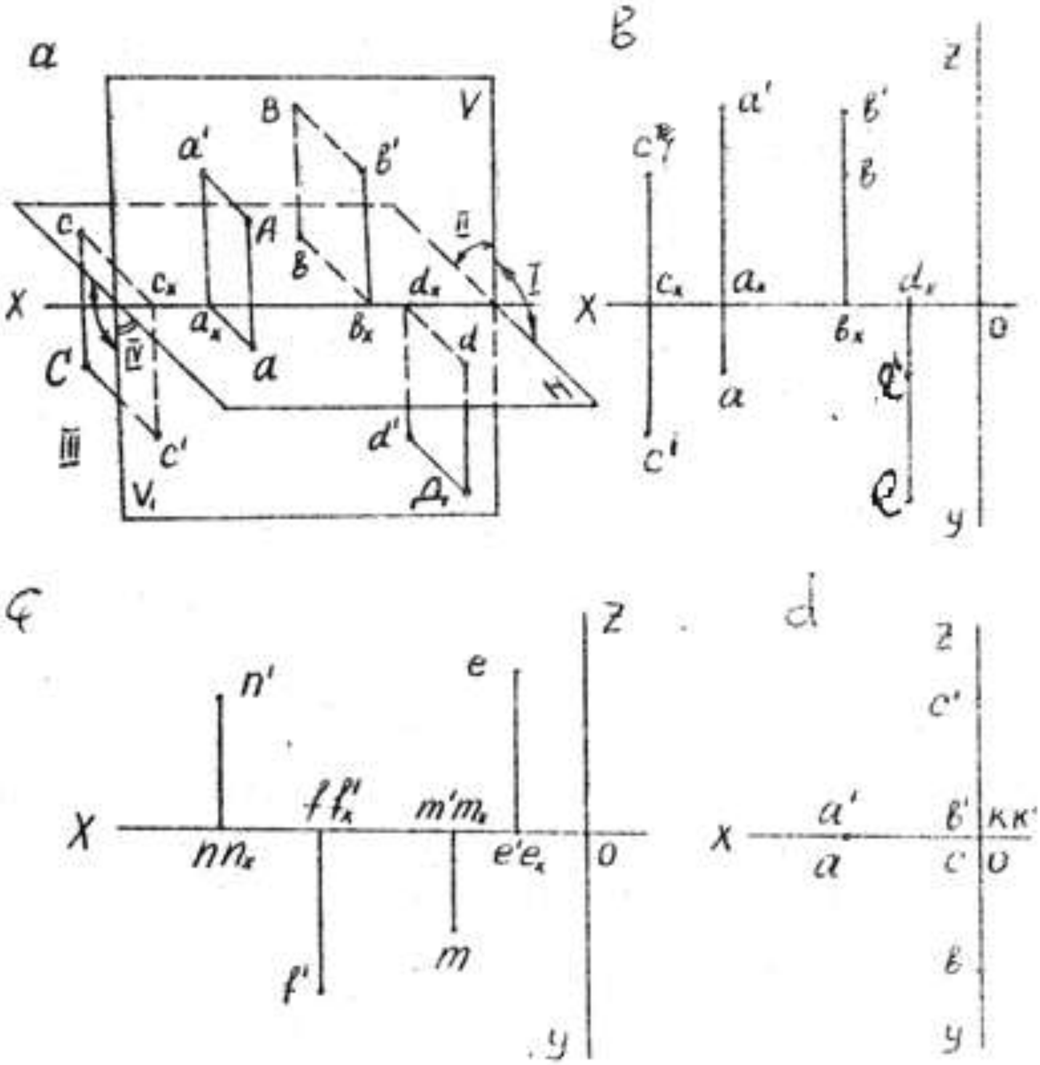
7-nji ç suratda proýeksiýalar tekizliklerinde ýerleşen nokatlaryñ epýuralary berlendir.

Ýagny $\mathbf{N \subset V, F \subset V_1, M \subset H}$ **we** $\mathbf{E \subset H_1}$.

Eger nokatlar haýsy – da bolsa bir proýeksiýalar tekizliginde ýerleşen bolsalar, onda olaryñ şol şekiller tekizligine çenli bolan aralygy haýsy – da bolsa bir koordinatasynyñ san bahasy **0** – nola deñdir, ýagny ýokdyr

N /55, 0, 20/, F /40, 0, - 25/, M /20,15, 0/, E /10, -25, 0/.

7-nji d – suratda nokadyñ iki koordinatasynyň san bahasy 0 - nola deñ bolanda ol nokatlaryñ koordinata oklaryñ biriniñ üstünde ýerleşendiklerini görkezilendir. **A /20, 0, 0/, B /0, 20, 0 /, C /0, 0, 20/.**



7-nji surat

Şu suratdan görnüşi ýaly, haýsy hem bolsa bir nokadyñ üç koordinatasynyñ hem san bahasy ýok bolsa, ýagny 0 - nola deñ bolsa, onda ol nokat koordinata oklarynyñ başlangyjynda, **0** nokatda ýerleşýändir. Meselem, **K /0, 0, 0/ -** nokady.

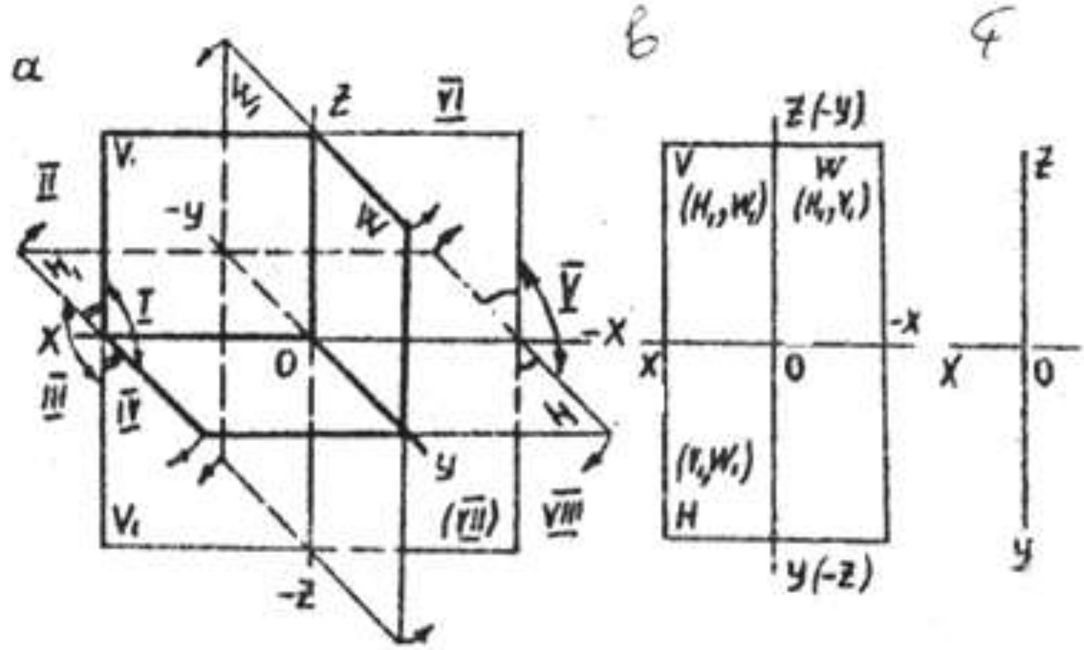
3. Üç proýeksiýalar tekizliklerine garanyňda dürli-dürli ýagdaýlarda ýerleşen nokatlaryñ proýeksiýalary.

Giňişlikde özara perpendikulýar bolan üç sany: gorizontal **H**, frontal **V**, we profil **W** proýeksiýalar tekizlikleri özara kesişmek bilen giñişligi oktantlar diýilip atlandyrylýan sekiz sany üç granly burça bölýärler /8-nji a - surat/. Oktantlar hem çärýekler ýaly nomerlenýär:

I, II, III, IV, V, VI, VII we VIII. Oktantlaryñ tertibi çyzgyda görkezilendir.

1-nji tablisada dürli oktantalar üçin nokadyñ koordinata oklarynyň alamatlary berilendir.

Nokadyñ haýsy oktantada ýerleşenligi kesgitlenende, **W** tekizligiň ozalky çärýeklere garanda giñişligi iki topara bölýändigni göz öñünde tutmak gerek : birinji topar **OZ** okdan çepde I – IV oktantalar, sagda bolsa ikinji topar V – VIII oktantalar ýerleşýär. Nokadyñ gorizontal we frontal proýeksiýalarynyñ ýerleşişi boýunça onuñ haýsy topardadygyny we oktantadadygyny kesgitleýärler. Mysal üçin, nokadyñ gorizontal we frontal proýeksiýalary **OZ** oktan çepde ýerleşen diýeliñ, bu ýagdaýda nokat oktanlaryñ birinji toparyna degişlidir. Şol proýeksiýalaryñ **OX** oka görä ýagdaýy boýunça bolsa nokadyñ haýsy çärýekde, diýmek, haýsy oktantda ýerleşendigi kesgitlenýär.



8-nji surat

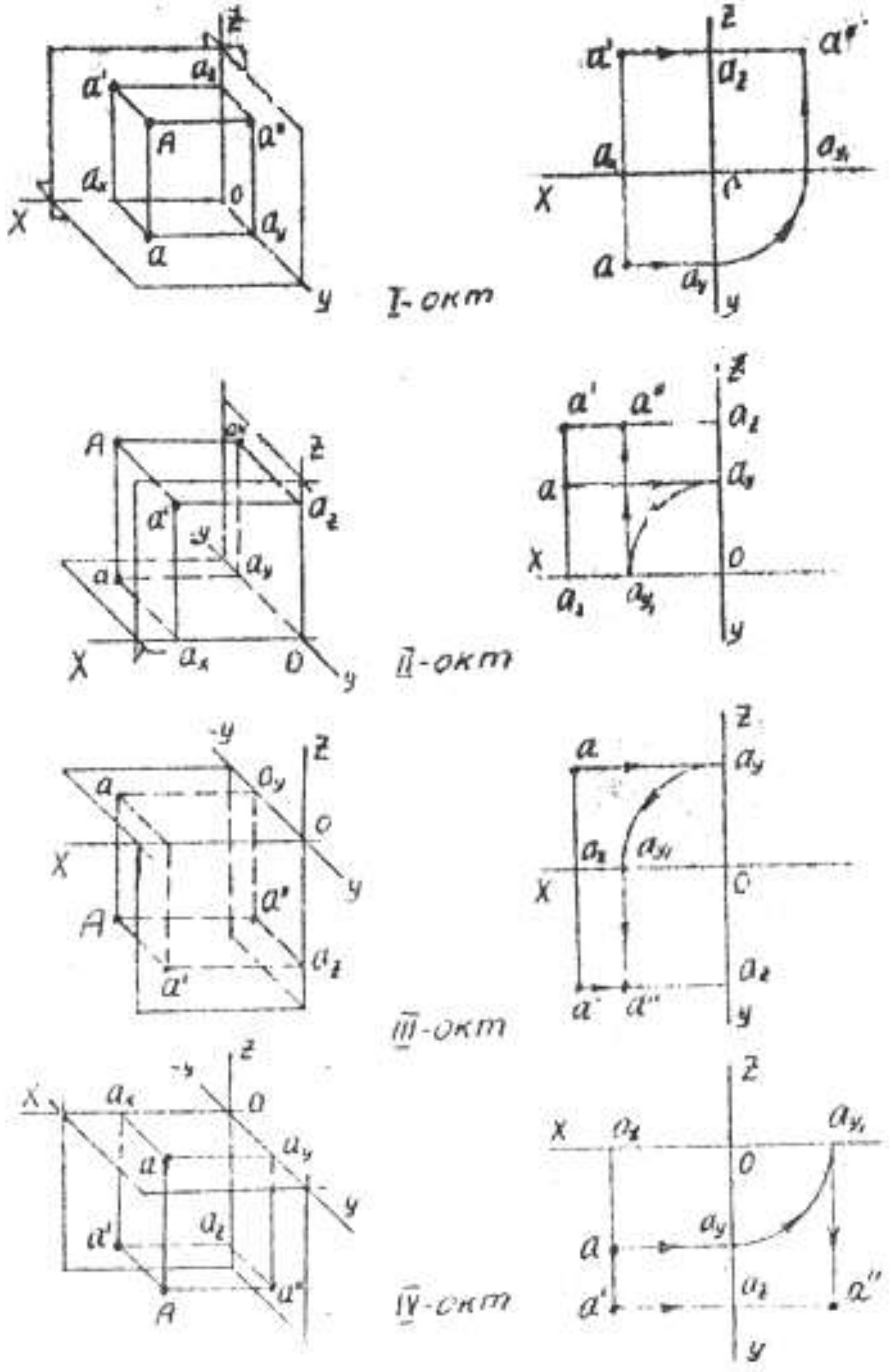
Nokadyñ giñişlikdäki ýagdaýyny diñe onuñ proýeksiýalary boýunça dälde, **X, Y, Z** üç koordinatalaryñ alamatlary boýunça hem kesgitlemek bolar. Nokadyñ koordinatalary belli bolsa, şol koordinatalar boýunça nokadyñ proýeksiýalarny gurmak bolar we tersine, kompleks çyzygy boýunça nokadyñ koordinatalaryny kesgitlemek bolar.

1-nji tablisa.

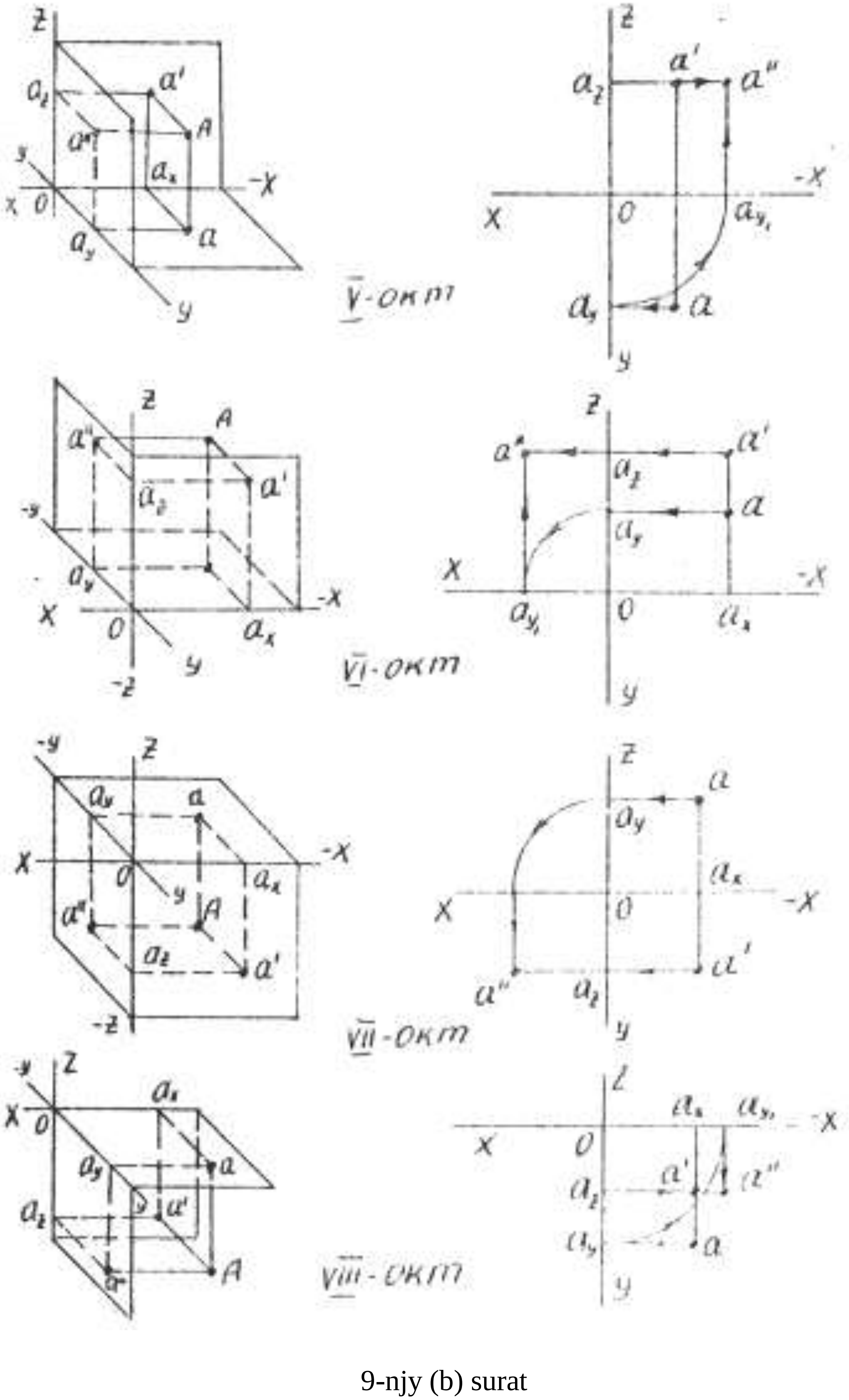
Oktantlar			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Koordinata oklary	X	alamatlar	+	+	+	+	-	-	-	-
	Y		+	-	-	+	+	-	-	+
	Z		+	+	-	+	+	+	-	-

Ortogonal çyzga geçmek üçin gorizontal **H** we profil **W** tekizlikleri 8-nji a-suratda görkezilişi ýaly aýlap, frontal **V** tekizligi bilen utgaşdyrylýar. Şeýle utgaşdyrmaklygyñ netijesinde **ortogonal çyzgy, kompleks çyzgy, /epýur/** alynýar /8-nji b, ç surat/. Şol çyzgyda hem giñişligiñ sekiz burçynyñ /oktantlarynyñ/ islendiginde ýerleşen nokadyñ proýeksiýasy görkezilmäge doly mümkinçilik bardyr.

Dürli oktantlarda ýerleşen nokadyñ proýektirlenişiniñ aýdyñ görnüşinde hem-de ortogonal çyzgyda berlişine mysallar 9-nji suratda görkezilendir. Öñki belleýşimiz ýaly, şunda hem oktantalaryñ nomerleri **rim sifrler** bilen bellenendir.



9-njy (a) surat

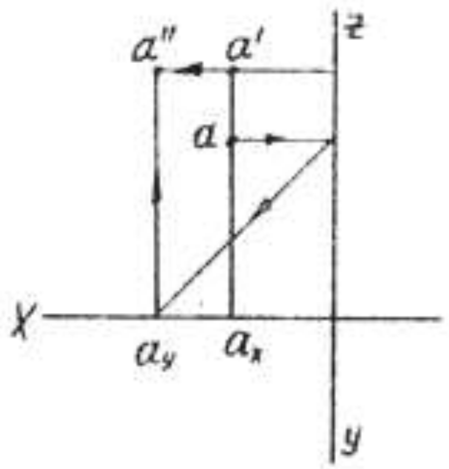


9-njy (b) surat

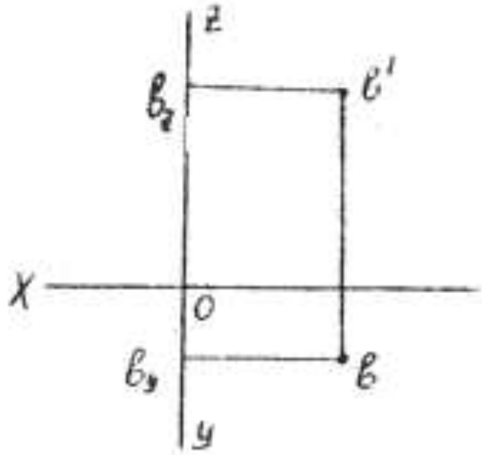
1-nji mesele. Berlen koordinatalary boýunça A /15, - 25, 35/ nokadyñ /10-njy surat/ proýeksiýalaryny gurmaly.

$$X_A = 15,\ Y_A = -25,\ Z_A = 35.$$

2-nji mesele. B nokat b gorizontal we b^1 frontal proýeksiýalary bilen berlen. Bu nokadyñ üç koordinata oklarynyň san bahasyny kesgitlemeli /11-nji surat/. B .



10-njy surat



11-nji surat

Tema 3

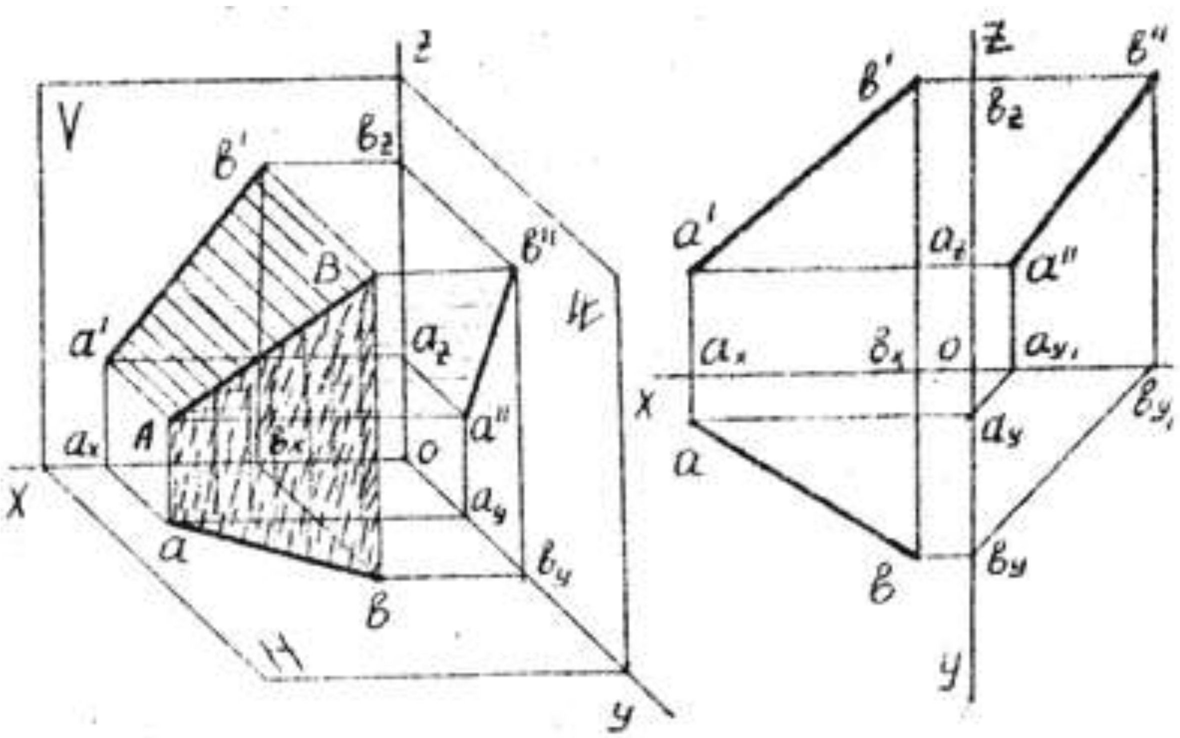
Göni çyzygyň proýeksiýasy.

Sapagyň meýilnamasy:

1. Göni çyzygyň proýeksiýasy.
2. Umumy haldaky göni çyzyk.
3. Hususy haldaky göni çyzyk.
4. Umumy ýagdaýdaky göni çyzygyñ kesiminiñ natural uzynlygyny we onuñ proýeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçlarynykesgitlemek.
5. Göni çyzygyñ yzlary.
6. Iki göni çyzyklaryň özara ýagdaýlary.
7. Tekiz burçlary proýektirlemek.

1.Göni çyzygyñ giñişlikdäki ýagdaýy onuñ iki nokady bilen kesgitlenýär. Şonuñ üçin hem şol iki nokady **H, V we W** şekiller tekizliklerne proýektirläp we nokatlaryñ bir atly proýeksiýalaryny göni çyzyk bilen birleşdirip, **AB** kesimiñ **ab** gorizontal, **a^1 b^1** frontal **a^{11} b^{11}** profil proýeksiýalary alynýar /13-nji surat/.

Göni çyzygyñ proýeksiýasy şol göni çyzygyñ üstünden geçýän proýektirleýji tekizlikleriñ proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişme çyzygy hökümde hem kesgitlenilip biliner. Göni çyzygyñ şekiller tekizligindäki proýeksiýasy - göni çyzykdyr. Proýeksiýalar tekizliklerine garanda göni çyzyk özüniñ giñişlikdäki ýagdaýyna görä iki hili, ýagny **umumy** we **hususy** halda bolup biler.



13-nji surat.

2. Umumy haldaky göni çyzyk.

Proýeksiýalar tekizlikleriniñ hiç birine hem parallel bolmadyk göni çyzyga **u m u m y** haldaky göni çyzyk diýilýär . Şeýle göni çyzygyñ şekili kesiminiñ uzynlygynyň her bir proýeksiýasy kesimiñ özünden kiçidir we onuñ proýeksiýalar tekizliklerine bolan **ýapgytlyk burçy** näçe uly bolsa, proýeksiýasy şonça-da kiçidir. **AB** göni çyzyk bilen **H, V** we **W** tekizlikleriñ arasyndaky burçlary degişlilikde **α, β** we **λ** bilen belläp, şeýle ýazyp bileris:

$$ab = AB \cdot \cos\alpha\,; \quad a^1 b^1 = AB \cdot \cos\beta\,; \quad a^{11} b^{11} = AB \cdot \cos\lambda\,.$$

Umumy haldaky **AB** göni çyzygyñ proýeksiýalary ortogonal çyzgyda proýeksiýalar okunyñ ählisine ýapgyt bolup ýerleşýändir
/13-nji we 26-njy surat /.

Umumy haldaky göni çyzygyñ proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasy – mydama göni çyzykdyr we mydama öz uzynlygyndan gysgadyr – kiçidir ýagny :

$$ab < AB, \quad a^1 b^1 < AB, \quad a^{11} b^{11} < AB$$

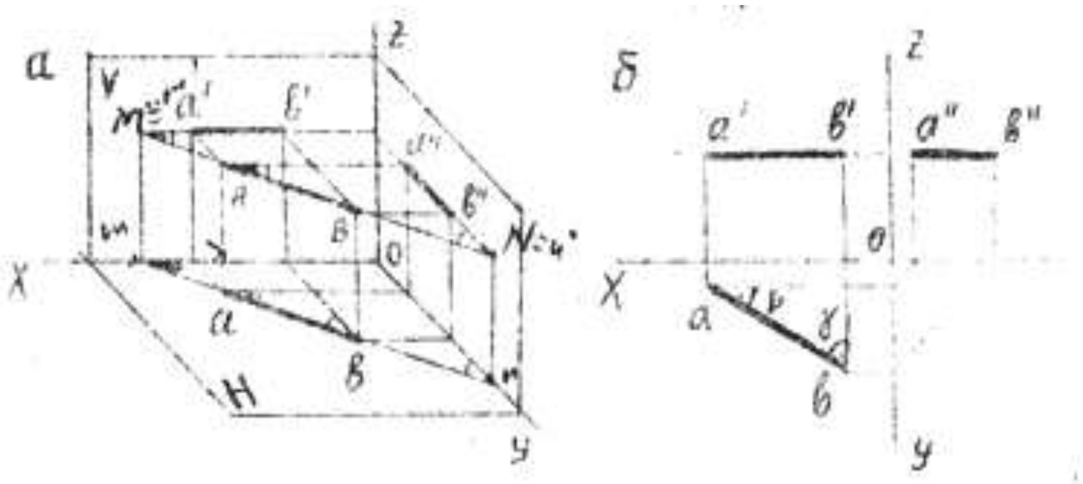
3. Hususy haldaky göni çyzyk.

Giňişlikde berlen göni çyzygyñ proýeksiýalar tekizliklerine görä şu aşakdaky ýagdaýlary mümkin:

1. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel göni çyzyk.
2. Proýeksiýalar tekizliginiñ birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzyk.
3. Proýeksiýalar tekizligine degişli göni çyzyk.
4. Proýeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk.

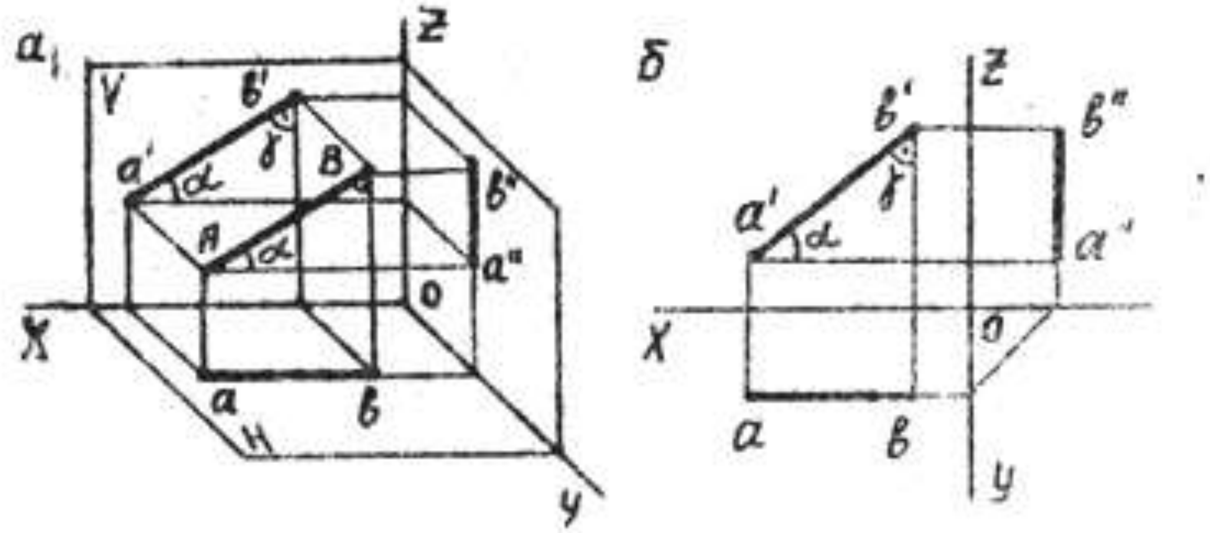
3.1. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel göni çyzyk.

Gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga **g o r i z o n t a l** göni çyzyk diýilýär. **AB** göni çyzygyñ $a^1 b^1$ frontal proýeksiýasy **OX** oka parallel bolar. Emma **ab** gorizontal proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **H** tekizlige **AB**-deň bolan hakyky uzynlygynda proýektirlenýär **/ab = AB/.** /14-nji surat/. Gorizontal **ab** proýeksiýa bilen **OX** okunyñ arasyndaky **β** burçy **AB** göni çyzygyñ **V** tekizligine, **λ** burçy bolsa **W** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



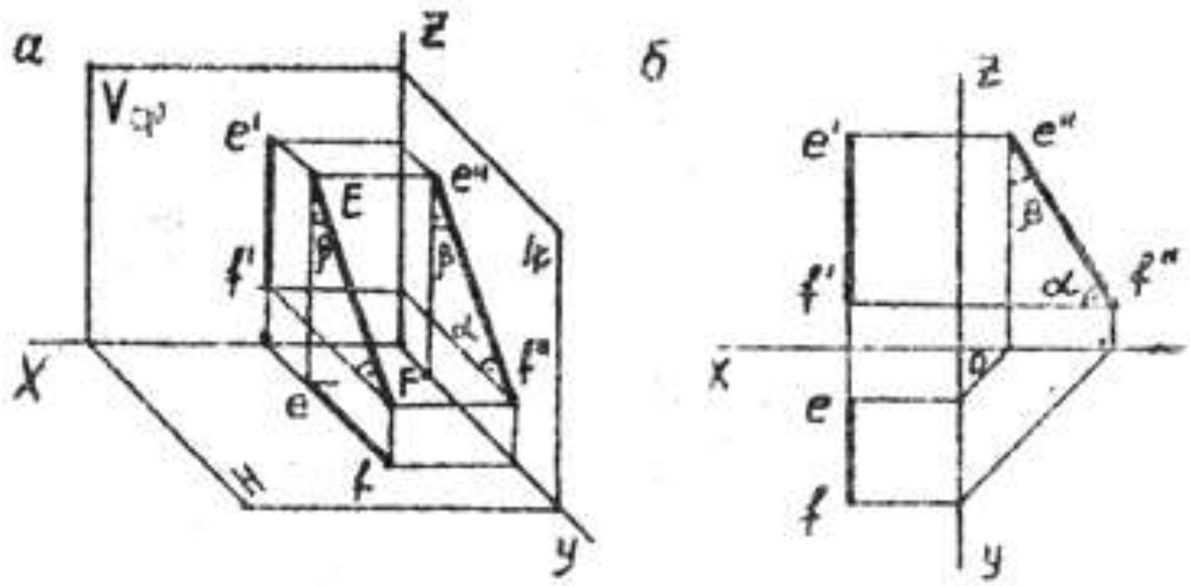
14-nji surat

Frontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga **f r o n t a l** göni çyzyk diýilýär. **AB** göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasy **OX** oka paralleldir, **a^1 b^1** frontal proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **V** tekizligine hakyky uzynlygynda proýektirlenýar **/a^1 b^{11} = AB/.** /15-nji surat/. Frontal proýeksiýa bilen **OX** okuñ arasyndaky **α** burçy **AB** göni çyzygyñ **H** tekizligine, **λ** burçy bolsa **W** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



15-nji surat

Profil proýeksiýalar tekizligine parallel bolan göni çyzyga **p r o f i l** göni çyzyk diýilýär /16-nji surat/. **EF** göni çyzygyñ **ef** gorizontal we **e^1f^1** frontal proýeksiýalary **OX** oka perpendilulýardyrlar. Profil **e^{11} f^{11}** proýeksiýasy erkin ýagdaýy eýeleýär we **W** tekizligine hakyky uzynlygynda **/e^{11} f^{11} = EF/** proýektirlenýar. Profil proýeksiýa bilen **OY** okunyñ arasyndaky **α** burçy **EF** göni çyzygyñ **H** tekizligine, **β** burçy bolsa **V** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deñdir.



16-njy surat

3.2. Proýeksiýalar tekizliginiñ birine perpendikulýar ýa-da ikisine parallel göni çyzyk.

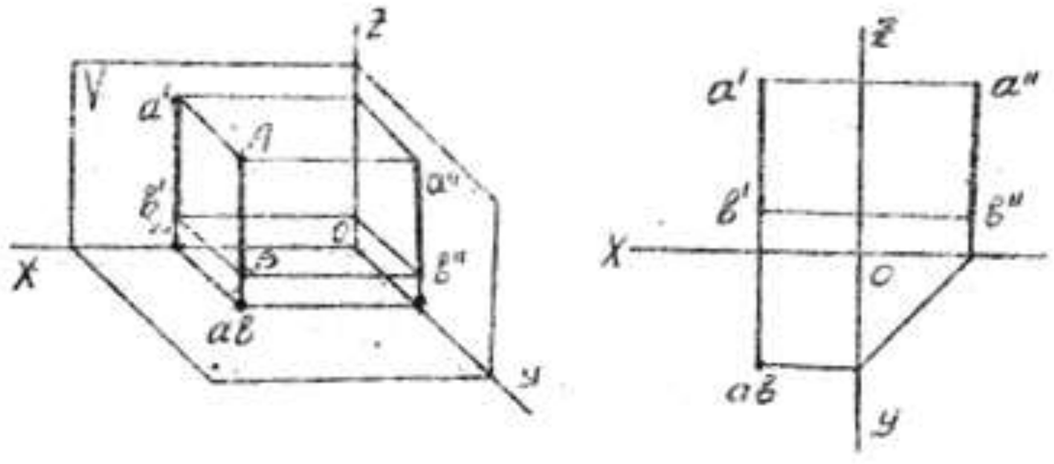
Proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine parallel bolan göni çyzyk üçünji tekizlige perpendikulýardyr.

Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar göni çyzyklar **proýektirleýji** göni çyzyklardyr we degişlilikde **gorizontal proýektirleýji, frontal proýektirleýji** we **profil proýektirleýji** göni çyzyklar diýilýär.

Olaryñ her biriniñ perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasy nokatdyr. Beýleki iki proýeksiýasy bolsa bu proýeksiýalar tekizligini çäklendirýän oklara perpendikulýardyrlar we hakyky uzynlygyna deňdirler.

1. **AB** göni çyzyk **H** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **AB ⊥ H, AB IIV,AB II W** şonuñ üçin hem **AB** kesime **gorizontal proýektirleýji göni çyzyk** diýilýär. /17-nji surat/. **ab** – nokatdyr,

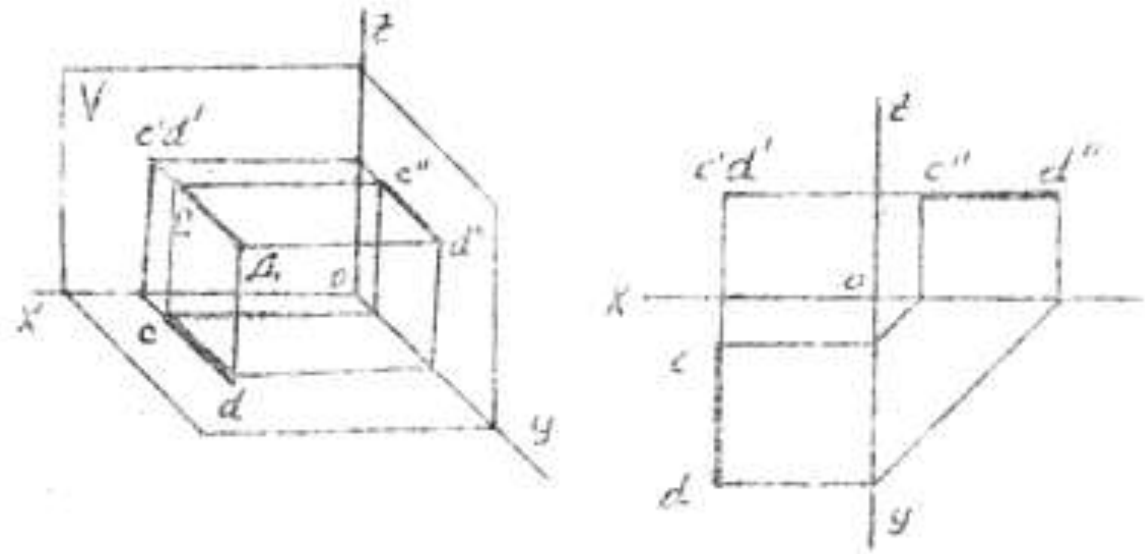
$$\mathbf{a^1\,b^1 = a^{11}\,b^{11} = AB, \quad a^1b^1 \perp OX, a^{11}\,b^{11} \perp oy,}$$
$$\mathbf{a^1\,b^1\ II\ OZ, a^{11}\,b^{11}\ II\ OZ.}$$



17-nji surat

2. **CD** göni çyzyk **V** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **CD** $\perp$**V , CD II H**, **CD II W /**18-nji surat/. **CD** kesime **frontal proýektirleýji** göni çyzyk diýilýär.**cd** – nokatdyr,

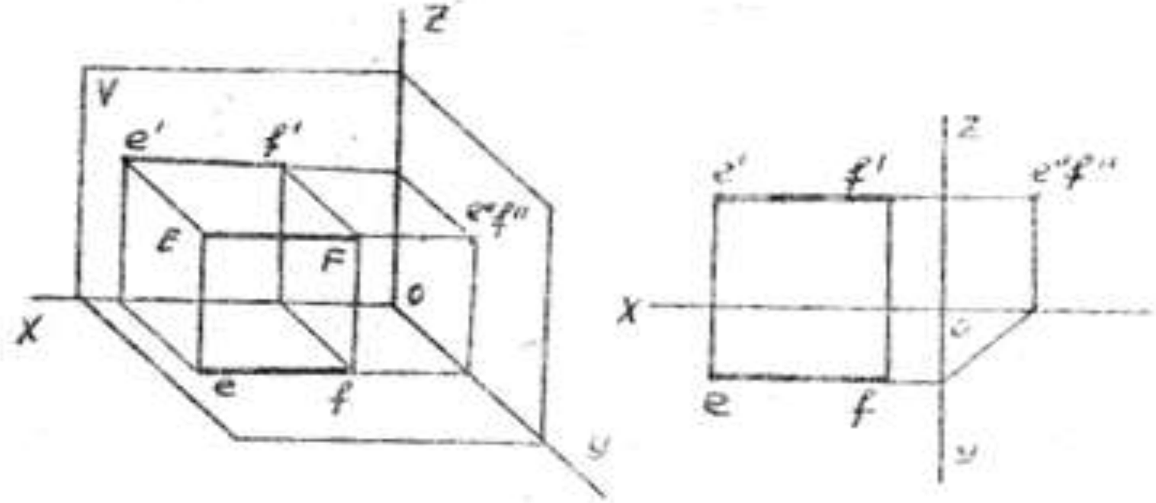
$$\mathbf{cd = c^{11}\ d^{11} = CD,\ \ cd \perp OX,\ \ c^{11}\ d^{11} \perp OZ,\ \ cd\, II\ OY,}$$
$$\mathbf{c^{11}\ d^{11}\ II\ OX.}$$



18-nji surat

3. **EF** göni çyzyk **W** şekiller tekizligine perpendikulýardyr, ýagny **EF** $\perp$ **W, EF II H, EFIIV** /19-nji surat/. **EF profil proýektirleýji** göni çyzykdyr. $\mathbf{e^{11}f^{11}}$ – nokatdyr,

$$\mathbf{ef = e^1\ f^1 = EF,\quad ef\ II\ OX,\ \ e^1\ f^1\ II\ OX.}$$



19-njy surat

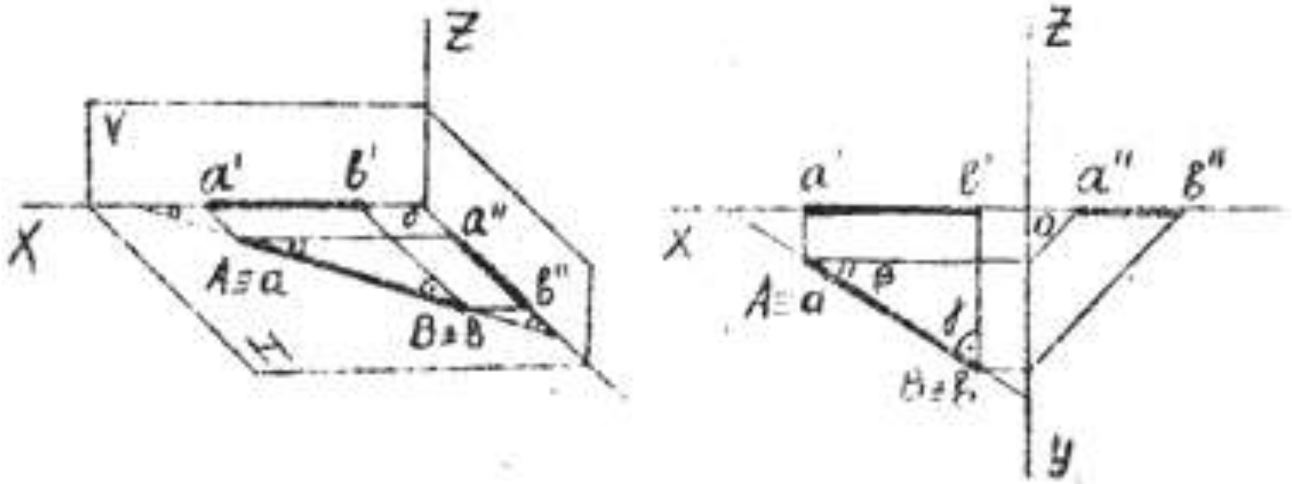
3.3. Proýeksiýalar tekizligine degişli göni çyzyk.

Eger göni çyzyk proýeksiýalar tekizliginde ýatan bolsa, onda onuñ proýeksiýalarynyñ biri berlen göni çyzyk bilen gabat gelýändir we oña deñdir, beýleki ikisi bolsa şol tekizligi çäklendirýän koordinata oklaryñ üstünde ýatýandyr.

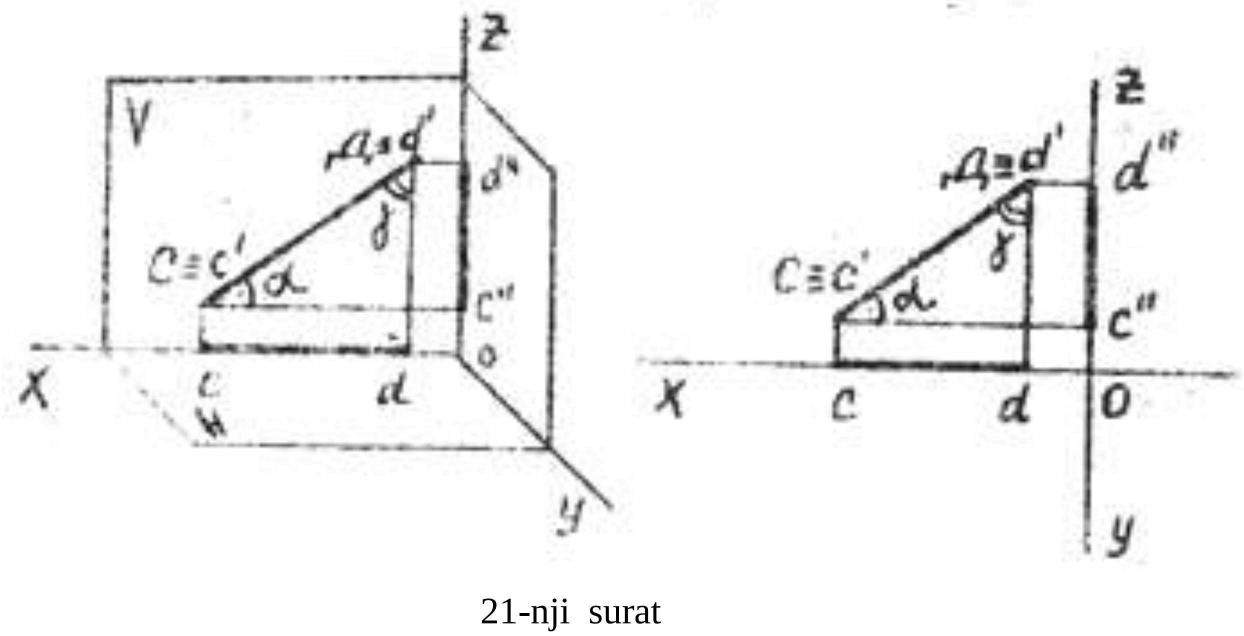
1. **AB** göni çyzyk **H** gorizontal şekiller tekizliginde ýatyr /20-nji surat/. **AB = ab**

2. **CD** göni çyzyk **V** frontal şekiller tekizliginde ýatyr /21-nji surat/. **CD =** c^1d^1

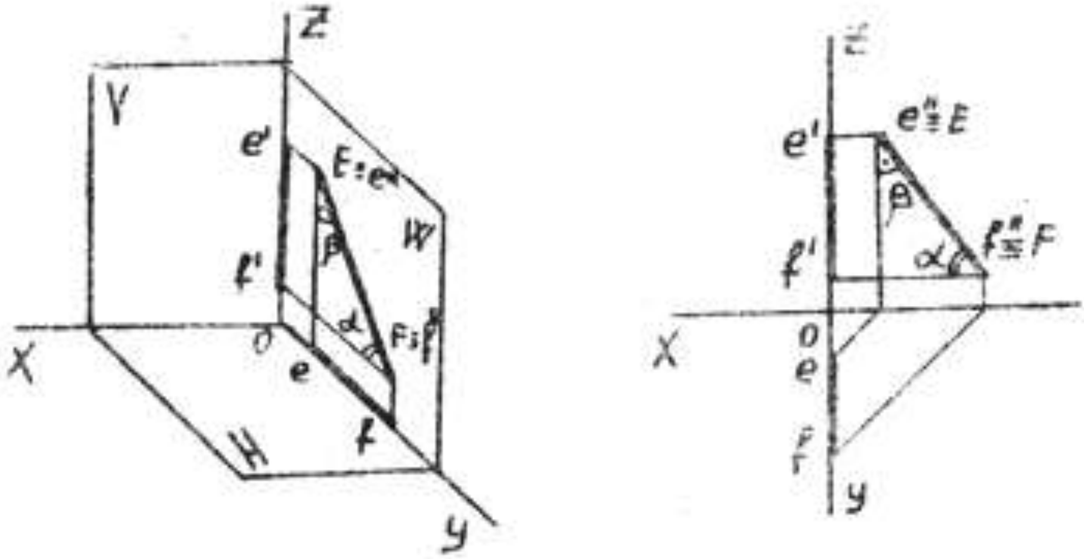
3. **EF** göni çyzyk **W** profil şekiller tekizliginde ýatyr /22-nji surat/. **EF =** $e^{11}f^{11}$



20-nji surat



21-nji surat



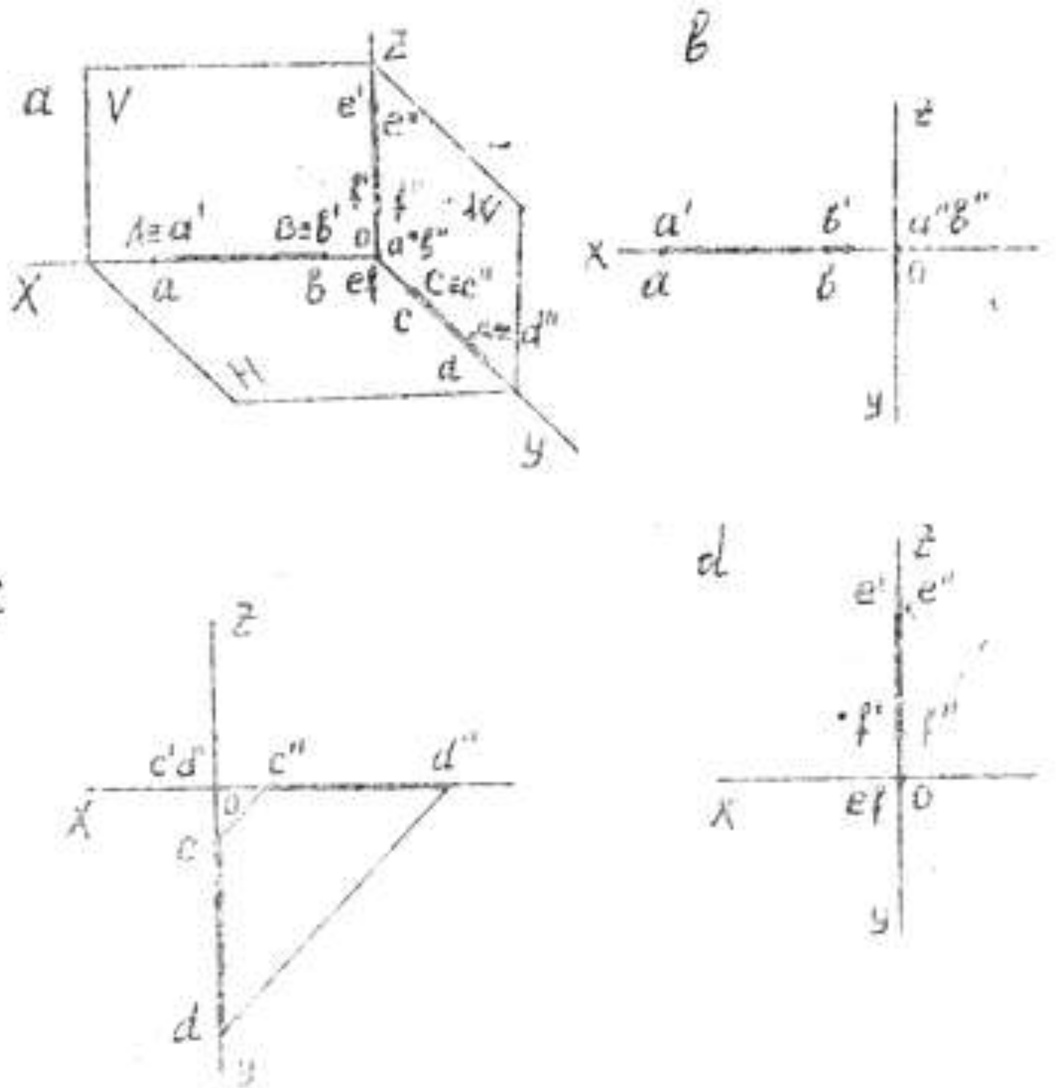
22-nji surat

3.4. Proýeksiýalar okuna gabat gelýän göni çyzyk.

1. Eger-de berlen **AB** göni çyzyk **OX** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we gorizontal proýeksiýalar tekizliklerine – degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji a, b suratda görkezilendir $\mathbf{AB = ab = a^1\,b^1,\ a^{11}b^{11}}$ – nokatdyr.

2. **CD** göni çyzyk **OY** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol gorizontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine-de degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji/a,ç / suratda görkezilendir $\mathbf{CD = cd = c^{11}d^{11},\ c^1d^1}$ - nokatdyr

3. **EF** göni çyzyk **OZ** koordinatalar okunda ýatýan bolsa, onda ol frontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine-de degişlidir. Onuñ giñişlikdäki aýdyñ görnüşi we ortogonal proýeksiýasy 23-nji a, d suratda görkezilendir $\mathbf{EF = e^1f^1 = e^{11}f^{11},\ ef}$ – nokatdyr.

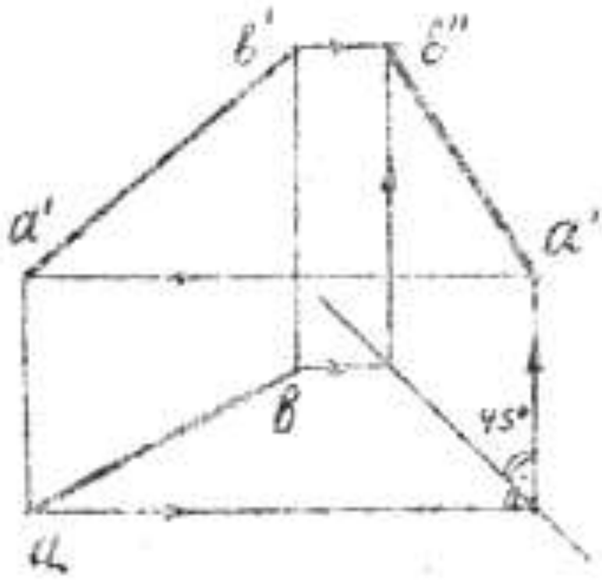


23-nji surat

Oksuz proýektirlemek.

Köp halatlarda nokatlaryň giňişlikdäki ýagdaýyny proýeksiýalar tekizliklerine görä däl- de proýektirlenýän figuranyň nokatlaryna görä , olaryň özara ýagdaýlary bilen kesgitlenýärler. Şonuň üçin tehniki çyzgylarda kä halatlarda proýeksiýalar oklaryny geçirmeýärler. Proýeksiýalaryň arasyndaky aralyklary bolsa erkin alýarlar. Şol bir ýagdaýda **H** we **V** proýeksiýalar tekizlikleri üçin hem- de **V** we **W** proeksiýalar tekizlikleri üçin baglanşyk çyzyklarynyň **wertikallygy - dikligi** we **gorizontallygy – keseligi** saklanylýar.

24-nji suratda oksuz proýektirlemekde umumy halda **AB** göni çyzyk gurlandyr. Bu ýagdaýda nokatlaryň şekiller tekizliklerine çenli aralygy kesgitlenilmeýär.



24-nji surat

Göni çyzygyň **profil** proýeksiýasyny gurmak üçün baglanyşyk çyzyklaryň ugry bilen $\mathbf{45^0}$ burçy emele getirýän kömekçi göni çyzygy geçirmek ýeterlikdir. Şondan soňky gurluş ýokarky suratda **ugur görkeziji strelkalar** bilen görkezilendir we çyzgydan düşnüklidir.

Kesimi berlen gatnaşykda bölmek.

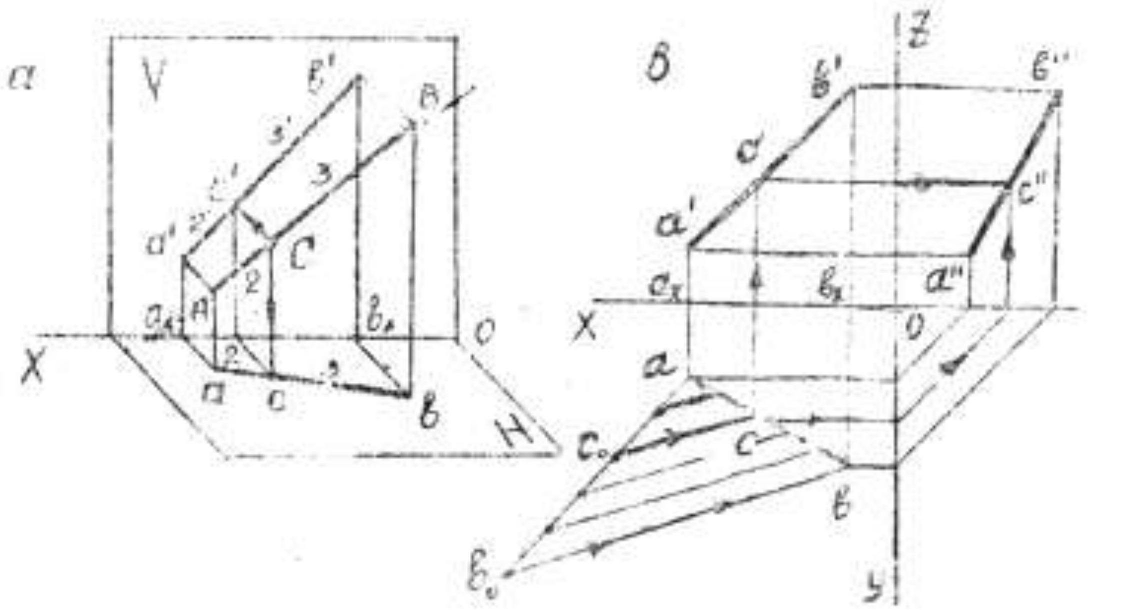
Mesele : **AB** kesimi **n /m = 2/3** bolan gatnaşygynda bölmeli. Berilen meseläni işlemek üçin parallel proýektirlemegiň esasy häsiýetlerini ulanarys.

Nokat göni çyzyga degişli bolsa, onda ol nokadyň biratly proýeksiýalary-da şol gönüniň bir atly proýeksiýalaryna degişlidir.

Eger **C** nokat **AB** göni çyzygy berlen gatnaşykda bölýän bolsa, onda bu nokadyň **c** , $\mathbf{c^1}$ **we** $\mathbf{c^{11}}$ proýeksiýalary-da (25-nji suratda) berlen göni çyzygyň bir atly proeksiýalaryny şol gatnaşykda bölýändir, ýagny:

$$\mathbf{AC/BC = ac/bc = a^1\, c^1/b^1c^1 = a^{11}\, c^{11}/b^{11}\, c^{11} = n/m = 2/3}$$

Şoña görä-de ortogonal çyzgyda kesimi berlen gatnaşykda bölmegi ýerine ýetirmek üçin proýeksiýalaryñ haýsy hem bolsa birini şol gatnaşykda bölmek ýeterlikdir. Şonuň üçin kesimiň **ab** – gorizontal şekiliniň **a** – nokadyndan islendik göni çyzygy geçirip, şol çyzyga bäş deň aralygy goýup $\mathbf{b_0}$ – nokady alýarys we **b** – nokat bilen birleşdirip, $\mathbf{c_0c}$ **II** $\mathbf{b_0b}$ geçirip **c** – nokady gurarys, soňra adaty usul bilen $\mathbf{c^I}$ we $\mathbf{c^{II}}$ taparys. **C** – nokat **AB** kesimi berlen gatnaşykda bölýändir. Bilşimiz ýaly gözlenýan nokadyñ galan proýeksiýalary, şol nokadyñ **AB** göni çyzyga degişlidiginden gelip çykyar.



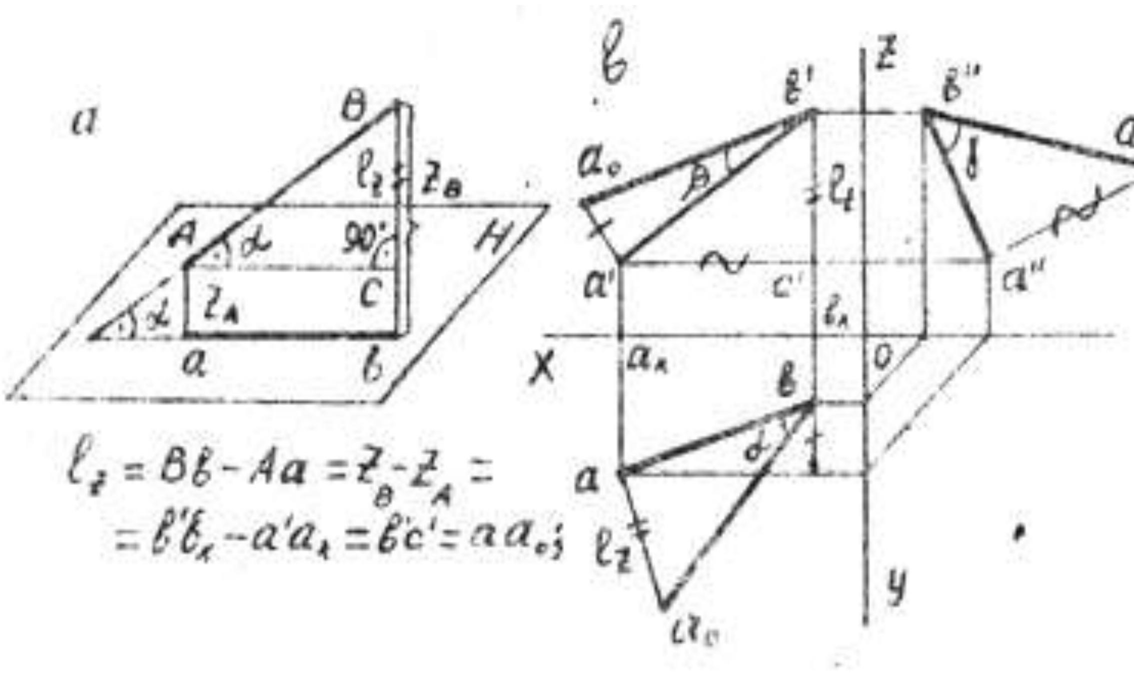
25-nji surat

4.Umumy ýagdaýdaky göni çyzygyñ kesiminiñ natural uzynlygyny we onuñ proýeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçlarynykesgitlemek.

Bize belli bolşy ýaly, umumy haldaky göni çyzygyñ preýksiýalary şol kesimiñ hakyky uzynlygyndan mydama kiçidir, ýagny gysgadyr.

Ortogonal çyzgyda şol kesimiñ hakyky uzynlygyny kesgitlemek üçin dürli-dürli usullar ulanylýar. Häzirlikçe aşakda **göniburçly üçburçluk usulyna** garap geçeliñ.

Umumy haldaky göni çyzygyñ **AB** kesiminiñ hakyky uzynlygy, dogrudan hem 26-njy a suratdan görnüşi ýaly, **göniburçly üçburçlugyñ gipetenuzasyna /aa$_0$ = AB/ deñdir, şol göniburçly üçburçlugyñ bir kateti kesimiñ /ab = AC/ gorizontal proýeksiýasydyr,beýleki kateti bolsa /BC=Zb-Za=Lz/ kesimiñ uçlarynd H tekizligine çenli aralyklaryñ algebraik tapawudydyr.** Göni çyzygyñ **H** tekizligine **α** ýapgyt burçy şol göniburçly üçburçlukdan kesgitlenýăr , ýagny ol burç **aa$_0$** - gipetenuza bilen berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ arasyndaky burçudyr.



26-njy surat

Göniburçly üçburçluk gurmak usuly bilen ortogonal çyzygyda umumy ýagdaýdaky kesimiñ hakyky uzynlygynyñ we **H, V, W** proýeksiyalar tekizliklerine bolan ýapgytlyk burçlaryñ kesgitlenilişi 26-njy b suratda görkezilendir. Bu suratda gőniburçly üçburçluk gorizontal, frontal we profil proýeksiyalarynyň üstünde gurlandyr.

5. Göni çyzygyñ yzlary.

Göni çyzygyñ proýeksiyalar tekizlikleri bilen kesişýän nokatlaryna göni çyzygyñ y z l a r y diyilyăr. Göni çyzygyñ yzlary hem proýeksiyalar tekizlikleri ýaly gorizontal, frontal we profil yzy diýilip atlandyrylýar.

Proýeksiyalar tekizlikleriniñ üçüsiniñ sistemasynda berlen umumy haldaky göni çyzygyñ üç sany yzy bardyr. Göni çyzygyñ her bir yzy, şol göni çyzyga we proýeksiyalar tekizlikleriniñ birine degişli bolmalydyr.

Proýeksiyalar tekizlikleriniñ birine parallel bolan göni çyzygyñ iki sany yzy bardyr, olar hem oña parallel bolmadyk beýleki iki şekiller tekizliginde ýerleşýändirler.

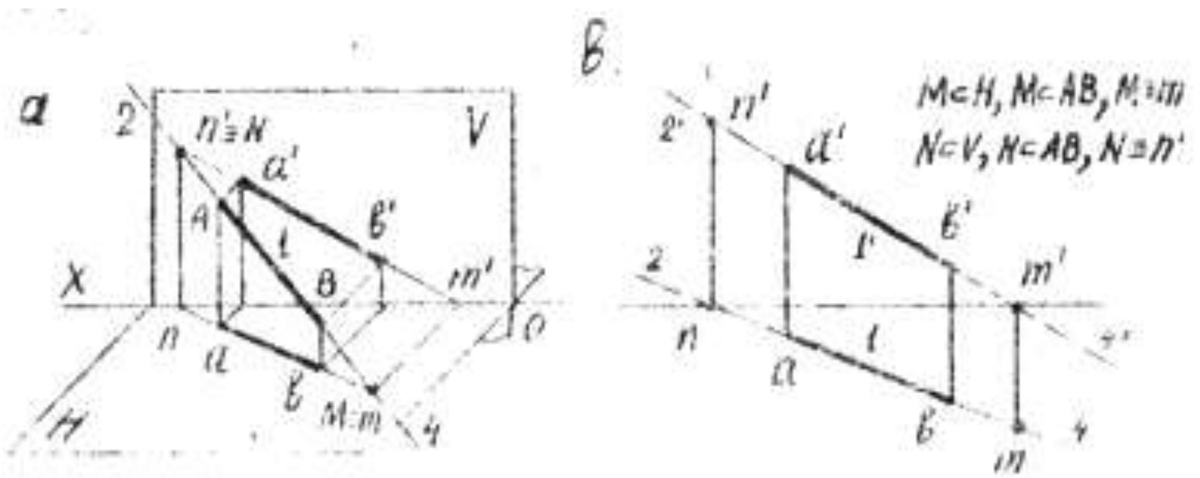
Proýeksiyalar tekizligine perpendikulýar bolan göni çyzygyñ diñe bir yzy bardyr, ol hem onuñ perpendikulýar bolan şekiller tekizliginde ýerleşýändir.

Göni çyzygyñ yzlarynyñ her biri proýeksiyalar tekizliginiñ birine degişli bolýandygy üçin, onuñ proýeksiyalarynyñ biri mydama şonuñ bilen gabat gelýändir, beýleki ikisi bolsa degişlilikde gurruñi edilýän tekizligi çäklendirýän oklaryñ üstünde ýatýandyr.

Giñişlikdäki aýdyñ çýzgydan /27-nji a surat/ görnüşi ýaly **AB** göni çyzygyñ **M** gorizontal yzyny tapmak üçin **AB** göni çyzygyñ $\mathbf{a^1b^1}$ frontal proýeksiyasyny **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, $\mathbf{m^1}$ **gorizontal yzyñ frontal proýeksiyasyny** tapýarys we bu nokadyñ üstünden göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiyasynyñ dowamy bilen kesişýänçä **OX** oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji - baglanşyk çyzyk geçirip, m nokady tapýarys. Bu tapylan m nokat gorizontal yzyñ gorizontal proýeksiyasydyr /27-nji surat/ **m = M.**

$$\mathbf{M \subset H,\ M \subset AB,\ M = m.\quad N \subset V,\ N \subset AB,\ N = n^1}$$

M /m, m^1 / nokat **AB** göni çyzygyñ **gorizontal yzydyr.**



27-nji surat

AB göni çyzygyñ **N** frontal yzyny tapmak üçin berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiyasyny **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, **n** – **nokady frontal yzyñ gorizontal proýeksiyasyny** tapýarys we **n** nokadyñ üstünden **AB** göni çyzygyñ **a^1b^1** frontal proýeksiyasynyñ dowamy bilen kesişýänçä **OX** oka perpendikulýar, ýagny birleşdiriji çyzyk geçirip, **n^1** frontal yzyñ frontal proýeksiyasyny tapýarys. **N /n, n^1 /** nokat **AB** göni çyzygyñ frontal yzydyr **n^1 = N.**

Göni çyzygyñ yzlarynyñ ýagdaýy boýunça göni çyzygyñ haýsy çärýekleriñ üstünden geçýändigini göz öñünde tutup, onuñ görünýän – görünmeýän ýerlerini kesgitlemek añsatdyr. **AB** göni çyzyk IV, I we II çärýekleriñ üstünden geçýär. Berlen göni çyzygyñ **MN** bölegi tutuşlygyna görünýär, şol sebäpli onuñ **AB** kesimi hem görünýär, sebäbi ol kesim **M** we **N** nokatlaryñ arasynda ýatýar.

Ýokarky suratdan görşümiz ýaly, göni çyzyklar özleriniň proýeksiýalary bilen añladylan bolsa, olaryñ yzlaryny tapyp bolşy ýaly, göni çyzyklar yzlary bilen berlen wagtynda-da olaryñ proýeksiýalaryny we haýsy çärýeklerden geçýändigini kesgitlemek bolar.

6. Iki göni çyzyklaryň özara ýagdaýlary.

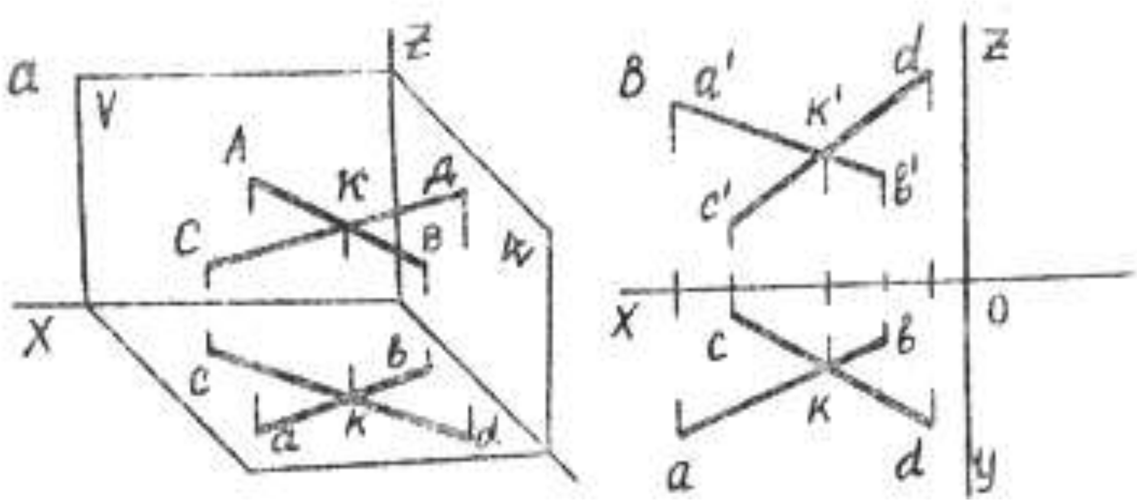
Iki göni çyzyk giňişlikde biri-birine görä dürli ýagdaýlary eýeläp bilerler.

1. Göni çyzyklar giňişlikde **kesişip** bilerler, ýagny bir tekizlikde ýatýarlar we olaryñ bir umumy nokady bolar.

2. Göni çyzyklar giňişlikde **parallel** bolup bilerler we bir tekizlikde ýatýarlar.
3. Göni çyzyklar giňişlikde **atanak** ýatyp bilerler. Kesişýän hem-de parallel göni çyzyklardan tapawutlykda - üýtgeşiklikde **atanak ýatan göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýarlar**. Bu ýagdaýda olaryň bir umumy nokady bolmaýar.

6.1. K e s i ş ý ä n   g ö n i   ç y z y k l a r .

Eger giňişlikde iki sany göni çyzyk özara kesişýän bolsa, onda epýurda olaryň biratly proýeksiýalary umumy ýagdaýda kesişýärler we bu proýeksiýalaryň kesişme nokatlary şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar. Hakykatdan-da, eger **K** nokat **AB** we **CD** iki çyzyga hem degişli bolsa, onda bu göni çyzyklaryň biratly proeýksiýalarynyň kesişme nokatlary bolan **K** we **K'** hökman şol bir baglanyşyk çyzygynyň üstünde ýatýarlar / 28-nji surat /.

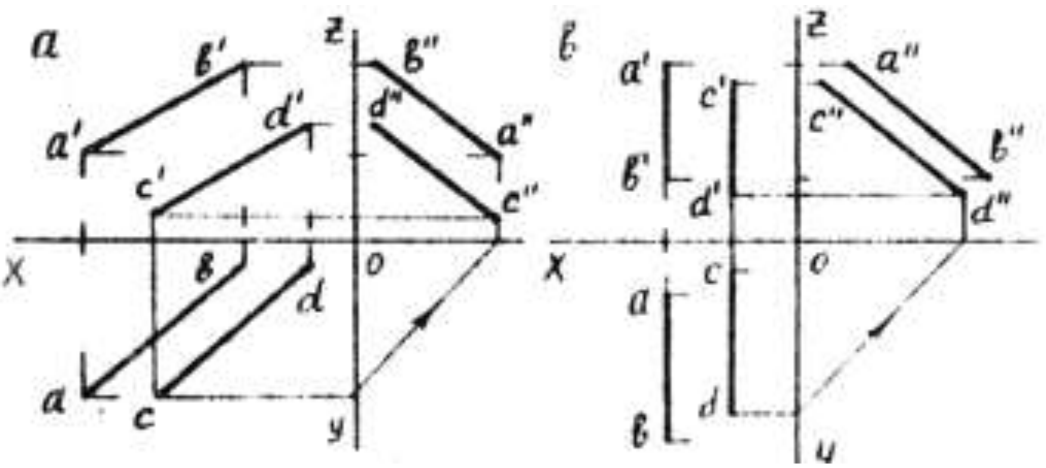


28-nji surat

$$\mathbf{AB \cap CD = K, \quad ab \cap cd = k, \quad a^1 b^1 \cap c^1 d^1 = k^1, \quad kk^1 \perp OX}$$

6.2. P a r a l l e l   g ö n i   ç y z y k l a r .

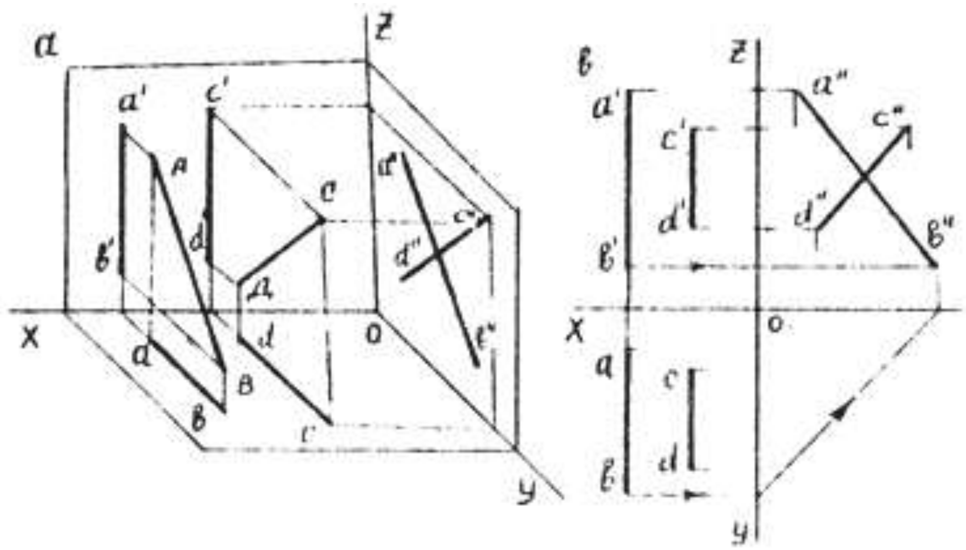
Parallel proýektirlemegiň häsiýetlerine görä, iki sany göni çyzyk giňişlikde **özara parallel** bolsalar **/AB//CD/,** onda **olaryň biratly proýeksiýalary hem degişlilikde proýeksiýalar tekizliginde özara paralleldirler**, ýagny gorizontal proýeksiýalary **ab//cd**, frontal proýeksiýalary **a'b'//c'd'** we profil proýeksiýalary **a''b''//c''d''** özara paralleldirler /29-njy surat/.



29-njy surat

Umumy ýagdaýda bu aýdylanlary tersine tassyklamak hem bolar. Eger **epýurda göni çyzyklaryň bir atly proýeksiýalary parallel bolsalar, onda bu göni çyzyklar giňişlikde-de özara paralleldirler**.

Göni çyzyklaryň iki proýeksiýasy göni çyzyklaryň paralleldiklerini kesgitlemek üçin ýeterlik bolmadyk halatda bu düzgün ulanarlyk däldir; mysal edip profil proýeksiýalar tekizligine parallel bolan **AB** we **CD** göni çyzyklary getirmek bolar /29-njy b we 30-njy suratlar/.



30-njy surat

6.3. A t a n a k ý a t a n g ö n i ç y z y k l a r.

Proýeksiýalaryń ortogonal çyzgysynda **atanak ýatan** çyzyklar dürli ýagdaýlarda şekillendirip bilner. Aýratyn ýagdaýlarda tekizlikleriń birinde bu çyzyklaryň proýeksiýalary parallel ýada kesişýan görnüşde bolup bilerler.

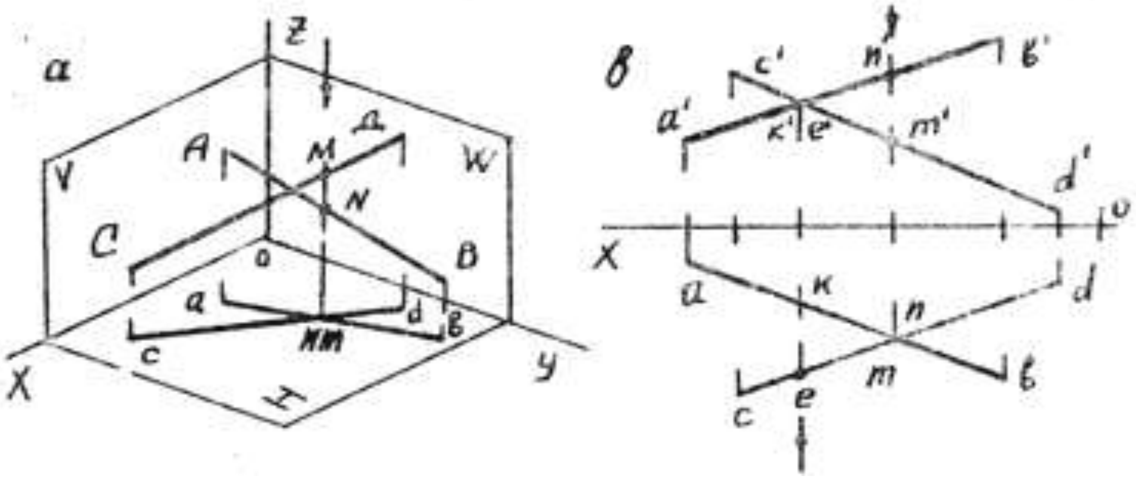
Eger göni çyzyklar özara kesişmeýan we parallel bolmaýan bolsalar, onda olaryń biratly proýeksiýalaryń kesişme nokatlary şol bir baglanşyk çyzygynyń üstünde ýatmazlar.

Eger atanak ýatyan iki göni çyzygyń biratly proýeksiyalary kesişýan bolsa, onda bu proýeksiýalaryń kesişme nokatlary proýeksion baglanşygyń bir gönüsinde, ýagny proýeksiýalar okuna inderilen bir perpendikulýaryń üstünde ýatmaýarlar /31-nji surat/.

Atanak ýatan iki göni çyzygyń üstünde hem-de proýeksiýalar tekizligine geçirilen bir perpendikulýarlaryń üstünde yatan iki nokada şol proýeksiýalar tekizligine görä **konkurirleýji - bäsleşýan** nokatlar diyilyär. Konkurirleýji nokatlaryń özara ýerleşişini kesgitlemeklik şekillendirilýan obýektiń elementleriniň ol ya-da beýleki proýeksiýalar tekizligine görä haýsy biriniń görünýandigini takyklamak üçin giňden ulanylýar.

31-nji suratda atanak ýatan **AB** we **CD** iki göni çyzygyń proýeksiýalary hem-de olaryń kesişme nokatlary görkezilendir. Bu ýerde **K** we **M** nokatlaryń üstünden şol bir baglanşyk çyzygyny geçirmek mümkin däldir, sebäbi bu göni çyzyklar gińişlikde kesişmeýärler.

Göni çyzyklaryń frontal proýeksiýalarynyń kesişme nokady haýsy hem bolsa **K** we **E** iki nokadyń frontal proýeksiýalarydyr. Bu ýerde **K** nokat **AB** göni çyzyga degişlidir, **E** nokat bolsa **CD** göni çyzyga degişlidir.



31-nji surat

Edil şunuń ýaly, göni çyzyklaryň gorizontal proýeksiýalarynyń kesişme nokady hem **M** we **N** iki göni çyzygyń gorizontal proýeksiýalarydyr. **N** nokat **AB** çyzyga, **M** nokat bolsa **CD** göni çyzyga degişlidir.

Iki sany atanak ýatan göni çyzygyń kömegi bilen olaryń proýeksiýalarynyň kesişme nokadyndaky nokatlaryń haýsy biriniń görünip beýlekisiniń bolsa görünmeýandigini kesgitlemek ańsatdyr. Munuń özi aşakdaky ýagdaýlardan bellidir, ýagny gorizontal proýeksiýalar tekizlikde has uzakda ýatan **N** nokat gözegçi üçin has ýakyndyr, şonuń üçin **AB** göni çyzygyń **N** nokady görünýändir. Frontal proýeksiýalaryń kesişme nokadynda hem **CD** göni çyzyk görünýändir sebäbi **K** nokada garanyńda **E** nokat frontal proýeksiýalar tekizlikden uzakda ýerleşendir.

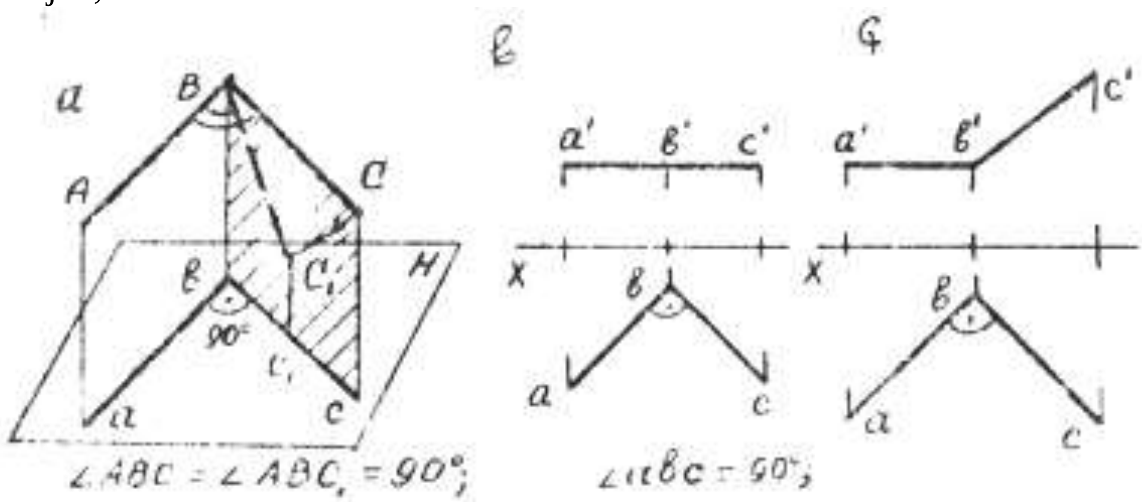
Oksuz proýektirlemekde görnüp-görünmezlik **ee^1** we **kk^1** aralyklar boýunça kesgitlenýär, eger **ee^1** > **kk^1** bolsa, onda **E** nokat görünýändir: Eger **nn^1** > **mm^1** bolsa, onda **AB** göni çyzygyń **N** nokady görünýän nokady bolar.

7.Tekiz burçlary proýektirlemek.

Islendik tekiz burçyñ proýeksiýasy proýeksiýalar tekizligi bilen özara ýerleşişine görä islendik /Ýiti, göni ýa-da kütek/ burç bolup şekillendirilip biliner. **Eger tekiz burçyñ taraplary /AB||H we BC||H/ proýeksiýalar tekizligine parallel bolsa, onda ol burç şol tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýär** /32-nji a, b surat/.

Eger **göni burçuñ haýsy hem bolsa bir tarapy /AB || H/ tekizlige parallel bolsa, onda ol göni burç / < ABC = 90^0 = < abc / şol tekizlige özüniñ hakyky ululygynda proýektirlenýär** /32-nji a, ç surat/.

Goý, **ABC** burç 90^0 deñ bolsun we onuñ **AB** tarapy gorizontal proýeksiýalar tekizligine paralleldir diýeliñ. Burçyñ **abc**, gorizontal proýeksiýasynyñ 90^0 – a deñligini subut etmek gerek bolsun /32-nji a, b surat/.



32-nji surat

AB göni çyzyk **BC$_1$, c$_1$b** tekizlige perpendikulýardyr, sebäbi **AB ⊥BC** we **AB⊥Bb**, **AB || ab**. Bu ýerden **ab ⊥BCcb** tekizlige perpendikulýardyr. Diýmek, **ab⊥bc**, ýagny ∠ abc = 90^0.

Tema 4

Tekizlik.

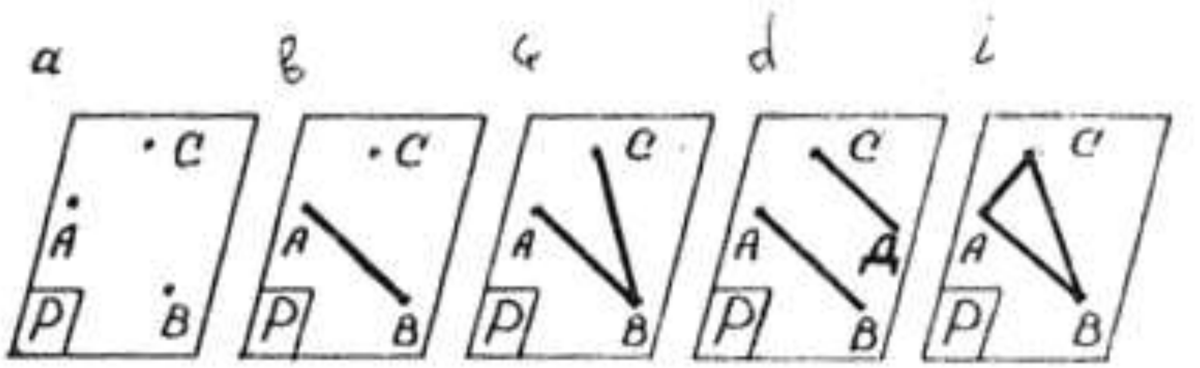
Sapagyň meşilnamasy:

1. Giňişlikde tekizligiň kesgitlenilişi.
2. Ortogonal çyzgyda tekizligi şekillendirmek.
3. Proýeksiýalar tekizliklerine görä giňişlikdäki tekizligiñ dürli ýagdaýlary.
4. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine perpendikulýar tekizlik.
5. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine perpendikulýar tekizlik.
6. Giňişlikdäki tekizligiñ we göni çyzygyñ özara ýagdaýlary.
7. Tekizlikde ýatan göni çyzyk we nokat.
8. Tekizligiň esasy çyzyklary.

1. Giňişlikde tekizligiň kesgitlenilişi
/Umumy maglumat/

Bize elementar geometirýadan mälim bolşy ýaly, giňişlikde tekizligiň ýagdaýy şu aşakdakylar ýaly kesgitlenilýär:

1. **Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat** bilen /35-nij a surat/. **P (A,B,C)**
2. **Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzyk** bilen /35-nij b surat/. **P (AB, C)**
3. **Iki kesişýän göni çyzy**k bilen /35-nij ç surat/. **P (AB ∩ BC)**
4. **Iki parallel göni çyzyk** bilen /35-nij d surat/. **P (AB II CD)**
5. **Ýazgyn şekiller bilen** /töwerek, üçburçluk, dörtburçluk we ş.m. /35-nij i surat/.**P (Δ ABC)**



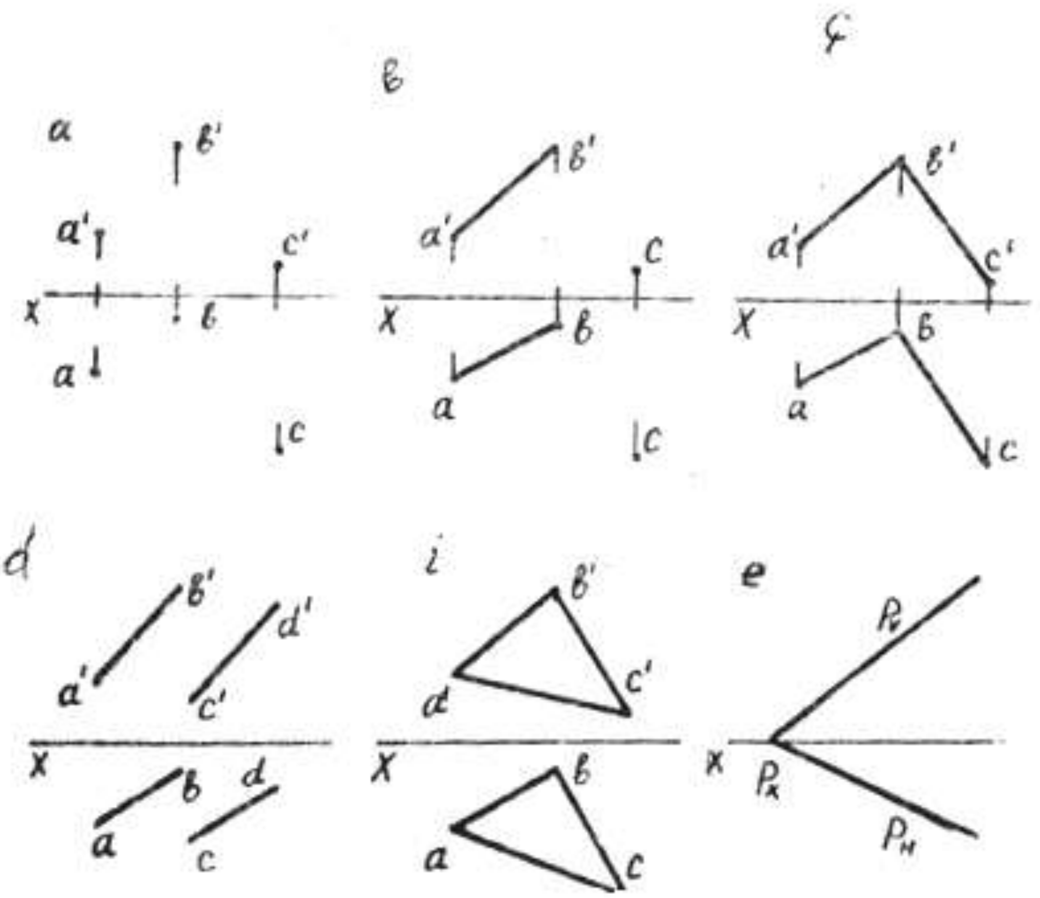
35-nji surat

2. Ortogonal çyzgyda tekizligi şekillendirmek

Ortogonal çyzygyda tekizligi şekillendirmek üçin esasan **bir gönüde ýatmaýan üç nokadyň proýeksiýalaryny gurmak ýeterlikdir**. Mysal üçin : **P (A, B, C)** onda, şu nokatlaryň üçüsiniňem şekillerini gurmalydyr

A /a ,a″ /, B /b ,b″ / we **C /c ,c″ /** /36-njy a surat/.

Eger islendik iki nokady, mysal üçin **A /a,a^1/ we B /b,b^1/** nokatlaryň biratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirsek, şonda **AB /ab, a^{1}b^1/** göni çyzyk we şu göni çyzygyň üstünde ýatmaýan **C /c,c^1/** nokat tekizligi kesgitleýär /36-njy b surat/.
P (AB, C)



36-njy surat

Eger **C /c,c^1/** we **B /b,b^1/ ýa-da C/c,c^1/** we **A/a,a^1/** nokatlaryň biratly şekillerini göni çyzyk bilen birleşdirseň , onda **B /b,b^1/** nokatda kesişýär **AB** we **BC** /ýada **AC** / göni çyzyklar hem şol tekizligi kesgitlär /36-njy ç surat/. **P (AB $\cap$ BC)**

Eger **A /a,a^1/** we **B /b,b^1/** iki nokady **AB /ab, a^{1}b^1/** göni çyzyk bilen birleşdirseň we **C** nokadyň üstünden **AB** göni çyzyga parallel **CD** göni çyzygy geçirseň, onda ol iki parallel **AB** we **CD** göni çyzyklar hem şol tekizligi kesgitlär – **P /AB || CD/** /36-njy d surat/.

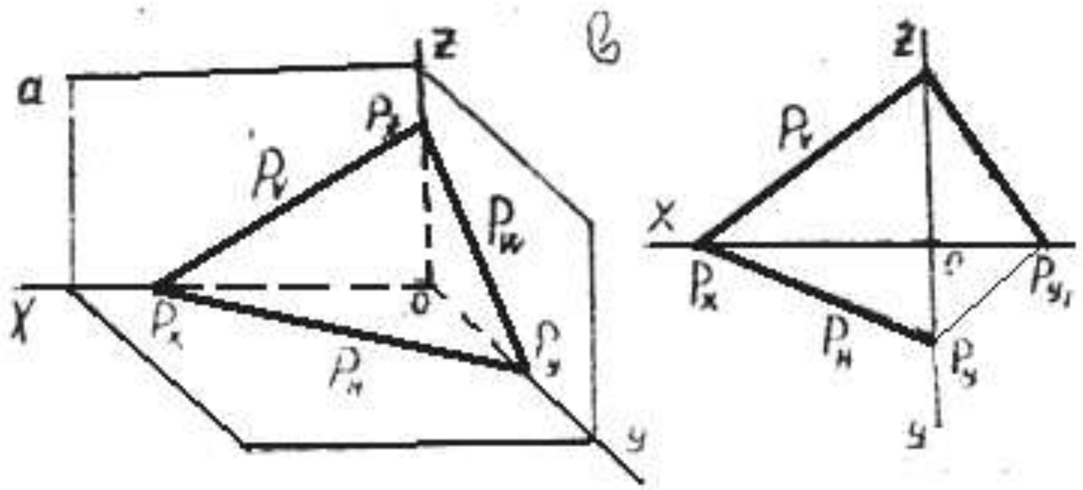
Eger **A /a,a^1/, B /b,b^1/** we **C /c,c^1/** üç nokady göni çyzyk bilen birleşdirsek emele gelen ýazgyn şekil /üçburçluk/ tekizligi kesgitlär
P /△ABC/ /36-njy i surat/.

Şeýlelikde, ortogonal çyzykda tekizlik aşakdakylar ýaly şekillendirlip bilner:

1. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokadyň proýeksiýasy bilen.

P (A,B,C)

2. Nokat we şol nokadyň üstünden geçmeýän göni çyzygyň proýeksiýasy bilen. **P (AB,C)**
3. Kesişýän iki göni çyzygyň proýeksiýasy bilen. **P (AB ∩ BC)**
4. Iki parallel göni çyzygyň proýeksiýasy bilen. **P (AB || CD)**
5. Ýazgyn şekilleriň proýeksiýasy bilen /töwerek, üçburçlyk, we ş.m./.
6. Yzlary bilen **P/P_H,P_V,P_W /** 36-njy e surat we 37-nji 1,2 surat/



37-nji surat

Çyzuwly geometriýada **tekizligiň proýeksiýalar tekizlikleri bilen kesişýän göni çyzyklaryna tekizligiň y z l a r y diýilýär**. Ortogonal çyzgyda berlen tekizligi yzlary bilen şekillendirmek giňden ulanylýar.

Tekizligiň degişlilikde iki sany kesişýän yzlaryna iki sany kesişýän göni çyzyk hökmünde garamak hem mümkindir.

Berlen **P** tekizligiň **H** gorizontal şekiller (kese) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň g o r i z o n t a l yzy** diýilýär we **P_H** diýilip bellenilýär /37-njy a surat/.

P tekizligiň **V** frontal şekiller (maňlaý-dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna **tekizligiň f r o n t a l yzy** diýilýär we **Pv** diýilip bellenilýär.

P tekizligiň **W** profil şekiller (gapdal - dik) tekizligini kesýän göni çyzygyna bolsa **tekizligiň p r o f i l yzy** diýilýär we **Pw** diýilip bellenilýär.

Tekizligiň yzlarynyň üç proýeksiýasy bardyr. Mysal üçin, **P_H** yz özüniň gorizontal proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyň beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OX** we **OY** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler ýöne ol şekilleri çyzgyda görkezilmeýär we bellenilmeýär.

Şonuň ýaly hem **Pv** yz özüniň frontal proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyň beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OX** we **OZ** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeýärler.

Pw yz bolsa özüniñ profil proýeksiýasy bilen utgaşýar, bu yzyñ beýleki iki proýeksiýasy bolsa **OZ** we **OY** proýeksiýa oklary bilen gabat gelýärler we çyzgyda görkezilmeýärler - bellenilmeýärler.

Eger tekizlige proýeksiýa tekizlikleriniñ üçüsiniñ sistemasynda garasak, onda umumy haldaky tekizlik proýeksiýa oklarynyñ her birini keser. Iki yzyñ **OX, OY** we **OZ** proýeksiýa oklarynyñ üstündäki kesişme nokatlaryna tekizligiñ yzlarynyñ **duşuşýän /birleşme/** nokatlary diýilýär we degişlilikde **Px, Py, Pz** diýilip bellenilýär. Yzlarynyñ duşuşyk nokatlaryndan koordinatalaryñ başlangyjyna çenli bolan aralygyna **OPx, OPy** we **OPz** tekizligiñ **p a r a m e t r i** diýilýär. **Giñişlikde tekizligiñ ýagdaýy onuñ üç parametri bilen kesgitlenilýär.**

Tekizligiñ epýuryny gurmak üçin **OPx, OPy** we **OPz** kesimleriñ - tekizligiñ parametrleriniñ berlen bolmagy ýeterlikdir /37-nji b surat/.

Tekizligiñ her bir yzynyñ ýagdaýy iki parametr bilen kesgitlenilýär, şeýlelikde, tekizligiñ iki yzy $\mathbf{P_H}$ we **Pv** bilelikde onuñ üç parametrini, ýagny onuñ giñişlikdäki ornuny doly kesgitleýär. Şeýle hem tekizligiň iki yzy iki sany kesişýän göni çyzyk bolup tekizligi kesgitleýändir.

3. Proýeksiýalar tekizliklerine görä giňişlikdäki tekizligiñ dürli ýagdaýlary.

Tekizlik giñişlikde proýeksiýalar tekizliklerine garanynda şu aşakdaky ýagdaýlarda bolýar:

1.Umumy ýagdaýdaky tekizlik.
2.Hususy ýagdaýdaky tekizlik.

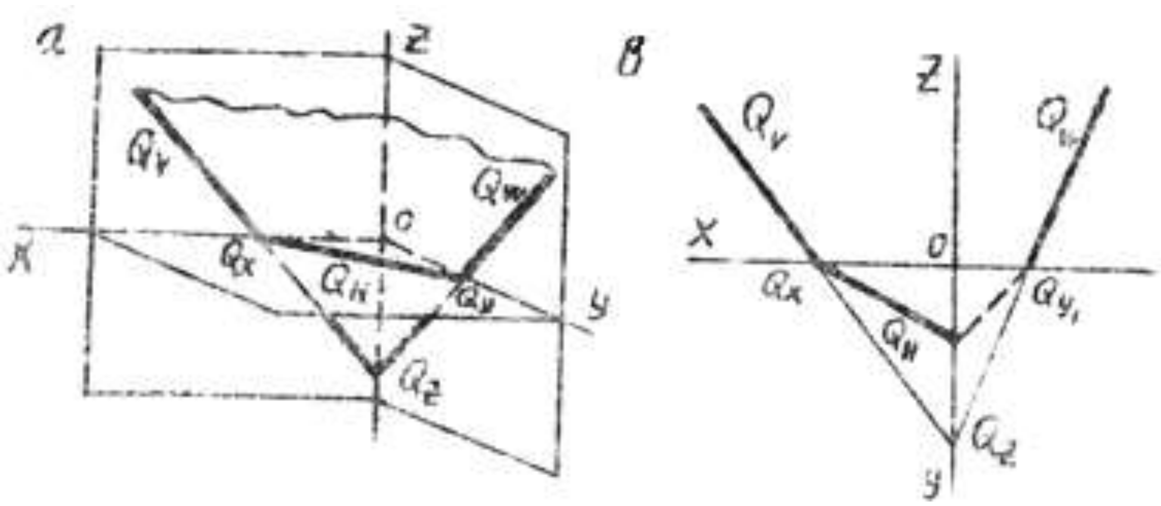
1. Umumy ýagdaýdaky tekizlik. proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine-de perpendikulýar bolmadyk tekizlige umumy ýagdaýdaky /haldaky/ tekizlik diýilýär.

Umumy haldaky tekizlikleriñ ýazgyn şekilde we her - hili ýagdaýlardaky berlişi 36-njy suratda görkezilendir. Şeýle tekizlikler proýeksiýalar tekizlikleriniñ üçüsine-de islendik ýapgytlykda bolup biler. Eger umumy haldaky tekizlik ýazgyn şekilde /üçburçluk/ bilen berlen bolsa, onda şol ýazgyn şekilleriñ /üçburçlugyñ/ gorizontal **/Δabc/,** frontal **/Δa^1 b^1 c^1 /,** we profil **/Δa^{11} b^{11} c^{11} /,** proýeksiýalary ýazgyn şekildir /üçburçlukdyr/, ýöne hakyky ululygyndan mydama kiçidir : /seret 36-nji d syrata/.

$$/\Delta abc/ < \Delta ABC/, \quad /\Delta a^1 b^1 c^1 < \Delta ABC / \quad \text{we} \quad /\Delta a^{11} b^{11} c^{11}\ \Delta ABC /$$

Umumy haldaky **P** tekizligiñ üç yzy bardyr: gorizontal $\mathbf{P_H}$, frontal – **Pv**, profil – **Pw**. Şeýle tekizligiñ yzlary proýeksiýalar oklaryna parallel däldirler we olary kesýändirler.

37-nji suratdan görnüşi ýaly, yzlaryñ üçüsi bir oktantyñ çäginde /1-nji oktant/ ýapyk kontury – yzlaryñ üçburçlugyny emele getirýärler.



38-nji surat

38-nji suratda umumy ýagdaýdaky tekizligiñ giñişlikde aýdyñ şekildäki we epýurdaky **Qw** profil yzyñ gurluşy görkezilendir.
Qz nokat **O** nokatdan aşakda ýatandyr, **Qy** nokady tapýarys, şondan soñ **Qy₁** we **Qz** nokatlary birleşdirip, **Qw** profil yzyñ ugruny anyklaýarys hem-de gurýarys.

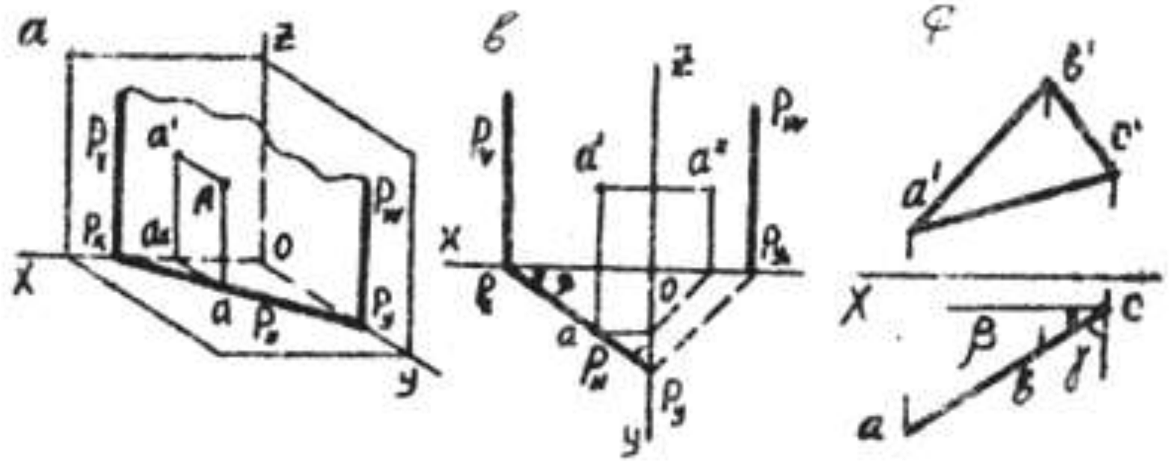
2. Hususy ýagdaýdaky tekizlik. proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine (A – topar) ýa-da ikisine (B - topar) perpendikulýar ýerleşdirilen tekizlige hususy ýagdaýdaky /haldaky/ tekizlik diýilýär.

4. Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine perpendikulýar tekizlik.

1. G o r i z o n t a l poýektirleýji tekizlik.

Gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **P / Δ ABC/** tekizlige **gorizontal proýektirleýji** tekizlik diýilýär /39-njy surat/.

Proýektirleýji tekizlikler öz üstlerinde ýatan nokatlaryñ özboluşlylygy bilen baglylygyndaky meseleleri çözmekde häli-şindi ulanylýar. Mysal üçin, gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatan her bir nokat şol nokady **H** tekizligine proýektirlenýän göni çyzyk gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatandyr **H** tekizligi tekizligiñ gorizontal yzynyñ üstünde ýatan nokatda kesýar. Şeýlelikde, gorizontal proýektirleýji tekizlikde ýatan ähli nokatlaryñ, göni çyzyklaryñ, tekiz egri çyzyklaryñ we geometrik ýazgyn figuralaryñ gorizontal proýeksiýalary mydama $\mathbf{P_H}$ gorizontal yz bilen gabat gelýär, ýagny utgaşýar.



39-njy surat

Görnüşi ýaly gorizontal yzyñ **OX** we **OY** oklary bilen kesişende emele getirýän **β** we **λ** burçlary **P** tekizligiñ **V** hem-de W tekizlikleri bilen emele getirýän ikigranly burçlaryñ çyzyk burçlarydyr. Mundan başga-da **Pv⊥OX** , sebäbi iki **V** hem **P** tekizlik üçünji **H** tekizlige perpendikulýar bolsa , onda şol tekizlikleriñ kesişme **Pv** çyzyga hem **H** tekizligene perpendikulýardyr.

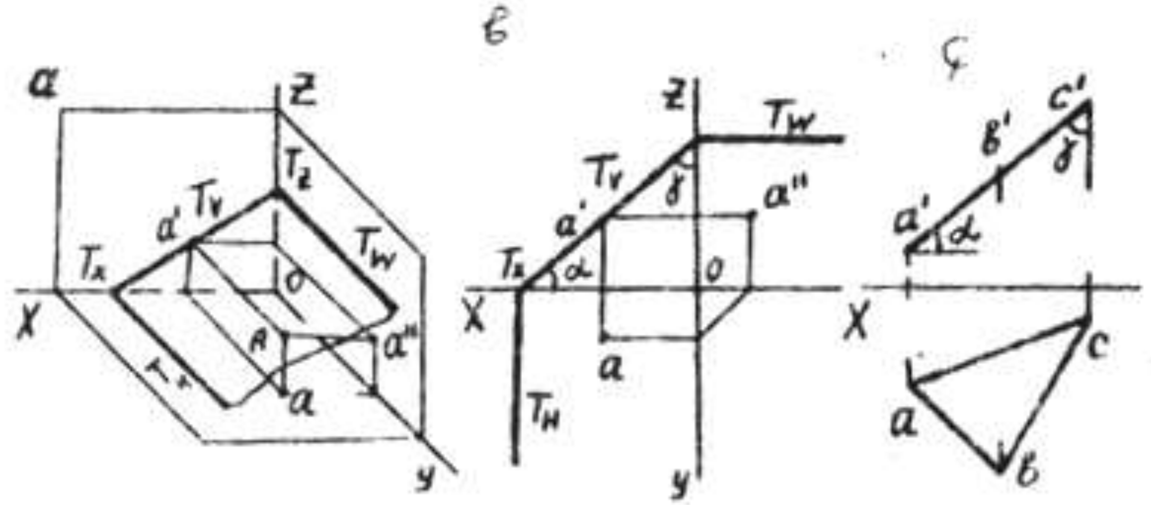
Şeýle hem **Pv** göni çyzyk şol tekizlikdäki ýatan her bir göni çyzyga, ýagny **OX** okuna-da perpendikulýardyr.

Pw-nyñ **OY** okuna perpendikulýarlygy hem şu ýokardaky ýaly düşündirilýär.

2. F r o n t a l poýektirleýji tekizlik.

Frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **T /ΔABC/** tekizlige **frontal proýektirleýji** tekizlik diýilýär /40-njy surat/.

T_H gorizontal yz **OX** okuna, **Tw** bolsa **OZ** okuna perpendikulýardyr. Bu tekizlikde ýatan nokatlaryñ, göni çyzyklaryñ, tekiz egri çyzyklaryñ we geometrik ýazgyn figuralaryñ frontal proýeksiýalary mydama **Tv** frontal yz bilen gabat gelýär. **α** we **λ** burçlar **T** tekizligiñ **H** we **W** tekizlikleri bilen emele gelen çyzyk burçlarydyr.



40-njy surat

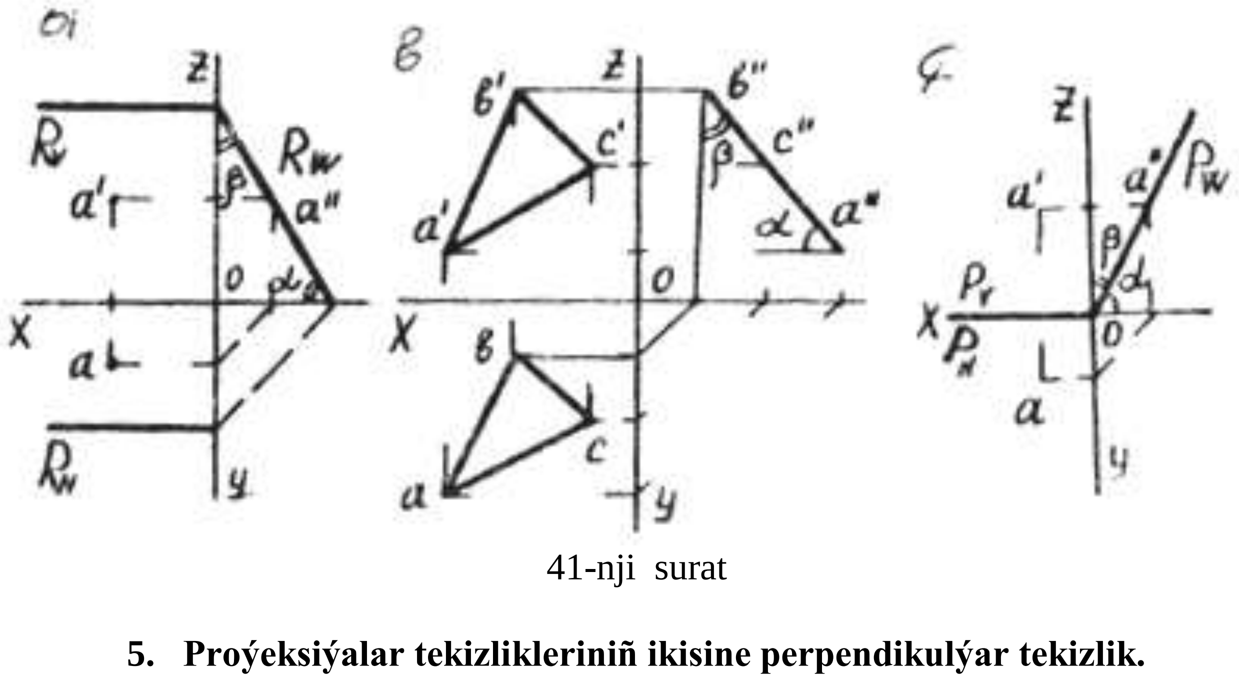
3 . **<u>P r o f i l poýektirleýji tekizlik.</u>**

Profil proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan **R /ΔABC/** tekizlige **profil proýektirleýji** tekizlik diýilýär /41-nji surat/.

α we **λ** burçlar özleriniñ hakyky ululyklarynda proýektirlenýär. Beýlekilerde bolşy ýaly, **Pw** yzyñ hem ýygnaýjy häsiýeti bardyr.

OX okuñ üstünden geçýän **P** tekizlige **<u>ok tekizligi</u>** <u>/ profil proýektirleýji/</u> diýilýär /41-nji ç surat/.

Eger-de **< α = < β** bolsalar, bu **P** tekizlige **<u>bissektrik</u> ok tekizligi** diýilýär.



41-nji surat

5. **Proýeksiýalar tekizlikleriniñ ikisine perpendikulýar tekizlik.**

Proýeksiýalar tekizlikleriniñ birine parallel, ýagny şol bir wagtyñ özünde-de proýeksiýalar tekizlikleriniñ beýleki ikisine perpendikulýar bolan tekizlikler hem h u s u s y haldaky tekizliklerdir. Olara-da proýektirleýji tekizlikleriñ häsiýetleri mahsusdyr. Bu ýagdaýdaky tekizliklere kä halatlarda **dereje** tekizligide diýilýär.

1. Gorizontal tekizlik.

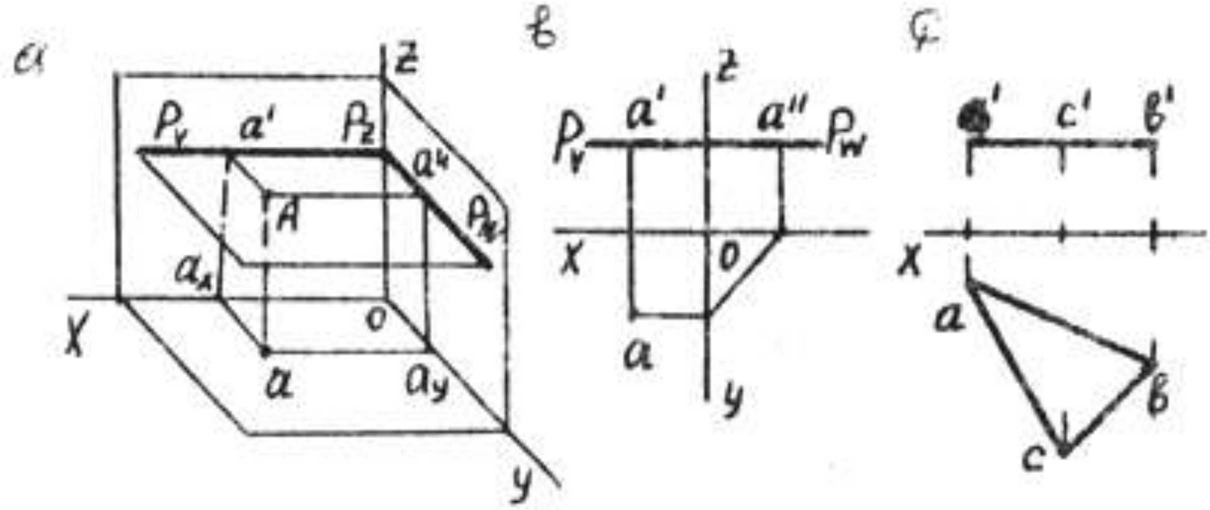
Gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel **/ P || H /,** frontal we profil proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar **/ P ⊥ V, P⊥ W /** bolan tekizlige **g o r i z o n t a l** tekizlik diýilýär.

Eger-de gorizontal tekizlik epýurda yzlary bilen berlen bolsa, onda ol tekizligiñ P_H gorizontal yzy ýokdur. Emma **Pv** frontal we **Pw** profil yzlary /bir gönüde/ **OX** proýeksiýalar okuna paralleldirler /42-nji **a, b** surat/. Iki parallel tekizlikleriñ üçünji tekizlik bilen kesişmegi/.

Eger-de gorizontal tekizlik ýazgyn şekil bilen añladylanda, ýagny **ABC** üçburçluk bilen añladylanda, onda ol üçburçlugyñ gorizontal proýeksiýasy onuñ hakyky ululygyna deñdir. **Δabc = ΔABC,** onda beýleki iki şekilleri :

$\Delta a^1b^1c^1$ frontal we $\Delta a^{11}b^{11}c^{11}$ profil proýeksiýalary bolsa **OX** proýeksiýalar okuna paralleldirler we göni çyzyk bolup proýektirlenýändirler.

P(ΔABC) || H; P ⊥ V; P ⊥ W; onda **Δabc = ΔABC**

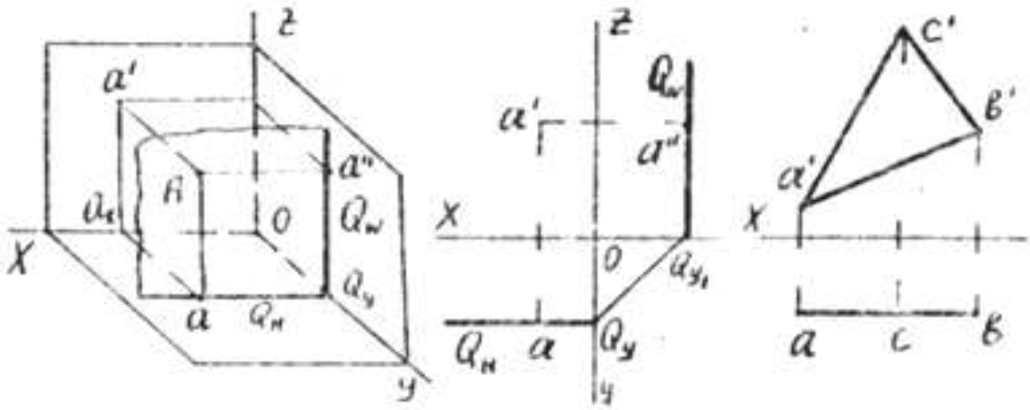


42-nji surat

2. Frontal tekizlik.

Frontal proýeksiýalar tekizligine parallel **/Q (Δ ABC) || V/,** ýa-da **H we W** tekizliklere perpendikulýar tekizlige **f r o n t a l** tekizlik diýilýär /43-nji surat/.

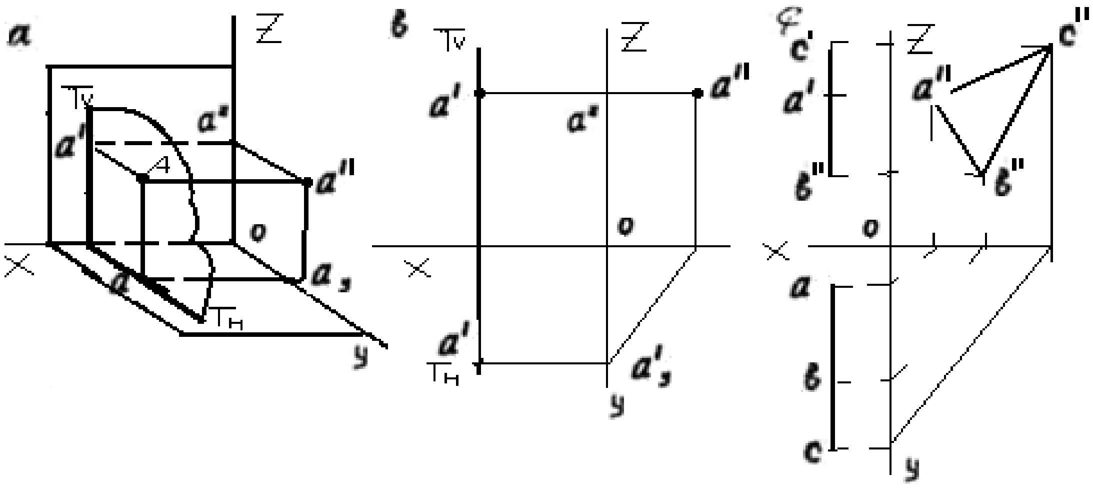
Q_H **|| OX;Qw || OZ; Q (ΔABC) IIV;**
Q_H **= Δabc;** $\Delta a^1b^1c^1$ **= ΔABC.**



43-nji surat

3 **. P r o f il t e k i z l i k .**

Profil proýeksiýalar tekizligine parallel **/T (Δ ABC) || W/, H we W** proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar tekizlige **p r o f i l** tekizlik diýilýär. (44-nji surat)



44-nji surat

Tv ⊥OX, T_H ⊥ OX ýa-da Tv || OZ,

T_H || OY, onda **$\Delta a^{11}b^{11}c^{11} = \Delta ABC$.**

6. Giňişlikdäki tekizligiñ we göni çyzygyñ özara ýagdaýlary.

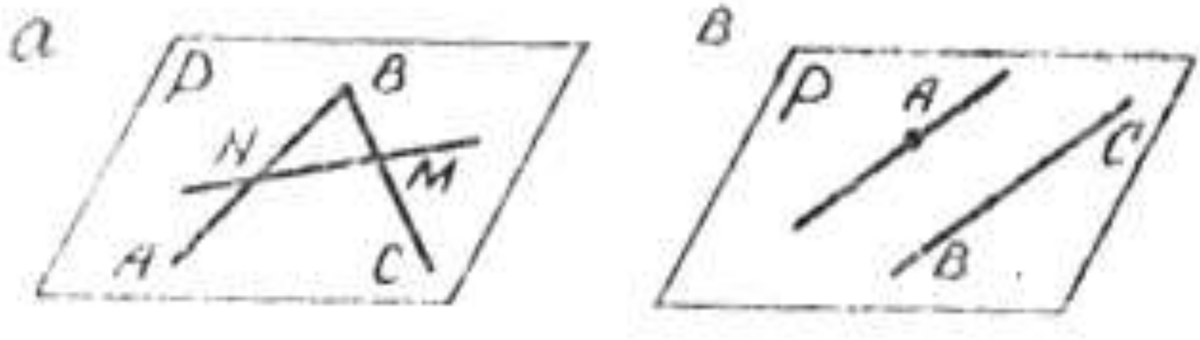
Geometriýadan belli bolşy ýaly, giňişlikde göni çyzyk şekiller tekizlige görä şu aşakdaky ýagdaýlarda bolup biler :

1. Tekizlikde ýatan göni çyzyk.
2. Tekizlige parallel göni çyzyk.
3. Tekizligi kesýän göni çyzyk.
4. Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.

7. Tekizlikde ýatan göni çyzyk we nokat.

Eger göni çyzygyñ tekizlik bilen iki sany umumy nokady bar bolsa ýa-da bir umumy nokady bolup, hem-de şol tekizligiñ üstünde ýatan haýsy hem bolsa

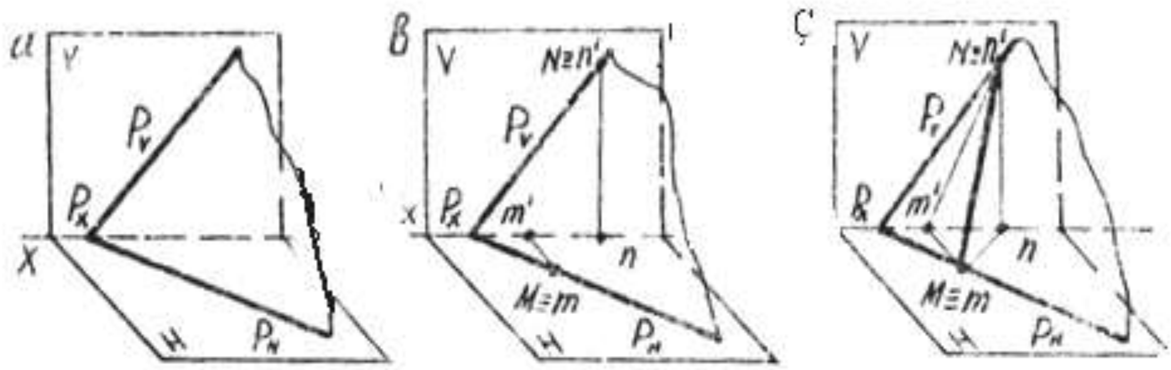
bir göni çyzyga parallel bolsa, onda şol göni çyzygyñ tekizlige degişli bolýanlygy geometriýadan bize bellidir
/47-nji surat/.



47-nji surat

Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizlige degişli göni çyzyk geçirmeklige garap geçeliñ /48-nji surat/.

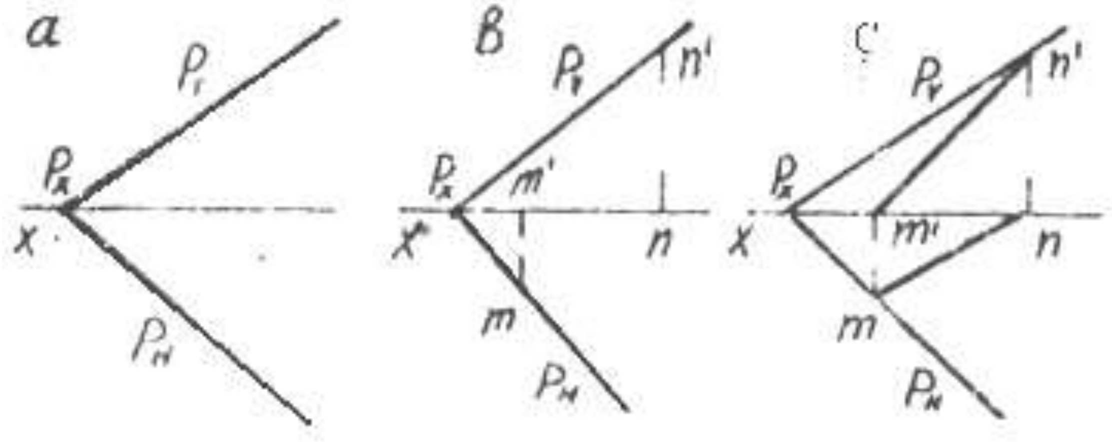
Eger nokat tekizlige degişli göni çyzygyñ üstünde ýatan bolsa, onda nokadyň tekizligiñ üstünde ýatanlygy hem geometriýadan mälimdir. Şonuñ üçin **P** tekizliginde käbir göni çyzyga gurmak üçin bu göni çyzygyñ islendik **M** we **N** nokatlaryny alýarys, ýagny şeýlelikde **M** nokady tekizligiñ $\mathbf{P_H}$ gorizontal yzynyñ, **N** nokady bolsa tekizligiñ **Pv** frontal yzynyñ üstünde alýarys.



48-nji surat

Ortogonal çyzgyda **M** we **N** nokatlaryñ proýeksiýalaryny **/m, m^1 we n, n^1/** gurýarys /49-njy surat/. **M = m, N = n^1**

M we **N** nokatlary, şeýle hem olaryñ biratly **m** we **n** hem-de **m^1** we **n^1** proýeksiýalaryny göni çyzyklar bilen birleşdirip, **P** tekizligiñ üstünde ýatan **MN /mn, m^1 n^1 /** göni çyzygy we onuñ degişli **mn** gorizontal hem-de **m^1 n^1** frontal proýeksiýalaryny alarys /48 – 49- njy suratlar/.



49-njy surat

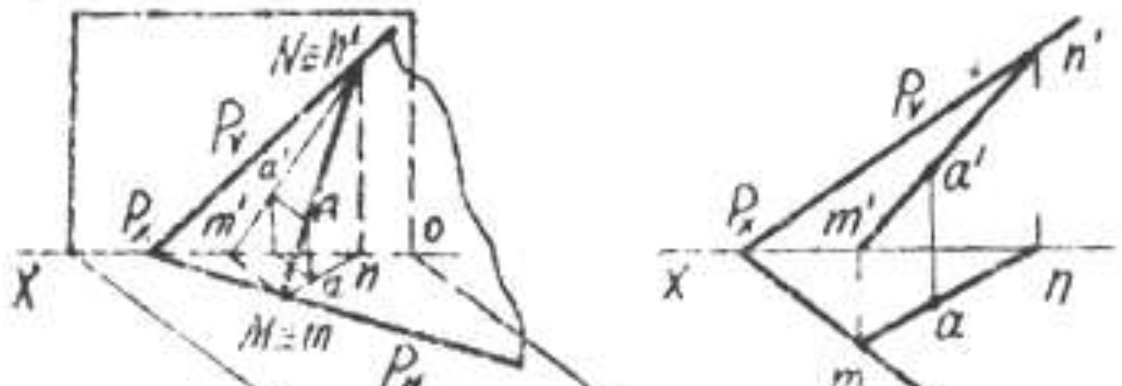
M /m, m^1/ nokat gurlan göni çyzygyñ gorizontal yzydyr. **N /n, n^1/** nokat bolsa onuñ frontal yzydyr, şeýle hem **M** nokadyñ gorizontal yzy tekizligiñ **P_H** gorizontal yzynyñ üstünde, göni çyzygyñ **N** frontal yzy bolsa tekizligiñ Pv frontal yzynyñ üstünde ýatýandyr. **$M \subset P_H$,**

$N \subset P_V$

Şeýlelikde, eger umumy haldaky **MN** göni çyzyk tekizligiñ üstünde ýatan bolsa, onda onuñ yzlary bu tekizligiñ biratly yzlarynyñ üstünde ýatýandyr.

P tekizliginde haýsy hem bolsa bir islendik **A (a, a^1)** nokady gurmak üçin bu tekizligiň üstünden **MN** göni çyzygyny gurmaly we bu göni çyzygyň **($a \subset mn$, $a^1 \subset m^1n^1$, $A \subset P$)** biratly şekilleriniň üstünde hem islendik A nokady gurmak gerek /50-nji surat/.

$A \subset MN$, $MN \subset P$



50-nji surat

8. Tekizligiň esasy çyzyklary.

Tekizligiň esasy çyzyklaryna şu aşakdaky çyzyklar degişlidir :

1.Tekizligiň **gorizontallary**.

2.Tekizligiň **frontallary**.

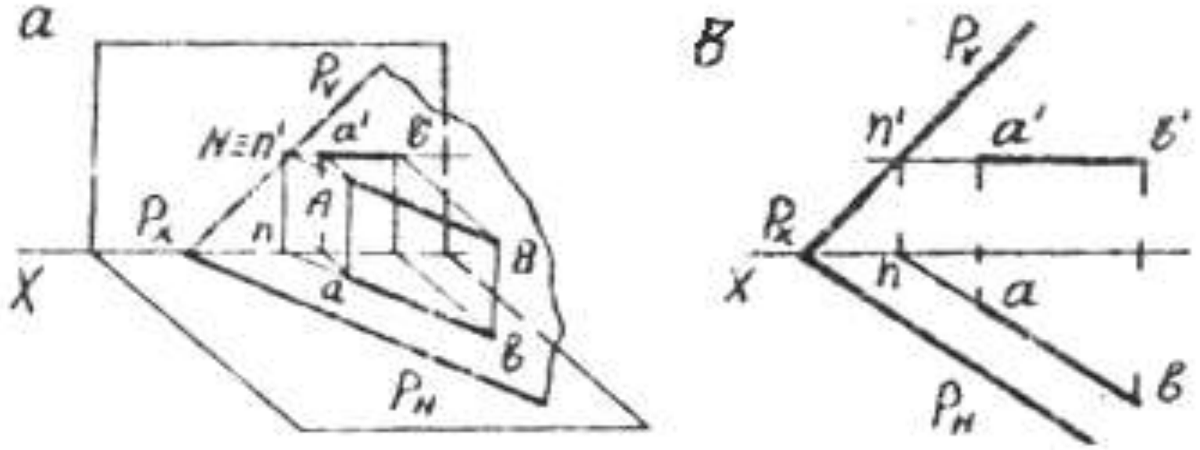
3.Tekizligiň **profil** göni çyzyklary.

4.Tekizligiň proeksiýalar tekizliklerine bolan **iň uly ýapgytlyk** çyzyklary.

8.I. Tekizligiň gorizontaly Berlen tekizlikde ýatan we **H** gorizontal şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiň gorizontallary** diýilýär.

Tekizlik yzlary bilen berlen ýagdaýynda, tekizligiň gorizontalyny gurmaklyk şol tekizligiň üstünden gorizontal yza parallel bolan göni çyzygy göçirmeklige syrygýar /52-nij a,b surat/.

Tekizligiň P_H gorizontal yzy gorizontalyň **H** tekizliginde ýatan hususy halydyr /onuň gorizontallarynyň biridir/



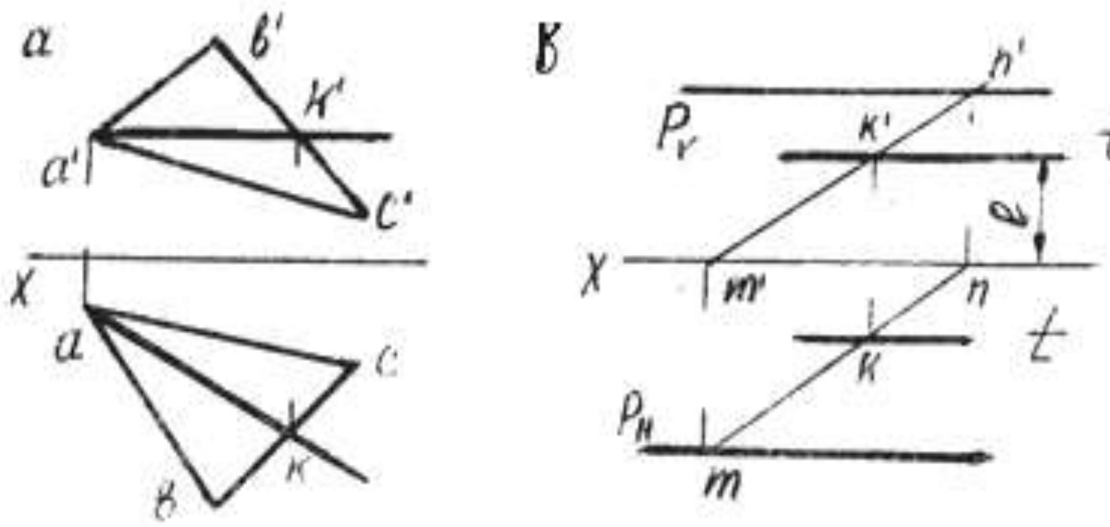
52-nji surat

Goý, **P** tekizligiň üstünde onuň haýsy hem bolsa bir yzyna, mysal üçin, $\mathbf{P_H}$ yza parallel **AB** göni çyzyk geçirmeli bolsun. Şeýle **AB** göni çyzyk frontal proýeksiýalar tekizligi bilen **Pv** frontal yzyň üstünde ýatan **N /n, n^1/** nokatda duşuşar. **AB** göni çyzygyň gorizontal yzy ýokdyr , sebäbi ol $\mathbf{P_H}$ yza paralleldir, şeýlelikde, ol **H** tekizligine-de paraleldir. **AB** we $\mathbf{P_H}$ parallel göni çyzyklaryň epýurda biratly parallel proeksiýalary bardyr, ýagny gorizontalyň **ab** gorizontal proýeksiyasy tekizligiň $\mathbf{P_H}$ yzyna paraleldir **/ab || $\mathbf{P_H}$ /; a^{1}b^1** frontal proýeksiýasy bolsa **OX** oka paraleldir. Ýagny **a^{1}b^1 II OX.**

Bu ýerden şeýle düzgün gelip çykýar**: eger göni çyzyk tekizligiň bir yzyna paralel, beýleki ýzy bilen bolsa umumy bir nokady bar bolsa, onda ol göni çyzyk tekizlige degişlidir** /47-nji surat we 52-nji surat/.

Goý tekizlik **ABC** üçburçlyk bilen berlen bolsun. Üçburçlugyň **A** depesinden tekizligiň gorizontalyny geçireliň /53-nji a surat/.

Tekizlik yzlar bilen berilmedik halda tekizligiň esasy çyzyklaryny gurmakda bu çyzyklaryň proýeksiýalarnyň proýeksiýalar oklaryna görä ýerleşişleriniň aýratynlyklaryndan peýdalanýarys. Gorizontalyň **H** gorizontal tekizlige parallel bolany üçin, onuň frontal proýeksiýasyny gurmakda ilki **OX** oka parallel bolan göni çyzygy geçirýäris, soňra baglanşyk çyzygy boýunça onuň gorizontal proýeksiýasynyň ýagdaýyny kesgitleýäris.



53-nji surat

Gorizontalyň frontal proýeksiýasy baglanşyk çyzygyna perpendikulýar bolmalydyr **/a^1 $k^1 \perp aa^1$ /,** şonuň üçin **a^1** nokadyň üstünden **b^1c^1** bilen **k^1** nokada kesişýänçä gorizontalyň frontal proýeksiýasyny **/a^1k^1/ OX** oka parallel edip geçirýäris. Nokadyň **k** gorizontal proýeksiýasyny gurup, **AK** gorizontalyň **ak** gorizontal proýeksiýasyny taparys.

AK göni çyzyk **ABC** üçburçlugyň tekizligine degişlidir, sebäbi ol tekizlige degişli iki **/ A we K/** nokadyñ üstünden geçýär we **H** tekizlige paralleldir, diýimek ol berlen **ABC** üçburçlugyñ gorizontalydyr.

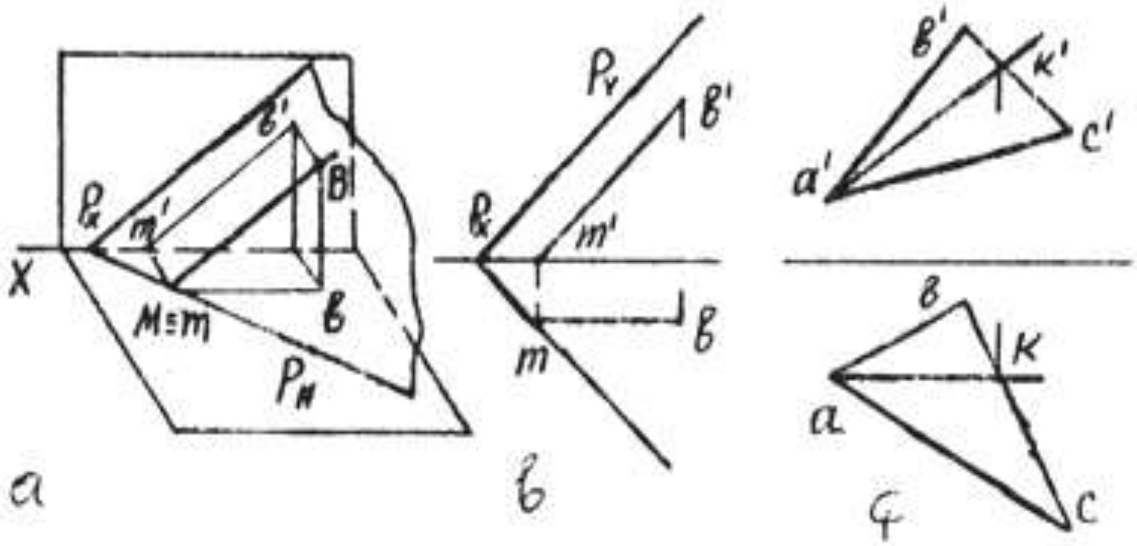
53-nji b suratda **H** tekizlikden berlen **L** uzaklykda ýerleşen **P** profil proýektirleýji tekizligiñ gorizontalyny çünki **o^Ik^I II ox** gurlyşy görkezilendir.

$KT \subset P$, $MN \subset P$, $K \subset MN$, $K \subset P$, K^1t^1 II Kt II OX

8.2.Tekizligiñ frontaly. Berlen tekizlikde ýatan we **V** şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **tekizligiñ frontallary** diýilýär .

Tekizligiñ frontaly MB we onuñ **m^1b^1** frontal proýeksiyasy **Pv** frontal yza paralleldir. Frontalyñ gorizontal proýeksiýasy **mb** bolsa, **OX** oka paralleldir /54-nji surat/

B



54-nji surat

frontalyñ proýeksiýasyny gurmak üçin ilki onuñ **OX** oka parallel bolan gorizontal proýeksiýasyny geçirýäris, şol esasda hem onuñ frontal proýeksiýasynyñ ýagdaýyny kesgitleýäris.

$MB \subset P$,   mb II OX, m^1b^1 II P_V

Tekizlik **ABC** üçburçluk bilen şekillendirilende tekizligiñ frontalynyñ gurluşy 54-nji b suratda ýerine ýetirilendir. **$AK \subset \Delta$ ABC, AK II V, ak II OX**, ak frontalyň gorizontal proýeksiýasy,

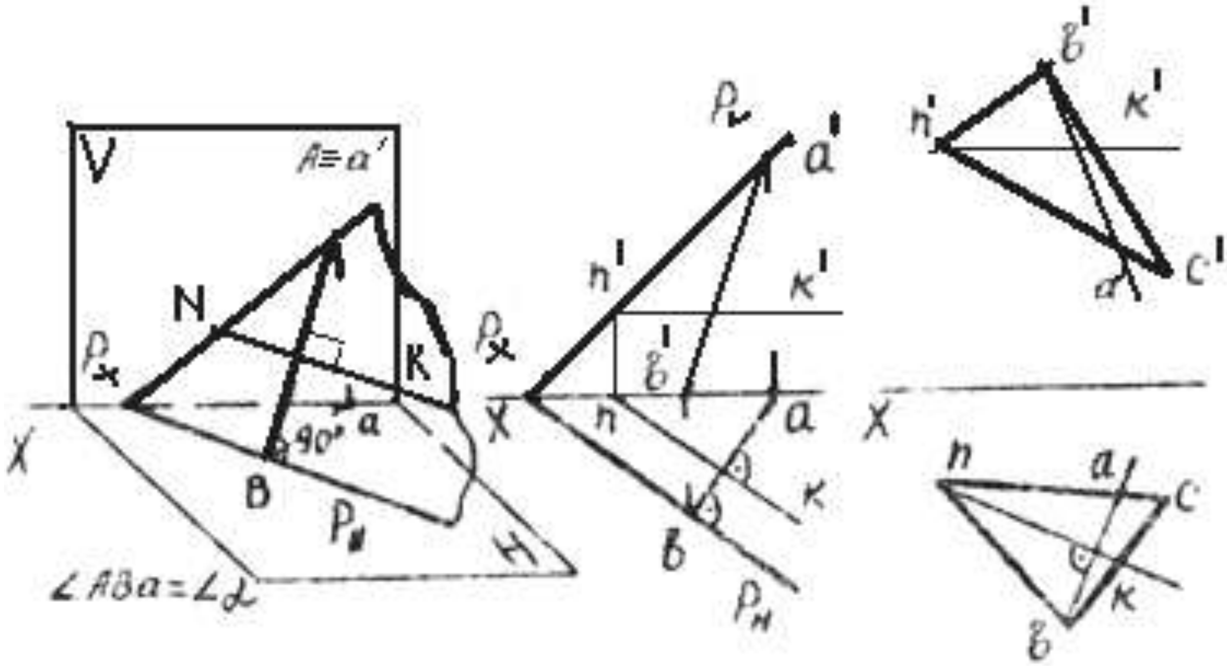
a^1 k^1 – frontalyň frontal proýeksiýasydyr.

<u>8.3.Tekizligiñ profil göni çyzygy</u>. Berlen tekizlikde ýatan we **W** şekiller tekizligine parallel bolan göni çyzyklara **<u>tekizligiñ profil göni çyzyklary</u>** diýilýär.

Tekizligiñ profil göni çyzygy we onuñ profil proýeksiýasy profil yza paralleldirler, gorizontal we frontal proýeksiýalary bolsa degişlilikde **OY** we **OZ** oklara paralleldirler,   ýa-da **OX** proýeksiýalar okuna perpendikulýardyrlar. Çyzgyny çyzmaklyk talyplaryň özüne tabşyrylýar.

8.4. Tekizligiñ proýeksiýalar tekizliklerine bolan iñ uly ýapgyt çyzygy.

Berlen tekizlikde ýatan we tekizligiñ islendik gorizontallaryna /şol sanda tekizligiñ gorizontal yzyna hem/ perpendikulýar bolan **AB** göni çyzyga tekizligiñ **H** şekiller tekizligine bolan **<u>iñ uly ýapgyt çyzygy</u>** diýilýär. /55-nji surat/



55-nji surat

AB $\perp$**P_H** . **AB** göni çyzyk **P** tekizligiñ **H** şekiller tekizligine bolan iñ uly ýapgyt çyzyklarynyñ biridir.

AB $\perp$ P_H, AB $\perp$ NK, NK $\subset$ P, NK II H,

NK – P tekizligiň gorizontalydyr.

Tekizligiñ iñ uly ýapgyt çyzygy bilen tekizligiñ islendik gorizontaly aralygyndaky göni burç **H** tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýän / **göni burçy proýektirlemek hakyndaky teorema esasynda /.** Şeylelikde, tekizligiń iń uly ýapgyt çyzygynyń berlen **ab** gorizontal proýeksiýasy islendik gorizontalyń gorizontal proýeksiýasynyń we tekizligiń gorizontal yzyna perpendikulýardyr.

AB $\perp$ P_H , ab $\perp$ P_H , ýa-da **AB $\perp$ NK , ab $\perp$ nk.**

“Iń uly ýapgyt çyzyk“ diýen sözüń fiziki manysy şundan ybaratdyr : şar, suw damjasy, suw akymjygy we ş.m. tekizligiň üstünden şol çyzyk boýunça hereket edýärler.

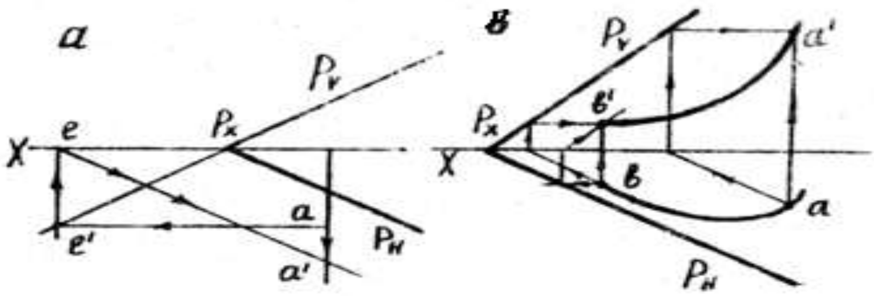
“Iň uly ýapgyt çyzyk“ diýen sözüň geometrik manysy bolsa şundan ybaratdyr: giňişlikde tekizlikdäki bu çyzyk **H, V, W** proýeksiýalar tekizlikleri bilen iň uly ýapgyt burçy emele getirýär . Tekizligiň proýeksiýalar tekizligine ýapgytlygy hem şol burç bilen kesgitlenýär we ölçelýär.

Yzlary bilen berilmedik tekizlikler üçin iň uly ýapgyt çyzygyň proýeksiýasyny gurmaklyk tekizligiň gorizontallarynyň birini öňünden gurmaklyga syrygýar .Iň uly ýapgyt çyzygyň gorizontal proýeksiyasy bolsa adaty usul bilen tapylýar.

Tekizlikde aýratyn ýagdaýlarda ýerleşen göni çyzyklaryň ýagny esasy çyzyklaryň kömegi bilen tekizligiň we nokadyň ýada göni çyzygyň özara ýerleşişine degişli meseleleri çözmeklik has hem amatlydyr.

Mysal üçin **P** tekizlige degişli **A** nokadyň berlen **a^1** frontal proýeksiýasy boýunça onuň **a** gorizontal proýeksiýasynyň tapylşy
56-nji a suratda görkezilendir, gurluşy bolsa berlen **P** tekizligiň **AE** gorizontalynyň kömegi bilen ýerine ýetirlendir.

56-njy b suratda bolsa **P** tekizliginde ýerleşen **AB** tekiz egri çyzygyň **ab** gorizontal proýeksiýasy boýunça , $\mathbf{a^1b^1}$ frontal proýeksiýasynyň gurluşy görkezilendir. Şonuň üçin tekiz egri çyzygyň üstünde birnäçe nokatlar alynyp we şol nokatlaryň üstünden geçýän gorizontallaryň ýa-da frontallaryň kömegi bilen tekiz egri çyzygyň frontal proýeksiýasy gurlandyr. Tekiz egri çyzygyň gorizontal proýeksiýasy boýunça frontal proýeksiýasynyň gurluşy strelkalar bilen görkezilendir we çyzgydan düşnüklidir.



56-njy surat

Tekiz figuralary proýektirlemek.

Ähli nokatlary bir tekizlikde ýatan we figuranyñ gyralaryny emele getirýän çyzyklar bilen çäklendirilen şekile **t e k i z f i g u r a** diýilýär.

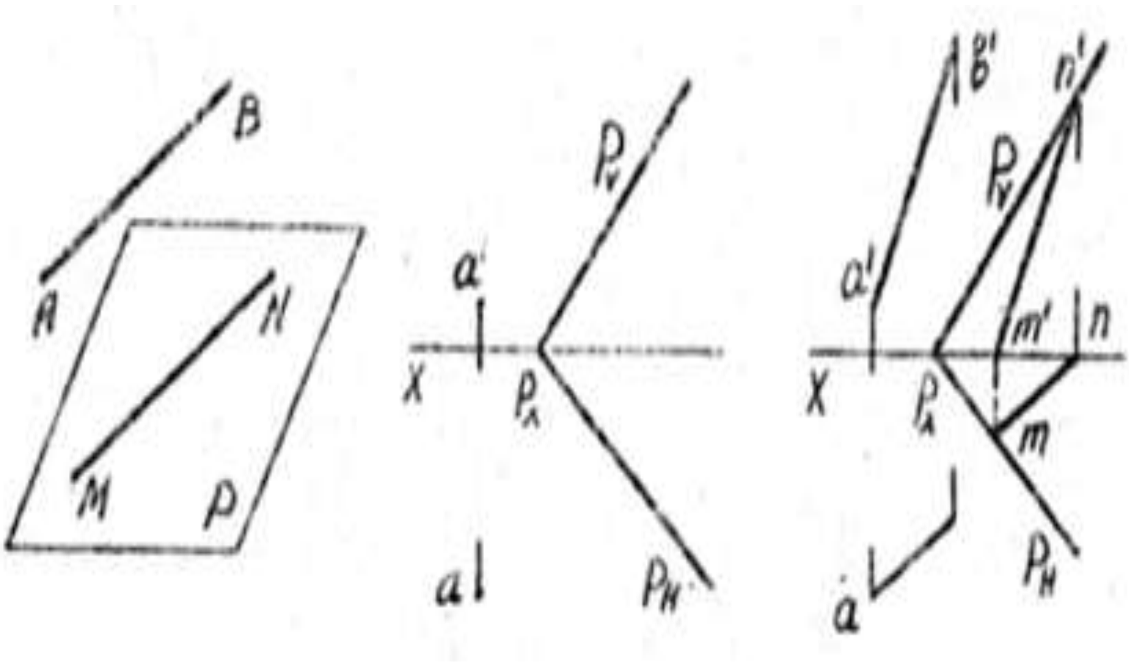
Tekizlige parallel göni çyzyk.

Göni çyzygyň tekizlige parallelik nyşany : Elementar geometriýadan bize belli bolşy ýaly, eger **AB** göni çyzyk **P** tekizligiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir **MN** göni çyzyga parallel bolsa, onda ol göni çyzyk şol tekizlige-de paralleldir. (66-njy a surat).

1 – Mesele. A /a,a^1 / nokadyň üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P /** $\mathbf{P_H}$**, Pv/** tekizlige parallel **AB** göni çyzyk geçirmeli (66-njy b, ç surat).

P /$\mathbf{P_H}$**, Pv/** tekizligiň üstünde ýerleşen islendik **MN /mn,** $\mathbf{m^1n^1}$/ göni çyzygyny alýarys, onuň **M / m,** $\mathbf{m^1}$/ we **N /n,** $\mathbf{n^1}$/ yzlaryny **P** tekizligiň biratly yzlarynyñ üstünde ýerleşdirýäris. Nokatlaryň biratly **m**. **n** we $\mathbf{m^1}$-$\mathbf{n^1}$ proýeksiýalaryny birleşdirip, göni çyzygyň **mn** gorizontal we $\mathbf{m^1n^1}$ frontal proýeksiýalaryny gurýarys.

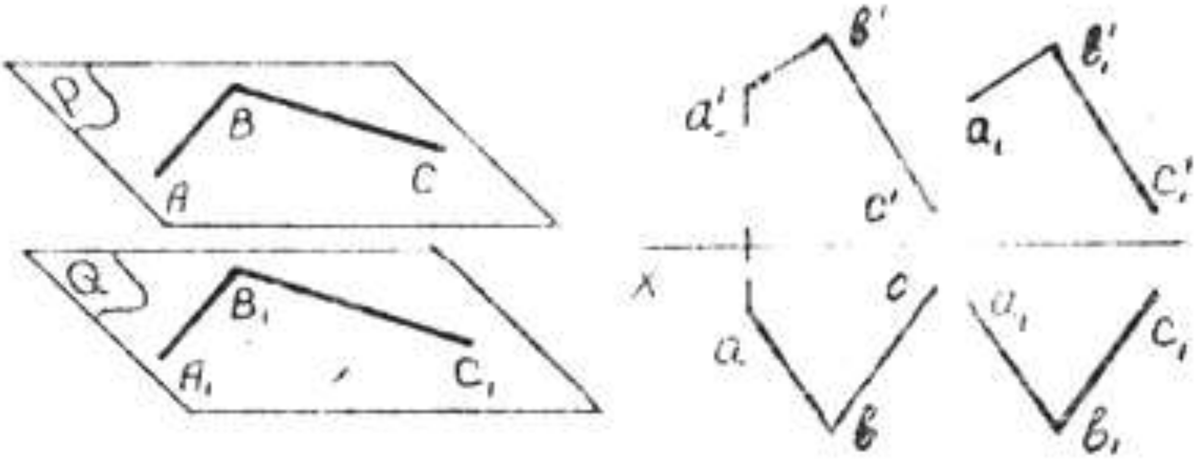
Berlen **A /a,a**^{1}/ nokadyň üstünden P tekizliginde alnan **MN** göni çyzygyñ **mn,** $\mathbf{m^1n^1}$ proýeksiýalaryna degişlilikde parallel **ab**, $\mathbf{a^1b^1}$ proýeksiýalary geçirýäris. Alnan **AB** göni çyzyk P tekizligine paralleldir. **MN** $\subset$ **P, AB || MN** onda **AB || P**;



66-njy surat

Parallel tekizlikler.

Iki tekizligiñ parallelik nyşany : **P** tekizligiñ üstünde ýatan **AB** we **CD** kesişýän iki göni çyzyk beýleki **Q** tekizligiñ üstündäki **A_1B_1** we **C_1D_1** kesişýän iki göni çyzyga degişlilikde parallel bolsalar, onda bu iki **P** we **Q** tekizlikler giñişlikde-de özara paralleldirler /68-nji a surat/.

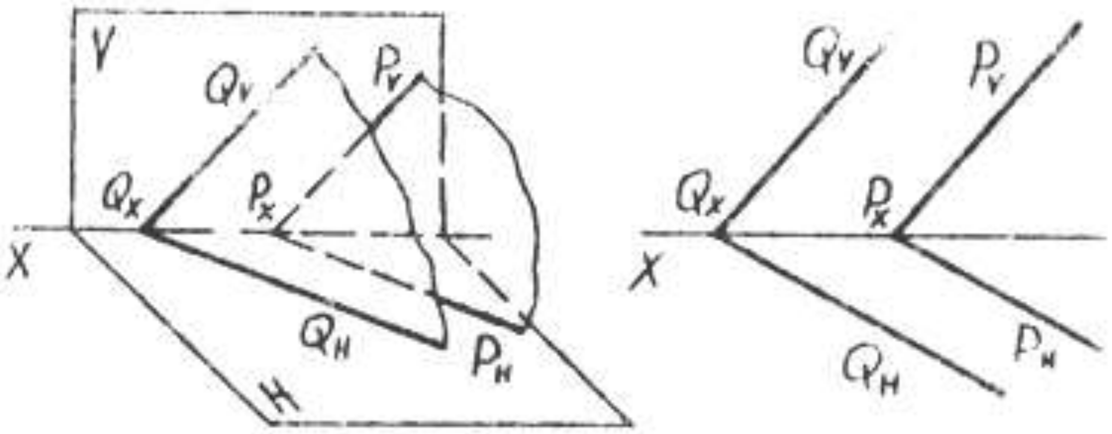


68-nji surat

Şonuñ üçin-de olara degişli iki sany **/AB $\cap$ BC/ we /$A_1B_1 \cap B_1C_1$/** kesişýän göni çyzyklaryñ biratly proýeksiýalaryda özara parallel bolmalydyrlar /68-nji b surat/.

Tekizlikde ýatan we kesişýän çyzyklar edilip, tekizligiñ esasy çyzyklaryny /gorizontallary we frontallary/ almak çyzmaly geometriýada meseleler işlenilende giñden ulanylýar, ýagny örän amatly bolýar.

Eger parallel iki **/P we Q/** tekizliogi üçünji **/H ýa-da V /** tekizlik bilen kesseñ, onda olaryñ kesişme çyzyklary / **P_H, Q_H we Pv, Qv** biratly yzlary/ özara parallel bolarlar /69-nji surat/.



69-njy surat

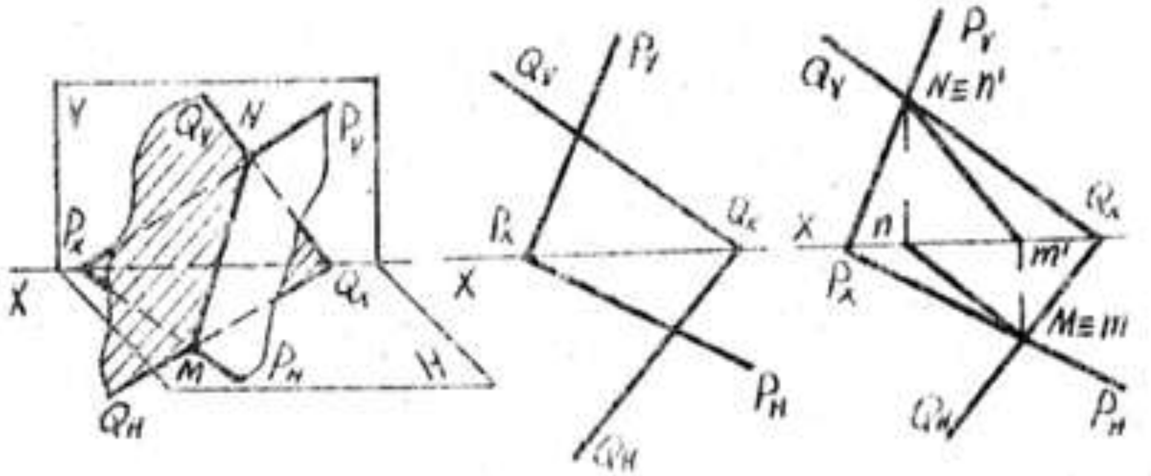
25. Kesişýän tekizlikler.

Giňişlikde iki tekižlik özara parallel bolmasalar onda olar giňişlikde kesişýändirler. Iki kesişýän tekižligiň kesişme çyžygy göni çyzykdyr. Ony gurmak üçin iki kesişýän tekizlik üçin-de umumy bolan iki sany nokady ýa-da iki kesişýän tekizlik üçin hem umumy bolan bir nokady we tekizlikleriň kesişme çyzygynyň ugryny kesgitlemek ýeterlikdir.

Umumy halda, kesişme çyzygy gurmak üçin her biri şol bir wagytyň özünde iki kesişýän tekizlige-de degişli bolan umumy iki nokady tapmak gerek.

Proýeksiýalar tekizliklerine görä ýerleşişleri bilen baglanyşyklykda tekizlikleriň kesişmeleriniň mümkin bolan birnäçe hallaryna garap geçeliň.

Birinji hal. Biratly yzlarynyň kesişýän iki tekizlikleriniň umumy kesişme çyzygyny gurmak /71-nji surat/.



71-nji surat

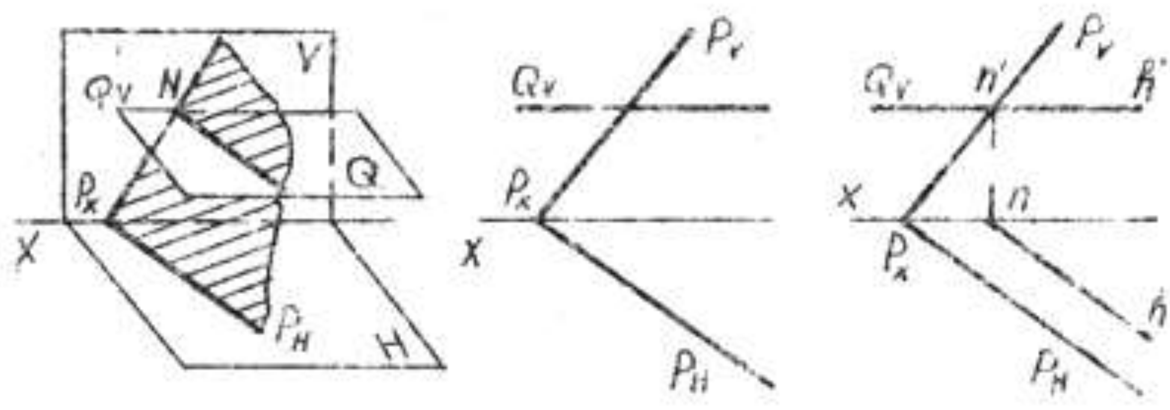
Tekizlikleriň biratly yzlary çyzygynyň çäginde kesişýärler.

Mesele. **P** we **Q** tekizliklere degişli bolan umumy **M** we **N** iki nokat boýunça **MN** kesişme çyzygyny tapmaklyga syrygýar. Biratly yzlaryň kesişme nokatlary kesişme çyzygyň gözlenýän umumy nokatlarydyrlar. 71-nji suratda giňişlikdäki aýdyň çyzgyda we epýurda tekizlikleriň kesişme çyzygynyň **M** we **N** iki umumy nokady tapylypdyr. **MN /mn, m^1n^1**/ göni çyzyk **P/P_H, P_V/ we Q /Q_H, Q_V**/ tekizlikleriň kesişme çyzygydyr, ýagny **M** we **N** nokatlar **P** we **Q** tekizlikleriň ikisi üçin hem umumy nokatdyr. Başgaça aýdylanda , **M** we **N** nokatlar kesişme çyzygyň yzlarydyr. **MN = P $\cap$ Q**

<u>Ikinji hal</u>. Biri proýeksiýalar tekizligine parallel bolan **Q** – dereje tekizligi, ikinjisi **P** umumy halda yzlary bilen berlen iki tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmak /72-nji surat/.

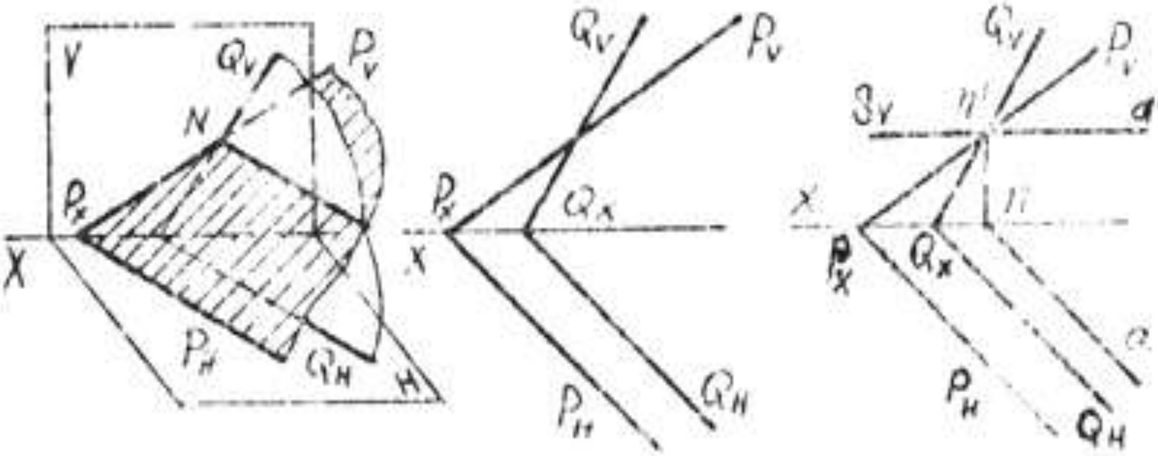
Umumy haldaky **P** tekizlik, gorizontal **Q** tekizligi bilen kesişende olaryň kesişme çyzygy iki tekizlik üçin hem umumy gorizontaldyr, ýagny **Q** we **H** parallel iki tekizlik üçünji **P** tekizlik bilen parallel göni çyzyklar arkaly kesişýärler /72-nji surat/. **Ýagny, nh // P_H**.

Bu ýagdaýda iki tekizlik üçin bir umumy **N** nokat bellidir. Kesişme çyzygyň ugry-da belli, ol çyzyk **P_H** yza parallel bolan **Nh** umumy gorizontaldyr – **Nh II P_H**.



72-nji surat

<u>Üçünji hal</u>. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birinde /mysal üçin,**H** tekizliginde/ yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikleriň kesişme çyzygyny gurmak /73-nji surat/.



73-nji surat

Eger tekizlikleriň yzlarynyň bir jübti parallel göni çyzyklar bolsa, onda tekizlikleriň kesişme çyzygy şol yzlara parallel bolar. Diýmek, tekizlikler özleriniň esasy çyzyklary (gorizontaly ýa-da frontaly) boýunça kesişýändirler.

Bu ýagdaýda tekizlikleriň kesişme çyzygy umumy gorizontaldyr, ýagny bu tekizlikleriň gorizontal yzlarynyň umumy nokady ýokdur.

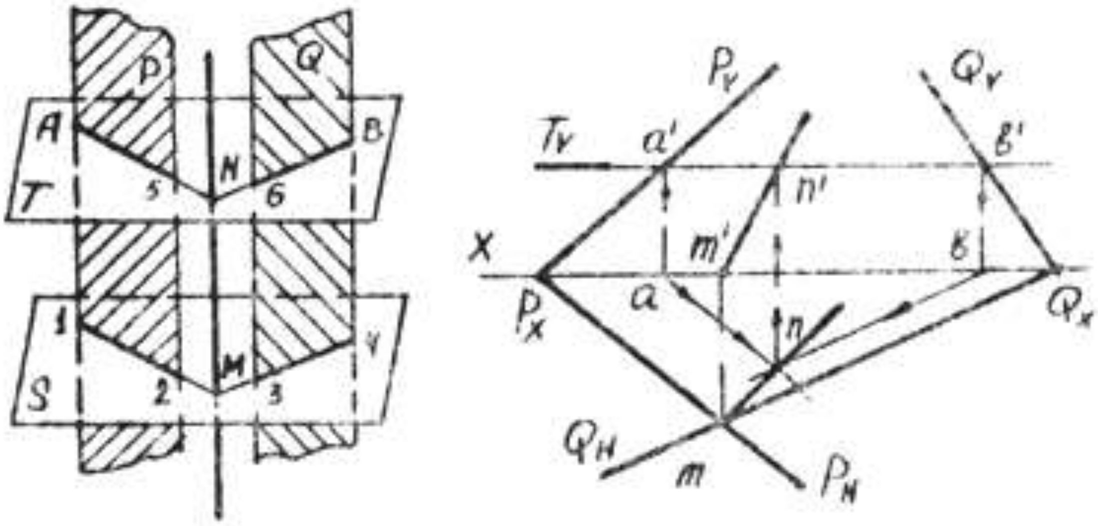
Munuň özi aşakdakydan bellidir. Frontal yzlaryň kesişme nokadynyň üstünden kömekçi **S** gorizontal tekizlik geçirilen , ol **P** we **Q** tekizlikleri olaryň umumy **AN** gorizontaly boýunça keser. **AN** göni çyzyk üç tekizlik üçin hem umumy göni çyzyk bolar. **AN ⊂ P, AN ⊂ Q , AN ⊂ S** we **AN II H** üç tekizlik uçin hem **umumy gorizontaldyr**.

AN II P_H, an II P_H, AN II Q_H, an II Q_H

Eger frontal yzlary parallel bolan umumy ýagdaýdaky tekizlikler kesişýän bolsalar, onda **umumy frontal** olaryň kesişme çyzygy bolar.

Dördünji hal. Proýeksiýalar tekizlikleriniň birinde /çyzgynyň mümkinçiliginde / bir jübüt yzlary kesişmeýän umumy ýagdaýdaky berlen iki tekizligiň umumy kesişme çyzygyny gurmak /74-nji surat/.

Diňe gorizontal yzlary kesişýän umumy haldaky **P** we **Q** tekizlikler üçin düzülen meseläni şeýle çözmek bolar. Gorizontal yzlaryň kesişýänligi netijesinde gözlenýän göni çyzygyň nokatlarynyň biri bolan M tapylypdyr. Kesişme çyzygyň ikinji **N** umumy nokadyny tapmak üçin **P** we **Q** berlen tekizlikleri gorizontallar boýunça kesýän kömekçi **T** gorizontal tekizlik geçirilýär /ikinji hala seret/.

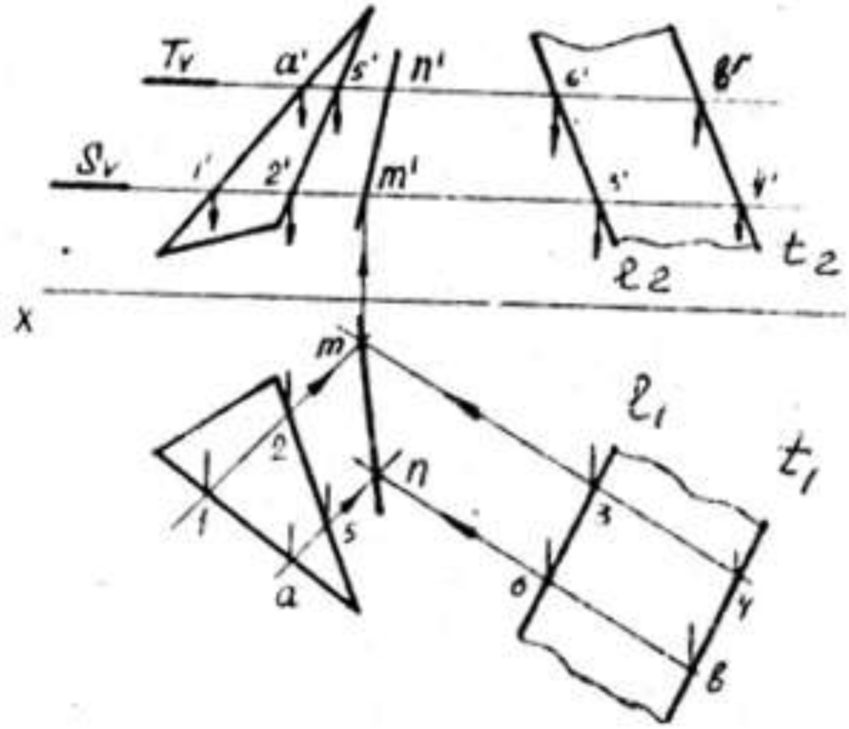


74-nji surat

Kömekçi **T** gorizontal tekizlik bilen **P** we **Q** tekizlikleriň aýratynlykda kesişme çyzyklaryny **AN** we **BN** göni çyzyklary kesgitleýäris /ýagny $\mathbf{P_xM \parallel AN, Q_x M \parallel BN}$/ we olaryň kesişýän **N** nokadyny tapýarys. Bu **N** nokat **P,Q** we **T** tekizlikleriniň üçüsi üçin hen umumydyr. **N** $\mathbf{(n,n^1)}$ nokat berilen tekizlikler üçin umumy bolan ikinji nokatdyr. Bu **N** nokat **M** nokat bilen bilelikde berilen iki tekizligiň MN /$\mathbf{mn,m^1n^1}$/ kesişme çyzygyny kesgitleýär. $\mathbf{N \subset P,\ N \subset Q,\ N \subset T,\ M \subset P,\ M \subset Q}$

Eger yzlaryň ikinji jübti hem çyzgynyň çäginde kesişmeýän bolsalar, onda ýenede bir kömekçi /S/ tekizligiň üsti bilen ikinji umumy nokady tapmak bolar.

<u>Bäşinji hal</u>. Yzlary bilen berilmedik umumy haldaky iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmagyň umumy ýagdaýyna garap geçeliň.



75-nji surat

P (ΔABC) ∩ Q (l II t) = MN

Goý, tekizlikleriň biri **P** kesişýän iki göni çyzyk bilen, beýlekisi **Q** parallel iki göni çyzyk bilen berilipdir diýeliň (75-nji sutat). Iki tekizligiň kesişme çyzygyny gurmak üçin kömekçi gorizontal ýa-da frontal, gorizontal proýektirleýji ýa-da frontal proýektirleýji tekizliklerden peýdalanmak bolar. Bu mysalda kömekçi tekizlikler hökmünde gorizontal S we T iki tekizlik alnan. S tekizlik P tekizligi **1-2, 1^1-2^1** göni çyzyklar boyunça, Q tekizligi bolsa **3-4, 3^1-4^1** göni

çyzyklar boýunça keser.Bu göni çyzyklaryň frontal proýeksiýalary S_V frontal yz bilen gabat gelerler, gorizontal proýeksiýalaryny bolsa bu çyzyklary gorizontal proýeksiýalar tekizligine proýektirläp taparys**. 1 – 2** we **3 – 4** gorizontal proýeksiýalaryñ özara kesişmeleri netijesinde umumy nokatlaryñ biri bolan M nokady alarys. Edil şu usul bilen ikinji N nokady-da taparys. Iki tekizligiñ umumy nokatlarynyñ biratly proýeksiýalaryny birleşdirip, olaryñ kesişme çyzygy bolan

MN /**mn, m^1n^1**/ göni çyzygy alarys **Q ∩ P = MN.**

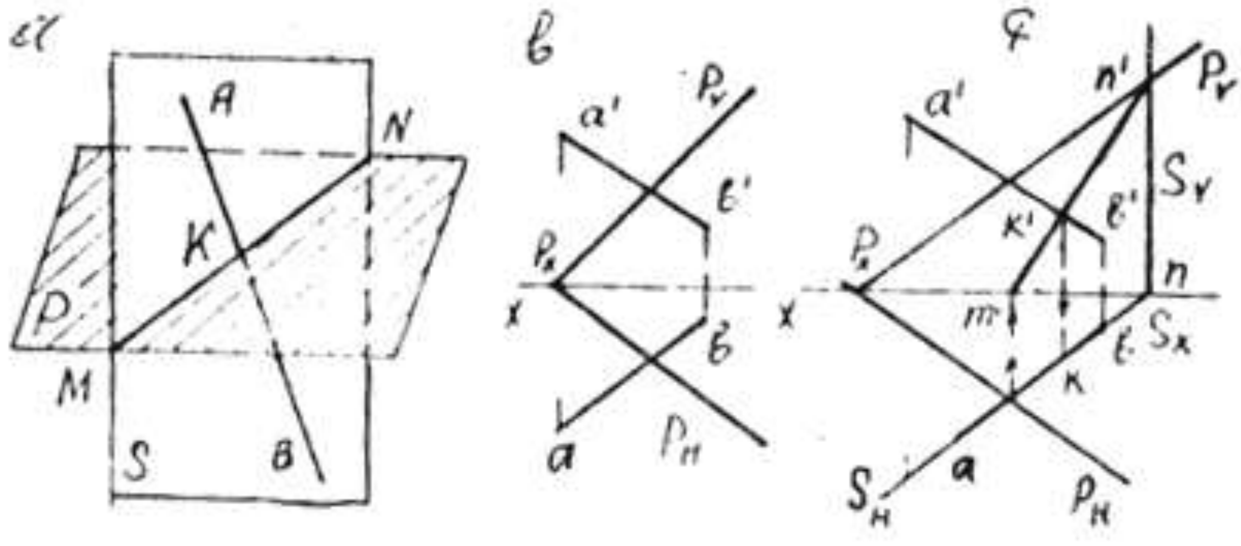
P (AB ∩ BC) ∩ Q (l II t) = MN

26. Umumy haldaky göni çyzygyñ umumy we hususy haldaky tekizlik bilen kesişmegi.

Eger göni çyzyk tekizligiñ üstünde ýatmaýan bolsa ýa-da oña parallel bolmasa, onda ol göni çyzyk tekizligi nirede bolsa-da bir ýerde kesýändir.

Göni çyzyk tekizlik bilen kesişende onuñ bilen umumy bir nokady bolýar, oña hem göni çyzygyñ tekizlik bilen **k e s i ş m e   n o k a d y** diýilýär.

Mesele. AB göni çyzygyñ P tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaly. Göni çyzygyň umumy haldaky tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmak üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli /79-njy surat/.



79-njy surat

1. Berlen AB göni çyzygyñ üstünden kömekçi S gorizontal proýektirleýji tekizligi geçirmeli.

2. P we S tekizlikleriñ umumy kesişýän MN göni çyzygyny gurmaly. MN = P ∩ S

3. Berlen AB we gurlan MN göni çyzyklaryñ kesişme nokady bolan K nokadyñ ýagdaýyny anyklamaly.

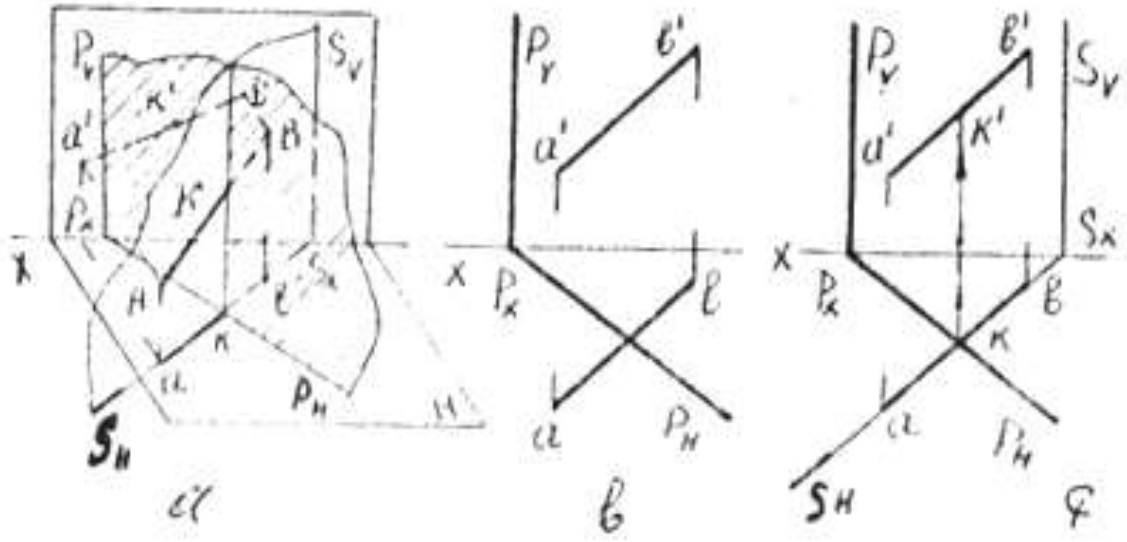
AB ∩ MN = K

Tapylan K nokat AB göni çyzyk bilen P tekizligiñ gözlenýän ýeketäk kesişme nokady bolar.AB göni çyzygyñ üstünden geçýän kömekçi tekizlik hökmünde islendik tekizligi almak bolar. Çözülişi ýönekeýlişdirmek üçin proýektirleýji tekizligi almak amatlydyr. Sebäbi şeýle tekizligiñ bir yzy göni çyzygyñ bir proýeksiýasynyñ üstünden geçip, beýleki yzy bolsa OX okuna perpendikulýardyr.

79-njy b, ç suratda yzlary bilen şekillendirilen umumy haldaky P tekizlik bilen, AB göni çyzygyñ kesişme nokadynyñ tapylyşyna degişli mesele berlipdir. Şu ýagdaýda göni çyzygyñ üstünden gorizontal proýektirleýji S tekizlik geçirilipdir. Şu geçirilen kömekçi S tekizligiñ S_H gorizontal yzy berlen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ üstünden geçýändir. Şondan soñky çözülişi ýokarda görkezilen **shema** boýunça alnyp barylýar.

Göni çyzyk bilen umumy haldaky tekizligiñ kesişme nokadyny tapmagyñ görkezilen şu usuly tekizlikleriñ berlişiniñ beýleki usullary üçin hem peýdalanylyp bilner.

Gorizontal proýektirleýji P tekizlik umumy haldaky AB göni çyzygyñ kesişýän halyna seredeliñ /80-nji surat/.



80-nji surat

Ilki bilen göni çyzygyñ **ab** gorizontal proýeksiýasynyñ tekizligiñ P_H gorizontal yzy bilen kesişýän nokadynyñ k gorizontal proýeksiýasy tapylýar we şol esasda baglanyşyk çyzgynyñ kömegi bilen gözlenýän nokadyñ k^1 frontal proýeksiýasy gurular.

Göni çyzygyñ tekiz figura bilen kesişmegi.

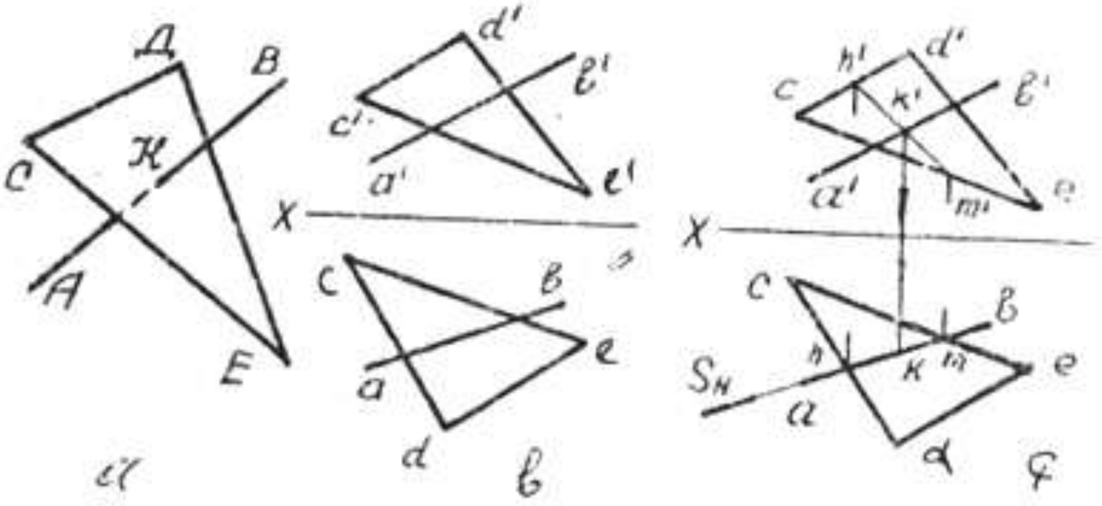
Göni çyzygyñ tekiz figura – tekizlik bilen kesişme nokadyny gurmaga degişli meseläniñ çözüliş usuly göni çyzygyñ yzlary bilen berlen tekizlik bilen kesişýän nokadyny tapmaga degişli meseläniñ çözüliş usulyndan tapawutlanmaýar. Munuñ özi diñe daş görnüşi boýunça tapawutlydyr.

Mesele. Berlen CDE üçburçlugyñ tekizligi bilen umumy ýagdaýdaky AB göni çyzygyñ kesişme nokadyny tapmaly. /81-nji surat/. $AB \cap \Delta CDE = K$

Meseläni çözmek üçin berlen AB göni çyzygyñ üstünden kömekçi S gorizontal proýektirleýji tekizlik geçirilendir. CDE üçburçlugyñ tekizligi bilen kömekçi S tekizligiñ kesişme çyzygy üçburçlugyñ DC we EC taraplarynyñ şol tekizlik bilen kesişýän N we M iki nokadynyñ üsti bilen tapylýar. $n^1m^1 \cap a^1b^1 = k^1$

Ilki bilen AB göni çyzygyñ üçburçlugyñ tekizligi bilen kesişme nokadynyñ K^1 frontal proýeksiýasyny, soñra bolsa K gorizontal proýeksiýasyny birleşdiriji çyzygyň kömegi bilen tapýarys .

$k^1k \perp OX$, $AB \cap \Delta CDE = K$.



81-nji surat

Epýurda görnüp – görünmezligi anyklamak.

Çyzylan çyzgynyñ añsat okalmagy we düşnükli bolmagy üçin geometriki figuralaryň proýeksiýalarynyñ görünýän ýerlerini bitewi çyzyklar bilen, görünmeýän ýerlerini bolsa aralary kesilen - üzük çyzyklar /ştrihli çyzyk/ bilen şekillendirmeklik kabul edilendir. Käbir halatlarda bolsa görünmeýän çyzyklary asla çyzgyda görkezilmeýär.

Proýeksiýalar tekizligine geçirilen şol bir perpendikulýaryñ üstünde ýatan iki nokadyñ haýsysy gözegçilik edýäniñ gözüne ýakyn bolsa, şol hem görünýän nokat bolar. Gorizontal proýeksiýalar tekizligine görünýän nokady anyklamak üçin gözegçilik edýäniñ gözi şol iki nokadyñ üstünde proýeksiýalar tekizligine geçirilen perpendikulýaryñ üstünde diýilip hasap edilýär.

Şonuñ üçin, bu tekizlikden has uzakda ýerleşen nokat görünýän nokat bolar. Göni çyzygyñ kesimleriniñ görnüp – görünmezligine proýeksiýalarnyñ her biri üçin aýratynlykda kesgitlenýär.

Elementleriñ ol ýa-da beýlekisiniñ görnüp – görünmezligi degişli meseläni figuranyñ diñe bir proýeksiýasyna garap göçmek bilen çözüp bolmaýandygyna, hökmany suratda proýeksiýalaryñ ikisini hem göz öñünde tutmalydygyny ýatda saklamak gerek.

Göni çyzygyñ görnüp – görünmezligine degişli mesele mydama nokatlaryñ görnüp – görünmezligine syrygýar.

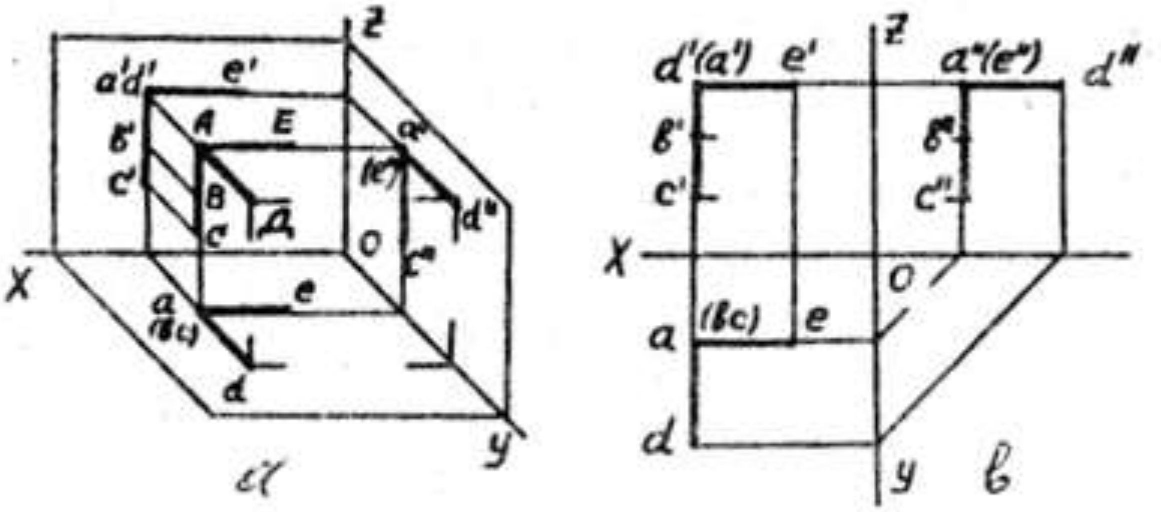
Eger nokatlaryñ birnäçesi edil şol bir proýektirleýji çyzygyň üstünde ýatan bolsa, onda olaryñ diñe biri görünýändir:

1. H – gorizontal şekiller tekizligine görä /82-nji a, b surat/, görünýän A nokatdyr, B we C nokatlar görünmeýärler, ýagny A nokat olaryñ öñünde durandyr.

2. V - frontal şekiller tekizligine görä, D nokat görünýändir, A nokat bolsa görünmeýär, sebäbi D nokat onuñ öñünde dur.

3. W – gapdal - profil şekiller tekizligine görä bolsa, A nokat görünýär, E nokat bolsa görünmeýär.

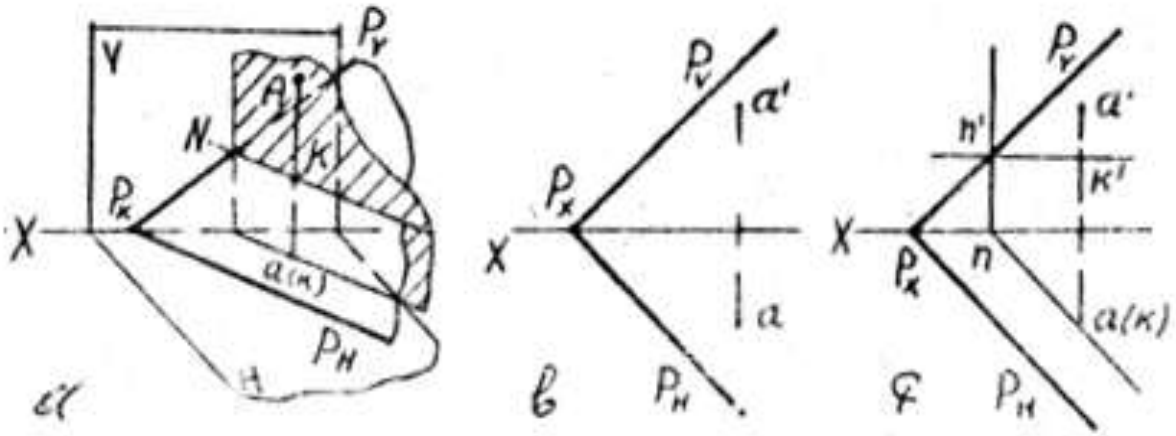
Nokatlaryñ görnüp – görünmeýänligini anyklamak üçin iki atanak ýatan göni çyzyklaryñ mysalyndan bäsleşýän nokatlardan peýdalanmak amatly bolar.



82-nji surat

1 – nji mesele. P tekizlige görä, A nokat görünýärmi, ýa-da bu tekizlik onuñ öñünu ýapýarmy? /83-nji surat/.

A nokatdyñ üstünden geçýän H tekizligine perpendikulýar proýektirleýji göni çyzyk P tekizligi k /k, k^1 / nokatda kesýär, onuñ gorizontal proýeksiýasy **a** proýeksiýanyñ üstüne düşýär. $\mathbf{a^1}$ nokat $\mathbf{k^1}$ nokada garanyñda OX okdan daşda /ýökarda/ ýerleşendir. Şonuñ üçin H gorizontal şekiller tekizligine görä A nokadyñ öñi P tekizlik bilen ýapylan däldir, şonuň üçin A nokat görünýär.



83-nji surat

2 – nji mesele. Dury däl ABC we DEF üçburçluklar bilen berlen tekizlikleriñ kesişme çyzygyny gurmaly we bu üçburçluklaryñ görünýän hem-de görünmeýän ýerlerini kesgitlemeli /84-nji surat/.

Iki tekiz figuranyñ kesişme çyzygy hem iki tekizligiñ kesişme çyzygynyñ tapylyşy ýaly, olara umumy bolan iki nokadyñ üsti bilen tapylýar. Iki üçburçlugyñ kesişme çyzygyny tapmak üçin meseläniñ çözgüdini göni çyzygyñ (üçburçlugyñ) taraplarynyñ biriniñ beýleki üçburçlugyñ tekizligi bilen kesişme nokadyny tapmaklyga syrykdyrmak gerek. Şonuñ üçin meseläniñ çözülşiniñ **yzygiderligini - shemasyny** aşakdaky görnüşde bermek bolar.

1. ABC üçburçlugyñ AC tarapynyñ DEF üçburçluk bilen kesişýän M nokadyny tapýarys. Munuñ üçin şu aşakdaky yzygiderligi ýerine ýetirmeli:

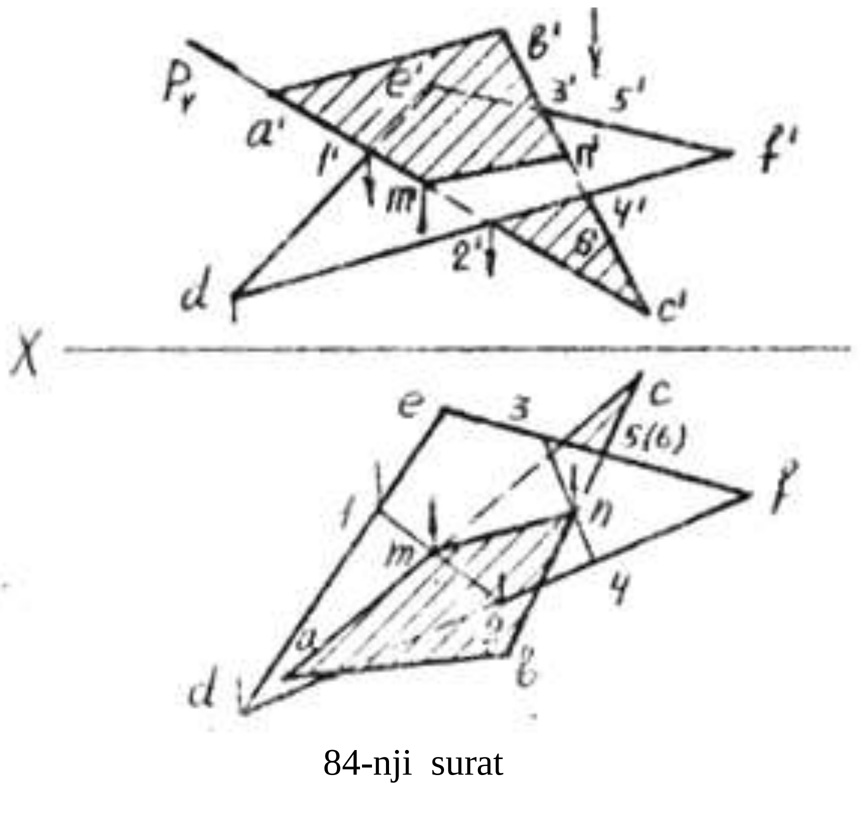
a/ AC tarapyñ üstünden kömekçi frontal proýektirleýji P tekizligi göçürmeli. Tekizligiñ frontal yzy AC göni çyzygynyñ frontal proýeksiýanyñ üstünden geçer.

b/ Kömekçi P tekizliginiñ DEF üçburçluk bilen kesişýän

/ 1 – 2, $1^1 – 2^1$/ çyzygyny tapmaly.

ç/ **1 – 2** gorizontal proýeksiýanyñ **ac** gorizontal proýeksiýa bilen kesişýän **m** nokadyny tapmaly, $\mathbf{m^1}$ frontal proýeksiýa adaty usul bilen tapylýar.

2. ABC üçburçlugyñ BC tarapynyñ DEF üçburçluk bilen kesişýän N nokadyny tapýarys, munuñ üçin AC tarap üçin ýerine ýetirilen gurluşlary yzygiderli gaýtalamaly.



84-nji surat

3. M we N nokatlary birleşdirip, iki üçburçlugyñ umumy MN kesişme çyzygyny alarys. **R (Δ ABC) ∩ Q (Δ DEF) = MN**

Çyzgyda üçburçlugyñ görünýän hem-de görünmeýän elementlerini anyklalyñ.

Munuñ üçin iki atanak ýatýan göni çyzykdan peýdalanmak gerek. Atanak ýatýan göni çyzyklar hökmünde üçburçluklaryñ BC we EF taraplaryny alalyñ. Gorizontal proýeksiýadaky **5, 6** nokatlarda görünýän **5** nokat bolar, sebäbi **5** nokatdan H tekizligine çenli aralyk **6** nokada garanyñda daşdyr. Diýmek 5 nokatda EF tarap BC tarapyñ üstüni ýapar.

Tekizlige perpendikulýar göni çyzyk.

Giňişlikde göni çyzygyñ tekizlige perpendikulýarlyk nyşany:

Eger /AK/ göni çyzyk tekizlikde ýatan we kesişýän iki /MK we NK/ göni çyzyklara perpendikulýar bolsa, onda ol AK göni çyzyk P tekizligiñ özüne - de perpendikulýardyr /85-nji a surat/.

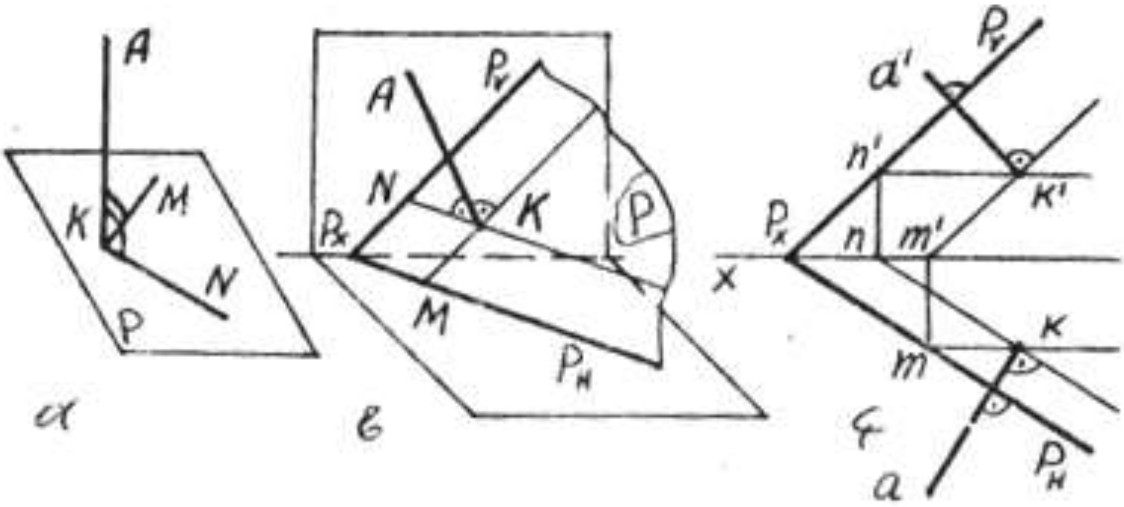
Epýurda tekizlikdäki kesişýän iki göni çyzygyñ deregine berlen tekizligiñ yzlaryny ýa-da şol tekizligiñ gorizontallaryny we frontallaryny almak amatlydyr.

85-nji b surat **P t**ekizlige perpendikulýar bolan **AK** göni çyzyk görkezilendir. Goý, bu göni çyzyk tekizligi **K** nokatda kesýar diýeliñ.

K nokadyñ üstünden **NK** gorizontal we MK frontal geçireliñ.

Şonda göniburçy proýektirlemek baradaky teoremanyñ esasynda

nk $\perp$ **ak.** P_H **II nk** bolany üçin **ak** $\perp$ P_H /85-nji ç surat/.



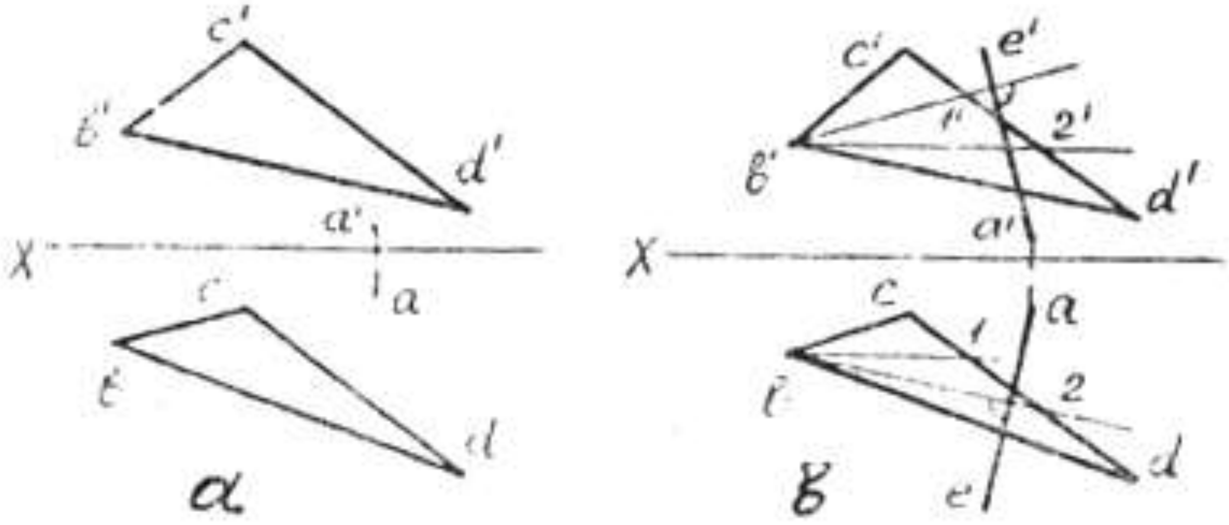
85-nji surat

Edil şonuñ ýaly **$a^1k^1 \perp m^1k^1$ we $a^1k^1 \perp$ Pv**.

Tersine, ýagny eger göni çyzygyñ proýeksiýalary tekizligiñ biratly yzlaryna perpendikulýar bolsalar, onda göni çyzyk hem tekizlige perpendikulýardyr.

Haçan-da tekizlik epýurda yzlary bilen berilmedik ýagdaýda, olaryñ yzlaryny gyrmak hökmanam däldir, sebäbi 85-nji b, ç suratdan görnüşi ýaly, tekizlige perpendikulýar **AK** göni çyzygyñ gorizontal proýeksiýasy tekizligiñ gorizontal yzyna ýa-da islendik gorizontalyna perpendikulýardyr. **(ak $\perp$ P_H ýa-da ak $\perp$ nk),** hem-de frontal proýeksiýasy **$a^1k^1 \perp$ Pv** ýa-da **$a^1k^1 \perp m^1k^1$** . Şu çyzgydan görnüşi ýaly, tekizligiñ nähili berlendigine garamazdan, berlen tekizligiñ esasy çyzyklary gorizontaly ýa-da frontaly belli bolsa, onda şol tekizlige perpendikulýar geçirmek bolar.

Eger tekizlik yzlary bilen berilmedik bolsa, onda perpendikulýaryñ proýeksiýalary degişlilikde: gorinzontal proýeksiýasy tekizligiñ gorinzontalynyñ gorinzontal proýeksiýasyna, perpendikulýaryñ frontal proýeksiýasy bolsa tekizligiñ frontalynyñ frontal proýeksiýasyna perpendikulýardyr /86-njy surat/.

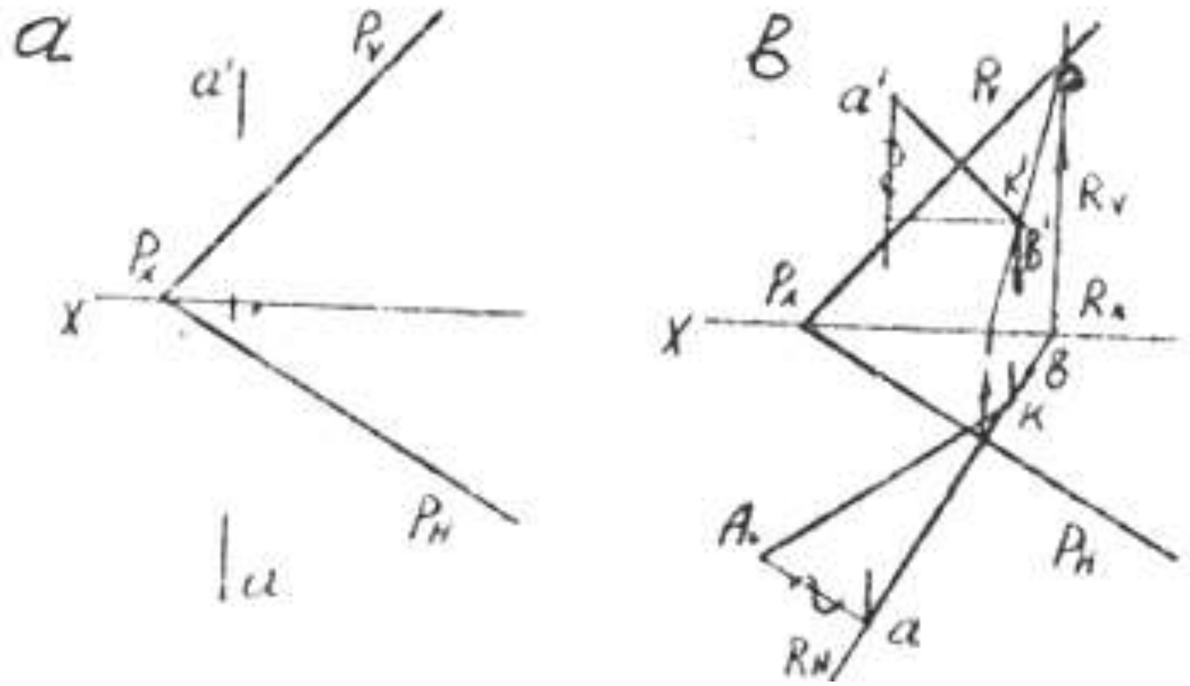


86-njy surat

Mesele. **A** nokadyñ üstünden umumy ýagdaýda **BCD** üçburçluk bilen berlen tekizlige perpendikulýar çyzyk geçirmeli /86-njy surat/.

BCD üçburçlugyñ tekizliginde B2 gorinzontaly we B1 frontaly geçirip, A nokadyñ üstünden **AE / ae⊥b2, a^1e^1 ⊥b^11^1** / perpendikulýaryñ gorinzontal we frontal proýeksiýalaryny geçirmek ýeterlikdir.

Mesele. A / a, a^1/ nokatdan umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P /P_H, Pv/** tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /87-nji surat/.



87-nji surat

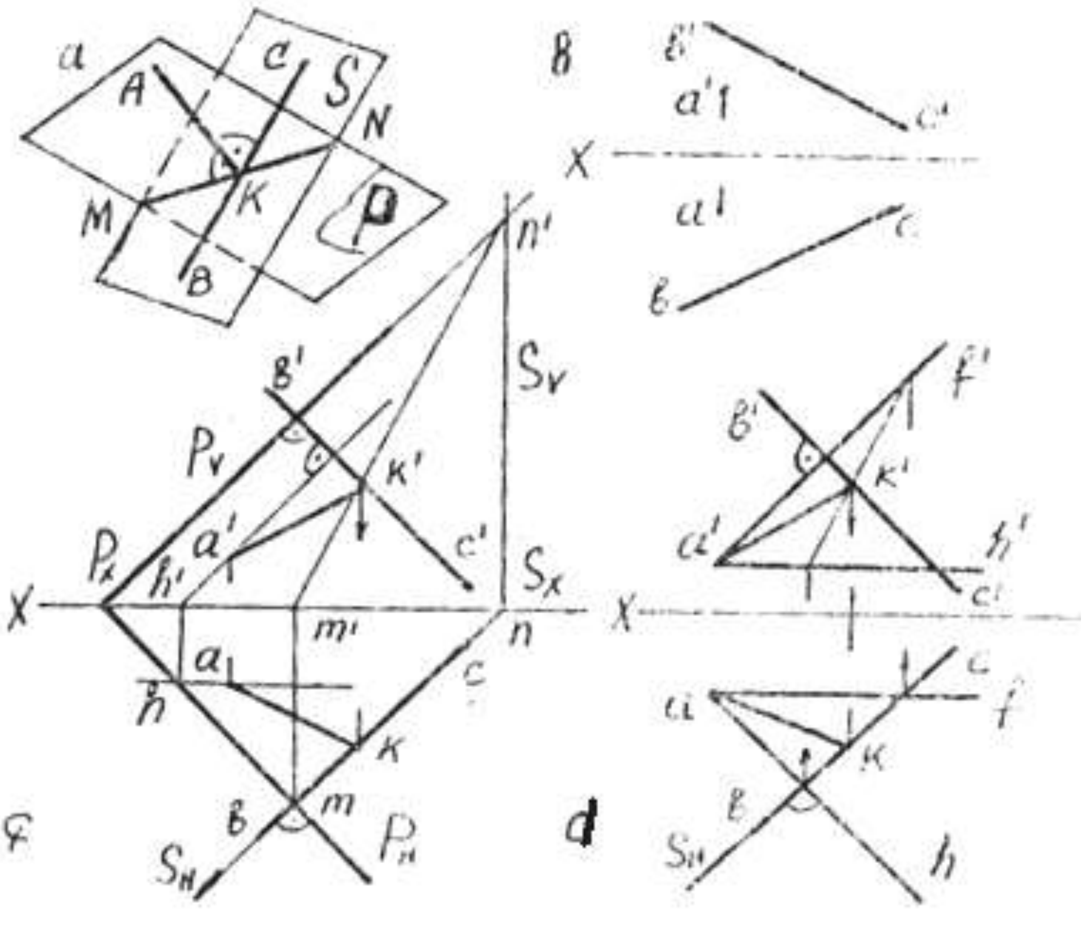
Nokatdan tekizlige çenli iň ýakyn aralyk berlen nokatdan tekizlige geçirilen perpendikulýaryñ tekizlik bilen kesişýän nokadyna çenli aralyga deñdir.

Meseläni çözmegiñ yzygiderligi:

1. Berlen **A** nokatdan **P** tekizlige **AB** perpendikulýar geçirýäris.
   $ab \perp P_H$, $a^1b^1 \perp P_V$.
2. AB perpendikulýaryñ **P** tekizlik bilen kesişýän
   K /k, k^1/ nokadyny taparys.
2. **KA_0** gözlenýän aralygyñ hakyky uzynlygyny bize belli bolşy ýaly üçburçluklar usuly bilen kesgitleýäris. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Umumy ýagdaýdaky göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk gurmak. (Umumy hal).

Mesele. **A** nokatdan umumy ýagdaýdaky **BC** göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk geçirmeli /88-nji a,b,ç surat/.



88-nji surat

Meseläniñ çözülişiniñ **yzygiderligi - shemasy** aşakdaky ýaly bolup biler:

1. **A** nokadyñ üstünden **BC** göni çyzyga perpendikulýar bolan **P** tekizligi geçireliñ. Şonuñ üçin proýeksiýasy **b^1c^1** göni çyzyga perpendikulýar / **$h^1a^1 \perp b^1c^1$** / bolan frontaly ulanýarys. P_H gorizontal yz **h** nokadyñ üstünden **bc** gorizontal

proýeksiýa perpendikulýar edilip, Pv frontal yz bolsa **Px** nokadyñ üstünden **b^1c^1** proýeksiýa perpendikulýar edilip geçirilendir.

2. BC göni çyzygyñ P tekizlik bilen kesişme K nokadyny tapýarys. Şonuñ üçin **BC** göni çyzygyñ üstünden kömekçi **S** tekizligi **H** tekizligine perpendikulýar edip geçirýäris**.** Berlen P tekizlik bilen, geçiren kömekçi **S** tekizligimiziň umumy kesişme çyzygyny

MN (mn, m^1n^1) gurýarys. Guran MN kesişme çyzygyň **m^1n^1** bilen **b^1c^1** proýeksiýanyñ kesişmeginde **k^1** nokady alarys.
Tapan **k^1** nokadyň **k** – gorizontal şekilini adaty usul bilen tapylandyr.

3. **A** we **K** nokatlary göni çyzyk arkaly birleşdirýäris. **A** we **K** nokatlar P tekizliginde ýatýarlar, şonuñ üçin **AK** göni çyzyk **P** tekizliginde ýatýar. **BC** göni çyzyk **P** tekizlige perpendikulýardyr, diýmek, **AK** we **BC** göni çyzyklar özara perpendikulýardyrlar.
4. **AK $\perp$ BC** 88-nji d suratda P tekizligi yzlary bilen gurman, esasy çyzyklary bilen gurup, bu iki çyzgynyñ netijesiniñ birligine göz ýetýäris. **P(Af $\cap$ Ah).**

Perpendikulýar tekizlikler.

Giňişlikdäki tekizlikleriñ perpendikulýarlyk nyşany:

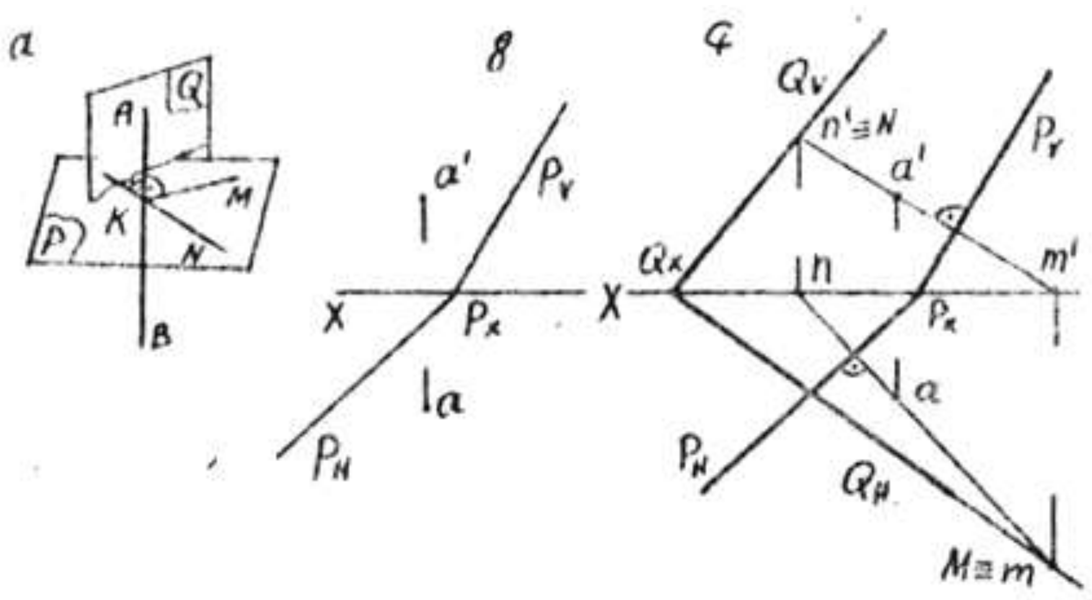
Eger iki tekizligiñ biri beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyñ üstünden geçýän bolsa, onda ol tekizlikler giňişlikde özara perpendikulýardyrlar /89-njy a surat/.

Berlen P tekizlige perpendikulýar bolan **Q** tekizligi gurmaklyk iki ýol bilen amala aşyrlyp bilner:

1. **Q** tekizlik **P** tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzygyñ üstünden geçirilýär.
2. **Q** tekizlik **P** tekizligiñ üstünde ýatan göni çyzyga perpendikulýar edilip geçirilýär.

Perpendikulýar tekizliklere degişli birnäçe meseläniñ işlenilişine garap geçeliñ.

1–nji mesele. Berlen **A /a, a^1/** nokadyñ üstünden umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P /P_H,Pv/** tekizlige perpendikulýar bolan **Q /Q_H, Qv/** tekizligi yzlary bilen geçirmeli /89-njy a, b surat/.

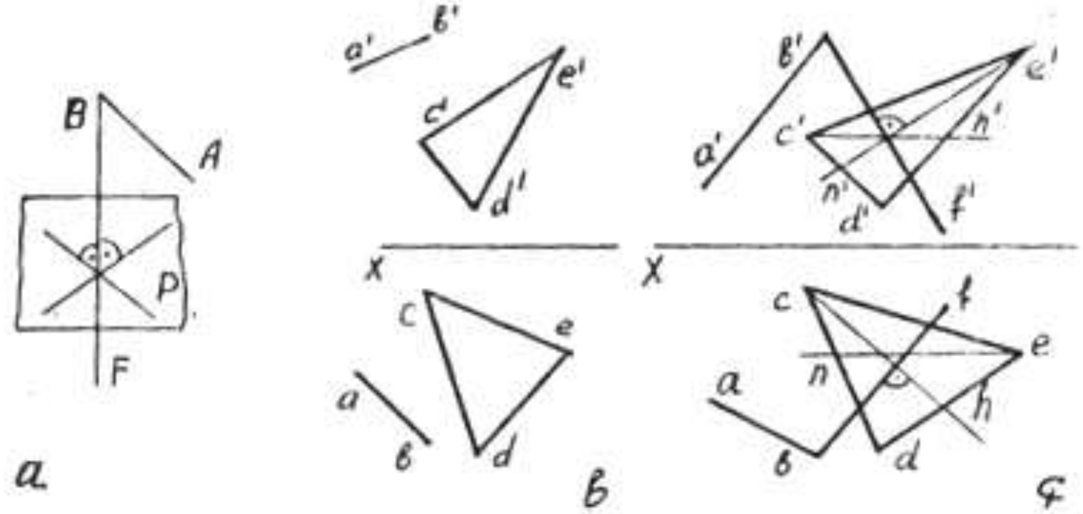


89-njy surat

Epýurda /89-njy ç surat/ özara perpendikulýar tekizlikleriniñ yzygiderli gurluşy görkezilendir. Berlen **A** nokadyñ üstünden **P** tekizlige perpendikulýaryñ proýeksiýalary geçirilen. Bu perpendikulýaryñ gorizontal **M** we frontal **N** yzlaryny taparys.

M gorizontal yzyñ we erkin alnan **Qx** nokadyñ üstünden tekizligiñ $\mathbf{Q_H}$ gorizontal yzyny geçirýäris, tekizligiñ frontal yzlary **N** we **Qx** nokatlar bilen kesgitlenýär.

2–nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen **AB** göni çyzygyñ üstünden **CDE** üçburçlugyñ tekizligine perpendikulýar tekizlik geçirmeli /90-njy a surat/.



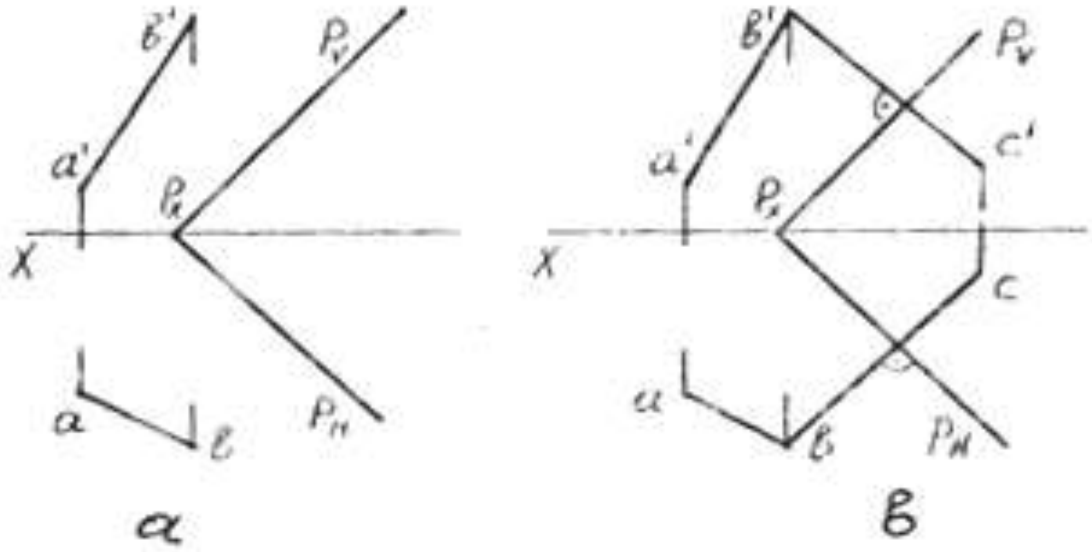
90-njy surat

Bu meseläni çözmek üçin **AB** göni çyzyga degişli B nokadynyñ üstünden **CDE** perpendikulýar geçirmeli. Perpendikulýaryñ $\mathbf{b^1f^1}$ frontal proýeksiýasy frontalyñ $\mathbf{n^1e^1}$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar, perpendikulýaryñ **bf** gorizontal proýeksiýasyna bolsa, gorizontalyñ gorizontal **ch** proýeksiýasyna perpendikulýar edip geçirmeli.

AB we **BF** kesişýän göni çyzyklar **CDE** üçburçlugyñ tekizligine perpendikulýar **Q** tekizligi kesgitleýärler. **Q (AB $\cap$ BF),**

Q $\perp$ Δ CDE, BF $\perp$ Δ CDE, BF $\subset$ Q.

3-nji mesele. 91-nji a, b suratda berlen umumy ýagdaýda **AB /ab, a^1b^1**/ göni çyzygyñ üstünden yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky **P /P_H, Pv/** tekizlige perpendikulýar bolan Q tekizligiñ geçirilişi görkezilendir.



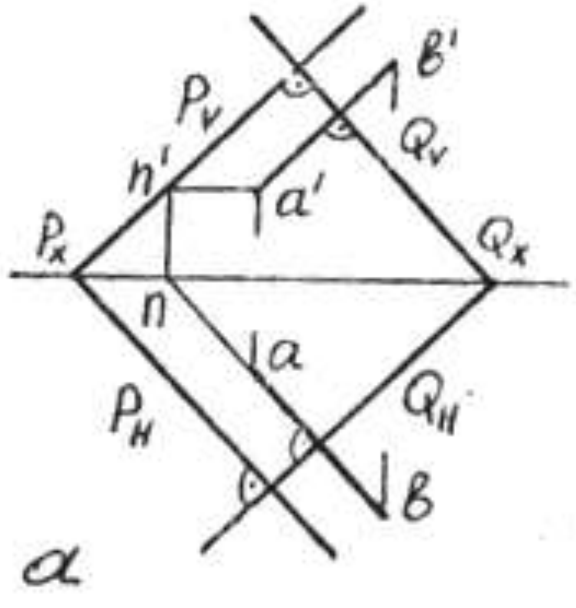
91-nji surat

BC $\perp$ P, Q (AB $\cap$ BC), BC $\subset$ Q, Q $\perp$ P.

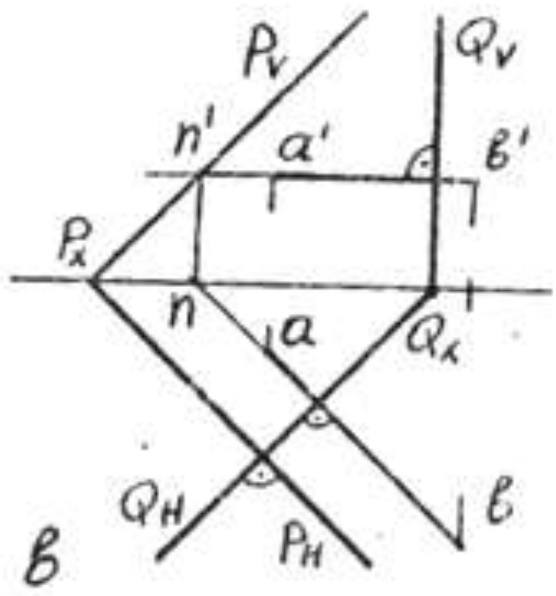
Umumy haldaky iki tekizligiñ biratly yzlarynyñ özara perpendikulýar ýerleşmekleri bu tekizlikleriñ göni burç bilen kesişmeýändikleriniñ nyşanydygyny belläp geçmek gerek.

4-nji mesele. Goý, **P** we **Q** tekizlikler berlen bolsun / /**P_H $\perp$$Q_H$** we **Pv$\perp$Qv**/. Tekizlikleriñ perpendikulýar däldiklerine göz ýetireliñ /92-nji surat/

Umumy haldaky iki tekizligiñ biratly yzlarynyñ özara perpendikulýar ýerleşmekleri bu tekizlikleriñ göni burç bilen kesişmeýändikleriniñ nyşanydygyny belläp geçmek gerek.



92-nji surat



93-nji surat

P tekizlikde ýerleşen **A** nokatdan Q tekizlige AB perpendikulýar geçirýäris. **P** we **Q** tekizlikleriñ özara perpendikulýar bolan ýagdaýlarynda **AB** göni çyzygy **P** tekizlige degişli bolmalydyr. Emma hakykatda bu beýle däldir. **AB** göni çyzyk **P** tekizliginde ýatmaýar. Diýmek, **P** tekizlik **Q** tekizlige perpendikulýar däldir.

Tema: 5
Akonometriki proýeksiýalar.
Göni burçly izometriýa we dimetriýa.

Sapagyň meýilnamasy:

1. Aksonometriki proýeksiýalar.
2. Gönüburçly proýeksiýalar.
3. Dimetriki proýeksiýalar.
4. Gytakburçly proýeksiýalar.

1. Aksonometriki proýeksiýanyñ alynyşyna (emele gelişine), aksonometriýanyñ esasy teoremasyna, aksonometriýanyñ görnüşlerine, ýoýma we getirilen koeffisiýentlerine, şeýle hem nokadyñ, islendik çyzygyñ (esasan-da töweregiñ) we üstleriñ aksonometriki proýeksiýalarynyñ gurluşlaryna çyzgy geomelriýasynda jikme-jik seredilip geçilipdi. Has takygy aksonometriki proýeksiýanyñ berlen predmetiñ, onuñ üç tarapy görüner ýaly edilip bir tekizlige proýektirlenip alnan aýdyñ şekilidigi, şeýle proýektirlemegi bolsa islendik ugur boýunça alyp bolýandygy, şol sebäpli hem islendik sandaky aksonometriýany gurup boljakdygy bellenilip geçilipdi. Berlen predmetiñ ýoýma we getirilen koeffisiýentler boýunça gurulan aksonometriki proýeksiýalarynyñ artykmaçlyklary we kemçilikleri barada-da aýdylyp geçilipdi. Ol ýerde aksonometriýanyñ görnüşlerinden esasan gönüburçly izometriýa we gönüburçly dimetriýa seredilipdi. Aksonometriýanyñ beýleki görnüşleriniñ durmiişda köp gabat gelýänleiiniñ birnäçesine TDS—2.317-69 standartda seredilendir.

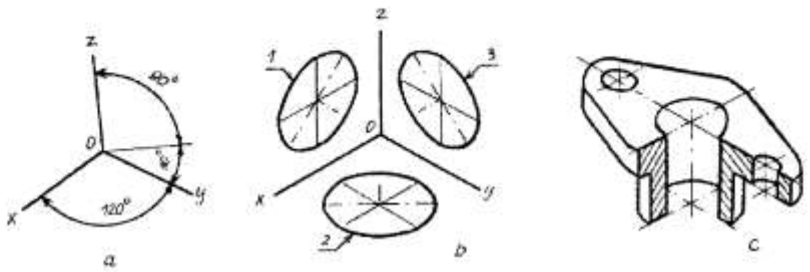
TDS—2.317-69 Aksonometriki proýeksiýalar. Şu standart senagatyñ we gurluşugyñ ähli pudaklaryndaky çyzgylarda ulanylýan aksonometriki proýeksiýalary berkarar edýär.

Şu standart gönüburçly, gytakburçly aksonometriki proýeksiýalara, olardaky şertleşiklere we aksonometriýada ölçegleri goýmaklyga seredýär.

Şu **standarta** laýyklykda, aksonometriýanyñ aşakdaky görnüşlerine seredilendir.

2.Gönüburçly proýeksiýalar.

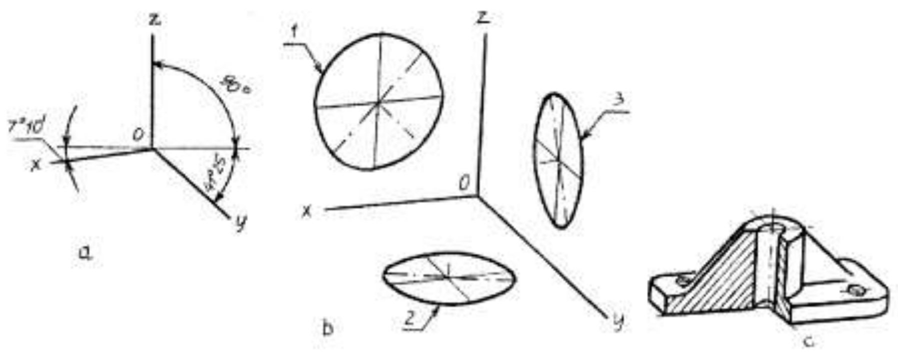
Izometriki proýeksiýalar. 94-nji a suratda izometriýada oklaryñ ýerleşişlei 94-nji b suratda T_1 T_2 we T_3 tekizliklerde we olara parallel bolan tekizlikierde ýerleşen töwerekleriñ, degişlilikde izometriki proýeksiýalary bolan 2, 1 we 3 ellipsleri, ellipsiñ oklarynyñ ugurlary,



94-nji surat

94-nji c suratda bolsa detal (şaý) izometriki proýeksiýada görkezilendir. Ugurlar boýunça ýoýma we getirilen koeffisiýentleri bolsa, çyzgy geometriýasynda jikme-jik görkezilendir.

3. Dimetriki proýeksiýalar. 95-nji a suratda dimetriýada oklaryñ ýerleşişleri, 95-nji b suratda T_1, T_2 we T_3 tekizliklerde we olara parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñ, degişlilikde dimetriki proýeksiýalary bolan 2, 1 we 3 ellipsleri, ellipsiñ oklarynyñ ugurlary, 95-nji c suratda bolsa detal (şaý) dimetriki proýeksiýada görkezilendir. Ugurlar boýunça ýoýma we getirilen koeffisiýentleri, çyzma geometriýada jikme-jik görkezilendir.

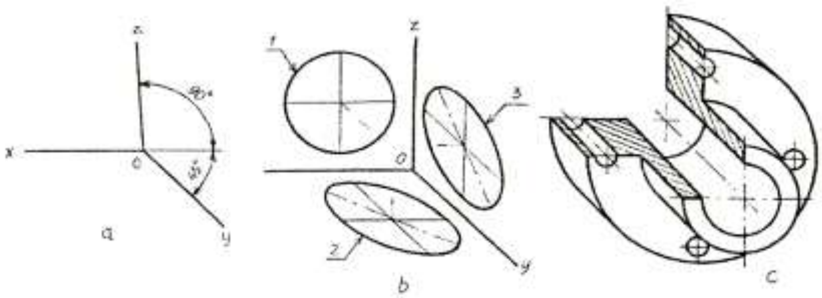


95-nji surat

Bellik. Izometriýanyñ (dimetriýanyñ) oklarynyñ arasyndaky burçlaryñ, oklary boýunça koeffisiýentleriñ, töweregiñ izometriýasy (dimetriýasy) bolan ellipsleriñ oklarynyñ ugurlarynyñ we ölçegleriniñ emele gelişleri çyzgy geometriýasynda doly seredilipdi.

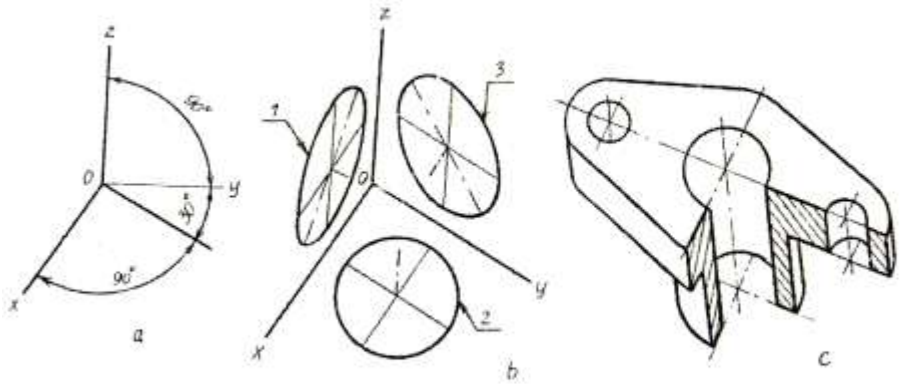
4. Gytakburçly proýeksiýalar.

Ýüzbe-ýüz izometriki proýeksiýalar. Oklaryñ ýagdaýlary (ýerleşişleri) 96-nji suratda görkezilendir. Y oky 30° we 60° burç bilen ýapgytly bolan ýüzbe-ýüz izometriki proýeksiýalaryny ulanmaga-da ýol berilýär. Ýüzbe-ýüz izometriki proýeksiýalar X, Y, Z oklary boýunça ýoýulman ýerine ýetirilýär. T_2 tekizlikde ýa-da oña parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñ aksonometriki proyeksiýalary töwerekler, kese we gapdal (T, we T_3) proýeksiýalar tekizliklerinde we olara parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñki bolsa ellipsler bolar. Ellipsleriñ uly oky 1,3 d, kiçi oky bolsa 0,54 **d** deñdir (96-nji b surat). 96-nji c suratda detalyñ (şaýyñ) ýüzbe-ýüz izometriki proýeksiýasy görkezilendir.



96-njy surat

Kese izomertriki proýeksiýalar. Oklaryñ ýerleşişleri 97-nji a suratda görkezilendir. X we Y oklaryñ arasyndaky burç 90°, Y oky 45" we 60" burç bilen ýapgytly bolan kese izometriki proyeksiýalary ulanmaga-da ýol berilýär. Kese izometriki proyeksiýalary X, Y, Z

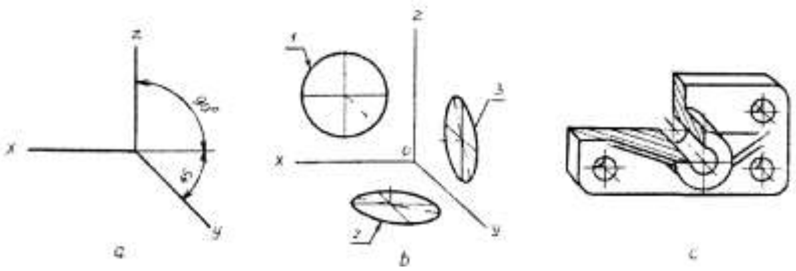


97-nji surat

oklar boýunça ýoýman ýerine ýetirýärler. T, tekizlikde ýa-da oña parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñ aksonometriki proyeksiýalary töwerekler, T, we T_3 tekizliklerde we olara parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñki bolsa ellipsler bolar (97-nji b surat). 1 ellipsiñ uly oky 1,37 d, kiçi oky 0,37 d, 3 ellipsiñ uly oky 1,22 d, kiçi oky 0,71 **d** deñdirler. 97-nji c suratda kese izometriki proýeksiýada şaýyñ proýeksiýasy görkezilendir.

Ýüzbe-ýüz dimetriki proýeksiýa. Oklaryñ ýerleşişleri 98-nji a suratda görkezilendir. Y oky 30° we 60° burç bilen ýapgytly bolan ýüzbe-ýüz dimetriki proýeksiýalaryny ulanmaga-da ýol berilýär. Yoýulma koeffisiýentleri Y oky boýunça 0,5, X we Z oklary boýunça bolsa 1 deñdir.

T_2 tekizlikde ýa-da oña parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñ aksonometriki proyeksiýalary töwerekler, T, we T tekizliklerde ýa-da olara parallel bolan tekizliklerde ýerleşen töwerekleriñki bolsa ellipsdir (98-nji b surat). 2 we 3 ellipsleriñ uly oky 1,07 d, kiçi oky 0,33 **d** deñdir. 98-nji c suratda detalyñ (şaýyñ) ýüzbe-ýüz dimetriki proýeksiýasy görkezilendir.

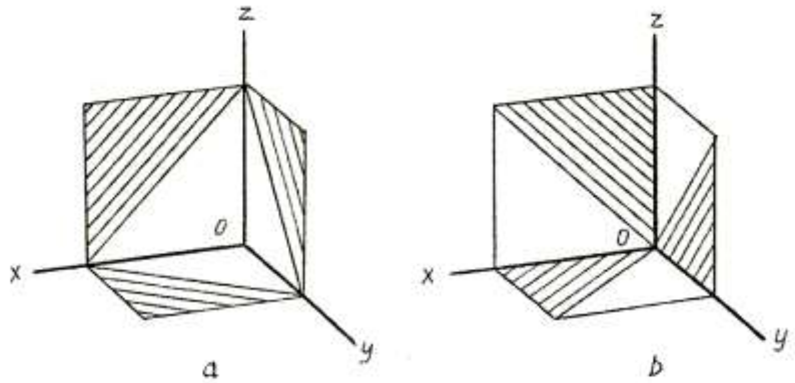


98-nji surat

Aksonometriyadaky şertleşikler we ölçegleri goýma. Aksonometriki proýeksiýalarda kesigiñ ştrih çyzyklaryny degişli koordinatalar tekizliklerinde, taraplary aksonometriki oklara parallel bolan kwadratlaryñ proýeksiýalarynyñ diagonallarynyñ birine parallel edip geçirýärler (99-njy surat).

Ölçegler goýlanda çykaryş çyzyklaryny aksonometriki oklara parallel, ölçeg çyzyklaryny bolsa ölçenýän kesime parallel edip geçirýärler (100-nji surat).

Aksonometriki proýeksiýalarda tigirleriñ we çarhlaryñ simlerini (spisalaryny), berklik gapyrgalaryny we şolara meñzeş elementleri



99-njy surat

ştrihleýärler. Dişli tigirleriñ, reýkalaryñ, çerwiýaklaryñ we şolara meñzeş elementleriñ aksonometriki proýeksiýalary ýerine ýetirilende TDS—2.402-68 boýunça şertleşikleri ulanmaga ýol berilýär. Aksonometriki proýeksiýalarda hyry TDS-—2.311-68 boýunça şekillendirýärler.

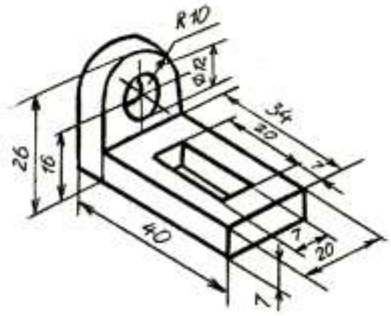
Hyryñ gapdaldan görnüşini 101-nji suratda görkezilişi ýaly doly ýa-da bölekleýin şekillendifmäge ýol berilýär.

Gerek pursatlarda teoretiki taýdan esaslandyrylan başga aksonometriki proýeksiýalary ulanmaga-da ýol berilýär.

Aksonometriýada ýaryklar. Aksonometriýada çyzylan detalyñ (şaýyñ) içki görnüşini (gurluşuny) ýüze çykarmak üçin ýaryklar ulanylýar. Kesiji tekizlikleri koordinatalar (proýeksiýalar) tekizliklerine parallel ýerleşdirýärler. Eger-de predmetiñ simmetriýa tekizlikleri bar bolsa onda olar kesiji tekizlikler deregine ulanylýar. Kesiji tekizlikler koordinatalar (proýeksiýalar) tekizlikleriniñ dine ikisine dälde, üçüsine hem parallel bolup biler.

Eger predmet koordinatalar tekizlikleriniñ ikisiniñ her birine bir sany parallel tekizlik bilen kesilip ýaryk alynsa, onda ol kesiji tekizlikler predmeti dört bölege, eger-de üçüsiniñ her birine bir sany parallel tekizlik bilen kesilse, onda olar predmeti sekiz bölege bölerler. Şu ýagdaýlaryñ birinjisinde aksonometriýada ýerine ýetirilen ýaryga dörtden bir (1/4) ýa-da çärýek ýaryk, ikinjisinde sekizden bir (1/8) ýaryk diýilýär.

Predmetiñ şol tekizlikler bilen kesilip aýrylýan bölegi beýleki böleklere garanda gözegçä in ýakyn (bärki tarapdakysy) bolmalydyr.



100-nji surat

Şeýle ýaryklara kä halatlarda **oburyklar** hem diýilýär, çüñki predmetiñ şol bölegi oburulyp (goparylyp) aýrylana meñzeýändir.

Aksonometriýada şaýlary ýarykly gurmak üçin aşakdaky ýaly yzygiderliligi berjaý etmek has amatly bolýar

1. Berlen şaýy şekillendirmek üçin aksonometriýanyñ amatly görnüşi kesgitlenilýär.

2. Şol görnüşiñ aksonometriki oklary geçirilýär.

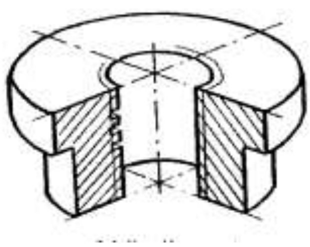
3. Kesiji tekizliklerde ýerleşen kesikleriñ şekilleri çyzylýar.

4. Şaýyñ ýokarky böleginiñ (tekizliginiñ) şekilleri (bölekleriñ sudurlary) çyzylýar.

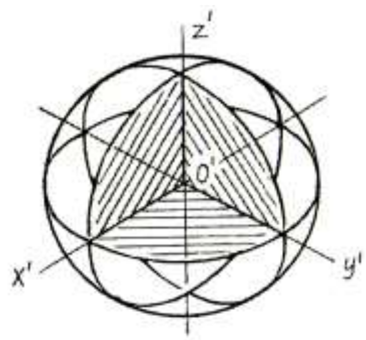
5. Içki elementleriñ görünýänleri çyzylýar.

6. Daşky üstüñ görünýän bölekleri çyzylýar.

7. Görünýän elementlerden täzeden galam bilen geçilýär we ştrihleme ýerine ýetirilýär.

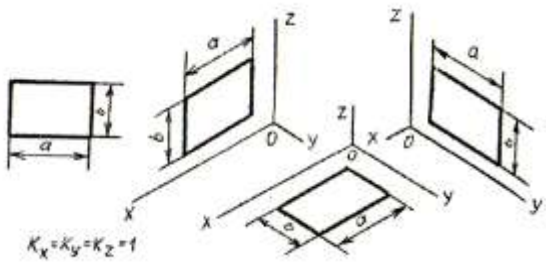


101-nji surat



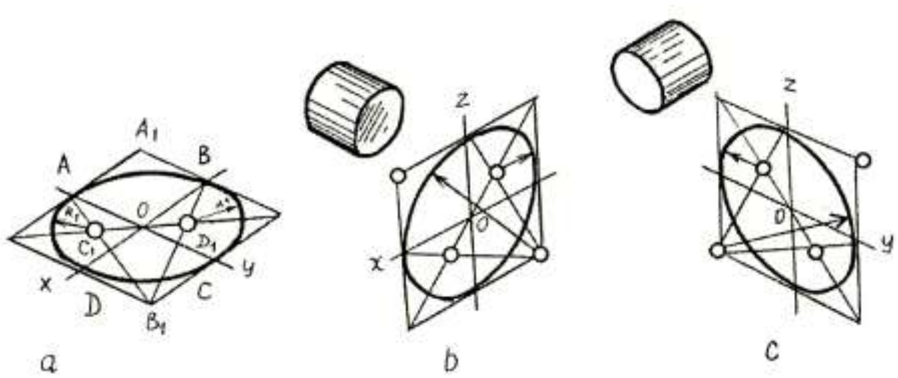
102-nji surat

Şaýlaryñ aksonometriki proýeksiýalary. Durmuşda gabat gelýän her bir şaý göni çyzyklaryñ, köpburçluklaryñ köpgranlyklaryñ we her hili egri üstleriñ birikmelerinden düzülýär. Olaryñ aksonometriki proýeksiýalarynyñ gurluşlarynyñ ýörelgelerine çyzgy geometriýasynda seredilipdi. Aşakda durmuşda has köp gabat gelýän şekilleriñ käbirleriniñ aksonometriýadaky proýeksiýalarynyñ gurluşlaryna seredilýär.



103-nji surat

104-nji a suratda T, tekizlikde ýerleşen kwadratyñ içinde çyzylan toweregiñ gönüburçly izometriýasynyñ proýeksiýasy bolan ellipsiñ deregine ýönekeý owalyñ gurluşy görkezilendir. Onuñ üçin ilki bilen kwadratyñ izometriki proýeksiýasy bolan romby, şekillendirilýän toweregiñ diametrine deñ taraply edip gurýarlar. Gurmak üçin 0 nokatdan X we Y oklary geçirýärler. Ol oklarda 0 nokatdan başlap, şekillendirilýän toweregiñ radiusyna deñ bolan kesimleri alyp goýýarlar. Şeýlelikde emele gelen A, B, C we D nokatlardan oklara parallel göni çyzyklary geçirýärler, şonda romb emele gelýär. Owalyñ uly oky rombyñ uly diagonalynda ýerleşýär. Rombyñ içinden owal çyzmak üçin kütek burçlaryñ depelerinden (A_1 we B_t nokatlardan) duga çyzýarlar. Olaryñ R radiusy kütek burçuñ depesinden (A_1 ýa-da B_1 nokatlardan), degişlilikde C, D ýa-da A, B nokatlara çenli aralyklara deñdir. Soñra B_1 we A, B_1 we B nokatlardan göni çyzyklar geçirýärler. B_1A we B_1B



104-nji surat

göni çyzyklaryñ rombyñ uly diagonaly bilen kesişýän ýerinde C_1 we D_1 nokatlary tapýarlar. Olar kiçi dugalaryñ merkezleri bolar. Olaryñ R_1 radiusy C_1A (ýa-da D_1B) deñdir. Owalyñ uly dugalaryny şol radiusly dugalar bilen çatyrymlaşdyrýarlar (endigan birikdirýärler).

Bellik. Häzir Z oka perpendikulýar bolan tekizlikde ýatan owalyñ gurluşyna garaldy. Y we X oklara perpendikulýar bolan tekizliklerde yatan owallary hem sol tertipde gurýarlar. Yöne olar üçin gurluşy degişlilikde X we Z hem-de Y we Z oklarda geçirýärler (104-nji b we c suratlar).

Tema 6

Proýeksiýalary özgertmegiň usullary. Sapagyň meýilnamasy:

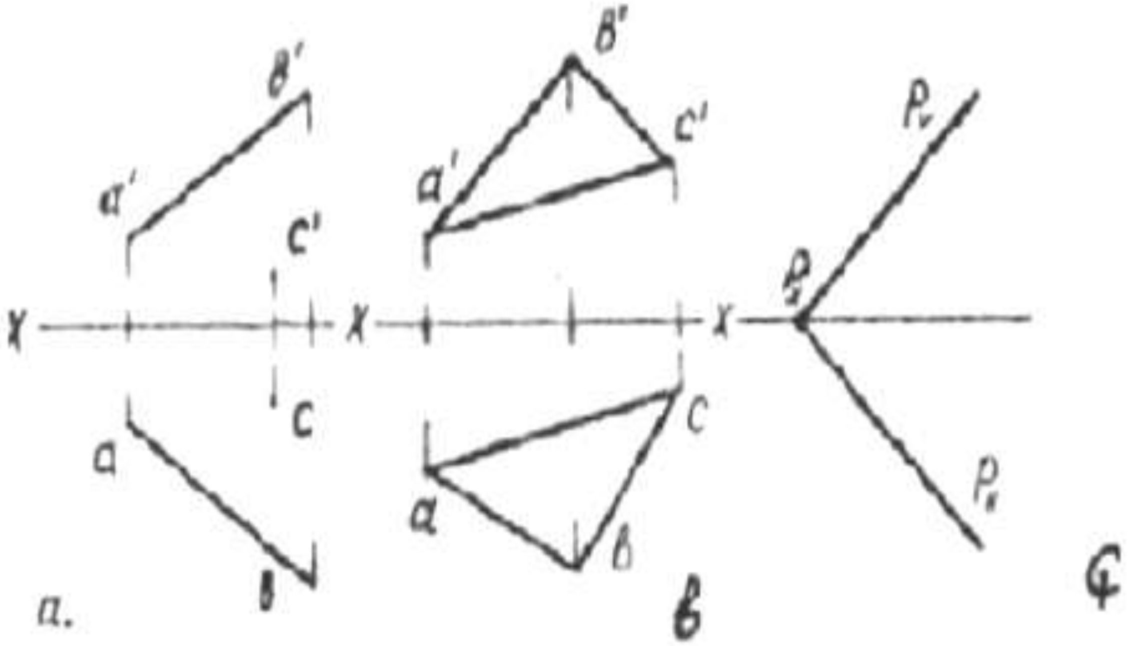
1. **Proýeksiýalary özgertmegiň usullary. Umumy maglumatlar.**
2. **Aýlamak usuly.**
3. **Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak. Nokady aýlamak.**
4. **Göni çyzygy aýlamak.**
5. **Tekizligi aýlamak.**
6. **Tekiz parallel orun üýtgetme usuly.**
7. **Proýeksiýalar tekizligine parallel okuň daşynda aýlamak.**

1.Çyzmaly geometriýanyň çözýän ähli meselelerini, esasan, iki topara bölmek bolar:

Birinji topara girýänlere **p o z i s i o n** meseleler diýilýär. Olaryň çözgüdi geometrik elementleriň özara ýerleşişlerini kesgitlemekden ybaratdyr.

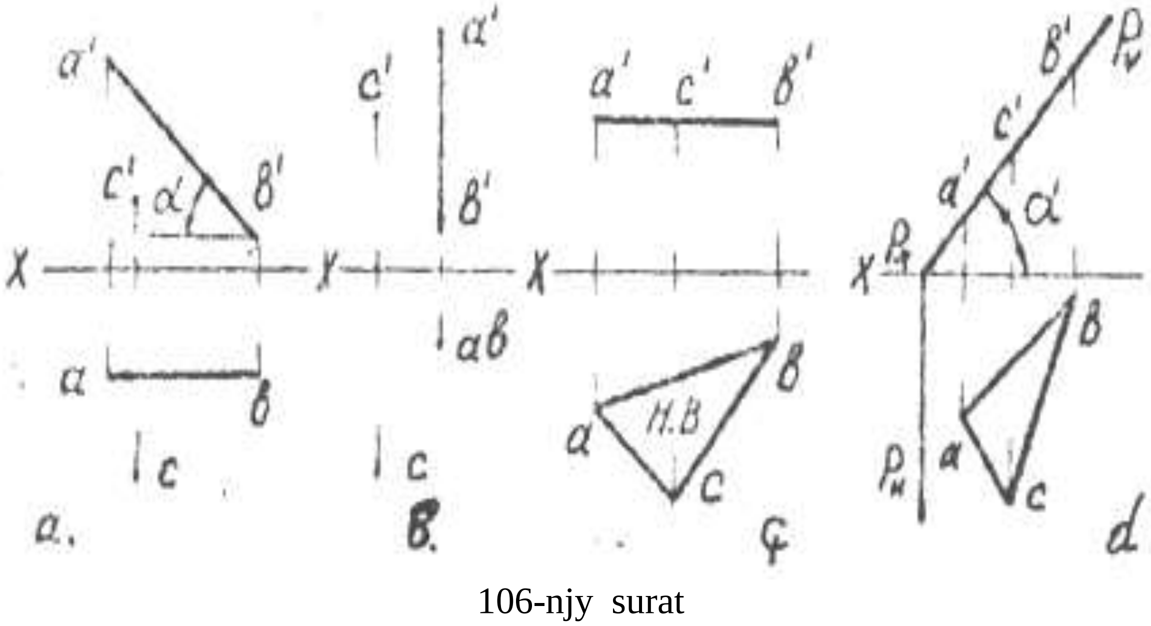
Ikinji topara girýänler **m e t r i k** /ölçeg/ meseleleri bolmak bilen olaryň çözgüdiniň netijesinde ululyk, aralyk /uzaklyk/, burç hem-de meýdan ölçenilýär we alynýar.

Proýeksiýalar tekizliklerine görä **e r k i n - u m u m y ý a g d a ý d a** ýerleşen göni çyzyklaryň, tekizlikleriň we figuralaryň proýeksiýalary anyk /takyk/ meseleler çözmek üçin amatly bolmaýar / 97-nji surat /.



105-nji surat

Göni çyzyklaryň we figuralaryň proýeksiýalar tekizlikleriine görä **hususy** halda ýerleşmegi - berilmegi meseleleriň çözgütlerini ep-esli ýeňilleşdirýär, kä halatlarda bolsa gös-göni çyzgynyň özünden meseläniň jogabyny almaga mümkinçilik berýär /106-njy surat/.



106-njy surat

Mysal üçin, frontal proýeksiýalar tekziligine parallel ***AB*** kesimiň hakyky uzynlygyny kesgitlemek kyn däldir, sebäbi kesimiň frontal proýeksiýasy bize mälim bolşy ýaly, onuň hakyky uzynlygydyr.

/ 106-njy ***a*** surat/ $\boldsymbol{a^1b^1}$ **= AB.**

Umumy haldaky tekizligiň / 105-ji ***b, ç*** surat / gorizontal proýeksiýalar tekziligine ýapgytlyk burçuny ýörite gurluş geçirmezden kesgitläp bolmaz. Eger şol tekizlik hususy haldaky proýektirleýji tekizlik bolaýsa, onda onuň yzlaryndan haýsy hem bolsa biriniň OX oka ýapgytlygy gös-göni şol berlen hususy haldaky proýektirleýji tekizligiň proýeksiýalar tekziliginiň birine bolan gözlenýän ýapgytlyk burçuny bererdi / 106-njy ***b, d*** surat /.

Şeýleiklde, eger geometrik elementleri proýeksiýalar tekizliklerine görä umumy ýagdaýdan **hususy** ýagdaýa geçriseň, **metrik** meseleleri ýönekeý hem-de çalt we takyk çözmek aňsat boljak eken. Muny esasan **iki usul** bilen amala aşyryp bolýar:

I. Giňişlikde proýeksiýalar tekziliklериniň ýagdaýyny üýtgewsiz diýip hasap etmek bolar. Şeýle ýagdaýda geometrik elementiň proýeksiýasyny üýtgetmeklik ol ýa-da beýleki orun üýtgetmegiň netijesinde, adatça ony bir ýa-da birnäçe okuň töwereginde yzygiderli aýlamagyň netijesinde onuň giňişlikdäki ornuny üýtgetmegiň hasabyna amala aşryrylýar.

2. Giňişlikde geometrik elementleriň orny üýtgewsiz diýlip hasap edilýär. Şeýle ýagdaýda bu elementleriň proýeksiýasyny üýtgemeklik proýeksiýalar tekizlikleriniň biriniň, ikisiniň ýa-da birnäçesiniň giňişlikdäki ornuny **y z y g i d e r l i ç a l ş y r m a g y ň - üýtgetmegiň** hasabyna amala aşyrylýar.

Geometrik elementleriň proýeksiýalaryny üýtgetmegiň ýa-da proýeksiýalar tekizlikleriniň ornuny / ýerini / üýtgetmegiň ýokarda görkezilen iki ýoly esasynda çyzmaly geometriýada proýeksiýalary özgertmegiň esasan şu aşakdaky usullaryna garalyp geçilýär:

1. **A ý l a m a k** usulyna.
2. **P r o ý e k s i ý a l a r t e k i z l i k l e r i n i y z y g i d e r l i ç a l ş y r m a k** usulyna.
3. **U t g a ş d y r m a k** u s u l y n a

Proýeksiýalary özgertmegiň ýokardaky görkezilen esasy usullary bilen bilelikde, kä halatlarda g o ş m a ç a g y ş y k b u r ç l y proýektirlemek usuly hem ulanylýar. Munda proýeksiýalar tekizlikleriniň birine geometrik elementler şol tekizlige perpendikulýar bolmadyk ugur boýunça proýektirlenýär. Bu usul şu gollanmada görkezilen däldir.

2. AÝLAMAK USULY

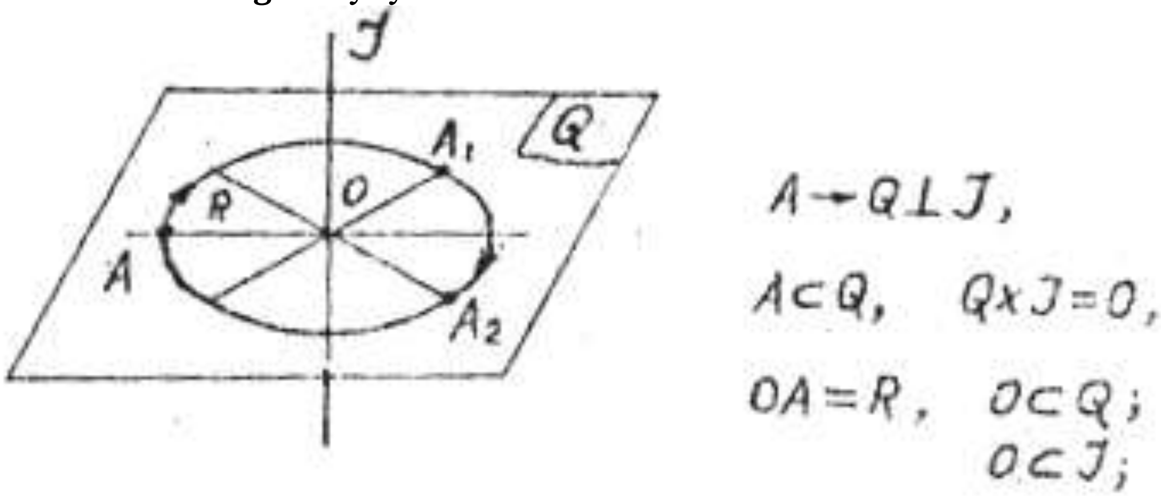
Durmuşda okuň daşynda aýlanýan her bir jisime gabat gelinýär, ýagny welosipediň, awtomobiliň, parawozyň we şuňa meňzeş mehanizmleriň tigirleriniň gorizontal aýlama okuň daşynda, ýa-da başga bir jisimiň wertikal-dik aýlama okuň daşynda aýlanýandygy her birimize durmuşdan bellidir.

Eger şular ýaly geometrik jisimiň üstünde islendik bir nokat alsak, onda şu alnan nokat giňişlikde aýlama okuň daşynda aýlanyp töwerek emele getirýär. Şol emele gelen töweregiň tekizligi aýlama oka perpendikulýardyr.

Aýlamak usuly gozganmaýan tekizliklere görä giňişlikde geometrik predmetiň ýagdaýyny bir ýa-da birnäçe aýlama okuň töwereginde-daşynda islendik burça aýlamagyň netijesinde, bu elementleriň proýeksiýalaryny bize islän ýagdaýymyza çenli üýtgetmäge mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde, aýlamak usulynyň şu aşakdaky esasy ýagdaýlaryny göz öňünde tutmak gerek / 107-nji surat /.

I. Nokatlaryň islendik toplumy /giňişlikdäki **A** nokat / heýsy hem bolsa bir aýlama okuň daşynda aýlananda şol toplumyň her bir nokady / **A** nokat / aýlama ***I*** okuna perpendikulýar ***Q*** tekizlikde öz ornuny üýtgedýär. Şu ***Q*** tekzilige nokadyň **a ý l a m a t e k i z l i g i** diýilýär.



107-nji surat

2. Aýlanýan nokatlaryň islendik toplumynyň her bir nokady aýlanma ***Q*** tekziliginde töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär. Şol töweregiň merkezi ***O*** nokat aýlama ***I*** okunyň aýlanma ***Q*** tekizligi bilen kesişýän ýerindedir. Bu alnan ***O*** nokada aýlama nokadyň **m e r k e z i** diýilýär. Şol töweregiň ***R*** radiusy bolsa ***A*** nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýardyr. Oňa **a ý l a m a r a d i u s y** diýilýär.

$$\mathbf{OA = R = OA_1 = OA_2}$$

3. Aýlama okunyň üstünde ýatan hemme nokatlar giňişlikde aýlanma wagtynda öz orunlaryny üýtgetmeýärler.

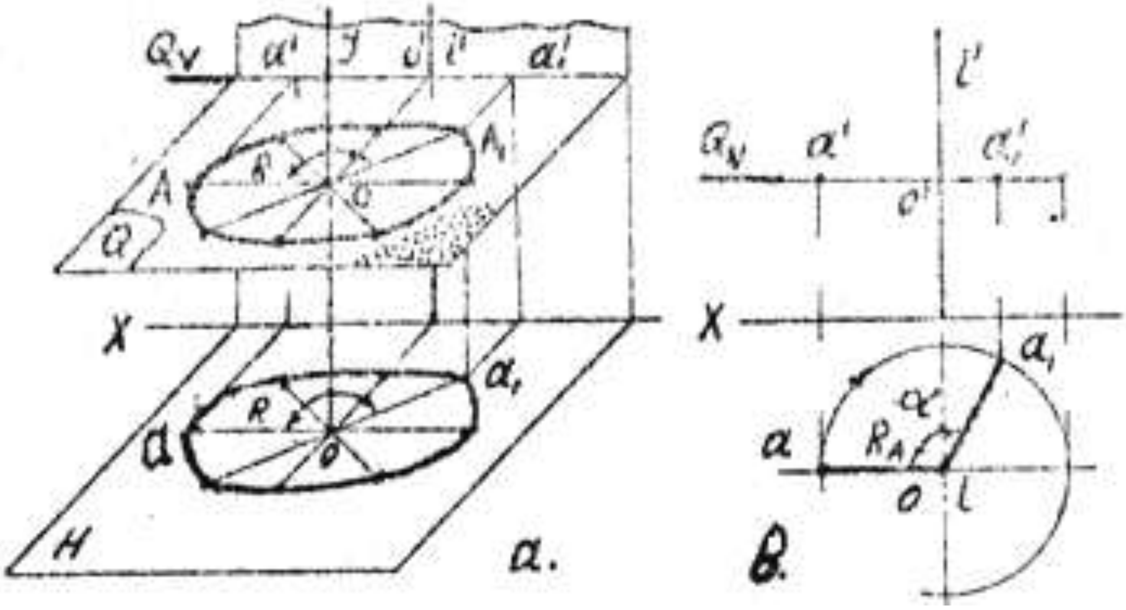
Çyzmaly geometriýada meseleler işlenende aýlama usulynyň şu aşakdaky görnüşleri praktikada – durmuşda köp gabat gelýär:

1. Proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak.
2. Anyklanmadyk okuň daşynda aýlamak – tekiz parallel orun üýtgetmek usuly.
3. Proýeksiýalar tekizligine parallel okuň daşynda aýlamak – esasy çyzyklaryň /gorizontalyň ýa-da frontalyň/, ýagny dereje çyzyklaryň daşynda aýlamak.
4. Proýeksiýalar tekziliginiň üstünde ýatan okuň, ýagny **tekizligiň yzlarynyň daşynda aýlamak – utgaşdyrmak.**
5. Proýeksiýalar tekizligine garanyňda **erkin ýerleşen – okuň daşynda** aýlamak. Bu aýlamak usuly şu gollanmada görkezilen däldir. Umumy ýagdaýdaky okuň daşynda aýlamak usuly birnäçe hususy meseleleri işlemek üçin, esasanam, nazary mehanikada hem-de mehanizmleriň we maşynlaryň teoriýasy kursunda giňden ulanylýar.

3. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINE PERPENDIKULÝAR OKUŇ DAŞYNDA AÝLAMAK

N O K A D Y A Ý L A M A K

1-nji mesele. ***A*** nokady gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda α burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly. /108-nji surat/.



108-nji surat

Bize belli bolşy ýaly, nokat aýlandyrylýan wagtynda aýlama okuna perpendikulýar ***Q*** tekizligiň üstünde ýatan töwerek boýunça öz ornuny üýtgedýär, şol töweregiň radiusy aýlama radiusyna deňdir.

Nokadyň aýlama radiusyny tapmaklyk aýlandyrylýan nokatdan aýlama okuna inderilen perpendikulýaryň kömegi bilen amala aşyrylýar.

Aýlama okunyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulaýrdygyny göz öňünde tutsak, onda ***A*** nokat aýlanýan wagtynda ***H*** tekizligine parallel ***Q*** tekziligiň üstündäki töweregiň dugasy boýunça öz ornuny yzygiderli üýtgedýär, şol töweregiň radiusy hem ***H*** tekizligine paralleldir. Şeýlelikde, aýlanma radiusy ***H*** tekizligine üýtgedilmezden hakyky ululygynda proýektirlenýär, ýagny epýurda biz ***A*** nokadyň gorizontal proýeksiýasyny aýlama okuň gorizontal proýeksiýasy bilen birleşdirip, $\boldsymbol{R_A}$ aýlama radiusyny taparys.

A nokadyň ***I*** aýlama okuň daşynda aýlanandaky emele getiren töweregi ***V*** şekiller tekizligine şol töweregiň diametrine deň bolan göni çyzyk görnüşinde proýektirlener we ***OX*** oka parallel ýa-da aýlanma okuň $\boldsymbol{L^1}$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolar. ***W*** şekiller tekizligine şol töwerek ***OX*** oka parallel göni çyzyk bolup proýektirlener.

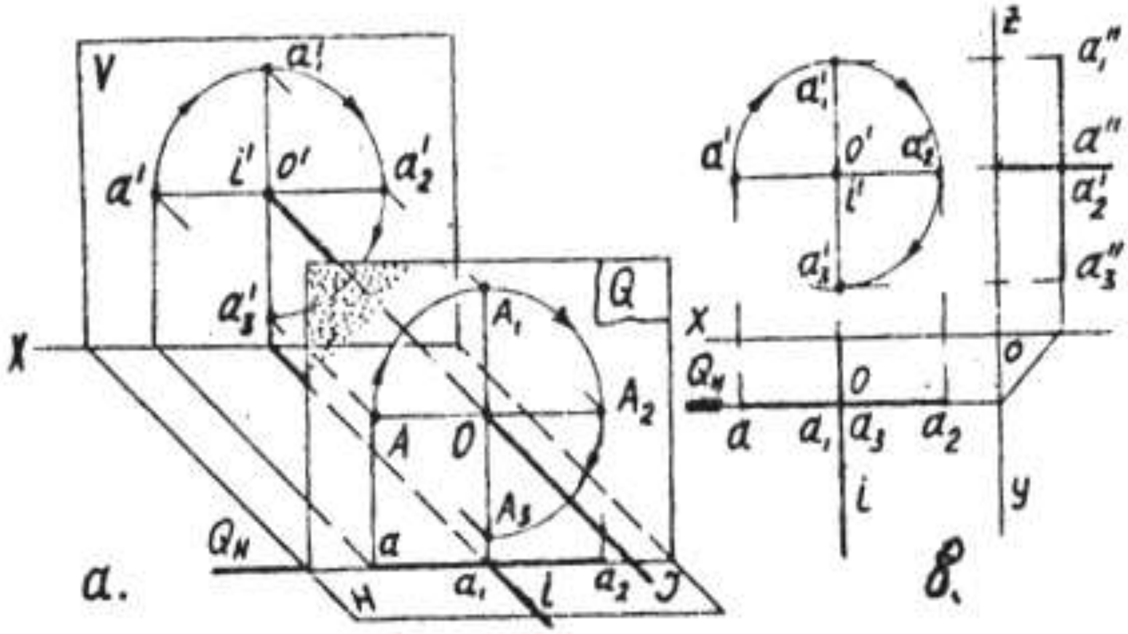
Epýurda ***A*** nokady gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda ***a*** burça aýlamak üçin:

1.Berlen ***a*** burça deň bolan we görkezilen ugur boýunça nokatdan /aýlama okunyň gorizontal proýeksiýasyndan/ radiusy ***La*** = $\boldsymbol{R_A}$ deň bolan $\boldsymbol{aa_1}$ duga geçirýäris.

2. Berlen ***A*** nokadyň $\boldsymbol{a^1}$ frontal proýeksiýasynyň üstünden ***OX*** proýeksiýalar okuna parallel geçirýäris, ýagny nokadyň frontal proýeksiýasynyň hereket edip geçmeli ýoluny /ugruny/ kesgitleýäris.

3. Alnan täze a_1 gorizontal proýeksiýasynyň üstünden ***OX*** oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk geçirip, a^1 frontal proýeksiýanyň hereket ediş ugry bilen kesişýän täze ýagdaýdaky a_1^1 nokady alarys.

2-nji mesele. **A** nokady frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** aýlama okuň daşynda a=180^0 burça sagadyň aýlanýan ugry boýunça aýlamaly /109-njy surat/.



109-njy surat

Bu hili ýagdaýda:

1. **A** nokadyň aýlanandaky emele getiren töweregi ***V*** tekizligine üýtgedilmezden proýektirlenýär.
2. **H** tekizlige töwerek ***OX*** oka parallel göni çyzyk bolup proýektirlenýär.
3. **W** tekizlige töwerek ***OZ*** oka parallel göni çyzyk görnüşinde proýektirlenýär.

Diýmek, nokat proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, bu tekizlikde nokadyň proýeksiýasy aýlanma radiusynyň töwereginiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgedýär, beýleki tekizlikde bolsa nokadyň proýeksiýasy proýeksiýalar okuna parallel göni çyzyk boýunça ýagny aýlanma okuna perpendikulýar çyzyk boýunça öz ornuny üýtgedýär.

Nokady proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda aýlamak gorizontal /frontal/ proýektirleýji göni çyzygyň daşynda aýlamaklyk diýmekdir.

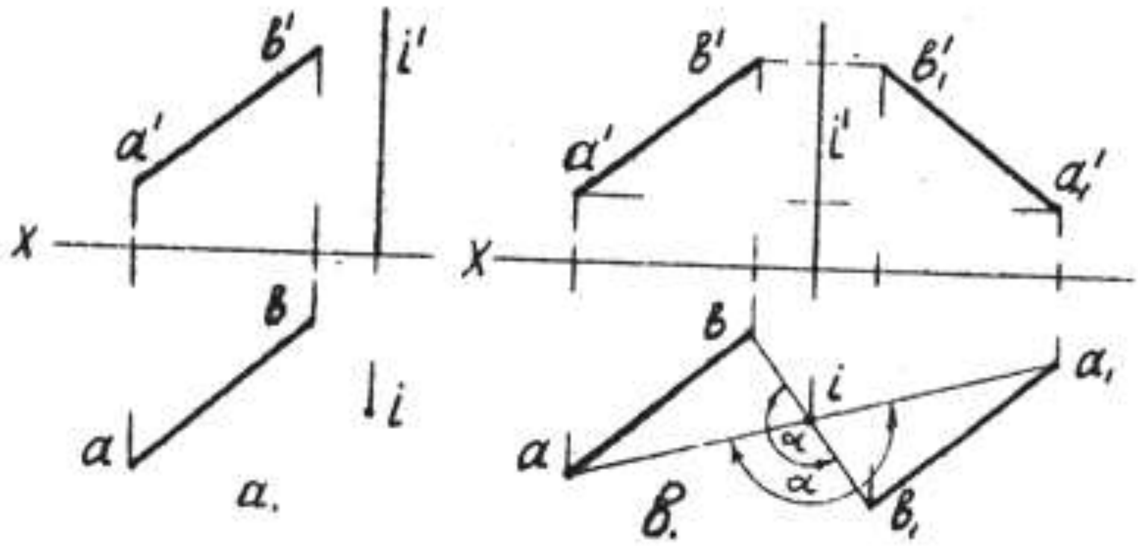
Oksuz proýektirlenýän wagtda epýurda proýeksiýalar okuny görkezmegiň geregi – zerurlygy ýok we aýlama okuny hem mydama görkezip durmak hökman däldir.

4. GÖNI ÇYZYGY AÝLAMAK

Giňişlikde göni çyzygy berlen okuň daşynda käbir ***a*** burça aýlamak üçin onuň hemme nokatlaryny ýa-da islendik iki nokadyny şol burça aýlamak ýeterlikdir.

I-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky ***AB*** göni çyzygy gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda sagadyň aýlanýan ugrunyň tersine

a=180^0 burça aýlamaly. **H** tekzilige ýokardan seredilýär diýip düşünmeli /110-njy surat/.



110-njy surat

AB göni çyzygyň gorizontal ***a*** we ***b*** nokatlaryny degişli radiusly dugalar boýunça şol bir ***a*** burça aýlap, nokatlaryň täze a_1 we b_1 gorizontal proýeksiýasynyň ýagdaýlaryny taparys.

Göni çyzygyň frontal a^1 we b^1 proýeksiýalary bolsa ***OX*** okuna parallel ýa-da aýlama ***I*** okunyň frontal proýeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgederler. Nokadyň täze alnan gorizontal a_1 we b_1 proýeksiýalaryndan birleşdiriji çyzyklar geçirip, nokadyň frontal a_1^1 we b_1^1 proýeksiýalaryny alarys.

Nokatlaryň bir atly proýeksiýalaryny birleşdirip, berlen ***AB*** göni çyzygyň täze ýagdaýyny A_1B_1 göni çyzygyň a_1 b_1 gorizontal we a_1^1 b_1^1 frontal proýeksiýalaryny alarys.

Ýokardaky çyzgydan görnüşi ýaly,

□□iab = □ia_1b_1 (ýagny) $ia_1=ia$, $ib_1=ib$,□□□□ a_1ib_1=□aib).

Üçburçluklaryň deňliginden: $a_1b_1 = ab$.

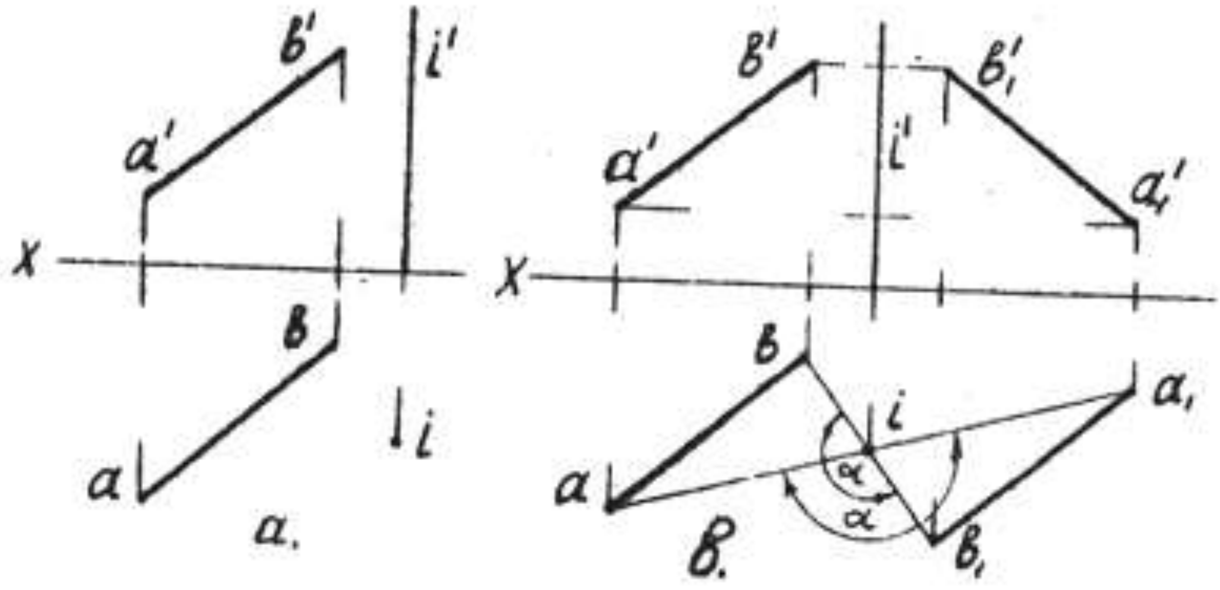
Diýmek, göni çyzyk proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlananda, göni çyzygyň islendik kesiminiň şol proýeksiýalar tekizligine proýeksiýanyň uzynlygy üýtgemeýär, ýagny göni çyzygyň şol proýeksiýalar tekizligine ýapgyt burçy üýtgewsiz galýar. Eger şu aýlamak usuly bilen **AB** göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyny frontal proýeksiýalar tekizligine parallel ýagdaýa çenli aýlap frontal proýeksiýasyny tapsak, onda iki meseläni çözeris. /111-nji surat/.

Birnjiden-ä, **AB** göni çyzygyň täze a_1^1 b^1 frontal proýeksiýasy hakyky uzynlygy bolar. Ýagny, $\mathbf{a^1{}_1b^1 = AB}$.

Ikinjiden hem, **AB** göni çyzygyň täze $\mathbf{a^1{}_1b^1}$ frontal proýeksiýasy bilen **OX** okuň arasyndaky emele gelen burç **AB** göni çyzygyň gorizotnal proýeksiýalar tekizligine **ýapgytlyk burçy** bolardy. Bu ýagdaýlary gelejekde göz öňünde tutarys.

2-nji mesele. **AB** göni çyzyk we aýlama ***I*** oky berlen. **AB** göni çyzygy sagadyň aýlanýan ugruna ***a*=120^0** burça aýlamak talap edilýär /103-nji surat/:

Aşakdaky suratdan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy ***a*** burça aýlap, täze **A_1B_1** ýagdaýyny tapmak üçin şol göni çyzygyň iki nokadyny aýlaman, b i r n o k a d y n y aýlamak hem ýeterlikdir.



111-nji surat

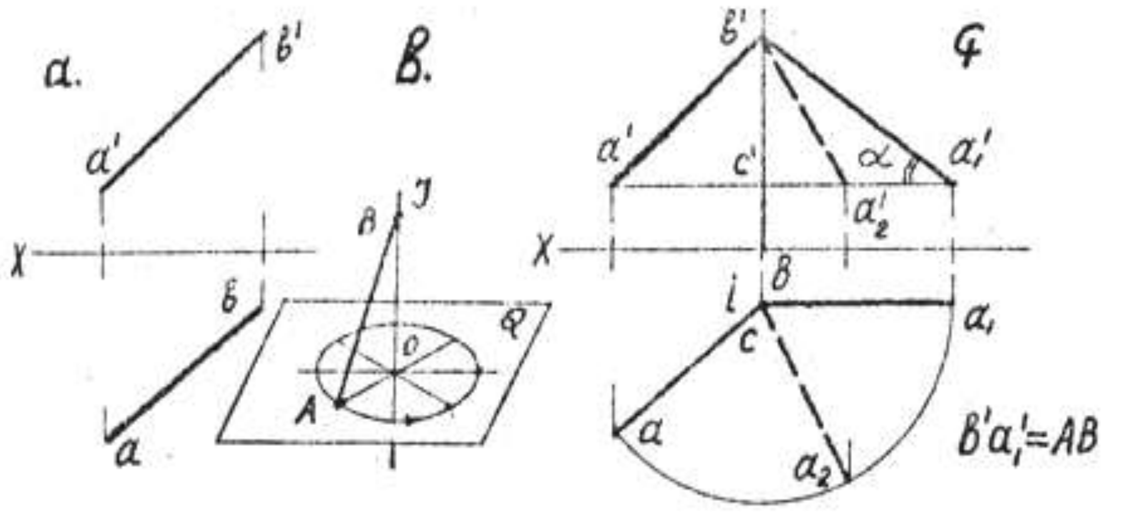
Aýlanma merkezi hökmünde **0** nokatdan **AB** göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna ***oc*** perpendikulýar inderýäris we alnan ***c*** nokady ***a*** burça aýlaýarys, şonda göni çyzygyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasy hem şol burça aýlanar we ol täze a_1b_1 ýagdaýy eýelär. /Ýagny, oc_1 □a_1b_1, $c_1a_1=ca$, $c_1b_1=cb$/.

$a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasynyň tapylyş usuly öňden bize belli bolşy ýaly, çyzgydan düşnüklidir.

3-nji mesele. AB göni çyzygyň bir nokadyny aýlap, şol çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli / 112-nji surat/.

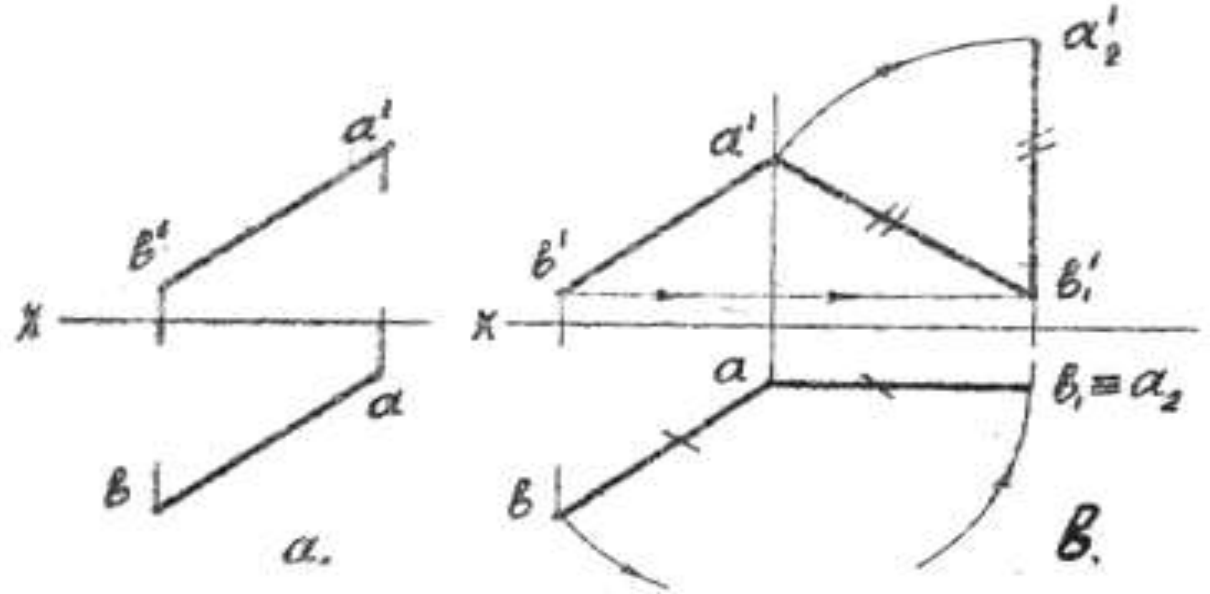
Eger aýlama oky göni çyzygyň haýsy hem bolsa bir ujundaky nokadynyň üstünden geçýän bolsa, onda aýlamaklyk has-da ýönekeýleşýär - ýeňilleşýär. Aýlama wagtynda şol nokat giňişlikde öz ornuny üýtgetmeýär, sebäbi bu nokat aýlama okda ýatýanlygy üçin. Şeýlelikde, göni çyzygy haýsy hem bolsa bir burça aýlamak üçin onuň diňe bir nokadyny şol burça aýlamak ýeterlikdir. Aýlanan **A** nokat hem-de aýlanma okuň üstünde ýatan **B** nokat **AB** göni çyzygyň täze **A_1B (ba_1, $b^1a^1_1$)** ýagdaýyny doly kesgitleýär. Ýokardaky meseläniň gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Täze **$b^1a^1_1$ = AB, BA_1 II V**. Umumy ýagdaýda berlen **AB** göni çyzyk, frontal şekiller tekizligine parallel ýagdaýy eýeländir. Şonuň üçin hem goýlan meseläň ikisi hem çözülendir.



112-nji surat

4-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan okuň daşynda yzygiderli aýlamak bilen ony **H** gorizontal şekiller tekizligine perpendikulýar bolan ýagdaýyna getirmeli /113-nji surat/.



113-nji surat

Çözülişi: Şeýle ýagdaýa getirmek üçin diňe bir okuň daşynda aýlamaklyk ýeterlik däldir, şonuň üçin ilki bilen **AB** göni çyzygy **A** nokadyň üstünden geçýän we **H** tekizlige perpendikulýar bolan aýlama okunyň daşynda aýlaýarys. Birinji aýlamadan soň göni çyzyk frontal proýeksiýalar tekizligine parallel bolan täze ýagdaýy eýelär. Şonuň üçin onuň gorizontal proýeksiýasy ab_1□$b_1^1 b_1$ bolar, frontal proýeksiýasy bolsa hakyky uzynlygynda proýektirlener, ýagny AB_1 **//V,** ab_1 **// ox,** onda $a^1 b_1^1$ **= AB**.

Ikinji gezek aýlamak üçin **B** nokadyň üstünden geçýän ***V*** tekizlige perpendikulýar bolan aýlanma okuny alýarys. $a^1 b_1^1$ frontal proýeksiýany wertikal ýagdaýa çenli aýlaýarys. Şeýle aýlamaklygyň netijesinde göni çyzyk **H** tekizlige perpendikulýar ýagdaýy **/**A_2B_1□**H/** eýelär, şonuň üçin göni çyzygyň gorizontal proýeksiýasy a_2b_1 nokat bolup proýektirlener. Bu alynan $A_2B_1 \perp H$ – gorizontal proýektirleýji göni çyzyk bolar. Bu çyzygyň gorizontal şekili **a_2b_1** – nokatdyr, emma frontal şekili hakyky uzynlygyna deňdir. **$a_2^1b_1^1 = AB$**

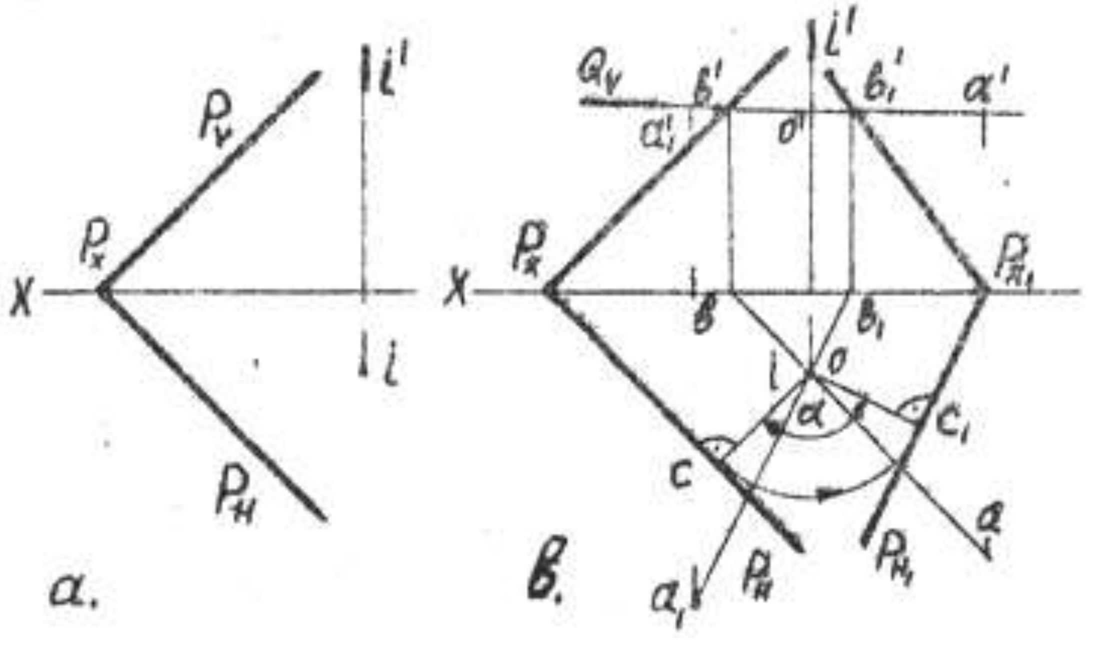
5. TEKIZLIGI AÝLAMAK

Tekizligi proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar okuň daşynda käbir burça aýlamak üçin tekizligi kesgitleýän elementleri (bir göniniň üstünde ýatmaýan üç nokady) şol burça aýlamak ýeterlikdir.

I-nji mesele. Umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen ***P*** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda ***a*** burça aýlamaly /114-nji surat/.

P tekizlige degişli we ***I*** aýlama okuň üstünden geçýän ***AB*** gorizontal geçireliň. Aýlanma okuň gorizontal proýeksiýasyndan / üstünde alnan ***0*** nokatdan/ P_H yza ***oc*** perpendikulýary indereleriň we **c** nokady hem-de şonuň bilen birlikde P_H yzy ***a*** burça aýlalyň**.** P_H □□***oc*** bolany üçin **c_1** nokadyň üstünden P_{H1}□**oc_1** geçirýäris. **P_{H1}** aýlandyrylan P tekizligiň täze gorizontal yzy bolar, yzlaryň täze birleşme nokady bolsa **P_{X1}** bolar.

Frontal P_{V1} yzyny tapmak üçin **P_{X1}**-den başga-da, ikinji bir nokady tapmak gerek. Munuň üçin **AB** gorizontalyň aýlanan täze **A_1B_1** ýagdaýyny tapýarys. Aýlamadan öň hem, soň hem gorizontalyň gorizontal proýeksiýasy gorizontal yza paralleldigi üçin onuň a_1b_1 täze proýeksiýasy tekizligiň täze **P_{H1}** gorizontal yzyna parallel bolar. Gorizontalyň frontal proýeksiýasynyň ähli nokatlary **OX** oka parallel bolan a^1b^1 göni çyzyk boýunça öz orunlaryny üýtgetmelidirler.



114-nji surat

Şeýlelikde, $a_1^1b_1^1$ gorizontalyň a^1b^1 bilen utgaşýan täze frontal proýeksiýasy bolar, ýagny $a_1^1b_1^1 = a^1b^1$

Täze **P_{V1}** frontal yz yzlaryň birleşme nokady bolan **P_{X1}** nokadyň we gorizontalyň frontal yzynyň / b_1^1/ frontal proýeksiýasynyň üstünden geçmelidir.

2-nji mesele. Yzlary bilen berlen umumy ýagdaýdaky **P** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar ***I*** okuň daşynda yzly-yzyna aýlap: (115-nji a surat)

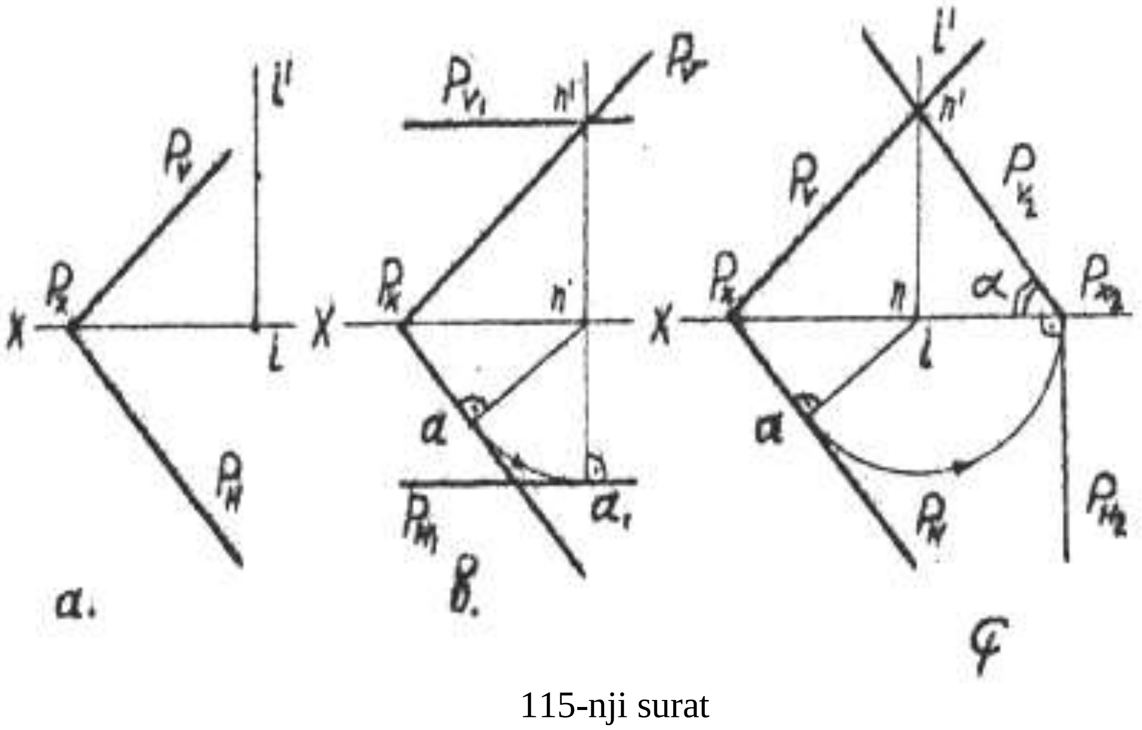
I. Profil proýektirleýji tekizlik, (115-nji b surat)

2.Frontal proýektirleýji tekizlik bolýança aýlamaly. (115-nji ç surat)

115-nji **b,ç** suratda frontal proýeksiýalar tekizliginde ýerleşen, gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ***I*** okuň daşynda aýlanandan soň **P** tekizligiň iki sany täze ýagdaýy görkezilendir. **P** tekizlik aýlanmazyndan öň umumy haldaky tekizlikdi.

Birinji aýlanmadan soň **P** tekizlik $\mathbf{P_1}$ tekizlige öwrüldi we profil proýektirleýji tekizlik boldy $\mathbf{P_{H1}}$ **II OX,** $\mathbf{P_{V1}}$***//OX***. Aýlamaklygy dowam etdirsek $\mathbf{P_1}$ tekizlik frontal-proýektirleýji $\mathbf{P_2}$ tekizlige öwrüler. $\mathbf{P_{H2}}$**□OX.** Aýlanma okuna perpendikulýar bolan gorizontal proýeksiýalar tekizligine berlen **P** tekizligiň ýapgyt α burçy üýtgemän galar.

P tekizligi $\mathbf{P_2}$ /frontal-proýektirleýji/ tekizlige öwrüp, **P** tekizligiň **H** tekizligine ýapgytlyk bolan ***a*** burçuny kesgitleýäris. Ýokardaky görkezilen **P** tekizligiň täze iki ýagdaýynda-da tekizligiň frontal yzlary aýlanma wagtynda üýtgemeýän ***N*** nokadyň üstünden geçerler.



115-nji surat

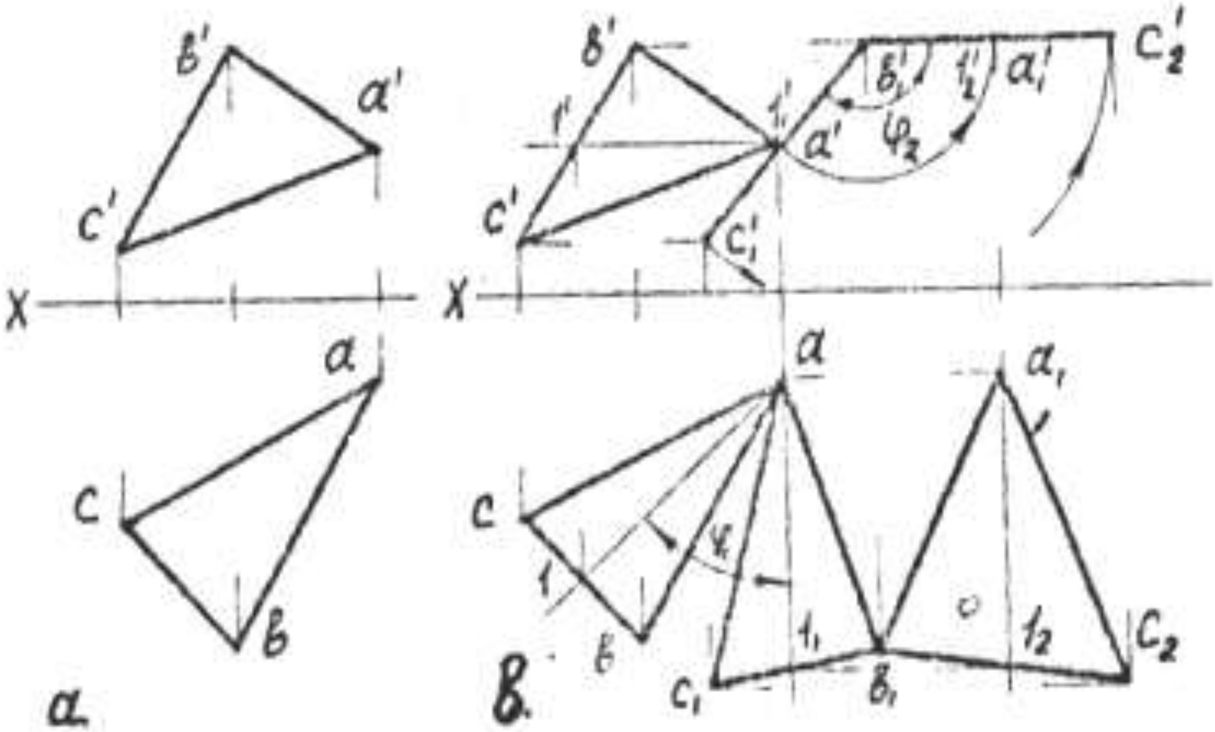
Şonuň ýaly-da **P** tekizligiň ***V*** tekzilige ýapgyt burçuny kesgitlemek üçin berlen tekizligi frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan okuň daşynda aýlamak gerek. Bu meseläni talyplaryň özlerine işlemegi maslahat berýäris.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýda berlen **ABC** üçburçlygyň hakyky ululygyny - meýdanyny tapmaly / 116-njy surat /.

Bu mesele proýeksiýalar tekizliklerine perpendikulýar bolan iki okuň daşynda yzly-yzyna aýlamak bilen çözülýär. Aýlama oklar çyzgyda görkezilen däldir.

Üçburçlygy ***V*** proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar ýagdaýyna getirmek üçin **ABC** üçburçlygyň tekizligini H tekizligine perpendikulýar we **A** depeden geçýän aýlama ***I*** okuň daşynda ilkinji gezek φ_1 burça aýlalyň. Şonda **A** nokat aýlama okuň üstünde ýatanlygy sebäpli giňişlikde öz ornuny üýtgetmez. Diýmek **B** we **C** iki depäni şol bir φ_1 burça aýlamak ýeterlikdir.

Berlen **ABC** üçburçlyk ***I*** aýlanma okunyň daşynda aýlananda, onuň gorizontal proýeksiýasy öz ululygyny üýtgetmän, diňe ornuny üýtgedýär, sebäbi, üçburçlygyň tekizliginiň H tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçy üýtgemän galýar.



116-njy surat

Eger bu tekizligiň üstünde beýleki tekizlige perpendikulýar bolan göni çyzyk bar bolsa onda ol tekizlikleriň özara perpendikulýar bolýandyklaryny biz geometriýadan bilýäris. Şonuň üçin üçburçlygyň tekizliginde A***1*** gorizontaly guralyň we ony ***V*** tekizligine perpendikulýar bolan **A*1*$_1$**, ýagdaýyna çenli aýlalyň, şonda onuň gorizontal ***a1$_1$*,** proýeksiýasy **OX** okuna perpendikulýar bolýar.

Üçburçlygyň aýlanan ýagdaýda gorizontal proýeksiýasynyň öz ululygyny üýtgetmänligi üçin ony gorizontalyň ***a1***, proýeksiýasynyň üstünde gurmak bolar / sirkulyň kömegi bilen /.

Aýlama wagtynda nokadyň b^1 we c^1 frontal proýeksiýalary **OX** okuna parallel bolan göni çyzyk boýunça orunlaryny üýtgederler we täze ýagdaýdaky b_1 we c_1 proýeksiaýalardan geçirlen baglanyşyk çyzyklary bilen kesişýän nokatlarda ýatarlar.

Birinji gezek gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň berlen umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlygyň täze ýagdaýyny - **frontal proýektirleýji AB$_1$C$_1$** bolan üçburçlyk alyndy we bu üçburçlygyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçy tapyldy.

Ikinji gezek üçburçlygyň **B** depesinde geçýän frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolan ikinji bir okuň daşynda aýlap, **A B_1C_1** üçburçlugy **H** tekizligine parallel **$A_1B_1C_2$** ýagdaýyna getirýäris. Şol ýagdaýynda üçburçlygyň $a_1^1b_1^1c_2^1$ frontal proýeksiýasy **OX** okuna parallel bolar. Üçburçlygyň $a_1b_1c_2$ gorizontal proýeksiýasy **ABC** üçburçlygyň hakyky ululygy bolar. $\Delta a_1b_1c_2 = \Delta ABC = A_1B_1C_2$

Aýlama oklary soňabaka çyzgyda köplenç halatlarda görkezilmeýär.

6. TEKIZ – PARALLEL ORUN ÜÝTGETME USULY

/Aýlama oky görkezmezden aýlamak/

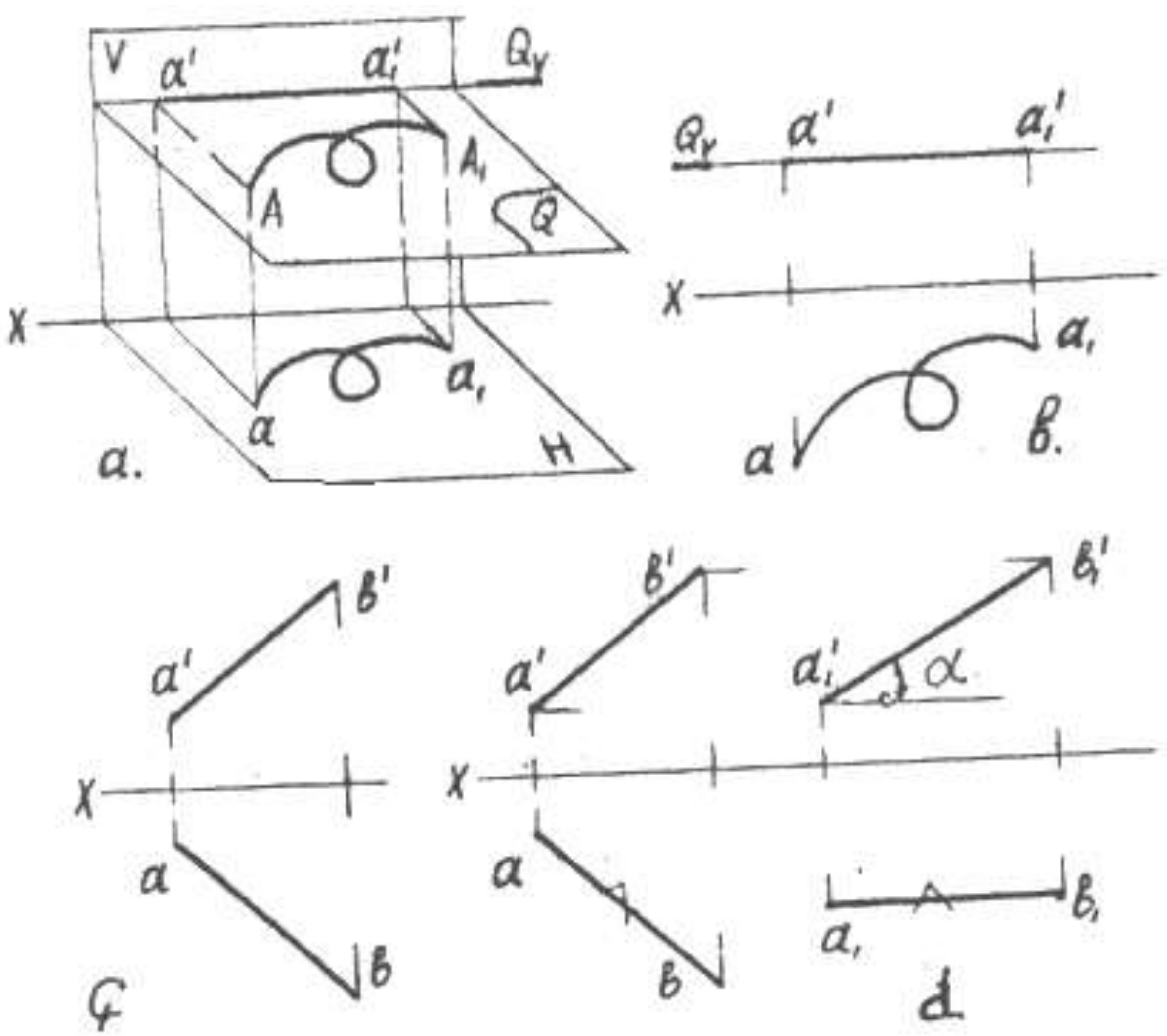
Tekiz-parallel orun üýtgetmeklik usulynda giňişlikde öz orunlaryny üýtgedýän **geometrik figuralaryň - obýektiň** ähli nokatlary proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolan tekizliklerde hereket edýärler. Şeýlelikde, bu orun üýtgetmegiň netijesinde **obýektiň** nokatlaryndan şol tekizlige çenli bolan aralyklar elmydama üýtgemeýärler. Hakykatdan-da figuranyň ornuny üýtgetmek üçin onuň haýsy hem bolsa bir göni çyzykly elementiniň ornuny üýtgetmek ýeterlikdir. Soňra orun üýtgedilen elementi boýunça figuranyň beýleki elementleriniň täze ornuny kesgitlemek bolar.

Göni çyzygyň kesiminiň ornuny islendik bir ýagdaýdan başga bir ýagdaýa, ýagny **proýeksiýalar tekizligine tekiz-parallel orun üýtgetmek diýmek, anyklanmadyk okuň daşynda aýlamak diýmekdir.**

Proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyk tekiz-parallel orun üýtgetmekligiň hususy haly bolup biler.

Şu ýagdaýda proýeksiýalar tekziligine perpendikulýar okuň daşynda aýlamaklyga mahsus bolan usul peýdalanylýar, has takygyny aýdanyňda, bu ýerde gönüburçly proýektirlemekde ölçegleriň üýtgemeýänligi we proýeksiýalaryň beýleki proýeksiýalar tekizliginde proýeksiýlar okuna parallel göni çyzyklar / şol bir wagtyň özünde olar aýlama tekizlikleriniň yzlarydyr / boýunça öz orunlaryny üýtgedýändikleri göz öňünde tutulýar

Eger nokady we göni çyzygyň her bir nokadyny ýa-da tekiz figurany proýeksiýalar tekizligine parallel bolan tekizligiň üstünde ornuny üýtgetsek ýa-da proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar okuň daşynda aýlasak, onda okuň şol tekizligiň üstündäki proýeksiýasy görnüşi boýunça-da, ululygy boýunça-da üýtemeýär, diňe proýeksiýalar okuna görä ýagdaýy üýtgeýär. Ikinji proýeksiýasy **OX** oka parallel göni çyzyk boýunça ornuny üýtgedýär.



117-nji surat

.

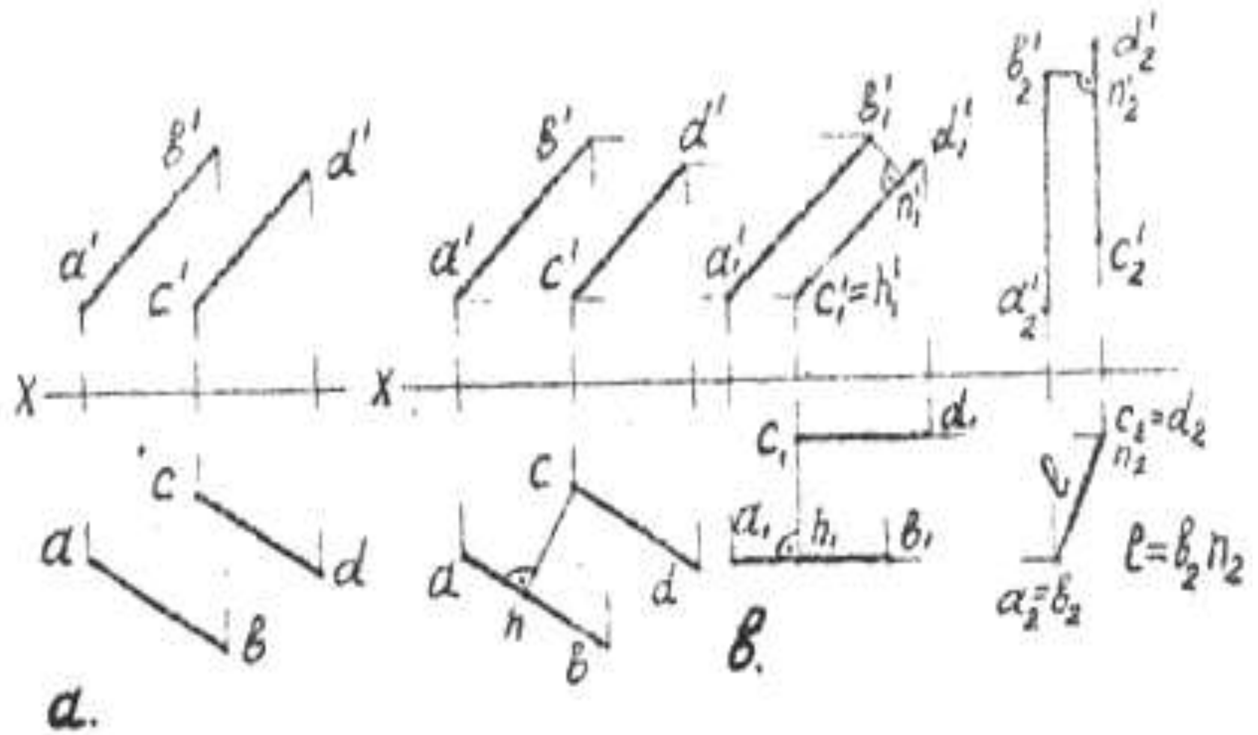
117-nji ç, d suratda tekiz parallel orun üýtgetmeklik bilen berlen **AB** göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk ***a*** burçunyň kesgitlenişi görkezilendir. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir.

Aýlama okuna üns bermezden we aýlama radiusynyň ululygyny kesgitlemezden, aýlama usulyny ulanmak bolar. Figuranyň proýeksiýasyny üýtgetmezden, ony proýeksiýalar okuna görä gerekli ýagdaýyna öwürmek, soňra bolsa şu boýunça beýleki proýeksiýany gurmak ýeterlikdir.

Ýokardaky görkezilen / tekiz parallel orun üýtgetme/ usulyny ulanyp, birnäçe meseleleri işläliň:

1-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky iki sany parallel **AB** we **CD** göni çyzyklaryň arasyndaky hakyky uzaklygy – aralygy kesgitlemek talap edilýär /118-nji surat/.

Eger parallel göni çyzyklar haýsy-da bolsa bir proýeksiýalar tekziligine perpendikulýar bolsalar, onda olaryň arasyndaky iň ýakyn aralyk şol proýeksiýalar tekizligine hakyky ululygynda proýektirlenýär.

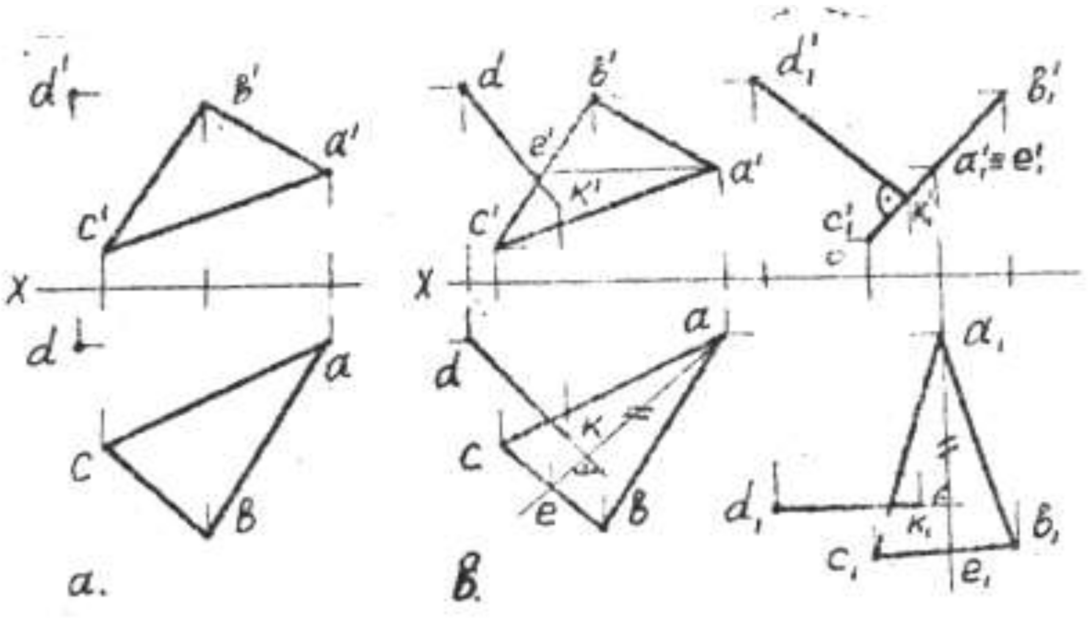


118-nji surat

H şekiller tekizlige perpendikulýar okuň daşynda birinji gezek aýlap, bu berlen umumy ýagdaýdaky **AB** we **CD** göni çyzyklary ***V*** tekizlige parallel ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny **A_1B_1IIV, C_1D_1IIV** alynýar. Olary ***V*** tekizlige perpendikulýar okuň daşynda ikinji gezek aýlap, H tekizligine perpendikulýar ýagdaýa çenli aýlanylýar, ýagny **A_2B_2□H, C_2D_2□H**. Şonda **A_2B_2 we C_2D_2** alan göni çyzyklarymyzyň arasyndaky ***l*** aralygyň **H** tekziligine hakyky ululygynda proýektirlenýänligi çyzgydan görünýär, ýagny $B_2N_2 // H$, $D_2C_2 \perp H$, $l = b_2n_2$; $b^1{}_2n^1{}_2 // OX$;

2-nji mesele. D nokatdan umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlyga çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /119-nji a, b surat/.

Berlen **D** nokatdan umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlygyň iň ýakyn aralygyny tapmak üçin ýokardaky görkezilen usuldan peýdalanalyň

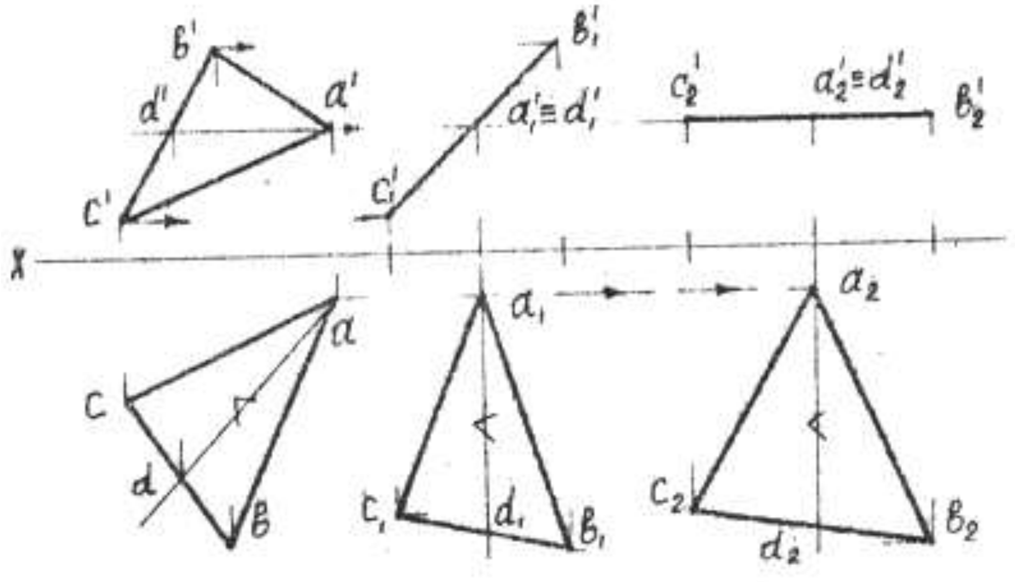


119-nji surat

.

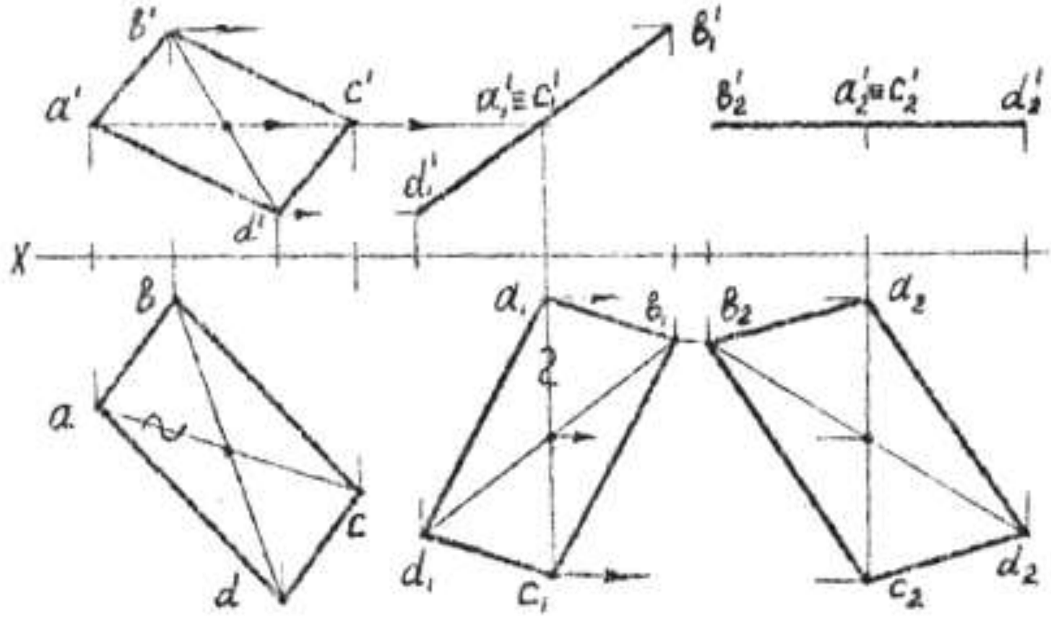
ABC üçburçlygyň üstünde ýatan **AE** gorizontalyny geçirip, **D** nokay we **ABC** üçburçlugy şol bir burça aýlap, **$A_1B_1C_1$** frontal proýektirleýji üçburçlugy we **D_1** nokady gurýarys. Gözlenýän aralyk **D_1** nokatdan **$A_1B_1C_1$** üçburçluga inderilen **D_1K_1** gözlenilýän iň ýakyn aralygyň hakyky uzynlygy bolýan bolsa, onda onuň gorizontal proýeksiýasy **OX** oka paralleldir. ***d_1k_1*II OX,** ýa-da **D_1K_1** ***//V***;

3-nji mesele. Üçburçlygyň hakyky meýdanyny kesgitlemeli /120-nji surat/.



120-nji surat

Bu meseläniň çözmek üçin ilki bilen umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçlugyň tekizligini proýeksiýalar tekizlikleriniň birine perpendikulýar **/ $A_1B_1C_1$□V/** ýagdaýa çenli, soňra bolsa täze alnan **$A_1B_1C_1$** üçburçlugy proýeksiýalar tekzilikleriniň beýlekisine parallel **/ *$A_2B_2C_2$* *II* *H* /** ýagdaýa çenli aýlap getirýäris, ýagny proýeksiýalar tekizliklerine degişlilikde perpendikulýar bolan aýlanma oklary görkezmezden-tekiz parallel orun üýtgetmek usuly boýunça aýlanma oklarynyň daşynda iki gezek yzygiderli aýlaýarys. Meseläniň doly yzygiderli çözülişi çyzgydan düşnüklidir. $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2 = \Delta a_2b_2c_2$ **4-nji mesele.** Umumy ýagdaýda berlen **ABCD** dörtburçlygyň hakyky ululygyny- meýdanyny kesgitlemeli / 121-nji surat/.

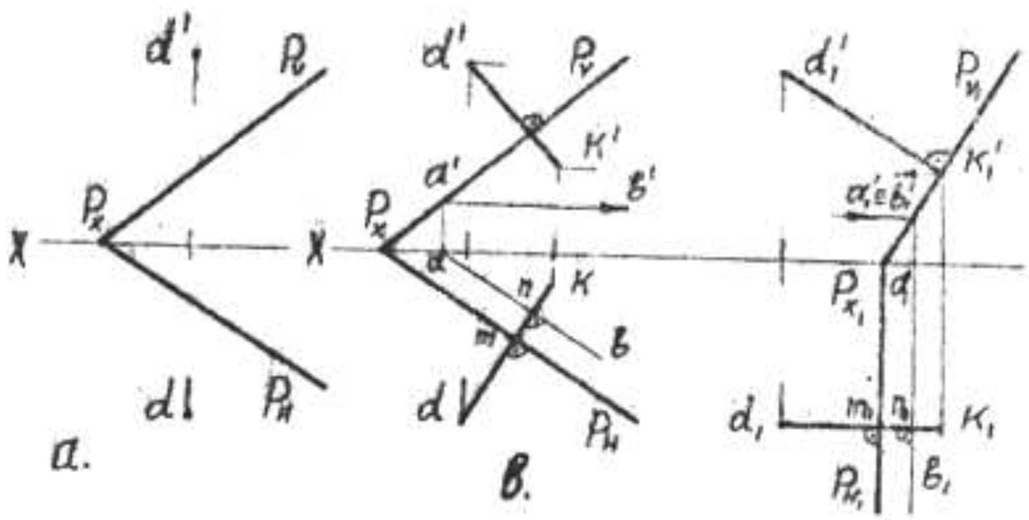


121-nji surat

Dörtburçlugyň ***abcd*** gorizontal proýeksiýasyny **AC** gorizontalynyň frontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolar ýaly edip, A_1C_1□**V,** $a_1b_1c_1d_1$ täze ýagdaýa çenli ululygyny üýtgetmezden ornuny üýtgedýäris. Şonuň netijesinde tekziligiň täze $a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$ frontal proýeksiýasy göni çyzyga öwrüler $a^1{}_1$ $c^1{}_1$ – nokat bolar. Täze orny üýtgedip guran dörtburçlygymyz A_1 B_1 C_1 D_1 □**V**, ýagdaýda şekillendiriler, ýagny frontal proýektirleýji tekizlik bolar, şonuň üçin onuň $a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$ **–** göni çyzyk bolar.

Ikinji gezek orun üýtgedilende dörtburçlugyň $a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1$ frontal proýeksiýasy **H** tekzilige parallel bolan $a_2^1b_2^1c_2^1d_2^1$ täze ýagdaýy eýeleýär. Dörtburçlugyň täze guralan $a_2b_2c_2d_2$ gorizontal proýeksiýasy **ABCD** dörtburçlugyň gözlenýän hakyky ululygy bolar. □ $a_2b_2c_2d_2$= □***ABCD***

5-nji mesele. ***D*** nokatdan yzlary bilen berlen umumy haldaky **P** tekizlige çenli iň ýakyn aralygy kesgitlemeli /122-nji surat/.



122-nji surat

Bu gözlenýän aralygy kesgitlemek üçin berlen umumy ýagdaýdaky **P** tekziligi hususy ýagdaýa frontal /ýa-da gorizontal/ proýektirleýji tekizligiň ýagdaýyna getirmeli. Şonda gözlenýän aralyk **D** nokadyň frontal proýeksiýasyndan tekizligiň frontal yzyna inderilen perpendikuloýar bilen kesgitlener.

$\boldsymbol{l = d_1^1 k_1^1 = DK}$; $\quad \boldsymbol{d_1^1 k_1^1 \square P_{V1}}$; $\quad \boldsymbol{d_1 k_1 \, II \, OX}$; $\quad \boldsymbol{d_1 k_1 \, II \, V}$;

Meseläniň çözgüdi şu aşakdaky yzygiderlilige syrygýar:

1. **P** tekizligiň **AB** gorizontalyny geçirýäris.

2. **D** nokadyň gorizontal ***d*** proýeksiýasyndan **P** tekizligiň gorizontal $\mathbf{P_H}$ yzyna we gorizontalyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar inderýäris.

3. **H** tekizlige perpendikulýar okuň daşynda aýlanandan soň tekizligiň $\mathbf{P_H}$ gorizontal yzy **OX** oka perpendikulýar bolar, $\boldsymbol{d}_1$ nokat we $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1$ proýeksiýa $\boldsymbol{d_1 m_1 = dm}$; $\boldsymbol{m_1 n_1 = mn}$ aralykda ýerleşer.

4. Gorizontalyň $\boldsymbol{a_1^1 b_1^1}$ frontal proýeksiýasyny we nokadyň $\boldsymbol{d_1^1}$ frontal proýeksiýasyny adaty usul bilen tapýarys.

5. **D** nokatdan **P** tekizlige çenli gözlenýän aralyk $\boldsymbol{d_1^1 k_1^1}$ bolar, ýagny

$$\boldsymbol{D_1K_1 = d_1^1 k_1^1 = DK; \;\; d_1 k_1 \, IIOX, \;\; d_1 k_1 \square P_{H1}; \;\; dk \square P_H;}$$

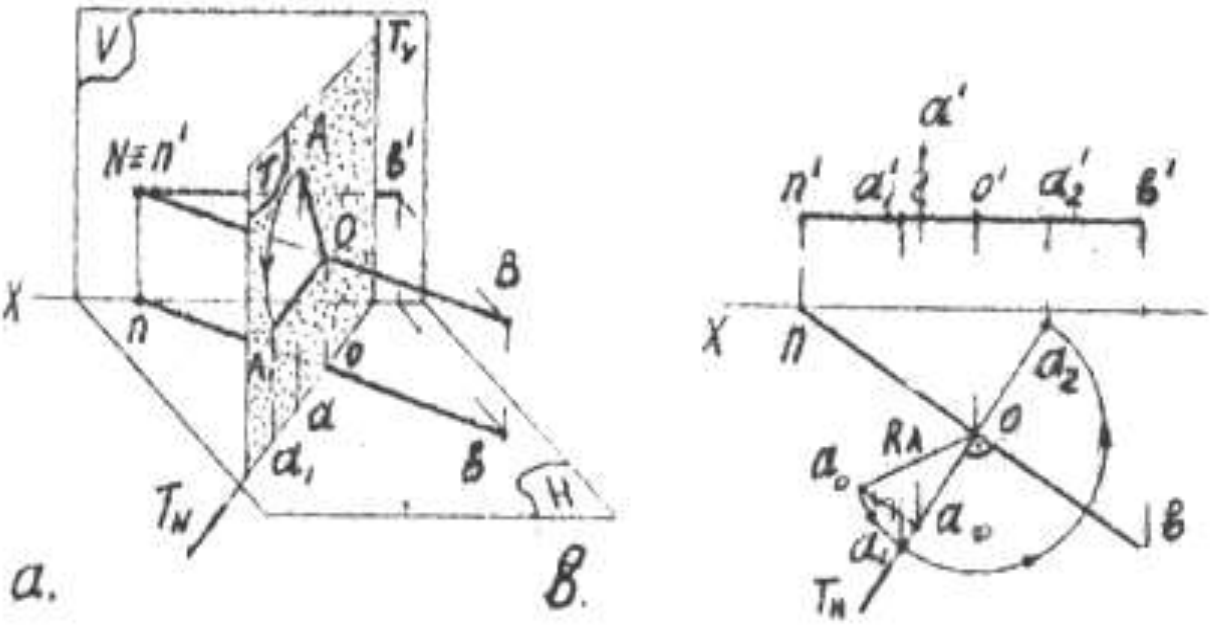
$$\boldsymbol{d_1^1 k_1^1 \square P_{V1}; \;\; d^1 k^1 \square P_V; \;\; d_1 k_1 // V;}$$

7. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIGINE PARALLEL OKUŇ DAŞYNDA AÝLAMAK

Nokady g o r i z o n t a l göni çyzygyň daşynda aýlamak

Bize belli bolşy ýaly, nokat okuň daşynda aýlananda, şol nokat aýlama okuna perpendikulýar tekizligiň üstünde töweregiň dugasy boýunça aýlanýar.

1-nji mesele. A nokady berlen ***NB*** gorizontal-aýlama okuň daşynda aýlap, nokat bilen okuň iň ýakyn aralygyny kesgitlemeli / 123-nji surat /.



123-nji surat

Eger aýlamaklyk **H** tekizligine parallel okuň daşynda geçirilýän bolsa, onda nokadyň aýlanýan ***T*** tekizligi aýlama oky bolan şol ***NB*** göni çyzyga, şeýle hem gorizontal proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolar.

Şeýlelikde, aýlandyrylýan **A** nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasy gorizontal ***NB*** göni çyzygyň ***nb*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar ***ao*** göni çyzygyň üsti boýunça öz ornuny üýtgeder, ýagny aýlama geçýän ***T*** gorizontal-proýektirleýji tekizligiň gorizontal yzy boýunça ornuny üýtgeder. $\mathbf{T \perp NB,\ T_H \perp nb,\ T \cap NB = 0,}$

$\mathbf{T_H \cap nb = 0,\ R_A = OA}$

118-nji ***a*** suratda **A** nokadyň ***NB*** **(*****nb, n¹b¹*****)** gorizontal göni çyzygyň daşynda aýlanyşy we şol aýlama oka çenli bolan iň ýakyn aralygyň ýagny aýlama R_A radiusyň tapylyşy görkezilendir. Bu aýlamaklykda **OA** deň bolan R_A aýlanma radiusyň **H** tekizligine parallel bolan ýagdaýy görkezilipdir. Şonuň üçin hem aýlanma radius gorizontal tekizlige hakyky ululygynda proýektirlenýär, ýagny $R_A = OA_1 = OA = oa_1$.

123-nji ***b*** suratda görkezilen ortogonal çyzgyda gurluş R_A – aýlanma radiusyň hakyky ululygyny **g ö n i b u r ç l y ü ç b u r ç l y k** usuly bilen kesgitlemeklige syrykdyrylýar. R_A – aýlama radiusyň hakyky uzynlygyny aýlama tekizliginiň gorizontal yzy bolan T_H bilen gabat gelýän ***ao*** perpendikulýaryň üstünde **0** nokatdan başlap, islendik tarapa ölçäp goýmak bolar. Şeýlelik bilen biz **A** nokady ***T*** aýlama tekizliginde ***NB*** okunyň daşynda aýlap, R_A aýlama radiusynyň **H** tekizligine parallel ýagdaýyny tapdyk. Başgaça aýdanyňda, **A** nokatdan **H** tekizligine çenli bolan aralyk ***NB*** gorizontalyň **H** tekizligine çenli bolan aralygyna deňdir, ýagny a_1o aralyk **A** nokatda aýlama ***NB*** okuna çenli aralyga deňdir.

a_1 – berlen **A** nokadyň aýlanan ýagdaýdaky täze alnan gorizontal proýeksiýasydyr. Nokadyň a_1^1 frontal proýeksiýasy a_1 nokadyň üstünden geçýän proýeksion – baglanyşyk çyzygynyň kömegi bilen kesgitlenýär we ol gorizontal göni çyzygyň n^1b^1 frontal proýeksiýasynyň üstünde ýatandyr. Eger-de aýlamany a_1 nokatda durman a_2 nokada çenli aýlasakda bor, onda $\mathbf{oa_2}$ – aralygam gözlenýän aralyk bolar, ýagny

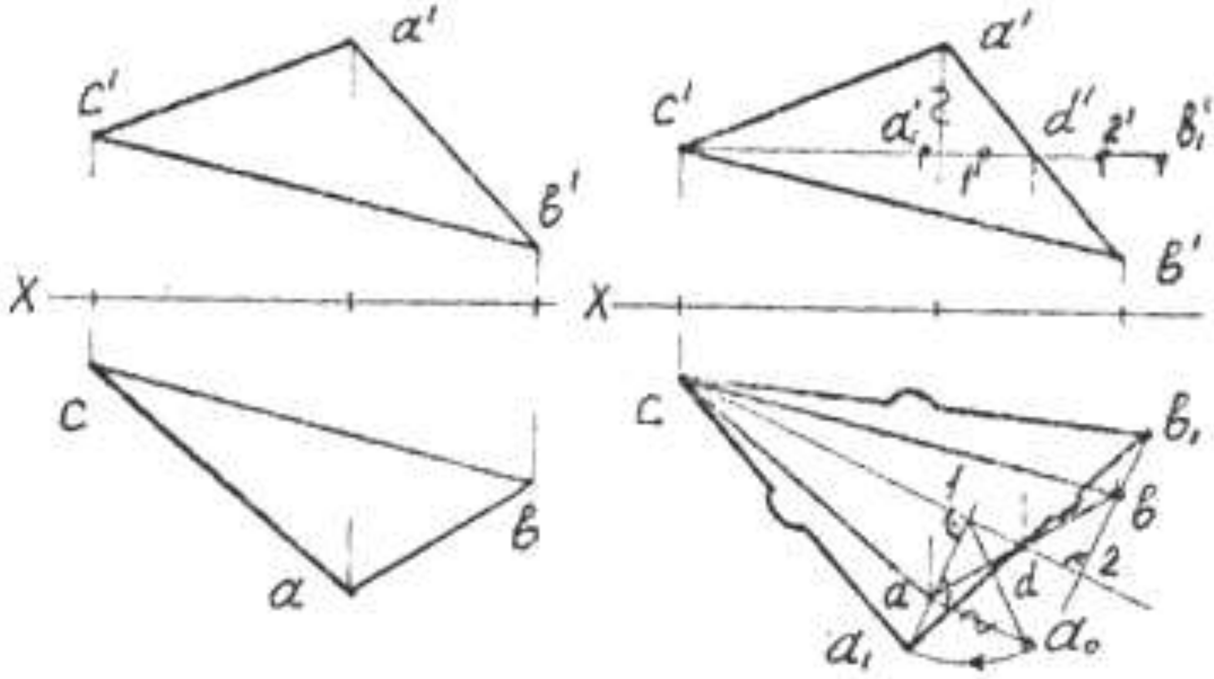
$oa_1 = oa_2$, a_2 – nokadyň tapylyşy çyzgydan düşnüklidir.

Tekiz figurany gorizontalynyň daşynda aýlamak

Tekiz figuranyň hakyky ululygyny – meýdanyny **ýeňil-aňsat** we **gysga** ýol bilen ýagny diňe bir okuň gorizontalynyň ýa-da frontalynyň daşynda aýlamaklyk bilen hem tapyp bolar.

Berlen tekizligiň gorizontalynyň daşynda aýlamaklyga garap geçeliň.

1-nji mesele. Erkin berlen **ABC** üçburçlugyň hakyky ululygyny - meýdanyny kesgitlemeli / 119-nji surat /.



124-nji surat

Eger tekiz figurany diňe bir gezek aýlap, **H** tekizlige parallel ýagdaýda goýmaly bolsa, onda aýlama okuny figuranyň tekizliginiň üstünde almaly, özünem ol alnan göni çyzyk – aýlama ok **H** tekizlige parallel bolmaly, ýagny berlen tekiz figuranyň islendik gorizontallarynyň biri bolmaly.

Üçburçlugyň tekizligi **H** tekizlige parallel bolan halatda, üçburçlugyň her bir depesiniň proýeksiýasy aýlama okundan şol nokadyň aýlama radiusyna deň aralyga süýşer.

Meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlilikde ýerine ýetirilýär:

1. Berlen umumy haldaky **ABC** üçburçlugyň tekizliginde **C / c, c^1 /** depesiniň üstünden geçýän aýlama oky hökmünde **SD / sd, sd^1 /** gorizontaly geçirýäris, şonda **C / c, c^1 / we D / d, d^1** / nokatlar aýlama okuň / gorizontalyň / üstünde ýatanlygy sebäpli öz orunlaryny üýtgetmezler.

2. Üçburçlugyň **A** / ***a***, ***a^1*** / we ***B*** / ***b***, ***b^1*** / depesinden aýlama oky bolan **SD**-ä perpendikulýar göni çyzyklaryň poýeksiýasyny geçirýäris / ***a***1□***cd***, ***b***2□***cd***/, şol göni çyzyklar boýunça hem aýlanýan nokatlaryň gorizontal proýeksiýalary orunlaryny üýtgedýärler. Sebäbi, gorizontalyň daşynda aýlananda her bir nokat giňişlikde göni

burçuň proýeksiýasy hakynda teorema esasynda töweregiň dugasyny çyzýar, ol bolsa **H** gorizontal şekiller tekizlige parallel aýlama oky bolan **CD** gorizontalyň ***cd*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar göni çyzyk bolup proýektirlenýär, ýagny $\boldsymbol{a_1}1$□***cd,*** $\boldsymbol{b_1}2$□***cd***

3. Üçburçlugyň **A** depesiniň aýlama radiusynyň proýeksiýasyny gurýarys. ***1a,*** $\boldsymbol{1^1a^1}$ – iki proýeksiýa boýunça $\boldsymbol{R_A}$ aýlama radiusyň hakyky uzynlygyny kesgitleýäris, $\boldsymbol{R_A = 1a_0}$

Aýlama radiusy **H** tekizligine parallel bolýança ***A /a,*** $\boldsymbol{a^1}$/ nokady şol gorizontalyň daşynda aýlaýarys: ***1a*** – **A** nokadyň aýlama radiusynyň gorizontal proýeksiýasydyr. $\boldsymbol{1^1a^1}$ – aýlanma radiusynyň frontal proýeksiýasydyr. $\boldsymbol{a_0}1$ **– şol aýlama radiusyň hakyky uzynlygydyr,** ol gönüburçly üçburçluk gurmak ýoly bilen kesgitlenendir.

4. $\boldsymbol{R_A = a_0}1$ ululygy perpendikulýaryň üstünde **1** nokatdan başlap islendik tarapa ölçäp goýmak bilen, **ABC** üçburçluk gorizontal, proýeksiýalar tekizligine parallel bolan ýagdaýda **A** depäniň iň soňky ýagdaýdaky $\boldsymbol{a_1}$ täze proýeksiýasyny taparys.

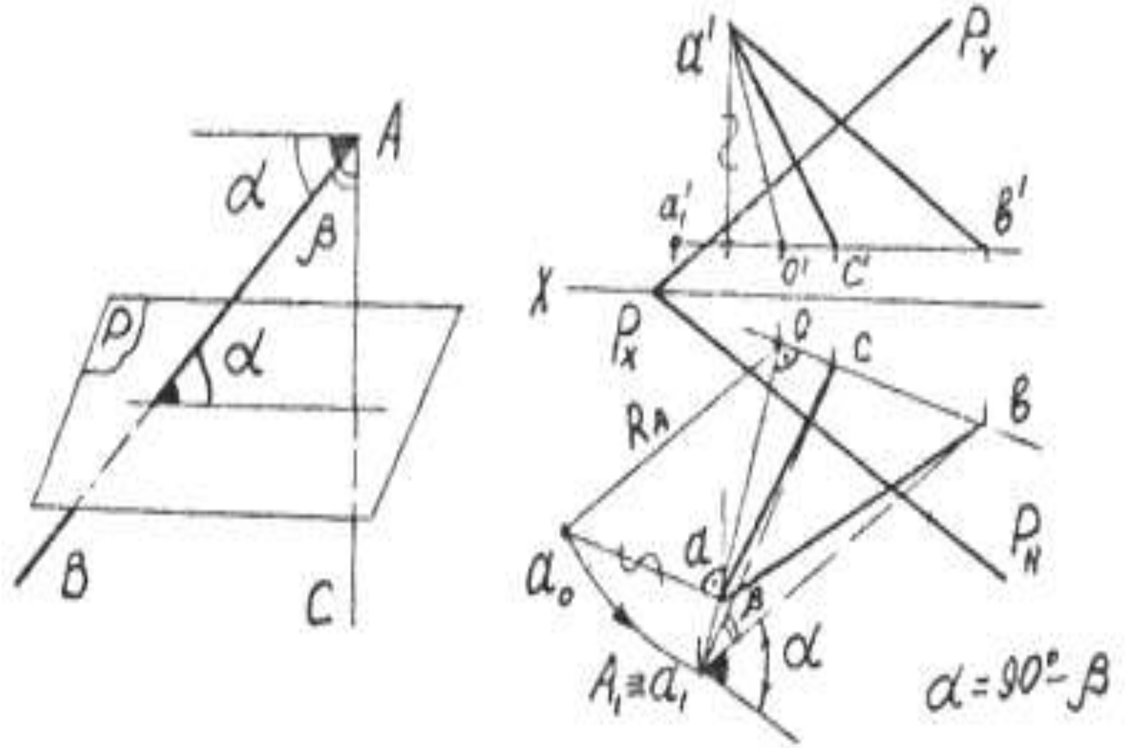
5. Täze alnan $\boldsymbol{a_1}$ we üýtgemän duran ***d*** nokatlaryň üstünden göni çyzyk geçirýäris. Ony **B** depäniň ***b*** gorizontal proýeksiýasynyň ornuny üýtgedýän ***b2*** göni çyzygy bilen kesişýänçä dowam etdirýäris, we $\boldsymbol{b_1}$ nokady, ýagny **B** mokadyň aýlanandan soňky täze $\mathbf{b_1}$ proýeksiýasyny tapýarys /anyklaýarys/.

6. Tapylan $\boldsymbol{b_1}$ we $\boldsymbol{a_1}$ nokatlary **C** nokat bilen birleşdirip, aýlanandan soňky ýagdaýda üçburçlugyň $\boldsymbol{a_1\, b_1c}$ gorizontal proýeksiýasyny alarys, ol hem gözlenilýän üçburçlugyň hakyky ululygyna deňdir □ $\boldsymbol{a_1\, b_1c}$ **=** □$\mathbf{A_1B_1C}$**=**□**ABC**. Aýlanandan soň üçburçlugyň $\boldsymbol{a_1^1\, b_1^1c^1}$ frontal proýeksiýasy gorizontalyň frontal proýeksiýasy bilen gabat gelýär we **OX** oka paralleldir. Diýmek, umumy ýagdaýda berlen ABC üçburçluk aýlandyrylandan soň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine parallel ***A B C I I H*** ýagdaýy eýeleýär, şonuň üçin-de □$\mathbf{A_1B_1C}$**=**□**ABC.**

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen **AB** göni çyzyk we yzlary bilen berlen umumy haldaky **P** tekizligiň arasyndaky ýapgytlyk burçy tapmaly /120-nji surat/. Bize geometriýadan belli bolşy ýaly tekizlik bilen göni çyzygyň arasyndaky ýapgytlyk burç göni çyzygyň şol tekizligiň üstündäki öz proýeksiýasy bilen emele getirýän burçuna deňdir.

Eger diňe burçuň ululygyny kesgitlemek talap edilýän bolsa, onda bu burçuň proýeksiýasyny gurmak hökman däldir. Ilki berlen **AB** göni çyzyk bilen **P** tekizlige şol göni çyzygyň **A** nokadyndan inderilen perpendikulýaryň arasyndaky dolduryjy □ burçy kesgitläliň.

Berlen **AB** göni çyzygyň **A** nokadyndan **P** tekizlige **AC** perpendikulýar inderýäris we **AB** göni çyzygyň **P** tekizlik bilen emele getirýän ***a*** burçuny dolduryjy □ burçy gurýarys.



125-nji surat

AB göni çyzygyň erkin **B** nokadyň üstünden □**BAC** burçuň tekizliginde **BC** gorizontaly geçirýäris. **BC** gorizontalyň daşynda aýlamak bilen alnan **CAB** üçburçlugyň tekizligini **H** tekizlige parallel ýerleşdirýäris. Aýlama wagtynda aýlama okunyň üstündäki **C** we **B** nokatlar orunlaryny üýtgetmeýärler, emma **A** nokat bolsa gorizontal proýeksiýalar tekizliginde aýlama okuna perpendikulýar bolan tekizlige degişli ***oa*** perpendikulýar boýunça ornuny üýtgedýär.

$\boldsymbol{R_A}$ – aýlanma radiusyň hakyky ululygyny kesgitläp, $\boldsymbol{cA_1b}$ burçy gurýarys, ýagny □$\boldsymbol{A_1bc}$ = □**ABC**; □$\boldsymbol{A_1bc}$ //***H***, □$\boldsymbol{A_1^1b^1c^1} \equiv \boldsymbol{b^1c^1a^1}$**.** Täze $\boldsymbol{cA_1b}$ burçuň gorizontal proýeksiýasy **CAB** burça, ýagny □ burça deň diýip ýazmak bolar □ $\boldsymbol{cA_1b}$ **=** □***CAB*** **=**□□**.** Gözlenýän burç

a **= 90$^{\mathbf{0}}$ –** □ deňdir.

Tema: 7
Utgaşdyrmak usuly.

Sapagyň meýilnamasy:

1. Utgaşdyrmak usuly.
2. Tekizligiň esasy çyzyklaryny utgaşdyrmak.
3. Yzlary bilen berlen umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan tekiz figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek.

1. U T G A Ş D Y R M A K   U S U L Y

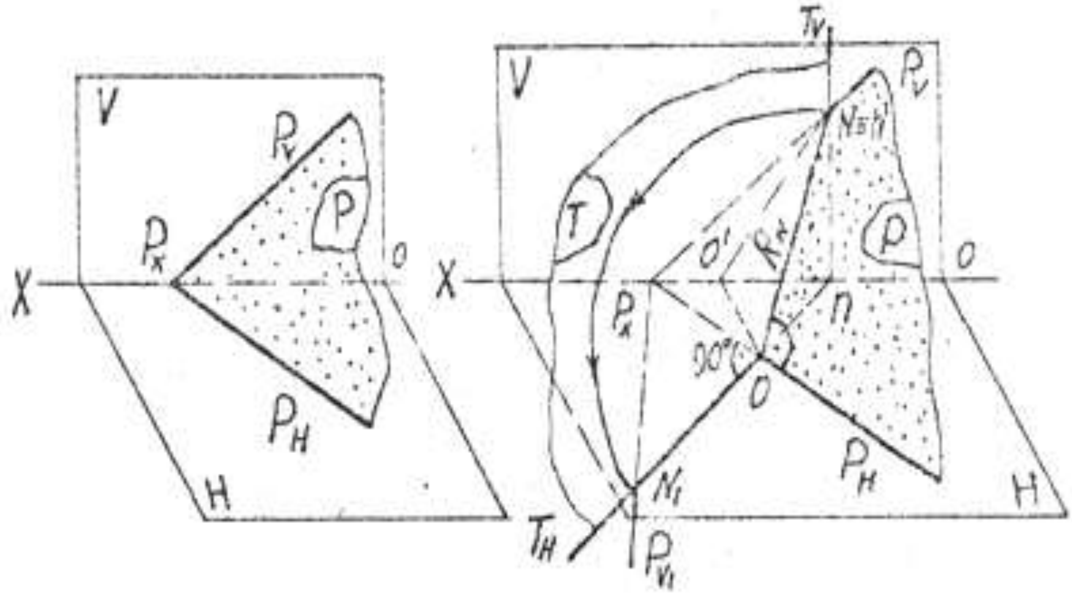
Utgaşdyrma usuly proýeksiýalar tekizliginiň üstünde ýatan okuň daşynda aýlamakdyr, ýagny berlen tekizligiň yzynyň daşynda aýlamakdyr. Aýlama okunyň deregine tekizligiň yzyny alyp, yzlary bilen berlen tekizligi proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmak aýlamaklygyň **h u s u s y** halydyr.

Figuranyň hakyky ululygyny kesgitlemek ýa-da figuranyň geometrik ölçegleri boýunça onuň proýeksiýasyny kesgitlemek talap edilende, şol figuranyň yzlaryny tapyp, şondan soň utgaşdyrma usuly peýdalanylýar.

Utgaşdyrma usuly şundan ybaratdyr: ýagny berlen **P** tekizligi degişlilikde **H** ýa-da ***V*** tekizlik bilen utgaşýança onuň $\mathbf{P_H}$ gorizontal yzynyň ýa-da $\mathbf{P_V}$ frontal yzynyň daşynda aýlaýarlar. **P** tekizliginde ýatan ähli geometrik elementler utgaşdyrylan ýagdaýda **H** ýa-da ***V*** tekizliginde üýtgedilmezden natural ýagdaýynda şekillendirilýär.

Utgaşdyrma usuly diňe **metrik / ölçeg/** meselelerini çözmek üçin ulanylýandyr.

1-nji mesele. Giňişlikde umumy ýagdaýda yzlary bilen berlen **P** tekizligi gorizontal proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrmaly / 126-njy we 127-nji suratlar/.



126-njy surat

126-njy suratda utgaşdyrma usulynyň manysy düşündirilendir we görkezilendir. Berlen **P** tekizligi $\mathbf{P_H}$ yzyň daşynda **H** tekizlik bilen utgaşýança aýlaýrys. Şonda **P** tekizliginde ýatan figuranyň ähli nokatlary **H** tekizligiň üstüne düşer we biz figuranyň hakyky ululygyna - meýdanyna deň bolan şekilini alarys.

Utgaşdyrmagy ýerine ýetirmek üçin aýlanyş oky hökmünde tekizligiň kabul edilen $\mathbf{P_H}$ yzynyň gozganmaýandygyny göz öňüne tutmak gerek.

P tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrmak üçin **P** tekizligiň diňe islendik nokadyny şu tekizlik bilen utgaşdyrmak ýeterlikdir. Şonuň üçin $\mathbf{P_V}$ frontal yzyň üstünde ýatan islendik ***N*** nokady almak has maksadalaýyk bolar. Şu alnan ***N*** nokadyň üstünden aýlanma oky bolan $\mathbf{P_H}$ yza perpendikulýar bolan kömekçi gorizontal proýektirleýji ***T*** tekizligi geçirýäris. Bu geçirilen tekizlik berlen **P** tekizlige perpendikulýardyr. ***T*** tekizlik ***N*** nokadyň aýlama tekizligidir. ***T*** tekizlik aýlama oky bilen **O** nokatda kesişýär. Alnan **O** nokat aýlama merkezi bolar. **O*N*** bolsa aýlama radiusydyr. ***N*** nokadyň täze $\boldsymbol{n^1}$ ýagdaýynyň alnyşy çyzgydan düşnüklidir. ***N*** nokat ***T*** aýlama tekizliginiň üstünde ýerini üýtgedip $\boldsymbol{T_H}$ yza çenli aýlanyp **H** tekizlik bilen utgaşan $\boldsymbol{N_1}$ ýagdaýy eýeleýär.

Utgaşdyrylan $\boldsymbol{P_{V1}}$ frontal yzy kesgitlemek üçin $\boldsymbol{P_V}$ frontal yzyň üstünde alnan ***N*** nokadyň täze $\boldsymbol{N_1}$ ornuny tapmaly we ony birleşme nokady bolan $\boldsymbol{P_X}$ bilen göni çyzyk arkaly birleşdirmeli, şonda

$\boldsymbol{P_X n^1 = P_X N_1 = P_X\ N = ON;\ \ O_1N(on,\ o^1n^1) = R_N = ON_o}$ deňligi göz öňünde tutmaly.

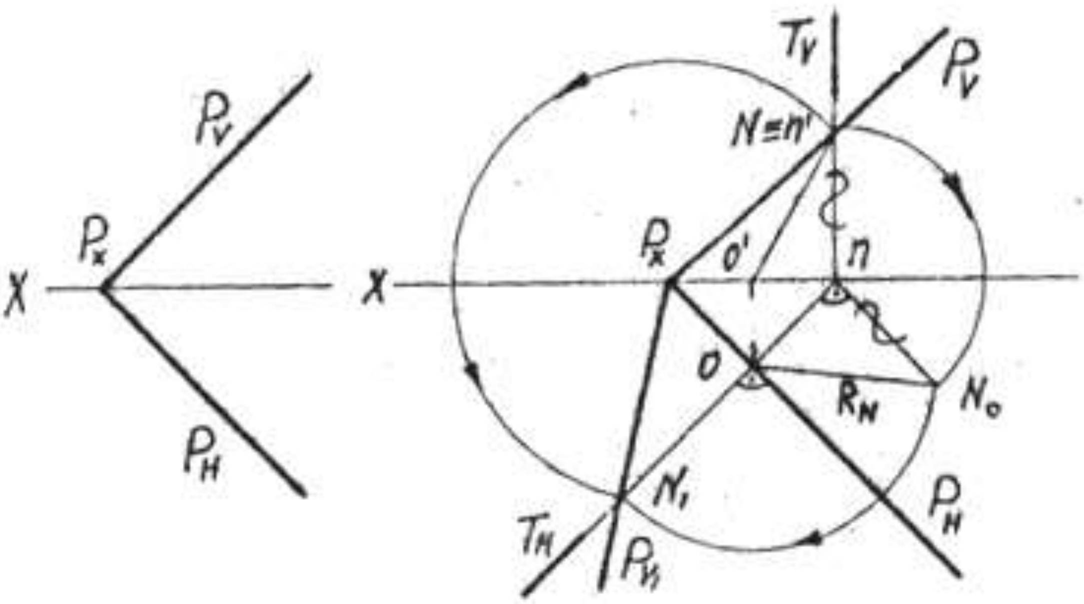
126-njy suratda $\boldsymbol{P_H}$ yzyň daşynda aýlananda **P** tekizligiň giňişlikdäki ornunyň üýtgeýşi we **H** gorizontal şekiller tekizlik bilen utgaşan ýagdaýy görkezilendir.

Ortogonal çyzgyda /127-nji surat/

N nokadyň utgaşdyrylan ýagdaýyny gurmak üçin berlen **P** tekizligiň $\mathbf{P_V}$ yzynyň üstünde ýatan islendik $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n^1})$ nokady alýarys. $\boldsymbol{ON_0 = R_N}$ Raýlama radiusyň hakyky ululygyny $\boldsymbol{OnN_0}$ göniburçly üçburçlukdan kesgitleýäris. $\boldsymbol{ON_0}$ alnan ululygy ***n*** nokatdan $\mathbf{P_H}$ yza inderilen perpendikulýaryň üstünde ***O*** nokatdan başlap ölçäp goýýarys we $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{n_1 n^1})$ nokadyň **H** tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýyndaky $\boldsymbol{N_1}$ nokady alýarys, ýa-da çyzgydan görnüşi ýaly.

$\boldsymbol{N_1}$ nokady $\boldsymbol{ON_0}$ radius bilen çyzylan duganyň aýlama radiusyň ***On*** proýeksiýasynyň dowamy bilen kesişdirip gurmak bolar.

Ortogonal çyzgyda $\boldsymbol{N_1}$ nokadyň ýagdaýyny ýene-de aşakdaky ýaly kesgitlemek bolar:



127-nji surat

P tekizligiň $\mathbf{P_V}$ frontal yzynyň üstünde islendik $\boldsymbol{n^1}$ nokady saýlap alýarys, ol nokatdan **OX** okuna perpendikulýar inderýäris we ***N*** nokadyň gorizontal ***n*** proýeksiýasyny tapýarys.

Alnan ***n*** nokatdan $\boldsymbol{P_H}$ yza perpenikulýar inderýäris we $\boldsymbol{P_x n}^1$ radius bilen duga çyzýarys. Bu duganyň $\mathbf{P_H}$ yza inderilen ***nO*** perpendikulýar bilen kesişme nokady hem $\boldsymbol{N_1}$ nokady kesgitleýär.

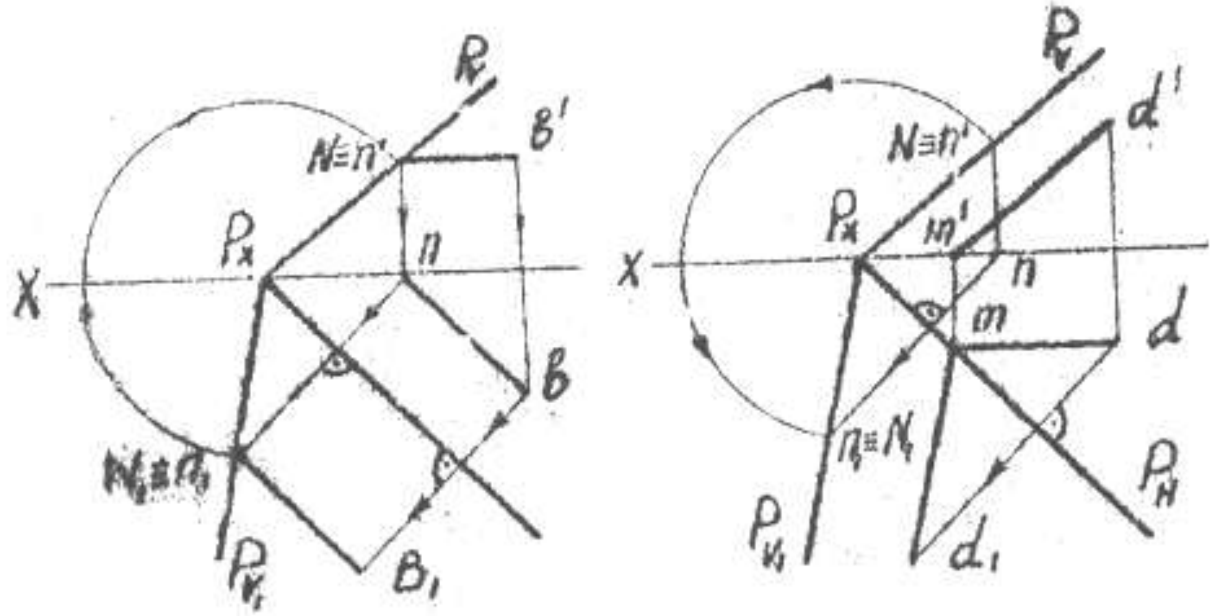
Yzlaryň birleşýän $\mathbf{P_X}$ nokadyny $\boldsymbol{N_1}$ nokat bilen birleşdirip, $\boldsymbol{P_{V1}}$ frontal yzyň utgaşdyrylan täze ýagdaýyny alarys. $\mathbf{Px}\boldsymbol{n^1}$ we $\boldsymbol{P_X N_1}$ kesimleriň proýeksiýalar tekizliklerine özleriniň hakyky ululyklarynda proýektirlenýändigi üçin munuň özi mümkindir.

P tekizlik $\mathbf{P}_V$ yzyň daşynda aýlananda hem edil ýokarda garap geçenimize meňzeş gurluş emele geler, ýagny $\mathbf{P_H}$ gorizontal yz ***V*** frontal proýeksiýa tekizligi bilen utgaşar.

2.Tekizligiň esasy çyzyklaryny utgaşdyrmak

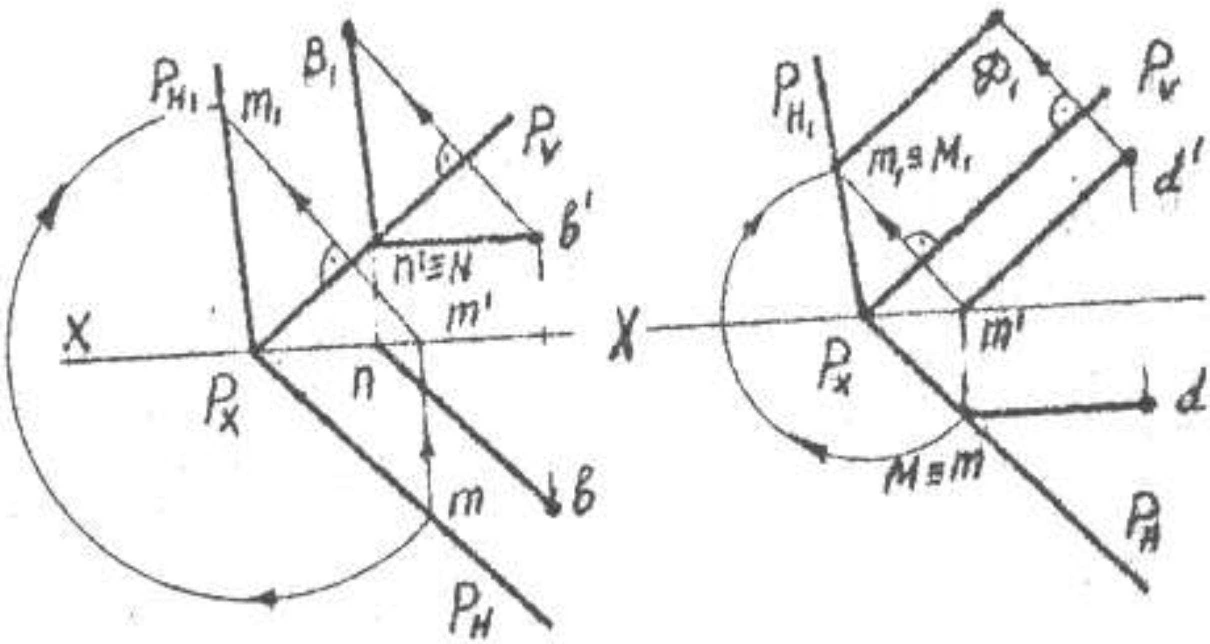
2-nji mesele. P tekizligiň ***NB*** gorizontalyny we ***MD*** frontalyny ***H*** tekizligi bilen utgaşdyrmaly / 128-nji surat/.

NB gorizontalyň $\boldsymbol{P_H}$ gorizontal yza paralleldigi üçin ***H*** tekizlik bilen utgaşdyrylanda, ol utgaşdyrylan $\boldsymbol{N_1B_1}$ gorizontal P_H yza parallel bolar, ýagny $\boldsymbol{N_1B_1}$ **//** $\mathbf{P_H}$. Tekizligiň ***MD*** frontaly ***H*** tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýda $\boldsymbol{P_{V1}}$ yza paralleldir. $\mathbf{MD_1}$**//**$\boldsymbol{P_{V1}}$**.**



128-nji surat

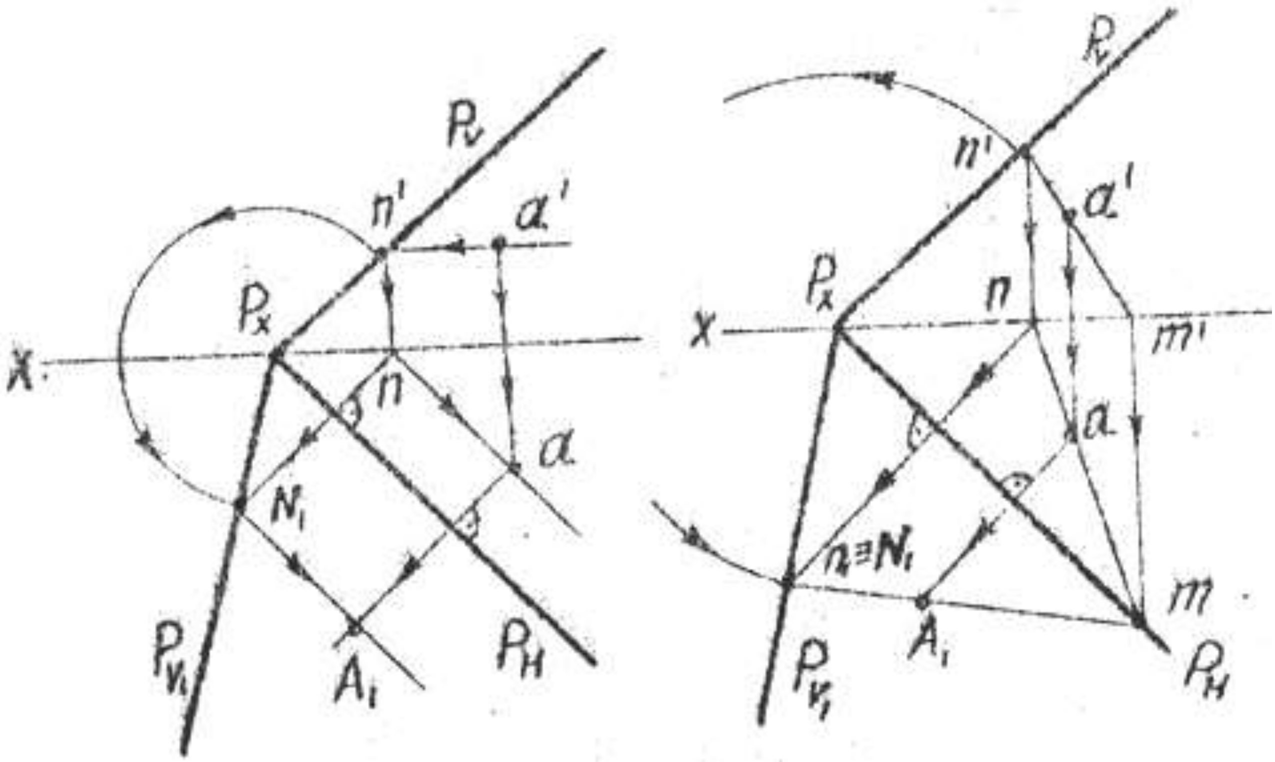
3-nji mesele. P tekizligiň ***NB*** gorizontalyny we ***MD*** frontalyny ***V*** tekizlik bilen utgaşdyrmaly. Eger ***P*** tekizlik frontal proýeksiýalar tekizligi bilen utgaşdyrylan bolsa, onda ugtaşdyrylan ýagdaýdaky gorizontal $NB_1 // P_{H1}$ frontal $M_1D_1 // P_V$ bolar / 129-njy surat/



129-njy surat

Giňişlikde berlen ***P*** tekizligi ***H*** tekizligi bilen utgaşdyrylanda, tekizligiň islendik nokadynyň utgaşdyrylan ýagdaýyny tekizligiň esasy çyzyklary bilen nokadyň gorizontal proýeksiýasyndan aýlanma oky bolan P_H gorizontal yzyna inderilen perpendikulýaryň kesişmeginde alynýar.

4-nji mesele. ***P*** tekizlikde ýatan ***A*** nokadyň a^1 frontal proýeksiýasy boýunça gorizontal tekizlik bilen utgaşdyrylan ýagdaýyny tapmaly / 130-njy surat/.

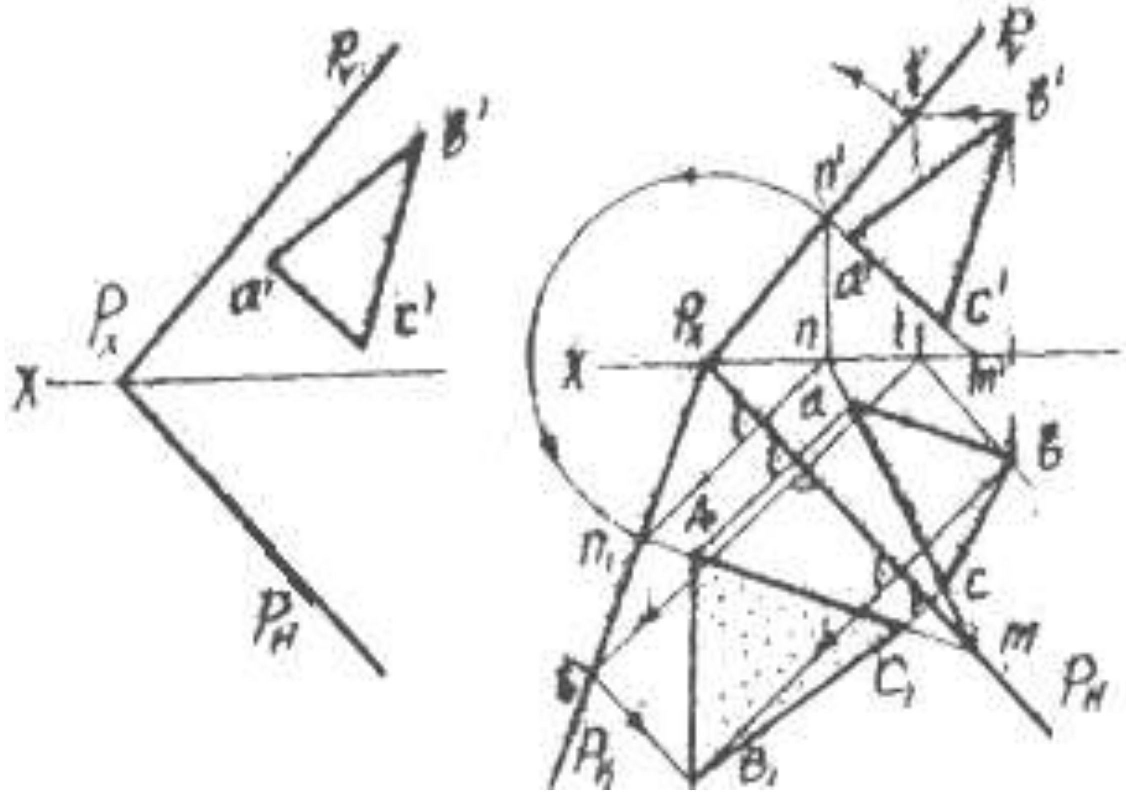


130-njy surat

Bu ýagdaýda ***A*** nokadyň üstünden geçýän we berlen ***P*** tekizlikde ýatan ***AN*** gorizontalyň 130-njy a surat we umumy ýagdaýdaky ***MN*** göni çyzygyň kömegi bilen 130-njy b surat nokadyň utgaşdyrylan ***A₁*** ýagdaýynyň tapylyşy görkezilendir. Gurluşy çyzgydan düşnüklidir. Tapylyş usullaryna, haýsy usulyň amatlydygyna üns beriň, analiz ediň, derňäň.

4. YZLARY BILEN BERLEN UMUMY HALDAKY TEKIZLIGIŇ ÜSTÜNDE ÝATAN TEKIZ FIGURANYŇ HAKYKY ULULYGYNY KESGITLEMEK

1-nji mesele. Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde ýerleşen **ABC** üçburçlugyň frontal proýeksiýasy boýunça **hakyky ululygyny tapmaly** / 131-nji surat /.

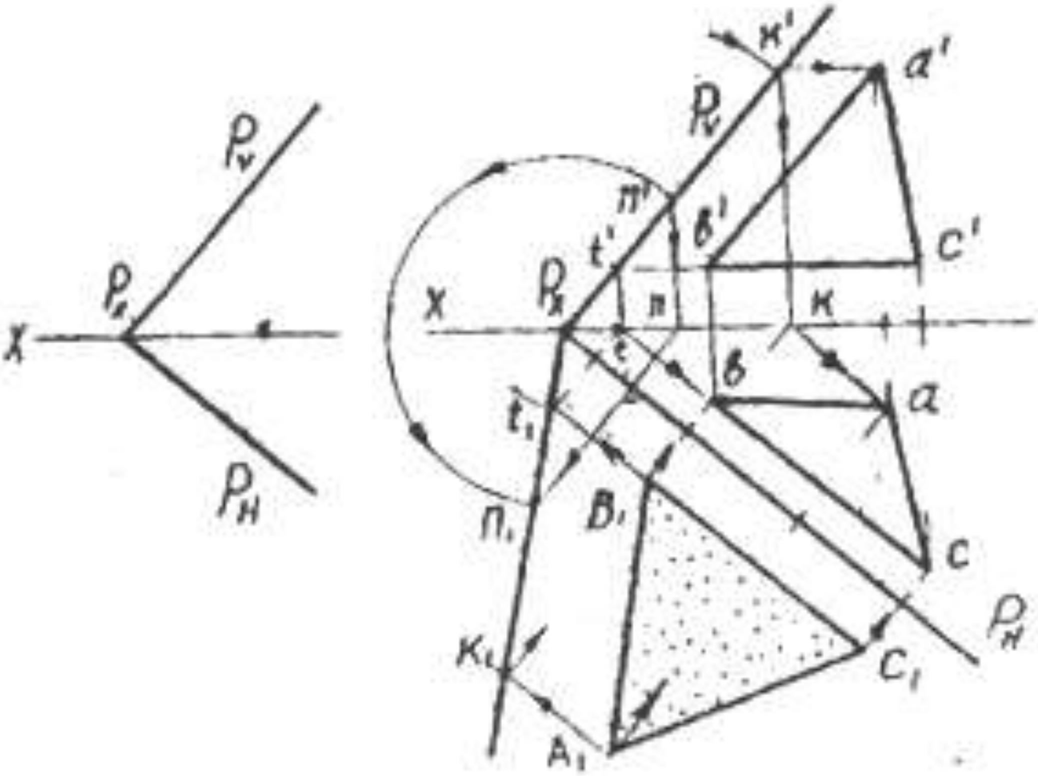


131-nji surat

Bu meseläni işlemek üçin bize belli bolşy ýaly **ABC** üçburçlugyň **$a^Ib^Ic^I$** üçburçlugyň frontal şekili boýunça onuň gorizontal şekilini **abc** tapylandyr.

Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde ýerleşen **ABC** üçburçlugyň hakyky ululygyny tapmak üçin **P_H** yzyň daşynda aýlamak bilen **P** tekizlik şonuň bilen birlikde üstünde ýatan **ABC** üçburçluk hem **H** tekizlik bilen utgaşdyrylýar. Üçburçlugyň **A_1 B_1 C_1** depeleriniň ugtaşdyrylan ýagdaýy kesgitlenýär. Munuň üçin tekiz figuranyň, ýagny üçburçlugyň **AC** tarapynyň üstünden geçýän umumy ýagdaýdaky ***MN*** göni çyzygy hem-de **B** depesinde geçýän **BT_1** gorizontaly peýdalanylandyr. Täze utgaşdyrylyp tapylan **A_1 B_1 C_1** berlen **ABC** üçburçlugyň hakyky ululygydyr. □**$A_1B_1C_1$**=□**ABC;** □**$A_1B_1C_1$**□**H.**

2-nji mesele. Giňişlikde erkin ýerleşen **P** tekizligiň üstünde **deňtaraply** üçburçluk gurmaly / 132-nji surat /



132-nji surat

Meseläni çözmek üçin görkezme. **P** tekizligini proýeksiýalar tekizliginiň haýsy hem bolsa biri bilen utgaşdyrmaly we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde deňtaraply üçburçluk gurmaly. Soňra **P** tekizligi üçburçluk bilen bilelikde ilki başdaky berlen ýagdaýyna aýlap getirmeli, ýagny üçburçlugyň gorizontal we frontal proýeksiýalaryny gurmaly.

Meseläni çözmek üçin **P** berlen tekizligiň üstünde islendik alnan N ***(n,*** n^1***)*** nokadyň kömegi bilen **P** tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrýarys we utgaşdyrylan ýagdaýda tekizligiň üstünde ýatan deňtaraply $A_1B_1C_1$ üçburçlugy gurýarys.

Gurluşy ýönekeýleşdirmek üçin üçburçlugyň B_1C_1 tarapy tekizligiň P_H yzyna parallel ýerleşdirildi we üçburçlugyň **A** üçünji depesi guruldy.

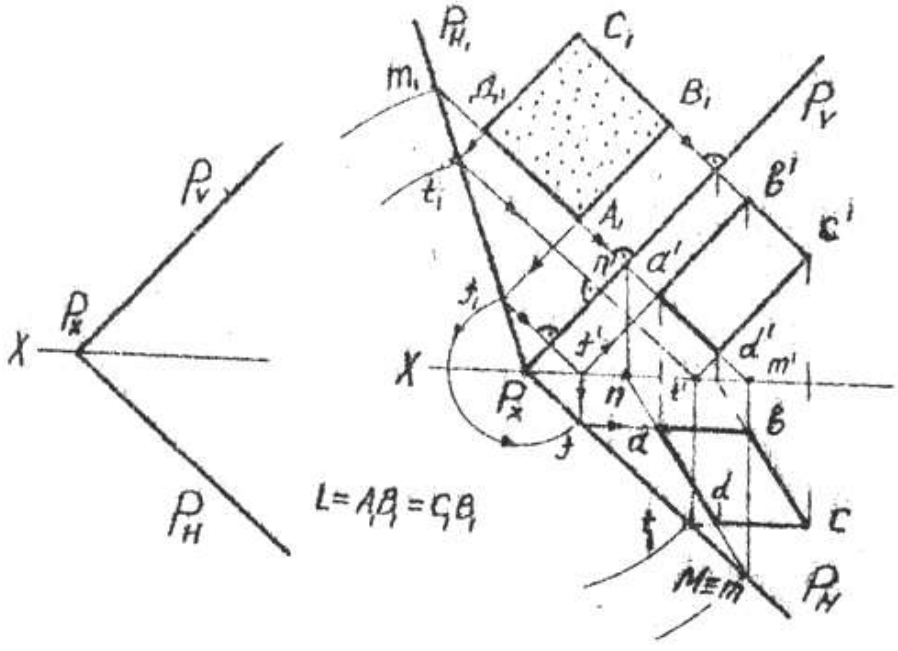
A_1 nokadyň proýeksiýalaryny gurmak üçin bu nokadyň üstünden **P** tekizligiň gorizontaly utgaşdyrylan ýagdaýda P_H yza parallel edilip geçirildi we utgaşdyrylan P_{V1} yz bilen kesişme nokat bolan k^1 alyndy.

K_1 nokatdan P_H yza perpendikulýar geçirildi we ony **OX** oky bilen kesişýänçä dowam etdirip, **K** nokat tapyldy. **K** nokatdan **OX** oka perpendikulýar galdyryldy we ol P_V yz bilen kesişýänçä dowam etdirilip, k^1 nokat kesgitlendi. **k** hem-de k^1 nokatlaryň üstünden **P** tekizligiň üstünde ýatan **A** nokatdan gorizontalynyň gorizontal we frontal proýeksiýalary geçirildi.

Gorizontalyň gorizontal proýeksiýasy bilen A_1 nokatdan P_H yza inderilen perpendikulýaryň kesişýän ýerinde nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasy bilen ***a*** gorizontal proýeksiýanyň üstünden geçirilen proýeksion-baglanyşyk çyzygynyň kesişme nokady bolsa a^1 nokadyň gözlenýän frontal proýeksiýasydyr.

B /***b,*** b^1/ we ***C*** /***c,*** c^1/ nokatlaryň proýeksiýalary hem ýokardaky görkezilen usul bilen tapylýar.

3-nji mesele. Umumy ýagdaýdaky **P** tekizlik yzlary bilen berlipdir. Onuň üstünde ýerleşen tarapy ***L*** – deň bolan **kwadrat** gurmaly /133-nji surat/.



133-nji surat

Çözülişi. **P** tekizligi frontal proýeksiýalar tekizlik bilen utgaşdyralyň. Tekizlik $\mathbf{P_V}$ okuň daşynda aýlananda, bu ýerde hem tekizlige degişli her bir nokat töweregiň dugasy boýunça öz ornuny üýtgeder, proýeksiýasy bolsa $\mathbf{P_V}$ perpendikulýar bolan göni çyzyk bolar. Utgaşdyrylan ýagdaýda $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ **kwadraty** gurýarys we tekizligiň üstündäki kwadraty yzyna aýlap, öňki ýagdaýyna getirýäris, ýagny kwadratyň **gorizontal** we **frontal** proýeksiýalaryny gurýarys.

Gurluş **P** tekizligiň kwadratynyň depeleriniň üstünden geçririlen frontallaryň kömegi bilen ýerine ýetirilýär.

Tekizlik başdaky ýagdaýa getirilende, **kwadratyň** degişli $\mathbf{A_1B_1C_1}$ we $\mathbf{D_1}$ depeleriniň ýatmaly frontallarynyň proýeksiýalaryny tapýarys.

$\mathbf{A_1,B_1,C_1,D_1}$, nokatlaryň üstünden P_V perpendikulýar geçirýäris we olary frontalyň frontal proýeksiýalary bilen kesişýänçä dowanm etdirip, $\boldsymbol{a^1, b^1, c^1}$ we $\boldsymbol{d^1}$ nokatlary tapýarys. $\mathbf{A_1B_1C_1}$ we $\mathbf{D_1}$ nokatlary frontallaryň degişli gorizontal proýeksiýalaryna proýektirläp, ***a, b, c*** we ***d*** gorizontal proýeksiýalaryny tapýarys.

4-nji mesele. Umumy haldaky **P** tekizligiň üstünde merkezi **O** nokatda bolan töwerek gurmaly / 134-nji surat /.

Bu umumy ýagdaýdaky tekizligiň üstünde ýerleşen töwerek proýeksiýalar tekizliklerine ellips görnüşinde proýektirlenýär. Berlen oklary boýunça ellipsi gurmaklygy ellipsiň uly we kiçi oklarynyň ululygy hem-de ugry kesgitlenenden soň amala aşyrmak bolar.

Umumy haldaky tekizligiň üstünde ýatan töweregiň diametrleriniň biri **O** nokadyň üstünden geçýän gorizontal bilen gabat gelýär, diýmek **H** tekizlige gözlenýän töweregiň diametri hakyky ululygynda proýektirlenýär, beýlekisi frontal bilen gabat gelýär, şonuň üçin ***V*** tekizlige hem töweregiň bir diametri hakyky ululygyndan proýektirlenýär.

Töweregiň tekizliginiň gorizontaly bilen gabat gelýän diametri ellipsiň gorizontal proýeksiýalar tekizligindäki uly oky bolar.

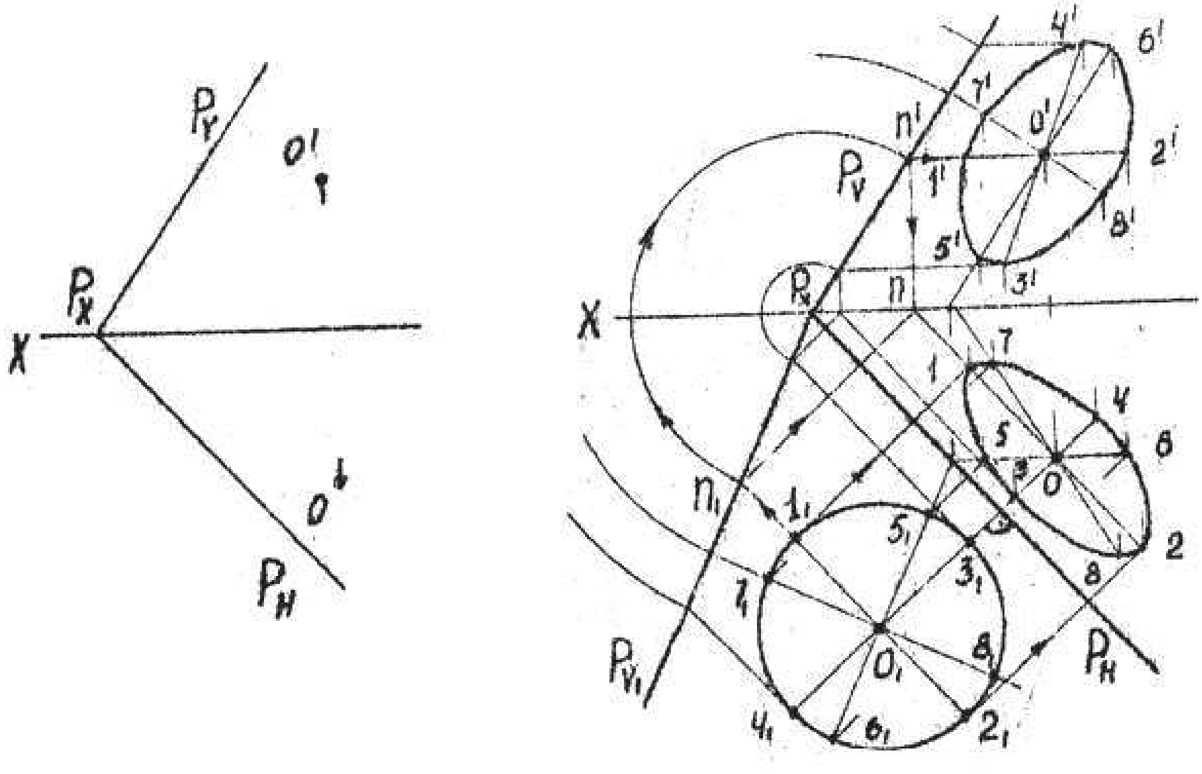
Töweregiň proýeksiýasyny gurmak üçin **P** tekizligi **H** tekizlik bilen utgaşdyrmak gerek, soňra merkezi **O** nokatda bolan islendik radiusly töwerek gurmaly we proýeksiýalary degişlilikde ellipsiň oklaryna deň bolan diametrlerini geçirmeli.

$\mathbf{P}_{\boldsymbol{H}}$ yza parallel bolan $\mathbf{I_1}$ **-** $\mathbf{2_1}$ diametr ellipsiň H tekizligindäki uly okuny kesgitleýär. $\mathbf{I_1}$ **-** $\mathbf{2_1}$ perpendikulýar bolan $\mathbf{3_1}$ **-** $\mathbf{4_1}$ diametr bolsa şol ellipsiň kiçi okuny kesgitleýär.

$\mathbf{P}_{v}$ yza parallel bolan $\mathbf{5_1}$ **-** $\mathbf{6_1}$ diametr ellipsiň ***V*** tekizligindäki uly okuny, $\mathbf{7_1}$ **-** $\mathbf{8_1}$ diametr bolsa kiçi okuny kesgitleýär.

P tekizligi başdaky ornuna getirmek bilen, $\mathbf{1_1}$ **we** $\mathbf{2_1}$ nokatlaryny

1 – 2 gorizontalyň gorizontal proýeksiýasyna proýektirleýäris.



134-nji surat

Ellipsiň kiçi oky **1 – 2** göni çyzyga perpendikulýardyr, **3** nokat **3 – K** gorizontal göni çyzygyň kömegi bilen tapyldy, **4** nokat **0-3** we **0-4** kesimleriň deňligi esasynda tapyldy.

Frontal proýeksiýalar tekizliginde ellipsiň uly oky $\mathbf{O}^1$ nokadyň üstünden geçirilendir / **5-6** göni çyzyk $\mathbf{P}_{V1}$ yza paralleldir we töweregiň diametrine deňdir /. Eger **8** nokady ellipsiň gorizontal proýeksiýasyna, **8** nokady kiçi okuň frontal proýeksiýasyna proýektirlesek kiçi oky alarys. $\mathbf{7}^1$ nokat $\mathbf{0}^1 - \mathbf{8}^1 = \mathbf{0}^1 - \mathbf{7}^1$ deňlikden tapylýar.

Her bir ellips üçin uly we kiçi oklaryň gurulmagy ellipsiň özüni çyzmaga mümkinçilik berýär.

Tema: 8

Proýeksiýalar tekizlikerini yzygiderli çalşyrmak usuly.

Sapagyň meýilnamasy:

1. Proýeksiýalar tekizlikerini yzygiderli çalşyrmak usuly. Umumy maglumat.
2. Proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usulyny ulanyp ölçeg meselelerini çözmek.

PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINI Ç A L Ş Y R M A K U S U L Y

1. UMUMY MAGLUMAT

Aýlama we utgaşdyrma usullarynda proýektirlenýän obýektleriň orunlaryny üýtgedýärdiler, proýeksiýalar tekizlikleri bolsa öz ýerlerinde üýtgemän galýardylar. Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmak usulynda bolsa tersine, proýektirleýji obýektler şol durşuna galdyrylyp, proýeksiýalar tekizlikleri öz ýagdaýlaryny geregiçe yzygiderli üýtgedýärler.

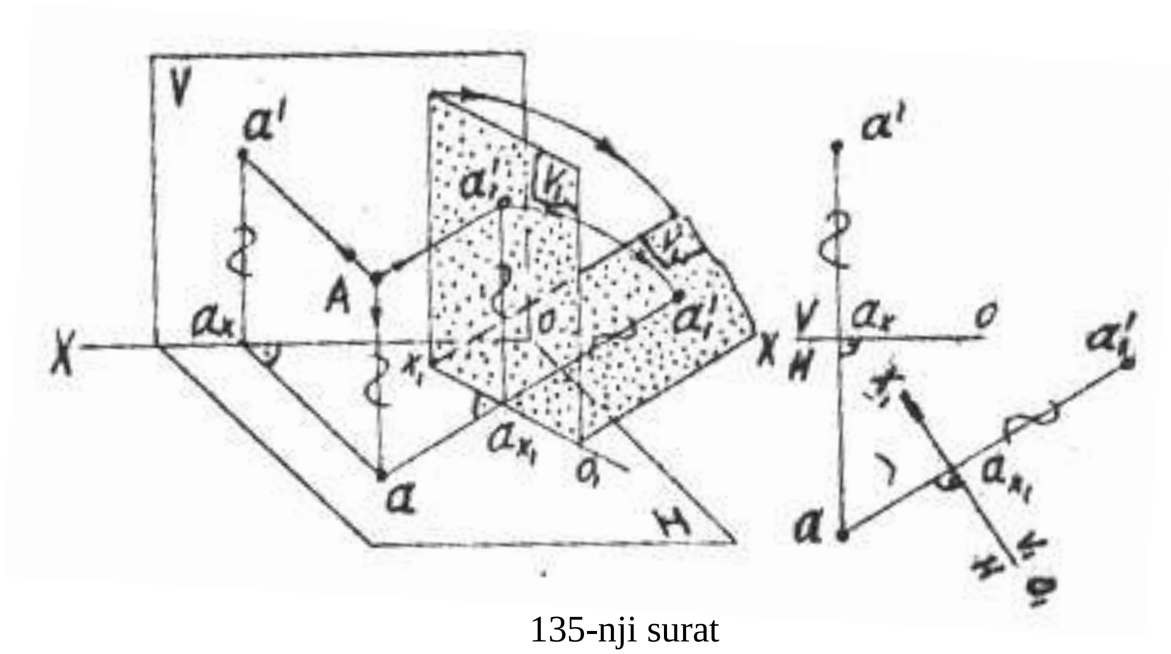
Proýeksiýalar tekizliklerini çalşyrmak usuly geometrik elementleriň proýeksiýalaryny üýtgetmeklige mümkinçilik berýär. Ýöne munuň özi olaryň giňişlikdäki orunlaryny üýtgetmegiň hasabyna däl-de, bu geometrik elementleriň proýektirlenilýän tekizlikleriniň ýagdaýyny üýtgetmegiň hasabyna amala aşyrylýar. Garalyp geçilýän bu usul proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyryp, öz ýerlerini üýtgetmäge mümkinçilik berýär, şeýlelikde her gezek bu tekizlikleriň biri üýtgedilende geometrik elementler iki sany özara perpendikulýar tekizliklere proýektirlener ýaly edilýär.

Nokatlaryň täze proýeksiýalarynyň häsiýetlerine we olary epýurda gurmagyň usulyna birnäçe meseleler arkaly garap geçeliň.

1 – nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V_1}{H}$ sistemada gurmaly / 135-nji surat /.

V proýeksiýalar tekizligi täze $\boldsymbol{V_1}$ □**H** proýeksiýalar tekizligi bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ sistemadan $\boldsymbol{X}_1$ okly täze $\frac{V_1}{H}$ proýeksiýalar tekizlikleriniň sistemasyna geçilende, A / $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^1$ / nokadyň $\boldsymbol{a_1}^{\boldsymbol{1}}$ täze proýeksiýasynyň gurluşyna garap geçeliň.

H tekizligiň **“köne”** we **“täze”** sistemalaryň ikisi üçin hem umumy bolýanlygy üçin **A** nokadyň ***Z*** koordinatasy, ýagny **A** nokatdan **H** tekizlige çenli aralyk /**A** ***a*** – kesim bilen aňladylan/ üýtgemän galýar.



135-nji surat

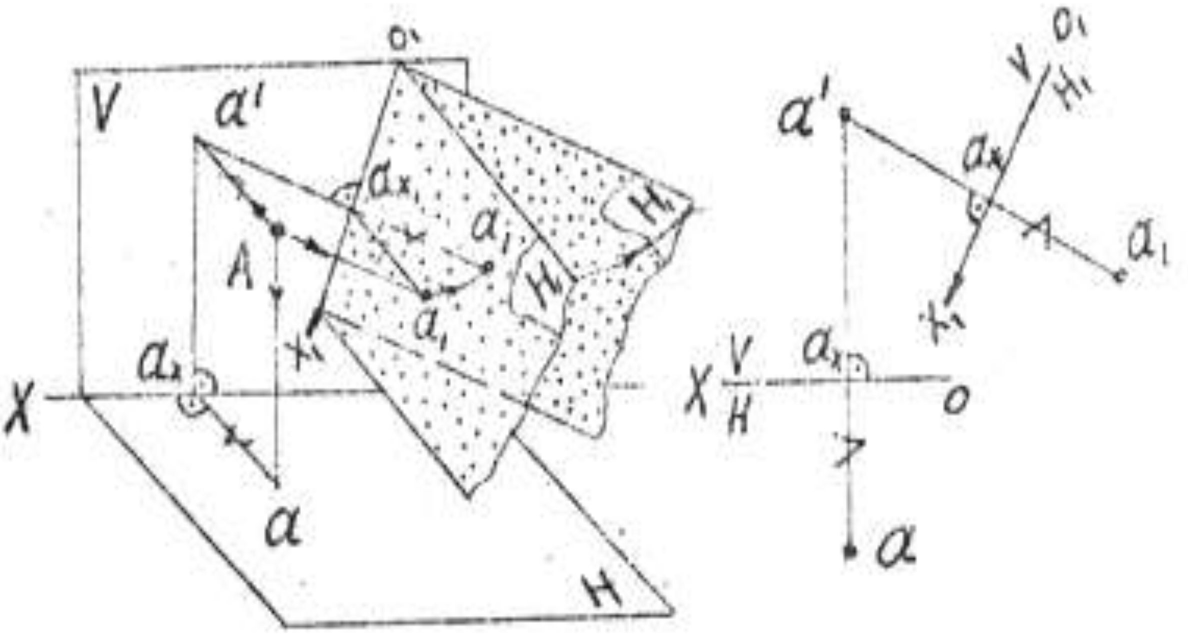
Şeýlelikde, täze frontal proýeksiýadan täze OX oka çenli aralyk çalşyrylan köne proýeksiýadan OX oka çenli aralyk çalşyrylan köne proýeksiýadan **OX** oka çenli aralykda deňdir, ýagny $\boldsymbol{a^1a_x = a_1^1\ a_{x1} = Aa = Z}$. Gorizontal ***a*** proýeksiýa öňküligine galar, nokadyň koordinatalary bolsa **X**, okuň täze ýagdaýyna baglylykda başga bolar.

Epýury almak üçin $\boldsymbol{V_1}$ tekizligi $\boldsymbol{X_1}$ okuň daşynda aýlap, **H** tekizlik bilen utgaşdyrýarys. Täze $\boldsymbol{a_1^1}$ frontal proýeksiýa hem **H** tekizlik bilen utgaşar we ol ***a*** gorizontal proýeksiýa bilen birlikde $\boldsymbol{X_1}$ oka geçirilen perpendikulýaryň üstünde ýerleşer.

Ortogonal çyzgyda nokadyň $\boldsymbol{a_1^1}$ täze proýeksiýasy gurmak üçin nokadyň ***a*** gorizontal proýeksiýasyndan islendik uzaklykda çalşyrylan täze $\boldsymbol{X_1}$ oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk indermek we şol perpendikulýaryň üstünde $\boldsymbol{a_{x1}}$ nokatdan başlap, öňki köne sistemadaky $\boldsymbol{a^1a_x}$ kesime deň bolan $\boldsymbol{a_x\ a_1^1}$ kesimi ölçäp goýmak ýeterlikdir.

2– nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V}{H_1}$ sistemada gurmaly / 136-njy surat /.

H tekizlik ***V*** tekizlige perpendikulýar bolan $\mathbf{H_1}$ tekizlik bilen çalşyrylanda, ýagny $\frac{V}{H}$ tekizlikler sistemasyndan $\boldsymbol{X_1}$ täze okly $\frac{V}{H_1}$ tekizlikler sistemasyna geçilende, A /***a***, $\boldsymbol{a^1}$/ nokadyň $\boldsymbol{a_1}$ täze gorizontal proýeksiýasynyň gurluşyna garap geçeliň.



136-njy surat

Ortogonal çyzgyda nokadyň täze proýeksiýasyny gurmak üçin a^1 – frontal proýeksiýadan islendik uzaklykda geçirilen täze X_1 oka perpendikulýar bolan birleşdiriji çyzyk geçirmek we öňki sistemadaky aa_x kesime deň bolan $a_{x1}\ a_1$ kesimi şol perpendikulýaryň üstünde a_{x1} nokatdan başlap ýerleşdirmek ýeterlikdir.

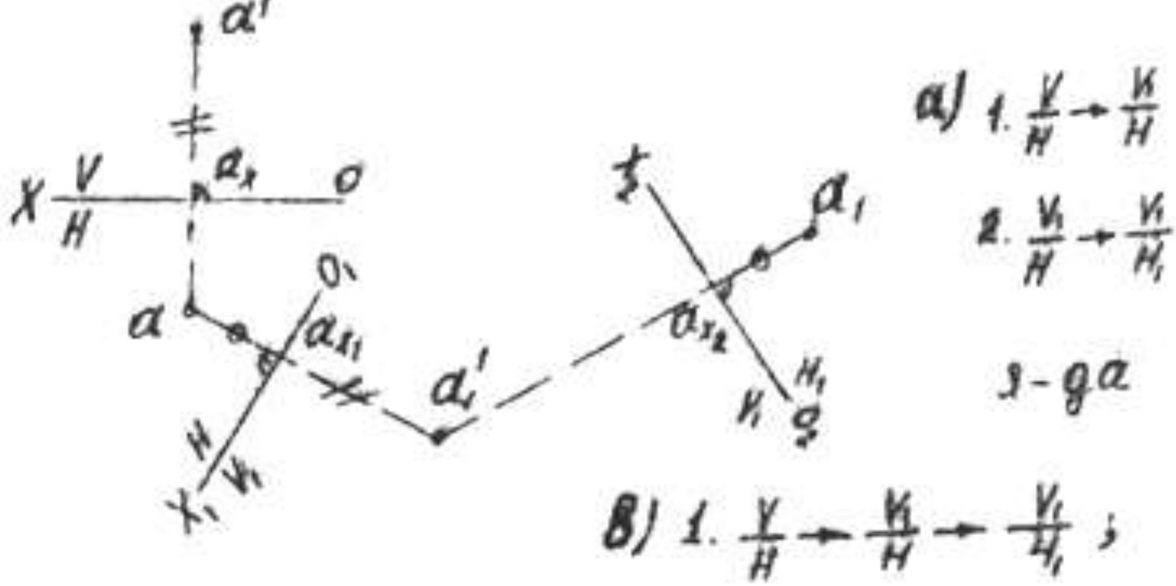
Iki sany özara perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizlikleriniň biri galan beýleki tekizlige perpendikulýar bolan täze tekizlik bilen çalşyrylanda, nokadyň täze proýeksiýalar tekizligindäki proýeksiýasyndan täze oka çenli bolan aralyk nokadyň köne tekizlikdäki proýeksiýasyndan köne oka çenli aralyga deňdir.

Meseleler çözülende proýeksiýalar tekizligini yzygiderlilikde iki, üç we ondan-da köp gezek yzygiderli çalşyrmaly bolýan halatlary duş gelýär. Her gezek proýeksiýalar tekizlikleriniň bar bolan sistemasyndan täze sistema geçmeklik beýan edilen kanunalaýyklyk esasynda amala aşyrylýar.

3-nji mesele. $\frac{V}{H}$ sistemada berlen **A** nokadyň proýeksiýalaryny täze $\frac{V_1}{H}$ hem-de $\frac{V_1}{H_1}$ sistemada yzygiderli çalşyryp gurmaly / 137 – nji surat /.

V we **H** tekizlikler yzygiderli çalşyrylanda **A** nokadyň täze proýeksiýalaryny guralyň. Eger ***V*** tekizligi V_1 tekizlik bilen, **H** tekizligi bolsa $\mathbf{H_1}$ tekizlik bilen yzygiderli çalşyrsak, onda ilki proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H}$ sistemasyna soňra bolsa proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V_1}{H}$ sistemasyndan $\frac{V_1}{H_1}$ sistemasyna geçýäris / 137-nji surat /.

Ortogonal çyzgyda $\boldsymbol{a_1^1}$ we $\boldsymbol{a_1}$ täze proýeksiýalary gurmak üçin $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$



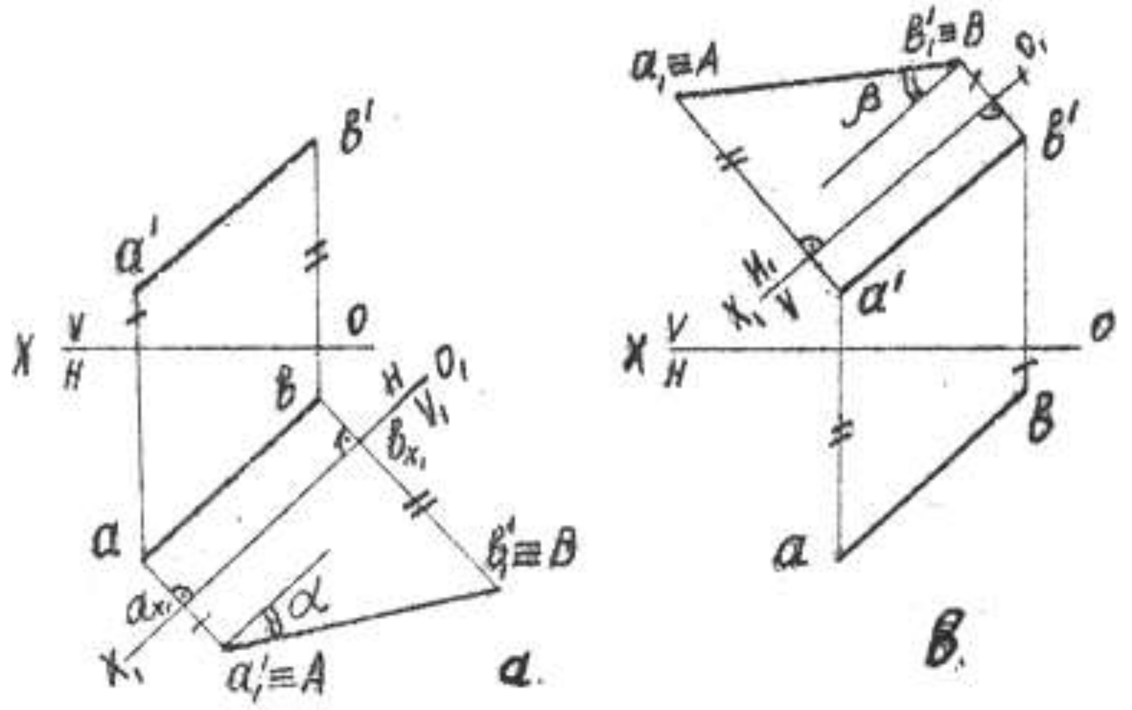
137-nji surat

sistema geçilende $\boldsymbol{a_{X\,1}\, a_1^1} = \boldsymbol{a_X\, a^1}$ deňlikden peýdalanýarys. $\frac{V_1}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H_1}$ sistema geçilen bolsa $\boldsymbol{a_1\ a_{X\ 2}} = \boldsymbol{a\ a_{X1}}$ deňlikden peýdalanýarys. Proýeksiýalar tekizliklerini yzygiderli çalşyrmagyň guralyşy we ýazylyşy çyzgydan düşnüklidir.

2. PROÝEKSIÝALAR TEKIZLIKLERINI ÇALŞYRMAK USULYNY ULANYP ÖlÇEG MESELELERINI ÇÖZMEK

Ölçeg meselelerini çözmek üçin birnäçe meseläniň çözülişine garap geçeliň.

1-nji mesele. Umumy haldaky **AB** göni çyzygyň hakyky uzynlygyny we onuň proýeksiýalar tekizliklerine ýapgytlyk burçuny kesgitlemeli / 138-nji surat /.



138-nji surat

Çyzgydan görnüşi ýaly, umumy ýagdaýda berlen **AB** kesim proýeksiýalar tekizlikleriň sistemasynda olaryň birine-de parallel däldir, diýmek, onuň proýeksiýalarynyň hiç biri hem kesimiň hakyky uzynlygyny şekillendirmez.

Kesimiň hakyky uzynlygyny tapmak üçin täze proýeksiýalar tekizligi berlen **AB** göni çyzyga parallel edilip ýerleşdirilmelidir. Onuň üçin bolsa $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistema geçilmelidir.

Meseläni çözmek üçin berlen **AB** kesime parallel bolan V_1 täze proýeksiýalar tekizligini saýlamak gerek. **AB** kesimiň V_1 täze proýeksiýalar tekizligindäki $a_1^1 b_1^1$ proýeksiýasynyň uzynlygy **AB** kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar.

Eger göni çyzyk proýeksiýalar tekizlikleriniň birine parallel bolsa, onda beýleki proýeksiýalar tekizliginde ol proýeksiýalar okuna parallel göni çyzyk bolup şekillenýändigi bize öňden bellidir. Şeýlelik bilen, eger **AB** kesime parallel bolan täze V_1 proýeksiýalar tekizligi saýlanyp alynýan bolsa, tekizligi şeýle saýlap almaklyga ortogonal çyzgyda kesimiň *ab* gorizontal proýeksiýasyna parallel bolan X_1 täze oky saýlap almaklyk gabat gelýär.

$$X_1\ II\ ab,\ \ V_1\ II\ ab,\ \ AB\ II\ V_1,\ \ a^1{}_1 \equiv A^1,\ \ b^1{}_1 \equiv B,\ a^1{}_1\, b^1{}_1 = AB$$

a we ***b*** nokatlardan $\mathbf{X_1}$ oka inderilen birleşdiriji çyzyklaryň, ýagny perpendikulýarlaryň üstünde $a_{X1}a_1^1 = a_Xa^1$, $b_{X1}b^1_1 = b_X b^1$ kesimleri ölçäp goýmak bilen alnan $a_1^1b_1^1$ göni çyzygyň frontal proýeksiýasyny alarys, ol hem **AB** kesimiň hakyky uzynlygyna deň bolar, ýagny

$a_1^1b_1^1 = AB$, sebäbi $AB \parallel V_1$.

Şunuň bilen birlikde çyzgydan görnüşi ýaly, **AB** göni çyzygyň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine ýapgytlyk burçy bolan ***a*** burçuny hem kesgitländiris. Sebäbi, proýeksiýalar tekizligi çalşyrylandan soň umumy haldaky **AB** kesim frontal göni çyzyk ýagdaýyny eýeländir. Şonuň üçin hem **AB** göni çyzygyň täze $a_1^1b_1^1$ frontal proýeksiýasy bilen täze $\mathbf{X_1}$ proýeksiýalar okunyň arasyndaky ***a*** burçy **AB** göni çyzygyň **H** tekizligine bolan iň uly ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger-de **AB** göni çyzygyň / kesimiň / ***V*** tekizligine ýapgytlyk burçuny ölçemeli bolsa, onda $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V}{H_1}$ sistema geçirmeli, hem-de X_1 täze oky a^1b^1 proýeksiýa parallel edip geçirmeli. Gurluş çyzgydan düşnüklidir.

135-njy ***a*** suratdan görnüşi ýaly, umumy haldaky berlen **AB** göni çyzyk hususy /frontal/ ýagdaýa geçendir, ýagny $AB \parallel V_1$; $ab \parallel V_1$;

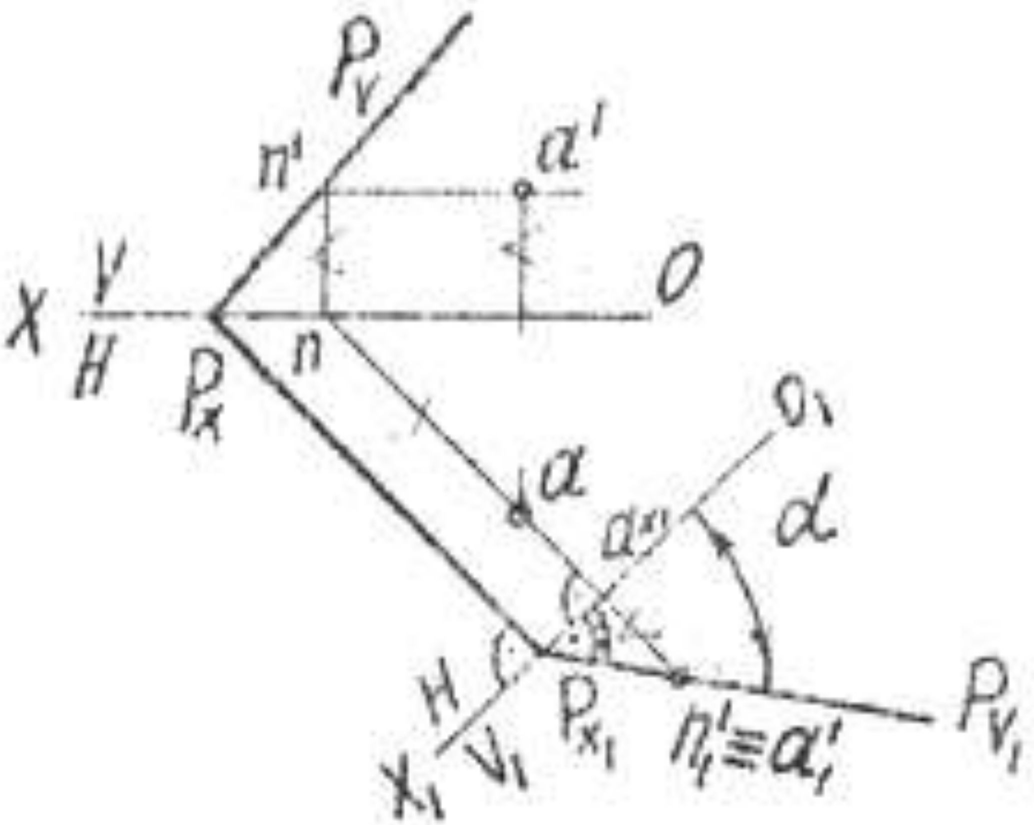
$ab \parallel X_1$; $a_1^1b_1^1 = AB$ frontal göni çyzyga öwrülendir.

138-nji ***b*** suratda bolsa ýagdaýda berlen **AB** göni çyzyk gorizontal göni çyzyk bolandyr. $AB \parallel H_1$, $a^1b^1 \parallel H_1$, $a^1b^1 \parallel X_1$, $a_1b_1 = AB$. Şonuň üçin hem **AB** göni çyzygyň täze a_1b_1 gorizontal proýeksiýasy bilen täze X_1 proýeksiýalar okunyň arasyndaky alnan burçy bolsa, göni çyzygyň ***V*** tekizligine bolan ýapgytlyk burçuna deňdir.

Eger-de berlen umumy ýagdaýdaky **AB** göni çyzygy proýektirleýji göni çyzyk etmekçi bolan bolsak, onda proýeksiýalar tekizligini yzly-yzyna iki gezek çalşyrmaly bolardyk.

1. $\frac{V}{H} \to \frac{V_1}{H} \to \frac{V_1}{H_1}$; $V_1 \parallel AB$; $H_1$$AB$ çyzgysyny, talyplar özüňize gurmaklyk maslahat berilýär.

2-nji mesele. **P** tekizlik yzlary bilen $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. $\frac{V_1}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_1} yzyny we **H** tekizligine ýapgytlyk ***a*** burçuny gurmaly / 139-njy surat /.



139-njy surat

Berlen umumy haldaky **P** tekizlik $\frac{V}{H}$ sistemada berlipdir. Çalşyrmak usulyny peýdalanyp, $\frac{V}{H}$ sistemadan $\frac{V_1}{H}$ sistemada bu tekizligiň täze P_{V_1} yzyny gurmaly, ýagny frontakl proýektirleýji ýagdaýyna geçirmeli.

/ P□*V_1* /.

Täze $\boldsymbol{X}_1$ oky $\boldsymbol{P}_H$ gorizontal yza perpendikulýar edip geçirýäris.

X_1 □□P_H

$\boldsymbol{P}_H$ gorizontal yzyň $\boldsymbol{X}_1$ täze ok bilen kesişýän nokady – tekizligiň P_{X_1} birleşme nokadyny kesgitleýär. Täze frontal yzy gurmak üçin ikinji nokadyň bolmagy zerur. Munuň üçin **P** tekizlige degişli erkin **A** nokady alýarys we onuň täze $\boldsymbol{a_1^1}$ proýeksiýasyny gurýarys. Muny şeýle ýerine ýetirýäris: **A** nokadyň gorizontal proýeksiasy bolan *$\boldsymbol{a}$* nokatdan täze $\boldsymbol{X}_1$ oka perpendikulýar birleşdiriji çyzyk inderýäris, soňra a_{X_1} nokatdan şol perpendikulýaryň üstünde - ugrunda $\boldsymbol{nn^1} = \boldsymbol{a_X a^1}$ deň bolan kesimi ölçäp goýýarys. Şondan soň $\boldsymbol{n_1^1}$ ýagdaýyny tapýarys. Şol nokatda $\boldsymbol{a_1^1}$ bolýar. $\boldsymbol{n_1^1} = \boldsymbol{a_1^1}$;

Soňra $\frac{V}{H}$ sistemada **A** nokadyň $\boldsymbol{a_1^1} = \boldsymbol{n_1^1}$ täze frontal proýeksiýasynyň üstünden we **P** tekizligiň P_{X_1} birleşme nokadynyň üstünden P_{V_1} täze frontal yzy geçirýäris.

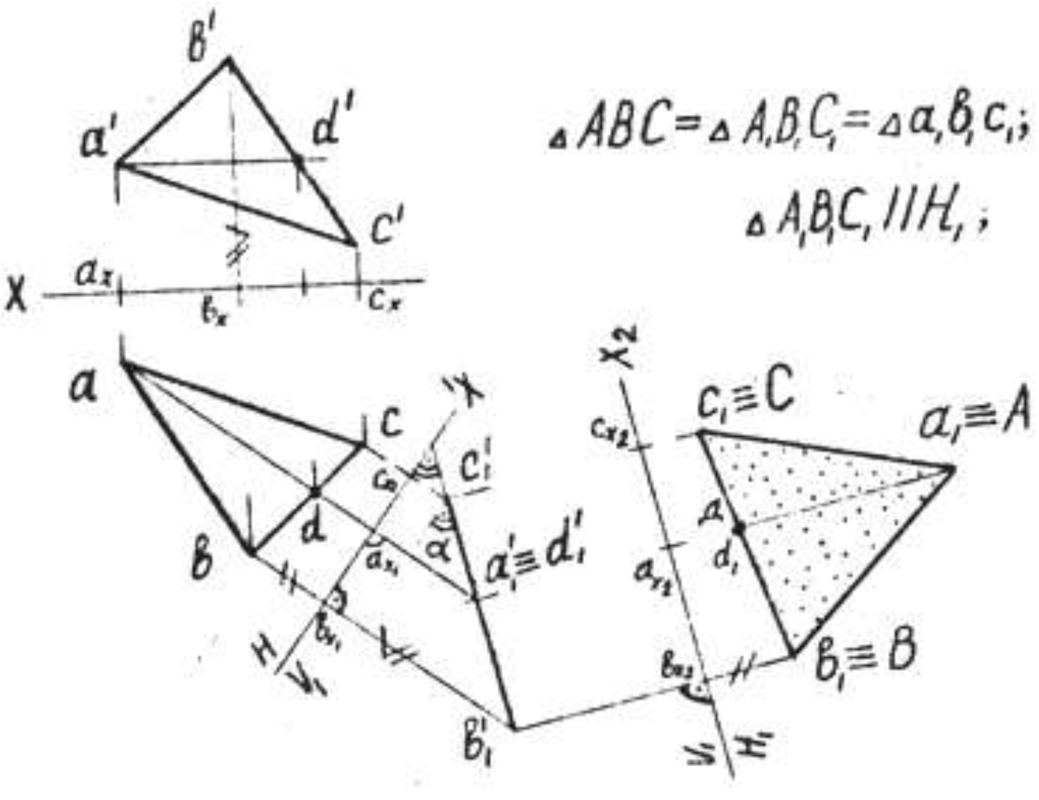
Berlen umumy haldaky **P** tekizligiň **H** gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy täze frontal P_{V_1} yz bilen **OX₁** ok aralygyndaky ***a*** burçuna deňdir.

3-nji mesele. Giňişlikde erkin ýagdaýda ýerleşen **ABC** üçburçlugyň proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçuny we bu üçburçlugyň hakyky ululygyny kesgitlemeli /140 – nji surat /.

Berlen üçburçlugyň tekizligine parallel tekizlige üçburçluk üýtgewsiz hakyky ululygynda proýektirlener. Şonuň üçin hem meseläni çözmek üçin şeýle proýeksiýalar tekizligini saýlap almak gerek. Berlen üçburçlugyň tekizligi proýeksiýalar tekizlikleriniň $\frac{V}{H}$ sistemasynda umumy haldaky tekizlikdir, şeýlelikde, oňa parallel bolan tekizlik ***V*** we **H** tekizlikleriniň hiç birine-de perpendikulýar bolmaz we proýeksiýalar tekizligi hökmünde kabul edilip bilinmez. Şeýlelik bilen proýeksiýalar tekizlikleriniň diňe birini çalşyrmak bilen meseläni çözmek mümkin däldir. Şonuň üçin hem proýeksiýalar tekizlikleriniň ikisini hem yzygiderli çalşyrmak ýeterlikdir.

Täze proýeksiýalar tekizliginiň birinjisini – V_1, **ABC** üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar edip alýarys. Şeýle ýagdaýda V_1 tekizlik bu üçburçlugyň tekizliginiň üstünde ýatan haýsy hem bolsa bir göni çyzyga perpendikulýar bolmalydyr. Şeýle göni çyzyk hökmünde üçburçlugyň tekizliginiň **AD** gorizontalyny saýlap alýarys. Proýeksiýalar tekizligini bu saýlap almaklyga ortogonal çyzgyda gorizontalyň ***ad*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolan täze X_1 proýeksiýalar oky saýlap almaklyk gabat gelýär. ***ad*** täze sistemada ol $a_1^1 d_1^1$ nokat bolup proýektirlener.

ABC üçburçlugyň täze V_1 tekizligine täze frontal proýeksiýasy $c_1^1 a_1^1 b_1^1$ göni çyzyk bolup proýektirlener, sebäbi ***ad***□V_1; ***ad*** □□□***ABC*** onda □***ABC*** □V_1.



140-nji surat

Proýeksiýalar tekizligini birnji gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky **ABC** üçburçluk täzeki sistemada, ýagny $\frac{V_1}{H}$ sistemada frontal proýektirleýji (□$\boldsymbol{A_1B_1C_1}$□$\boldsymbol{V_1}$) tekizlik boldy. Diýmek, **ABC** üçburçlugynyň gorizontal proýeksiýalar tekizligine bolan ýapgytlyk burçy üçburçlugyň täze $\boldsymbol{a_1^1b_1^1c_1^1}$ proýeksiýasy bilen täze $\boldsymbol{X_1}$ proýeksiýalar okunyň arasyndaky emele gelen burça, ýagny ***a*** burça deňdir.

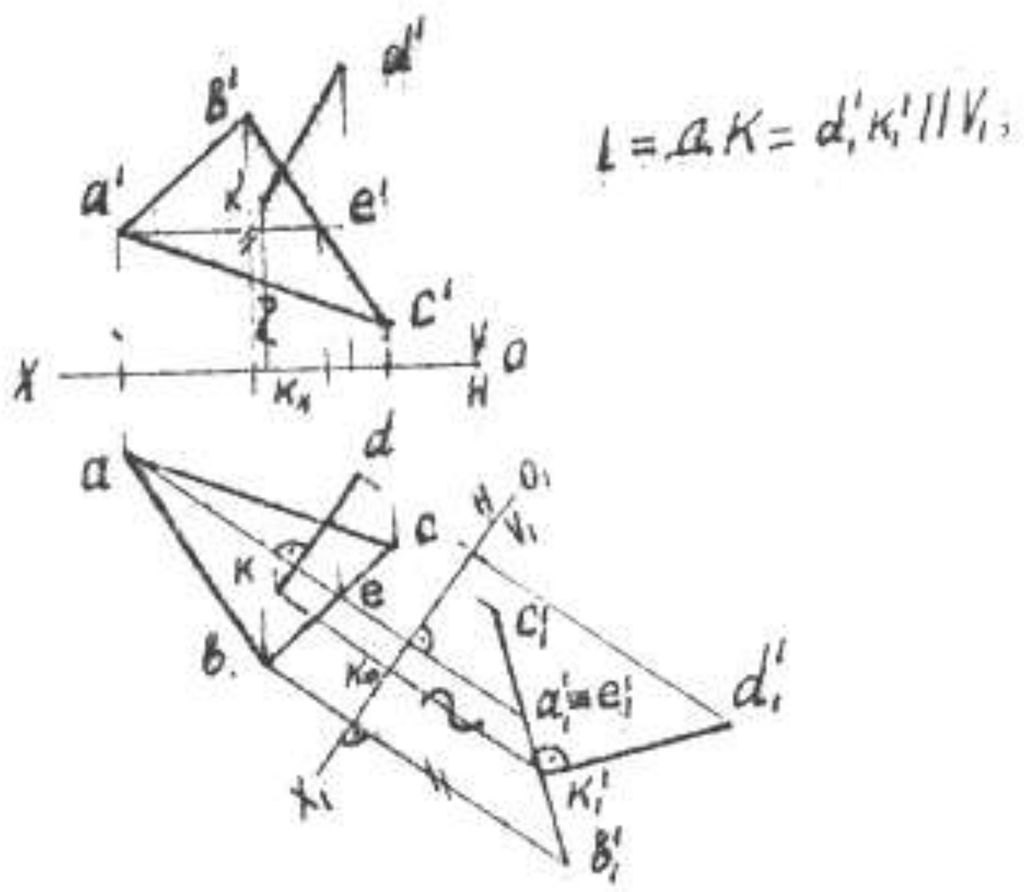
H tekizligi üçburçlugyň tekizligine parallel bolan täze H_1 gorizontal proýeksiýalar tekizlik bilen çalşyrýarys, munuň üçin ortogonal çyzgyda proýeksiýalaryň täze $\boldsymbol{X_2}$ okuny üçburçlugyň täze frontal proýeksiýasyna, ýagny $\boldsymbol{c_1^1}$,$\boldsymbol{a_1^1}$ we $\boldsymbol{b_1^1}$ göni çyzyga parallel edip geçirýäris.

Depeleriň gorizontal ***a***, ***b*** we ***c*** proýeksiýalaryndan $\boldsymbol{X_1}$ oka çenli aralygy ölçäp, soňra olary $\boldsymbol{c_1^1}$,$\boldsymbol{a_1^1}$ we $\boldsymbol{b_1^1}$ nokatlardan geçirilen perpendikulýaryň üstünde $\mathbf{c}_{X_2}$, $\boldsymbol{a}_{X_2}$ we $\boldsymbol{b}_{X_2}$-den $\boldsymbol{a_{X_1}a = a_{X_2}a_1}$;

$\boldsymbol{c_{X_1}c = c_{X_2}c_1}$ we $\boldsymbol{b_{X_1}b = b_{X_2}b_1}$ kesimleri goýýarys, hem-de $\boldsymbol{a_1}$,$\boldsymbol{c_1}$ we $\boldsymbol{b_1}$ nokatlary alyp, olary özara birleşdirýäris. Şeýlelikde üçburçlugyň hakyky ululygyna deň bolan täze $\boldsymbol{a_1b_1c_1}$ proýeksiýany alarys, ýagny □ $\boldsymbol{a_1b_1c_1}$□□□□$\boldsymbol{ABC}$ = □$\boldsymbol{A_1B_1C_1}$.

Proýeksiýalar tekizligini iki gezek çalşyranymyzdan soň, umumy ýagdaýdaky berlen **P** / □***ABC*** / tekizlik birinji gezek proýektirleýji tekizlik / $\boldsymbol{a_1^1b_1^1c_1^1}$□$\boldsymbol{V}$ / bolupdy, häzir bolsa H_1 tekizligine parallel boldy, ýagny gorizontal tekizlik boldy. Onda $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ // $\boldsymbol{H_1}$ şonuň üçin hem üçburçlugyň gorizontal proýeksiýasy $\boldsymbol{a_1b_1c_1}$ berlen üçburçlugyň hakyky ululygydyr:

4-nji mesele. D nokatdan umumy ýagdaýda berlen **ABC** üçburçlugyň tekizligine çenli bolan iň ýakyn ***l*** aralygy tapmaly /141-nji surat /.



141-nji surat

Üçburçlugyň tekizligi $a_1^1b_1^1c_1^1$ göni çyzyga proýektirlener ýaly, ony frontal proýektirleýji tekizlik bilen çalşyrýarys. Bu ýerde hem gurluş edil geçen mysallardaky ýalydyr. Mundan başga-da proýeksiýalar tekizlikleriniň täze sistemasynda **D** nokadyň proýeksiýasyny tapmak gerek. Bu bolsa adaty usul bilen amala aşyrylýar.

Soňra d_1^1 nokatdan **ABC** üçburçlugyň tekizliginiň täze $a_1^1b_1^1c_1^1$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar inderýäris we perpendikulýaryň esasy bolan k_1^1 nokady alýarys.

$d_1^1k_1^1$ – **D** nokatdan **ABC** üçburçlugyň tekizligine çenli gözlenýän ýakyn aralyk bolar. $d_1^1k_1^1 = DK = l$

DK perpendikulýaryň H we ***V*** tekizliklerde proýeksiýalary tapylanda, ***dk*** gorizontal proýeksiýanyň ***AE*** gorizontalyň ***ae*** gorizontal proýeksiýasyna perpendikulýardygyny göz öňüne tutmak gerek. $dk \perp ae$

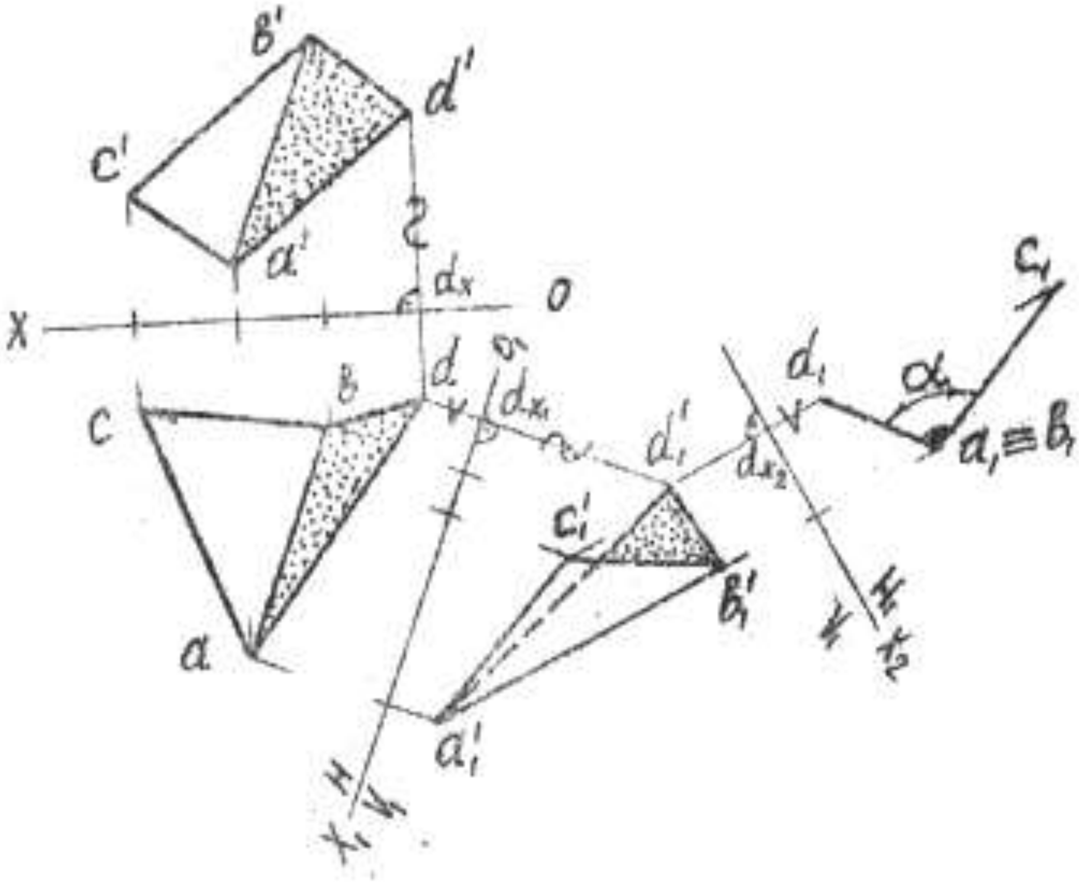
K^1 – frontal proýeksiýany **K** nokatdan **X** oka perpendikulýar edilip geçirilen baglanyşyk çyzgynyň üstünde tapýarys. K^1 nokat **X** okundan K_1^1 nokatdan X_1 oka çenli aralyga deňdir, ýagny $K_XK_1^1 = K_XK^1$;

Gurluşynyň dogrulygyny barlanyp görlende d^1k^1 – berilse **ABC** – üçburçlugyň frontalynyň frontal proýeksiýasyna perpendikulýar bolmalydyr, diýmek **DK** $\perp$ **ABC.**

5-nji mesele. **AB** göni çyzyk boýunça kesişýän **CAB** we **DAB** umumy ýagdaýdaky üçburçluklaryň proýeksiýalary berlipdir. Tekizlikleriň umumy **AB** gapyrgasyndaky iki granly burçunyň ululygyny kesgitlemeli / 142-nji surat /.

Iki tekizligiň arasyndaky burç bu tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar bolan tekizligiň üstündäki çyzyk burçy bilen ölçelýär.

Ikigranly burç onuň gapyrgasyna perpendikulýar bolan proýeksiýalar tekizligine hakyky ululygynda proýektirlenýär.



142-nji surat

Meseläni çözmek üçin proýeksiýalar tekizlikleriniň ikisini-de yzygiderli çalşyrýarys, ilki **AB** gapyrga täze V_1 proýeksiýalar tekizligini parallel bolar ýaly edýäris, soňra bolsa ikinji gezek H_1 proýeksiýalar tekizligini oňa perpendikulýar ýerleşdirýäris.

Berlen bu meselede ilki ***V*** tekizlik **AB** gapyrga parallel bolan V_1 tekizlik bilen, soňra bolsa **H** tekizlik **AB** gapyrga perpendikulýar bolan H_1 tekizlik bilen çalşyrylandyr / 142-nji surat /.

V_1 tekizlik alnanda, X_1 ok **AB** gapyrganyň ***ab*** gorizontal proýeksiýasyna parallel edilip ýerleşdirildi we ikigranly burçuň täze c_1^1, a_1^1, b_1^1 we d_1^1 frontal proýeksiýasy tapyldy. **H** tekizlik H_1 tekizlik bilen çalşyrylanda X_2 ok **AB** gapyrganyň täze $a_1^1 b_1^1$ frontal proýeksiýasyna perpendikulýar edilip alyndy we ikigranly burçuň ululygyny kesgitleýän çyzyk burçuň täze gorizontal proýeksiýasy guruldy.

Gurluş adaty usul bilen gurlandyr we çyzgydan düşnüklidir.

Tema 9
Üstleriň emele gelşi, köpgranlyklar we aýlama üstler.

Sapagyň meýilnamasy:

1.Üstler barada umumy düşünje.
2.Köpgranlyklar.
3. Aýlama üstler.
4. Tekizlik bilen üste degişli nokatlary tapmak.

1. Durmuşda duş gelýän üstler dürli–dürlidir.Olaryň her biriniň emele gelşi üýtgeşikdir.Üstleriň birnäçesi matematiki kanunalaýyklyklara boýun egýän bolsalar,beýlekilerini matematiki taýdan kesgitlemek mümkin däldir.Matematikada nokatlaryň üznüksiz köplüginde,eger-de ol köplügiň nokatlarynyň koordinatalarynyň arasynda F(X,Y,Z)=0 görnişdäki deňleme bilen kesgitlenýän baglanyşyk anyklanan bolsa,onda ol köplüge üst diýilýär.
Eger F(X,Y,Z) funksiýa n derejeli köplenç bolsa,onda ol üste algebraik üst,eger-de haýsy hem bolsa transendent funksiýa bolsa, onda oňa transen- dent üst diýilýär.Algebraik üstüň tertibi köplenç derejesi bilen kesgitlenýär, ýagny köpçleniň derejesi näçä deň bolsa,üstüň tertibi hem şoňa deňdir. Üstüň tertibini onuň islendik ýagdaýdaky kesiji tekizlik bilen kesişýän egri (kä halatlarda dagaýan ýa-da hyýaly)çyzygynyň tertibi boýunça-da ýa-da onuň özüne degişli bolmadyk islendik bir göni çyzyk bilen kesişýän (hakyky we hyýaly)nokatlarynyň sany bilen-de kesgitlemek bolýar.Üste giňişlikde haýsy hem bolsa bir çyzygyň belli bir kanun boýunça hereket edip üýtgeýän yzygiderli ýagdaýlarynyň toplumy hökmünde-de garamak bolar.Şeýle ýagdaýda emele gelen üste kinematiki üst diýilýär.Hereket edip üsti emele getirýän çyzyga üstüň emelegetirijisi diýilýär.Ol emelegetiri- jiniň hereketiniň ugruny haýsy hem bolsa başga bir egri (ýa-da göni)çyzyk bilen gönükdirmek bolar. Ol egri çyzyga üstüň gönükdirijisi diýilýär.Emele getiriji hereket edýärkä özüniň görnüşüni üýtgetmän ýa-da tükeniksiz üýtgedip hem biler.

Üsti kesgitleýän nokatlaryň ýa-da çyzyklaryň köplügine üstüň karkasy diýilýär. Nokatlaryň ýa-da çyzyklaryň köplügine baglylykda karkaslar nokatly we çyzykly karkaslara bölünýärler.Köplenç ýagdaýlarda üstler çyzykly karkasly berilýär.

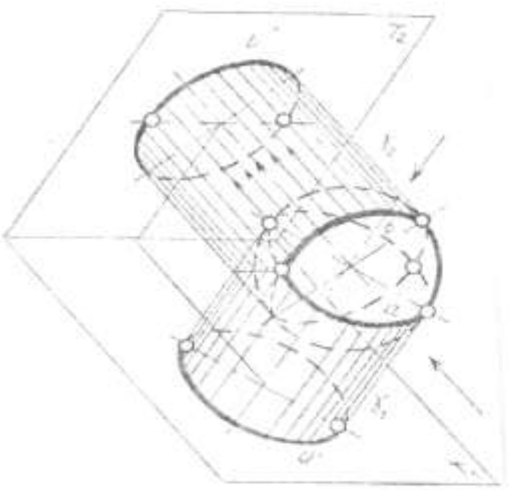
Çyzykly karkas özaralarynda kesgitli baglanyşykda we emele gelşi ýeke-täk kanunly bolan çyzyklaryň köplügidir.Eger şol çyzyklaryň arasyndaky baglanyşyk üznüksiz funksiýa bilen ýola goýlan bolsa, onda oňa üznüksiz,bolmasa-da üzňe-üzňe (diskret)karkas diýilýär.Üznüksiz karkas üsti doly kesgitleýär.Çünki üstüň her bir nokadyndan karkasyň çyzygy geçýär.Adatça üznüksiz karkas edilip berlen üstüň parallel tekizlikler bilen kesilende emele gelýän tekiz çyzyklary alynýar.

Üstüň kesgitleýjisi. Üsti düýpleýin kesgitleýän, biri-birine garaşsyz bolan şertleriň toplumy- na üstüň kesgitleýjisi (üsti kesgitleýänler)diýilýär.Üstüň kesgitleýjilerine,üsti kesgitieýän geomet- riki figuralar (nokatlar,çyzyklar, üstler)we olaryň özaralaryndaky gatnaşyklar girýärler.

Üstleriň çyzgyda şekillendirilişi.Üstüň serhedi. Üsti çyzgyda şekillendirmek üçin ony doly kesditleýän elementleriň,ýagny ony kesgitleýän elementleriniň proýeksiýalary berilmelidir (görkezilmelidir).

Eger-de üste degişli islendik nokadyň bir proýeksiýasy boýunça onuň ikinji proýeksiýasy ny tapyp bolýan bolsa onda üstüň çyzgyda doly berildigi bolýar.Üsti onuň kesgitleýjisi doly kesgitlemelidir. Ýöne ol kesgitleýjiniň elementleriniň proýeksiýalary üsti hemme ýagdaýlarda aýdyňlaşdyrmaýalar.Üsti özüniň proýeksiýasy boýunça has hem aýdyňlaşdyrmak üçin kesgitleýjiniň proýeksiýasyndan başga-da üstüň proýeksiýalar tekizligindäki serhedi (keşbi) görkezilýär.Berlen üsti gurşap alýan $\gamma 1$ we $\gamma 2$ proýektirlenýän üstleriň proýeksiýalarynyň T1we T2 tekizlikleri bilen degişlilikde kesişýän a′ we b" çy-zyklaryna üstüň serhedi diýilýär.Ol çyzyklar üstüň degişli proýeksiýalaryň serhetleridir.Serhetleriň hemme nokatlarynyň görünýändikleri mälimdir.Proýektirleýän üstleriň berlen üst bilen galtaşýan a we b çyzyklaryna sudur çyzyklary ýa-da görünme (görünýän) sudurlary diýilýär.

Üstüň ol çyzyklardan bir tarapda, degişlilikde ýokarda we öň tarapda ýatan elementleri T1weT2 tekizliklerde görünýändir, galanlary bolsa görünýändäldirler.



143– nji surat.

2. Köpgranlyklaryň proýeksiýalary.Hemme taraplary tekizlikler bilen çäklenen jisimlere köpgranlyklar diýilýär.Köpgranlyklardan durmuşda köplenç gabat gelýänleri prizmalar we piramidalar.

Köpgranlyklaryň nokatlardan (depelerden),göni çyzyklardan (gapyrgalardan) we tekiz figuralardan (granlardan) düzülendikleri üçin olaryň proýeksiýalary şol nokatlaryň,göni çyzyklaryň we tekiz figuralaryň proýeksiýalaryndan ybaratdyr.Şonuň üçin-de köpgranlyklaryň proýeksiýasyny gurmak üçin,onuň hemme depesiniň proýeksiýasyny gurup,emele gelen proýeksiýalary olaryň giňişlikde birleşişleri ýaly edip birleşdirmelidir.Köpgranlyklaryň proýeksiýalary gurlanda olaryň görünýän we görünmeýän böleklerini kesgitlemek hökmandyr.143 – nji suratda prizmanyň T^1 tekizlikdäki proýeksiýasynyň gurluşy görkezilendir.Gapdal gapyrgalarynyň parallel bolandyklary üçin, olaryň proýeksiýalary hem paralleldirler.Gapyrgalaryň emele gelen proýeksiýalarynyň hemmesi görünýän däldir.

Dürli tekizliklerde ýatýan we parallel göçürme arkaly gabat getirilýän tekiz iki köpburçlykdan we bu köpburçlyklaryň degişli nokatlaryny birleşdirýän ähli kesimlerden ybarat köpgranlyga prizma diýilýär. (144 – nji surat) Köpburçlyklara prizmanyň esaslary, degişli depeleri birikdirýän kesimlere bolsa prizmanyň gapdal gapyrgalary diýilýär.

143 – nji suratda bäşburçly prizma şekillendirilendir.Onuň esasylary A1A2..., A5,$A^1$1 $A^1$2...A5 bäşburçlukdyrlar.XX-esaslaryň degişli nokatlaryny birikdirýän kesim.Pirizmanyň gapdal gapyrgalary A1$A^1$1,A2$A^1$2...,A5$A^1$5 kesimler.Prizmanyň gapdal granlary – A1A2.

$A^1$2$A^1$1,A2A3,$A^1$3$A^1$2... parallelogramlar.

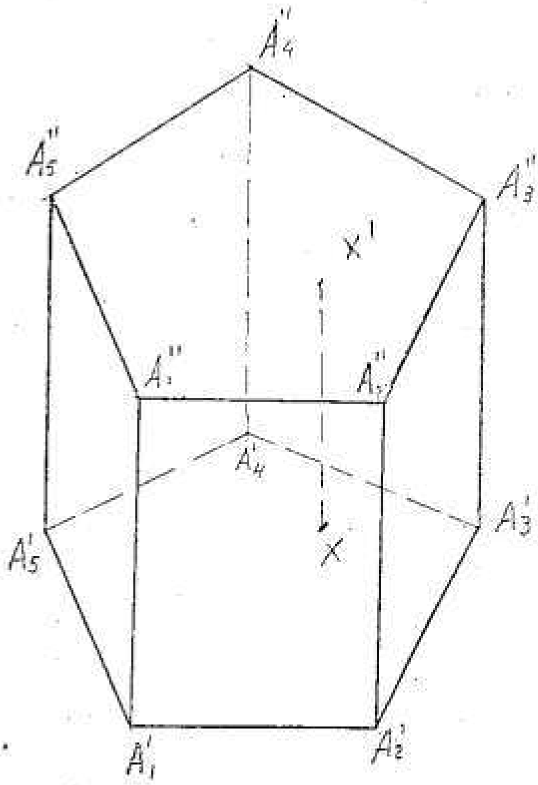
Tekizköpburçluklardan (piramidanyň esasyndan),esasyň tekizliginde ýatmaýan nokatdan (piramidanyň depesinden)we piramidanyň depesini esa syň nokatlary bilen birikdirýän ähli kesimlerden ybarat köpgranlyga pirami-da diýilýär. (144 – nji surat).

Piramidanyň depesini esasynyň depeleri bilen birikdirýän kesimlere gapdal gapyrgalar diýilýär.Piramidanyň üsti esasdan we gapdal granlardan ybaratdyr. Her bir gapdal gran – üçburçluk.Onuň depeleriniň biri piramidanyň depesi , garşysynda ýatan tarapy – piramidanyň esasynyň tarapy piramidanyň beýikligi diýilýär.

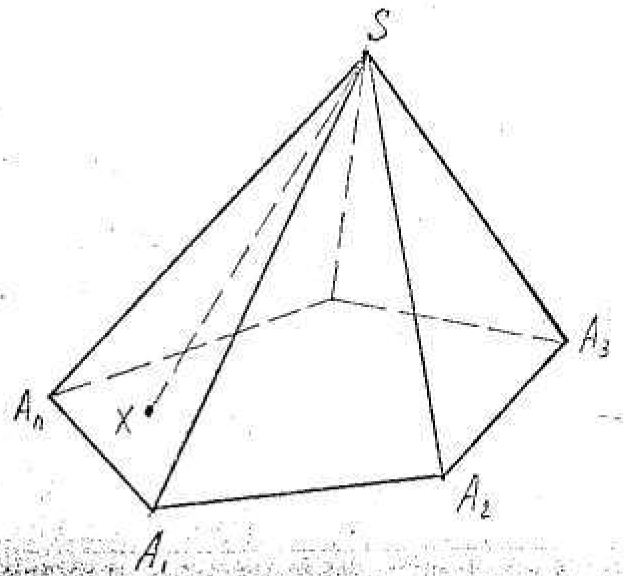
Eger piramidanyň esasy köpburçluk bolsa, onda oňa köpburçly piramida diýilýär.Üçburçly piramida tetraedr hem diýilýär.

144 – nji suratda şekillendirilen piramidanyň esasy A1 A 2A3An, gapdal gapyrgalary – SA1,SA2,.....,san gapdal granlary – SA1A2,SA2A3,...., A3AnS.

Köpgranlyklar nokatlardan (depelerden),göni çyzyklardan (ga-pyrgalardan we tekizliklerden,granlardan düzülendirler,şonuň üçinem olaryň proýeksiýalaryny gurmaklyk nokadyň,göni çyzygyň we tekizligiň proýeksiýalaryny gurmaklyga syrygýandyr.Köpgranlygyň proýeksiýalary gurlanda olaryň görünýändiklerini kesgitlemek hökmandyr.



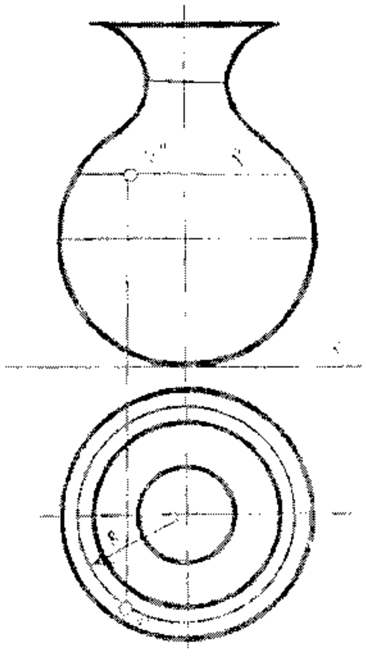
1-nji surat.



144-nji surat

3.Aýlama üstler.Islendik tekiz ýa-da giňişlik çyzygyň haýsy hem bolsa üýtgemeýän okuň daşynda aýlanyp emele getiren üstüne aýlanma üsti diýilýär. Aýlanma üsti emele getirýän çyzyga aýlanma üstüň emele getirijisi diýilýär. Ol emelegetirijiniň her bir nokady okuň daşynda töwerek boýunça aýlanýar. Ol töwereklere aýlanma üstüň parallelleri diýilýär.Şol paralleleriň iň kiçi we iň uly radiuslaryna degişlilikde aýlanma üstüň bokurdagy we ekwatory diýilýär.

(145 – nji surat) Aýlanma üstüň okdan geçýän her bir tekizlige meridional tekizlik, onuň aýlanma üsti kesýän çyzygyna bolsa aýlanma üstüň merdiany diýilýär. T1,T2,T3 tekizliklere parallel bolan meridional tekizliklere esasy merdional tekizlikler, olaryň aýlanma üstüni kesýän çyzyklaryna bolsa üstüň esasy meridianlary diýilýär.



145 – nji surat.

4.Tekizlik bilen üstlere degişli nokatlary tapmak. Tekizlik bilen üstedegişli nokatlary tapmak üçin aşakdaky funksiýalary ýerine ýetirmeli:

1. Berlen α üsti we β tekizligi kesýän kömekçi γ kesiji tekizligi geçirmeli.

2. Kömekçi kesiji tekizligiň berlen üst we tekizlik bilen degişlilikde kesişýän α we MN çyzyklaryny tapmaly.

3. Emele gelen α we MN çyzyklaryň özara kesişýän A we B nokatlaryny kesgitlemeli.

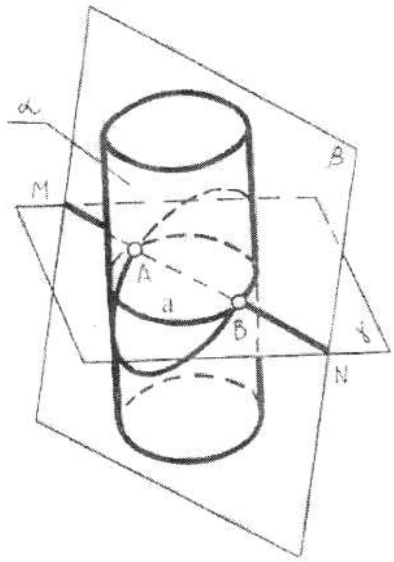
Emele gelen A we B nokatlar berlen α üste we β tekizlige degişlidirler,şo-nuň üçin ol nokatlar tekizlik bilen üstüň kesişme çyzygyna hem degişli-dirler.

Şunuň ýaly yzygiderlilikde kömekçi kesiji tekizlikleri geçirip, berlen üste we tekizlige degişli bolan islendik sandaky umumy nokatlar alynýar.

Bellik. Kesiji üstüň berlen üst we tekizlik bilen aýratynlykda kesişýän α we MN çyzygyny tapmaklyk, berlen üstüň we tekizligiň kesişme çyzyklaryny tapmaklykdan has kyn bolmazlygy üçin kesiji tekizligi,berlen üst we tekizlik bilen kesişende ýönekeý çyzyklar (ýagny çyzgyjyň we sirkulyň kömegi bilen çyzylýan çyzyklar – töwerek we göni çyzyk) emele geler ýaly edip saýlamalydyr.

Tapylan umumy nokatlary yzygiderli birleşdirmeklik üçin şol nokat-laryň, köpgranly üstleriň şol bir granlarynda ýatýanlaryny, egri üstleriň bolsa ýanaşyk ýerleşen emelegetirijilerinde ýatýanlaryny anyklamaly (kesgitlemeli) we şondan soňra yzygiderli birleşdirmeli.

Görünmekligi kesgitlemek. Emele gelen kesişme çyzygyň proýeksiýa-larynyň berlen üstleriň ikisiniň hem T1 T 2we T3 tekizliklerdäki degişli proýeksiýalarynyň görünýän böleklerinde ýerleşen bölekleri görünýän-dir,galan bölekleri bolsa görünýän däldir.(146 – njy surat).



146 – njy surat.

Tema: 10

Aýlanma üstlere galtaşma tekizlikleri geçirmek:

Sapagyň meýilnamasy:

1. **Egri üstlere galtaşýan tekizligi geçirmek.**
2. **Şaryň,konusyň,silindriň üstünde ýatan we üste degişli bolmadyk nokatlardan üste galtaşýan tekizlikler geçirmek.**
3. **Çyzykly üstlere galtaşýan tekizlikler geçirmek.**

1)Üste degişli nokatdan, üstde geçirilen egri çyzyklara galtaşýan göni çyzyklaryň köplügi galtaşýan tekizlikdir. Üste degişli nokatdan üste galtaltaşýan tekizligi gurmak üçin, şol nokatda kesişýän we üste degişli bolan iki sany çyzygy geçirip, şol çyzyklara galtaşýan diňe iki sany göni çyzygy gurmak hem ýeterlikdir. Şeýle ýagdaý differensial geometriýa dersinden bellidir.

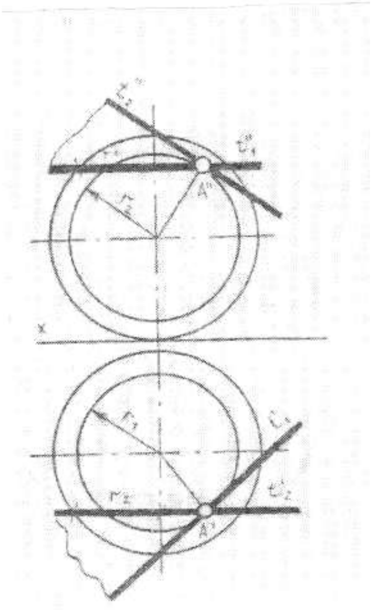
Galtaşýan tekizlige galtaşýan nokatdan perpendikulýar bolup geçýän göni çyzyga üste geçirilen perpendikulýar (normal) diýilýär.

Eger-de üste degişli nokatdan üste degişli bolup geçýän çyzyk göni çyzyk bolsa, onda ol göni çyzyk şol bir wagtyň özünde üste şol nokatdan geçýän galtaşýan çyzyk hem bolup biler. Şeýle ýagdaý hem defferensial geometriýa dersinde subut edilendir.

Üste galtaşýan çyzyk we perpendikulýar geçirmeklik durmuşda birnäçe mesele-ler işlenende giňden ulanylýar.

2) 1-nji mysal. Şarda ýatan A nokatdan şara galtaşýan tekizlik geçirmeli (147-nji surat).

Çözülişi: A nokatdan şara degişli iki sany töwerek geçirmeli. Olaryň birini T1 tekizlige, ikinji töweregi bolsa T2 tekizlige parallel edip geçirmek amatlydyr. Ola-ryň birinjisiniň öňünden proýeksiýasy göni çyzyk, çokarsyndan proýeksiýasy bolsa hakyky ululykda töwerek bolar. Ol töwerege t1 galtaşýan göni çyzyk geçirmeli. Onuň öňünden proýeksiýasy töweregiň öňünden proýeksiýasy bilen gabat geler, ýokarsyndan proýeksiýasy bolsa göni burçuň proýeksiýasy esasyndaky teorema görä hem-de töweregiň radiusynyň galtaşýan çyzyga perpendikulýar bolanlygy üçin A′ nokatda r′ radiusly töwerege galtaşyp geçer. A nokatdan ikinji töwerege hem galtaş-ýan çyzyk geçirmeli. Galtaşýan çyzygyň ýokarsyndan proýeksiýasy töweregiň ýokarsyndan proýeksiýasy bolan göni çyzyk bilen gabat gelýär. Öňünden proýeksi-ýasy bolsa töweregiň öňünden proýeksiýasynda hakyky ululygy bolan r2 radiusly töwerege A″ nokatda galtaşyp geçer. t1 we t2 galtaşýan çyzyklar şara degişli bolan A nokatdan şara galtaşyp geçýän tekizligi kesgitleýär.



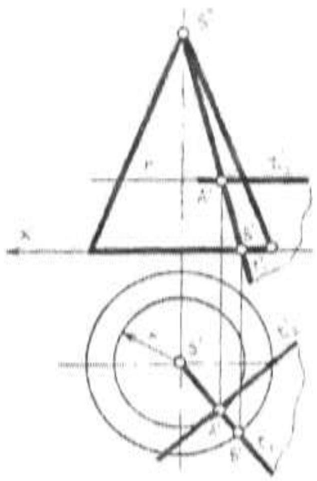
147-nji surat.

Bellik. 1. A nokat şaryň içinde ýatsa, ol nokatdan şara hiç hili galtaşýan tekizlik geçirip bolmaz .

2. A nokat şaryň üstüne degişli bolman, ondan belli bir aralykda ýerleşse, onda A nokatdan şaryň üstüne galtaşýan tekizlikleriň tükeniksiz sandakysyny geçirip bolar.

2-nji mysal. Konusda ýatýan A nokatdan konusa galtaşýan tekizlik geçirmeli (148 -nji surat).

Çözülişi: Eger A nokatdan konusuň SB emelegetirijisi geçirilse, onda ol emelegetiriji şol bir wagtyň özünde galtaşýan çyzyk hem bolýar.Ol t1 bilen bellenendir. Soňra A nokatdan konusda ýatan we T1 tekizlige parallel bolan tözwerek geçirmek amatlydyr. Ol töwerege hem galtaşýan t2 göni çyzyk geçirmeli. Onuň nähili geçirilişine 1-hji mysalda seredildi. t1 we t2 kesişýän göni çyzyklar konusa galtaşýan tekizligi kesgitleýär.



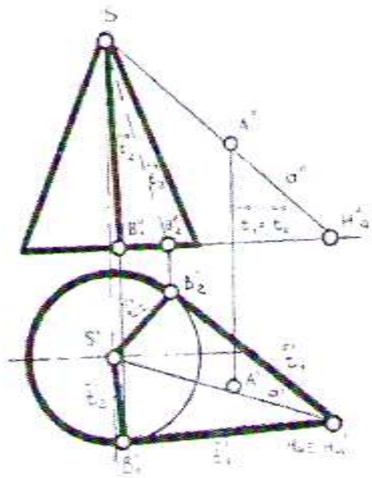
148-nji surat.

3-nji mysal. Konusda ýatmaýan A nokatdan konusa galtaşýan tekizlikleri geçirmeli (149-njy surat).

Çözülişi: Konus çyzykly üst bolansoň,konusa islendik galtaşýan tekizlik onuň emelegetirijisi boýunça galtaşar.Her bir emelegetiriji bolsa S depeden geçýär.Şonuň üçin konusa A nokatdan galtaşyp geçýän tekizlik hökman S depeden geçer. Ol tekizlik berlen A nokatdan hem geçmelidir.Diýmek,galtaşýan tekizlik hökman SA göni çyzykdan geçer. Galyberse-de konusa her bir galtaşýan tekizlik onuň esasyna galtaşyp geçer.Şeýlelikde, galtaşýan tekizlikde konusyň esasyna galtaşýan göni çyzyk bolmaly.Ol göni çyzyk hem S we A nokatlardan geçýän galtaşýan tekizlikde ýatmaly.SA göni çyzykdan geçýän tekizlikde konusyň esasyna galtaşýan göni çyzyk geçirmek üçin,SA göni çyzygyň konusyň esasynyň tekizligindäki, mysalda
T1 tekizlikdäki, yzyny tapmaly.Ol yz SA göni çyzygyň kese Ha yzydyr.Ha yzdan konusyň esasyna galtaşýan B1 we B2 nokatlary depe bilen birleşdirip SB1 we SB2 eme-legetirijileri almaly.

Bellik .1. Konusyň içinde ýatan nokatdan konusa galtaşýan tekizlik geçirip bolmaz.

2. S depeden konusa islendik sandaky galtaşýan tekizlik geçirip bolar.



149-njy surat.

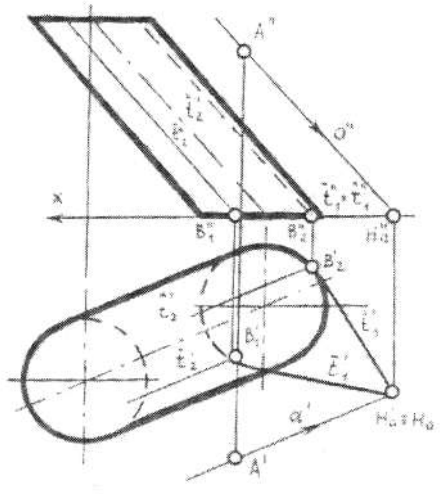
4 – nji mysal. Silindrde ýatmaýan A nokatdan silindre galtaşýan tekizlikler geçirmeli. (150-nji surat).

Bellik. Silindrden daşda ýerleşen nokatdan silindre galtaşýan tekizlik geçirip bolar.

Çözülişi : Silindr çyzykly üst bolansoň silindre islendik galtaşýan tekizlik ol üste onuň emelegetirijisi boýunça galtaşar. Diýmek, silindre A nokatda galtaşyp geçýän tekizlikde hökman emelegetirijä parallel bolan göni çyzyklar bolar. Şeýle hem silindre islendik galtaşýan tekizlik onuň esasyna galtaşýan göni çyzyk bolmalydyr.Ol göni çyzyk silindriň esasynyň tekizliginde (mysalda T1 tekizlikdäki) yzyny, ýagny, kese yzyny tapmaly.Soňra emele gelen Hα yzdan silindriň esasyna t1 we t2 galtaşyan göni çyzyklary geçirmeli.Olaryň silindriň esasy bilen galtaşýan B1 we B2 nokatlaryny tapyp, olardan silindriň,degişlilikde t2 emelegetirijilerini geçirmeli.

Bellik. 1. Silindriň içinde (içki oblastyndan) ýatan nokatlardan silindre hiç hili galtaşýan tekizlik geçirip bolmaz.

2. Silindriň üstünde ýatan nokatdan silindre diňe bir galtaşýan tekizlik geçirip bolar.



150-nji surat.

Tema 11
Köpgranlyklaryň proýeksiýalary.

Sapagyň meýilnamasy:

1.Köpgranlyklar barada düşünje.
2.Köpgranlyklaryň tekizlik bilen kesişmekleri.
3. Köpgranlyklaryň göni çyzyk bilen kesişmegi.
4.Üstleri ýazgynlaşdyrmak.

1)Köpgranlyk – üsti tekiz köpburçlykdan ybarat bolan jisimdir. Eger köpgranlyk onuň üstündäki her bir tekiz köpburçlugyň tekizliginden bir tarapda ýatýan bolsa onda oňa güberçek köpgranlyk diýilýär.Güberçek köpgranlygynyň şeýle tekizligiň we üstüň umumy bölegine gran diýilýär. Güberçek köpgranlygyň granlary tekiz güberçek köpburçluklardyr.

Tekizlik köpgranlygy kesende köpburçluk emele gelýär, onuň depeleri köpgranlygyň gapyrgalarynyň kesiji tekizlik bilen kesişme nokatlary bolarlar (gapyrgalar usuly). Köpgranlygyň näçe grany bar bolsa,kesikde şonça sandaky depeli köpburçlugyň emele gelmegi mümkin. Başgaça aýdylanda n granly köpgranlygyň tekizlik bilen kesişmeginden bir nokat (haçanda kesiji tekizlik köpgranlygyň diňe bir depesinden geçip,galanlary kesişmese), göni çyzyk (haçanda kesiji tekizlik köpgranlygyň diňe bir gapyrgasyndan geçip, galanlary kesişmese) we n - burçluk(haçanda kesiji tekizlik köpgranlygyň n granyny kesip geçse) emele bilerler.

Bellik: Gapyrgalar usulynda göni çyzygyň tekizlik bilen kesişme nokady, granlar usulynda bolsa iki tekizligiň kesişme çyzygy tapylýar. Olaryň tapylyş usulynda bolsa iki tekizligiň kesişme çyzygy tapylýar.

Piramidanyň tekizlik bilen kesişmesi

1 – nji mysal. Piramidanyň α tekizligi bilen kesişme çyzygyny tapmaly.

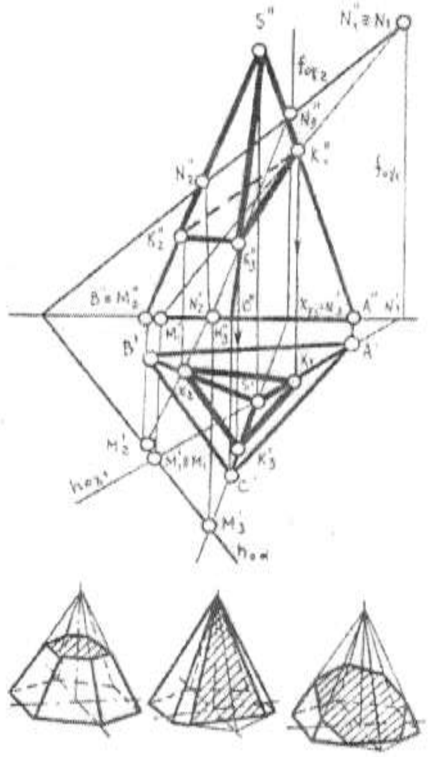
Çözülişi: **A)**Piramidanyň umumy ýagdaýdaky α tekizligi bilen kesişme çyzygyny tapmak üçin piramidanyň gapyrgalarynyň her biriniň aýratynlykda α tekizligi bilen kesişme çyzygyny tapmak üçin piramidanyň gapyrgalarynyň her birniň aýratynlykda α tekizlik bilen kesişme nokatlaryny kesgitlemek gerek. Şeýlelikde, meseläni gapyrgalar usuly bilen çözmek has amatlydyr. Şonuň üçin SA gapyrgadan ýokarsyndan proýektirlenýän γ1 te-kizlik geçirilýär. Bu tekizlik α tekizligi M1N1 çyzyk boýunça kesýär.M1N1 çyzygyň we SA gapyrganyň α tekizligi bilen kesişýän nokadyň öňünden proýeksiýasy alynýar.Baglsnyşyk çyzygyň kömegi bilen onuň ýokarsyndan proýeksiýasy tapylýar.

SB gapyrganyň α tekizligi bilen kesişýän K_2 nokadyny tapmak üçin γ_2 €(SB) hem – de $\gamma_3 \perp T_2$ geçirilendir.Şeýle hem SC gapyrganyň α tekizligi bilen kesişen K_3 nokady kesgitlenendir.Onuň üçin γ_2€(SC) we $\gamma_2 \perp T_1$

geçirilendir.

B) Tapylan K_1 ,K_2 we K_3 nokatlar yzygiderli birleşdirip, pida bilen α tekizligiň kesişme çyzygy kesgitlenendir. Piramida üçgranly bolansoň K_1, K_2 we K_3 nokatlary şeýle yzygiderli birleşdirmek bolýar, çünki ol üç nokadyň her ikisi piramidanyň haýsy hem bolsa bir granynda ýatýar. Şu yzygiderlikde – de ol nokatlaryň biratly proýeksiýalary birleşdirilýär.

Ç) Kesişme çyzygyň taraplary piramidanyň gapdal üstünde ýerleşendir. Piramidanyň hemme gapdal üsti T_1 tekizlikde görünýär. Emma T_2 tekizlikde diňe SAC we SBC granlary görnüp, SAB grany görünýän däldir. Şeýlelikde, $K_1K_2K_3$ üçburçlugyň T_1 tekizlikde hemme taraplary , T_2 tekizlikde bolsa K_1K_3 we K_2K_3 taraplary görünýär. K_1K_2 kesim görünýän däldir.a – nji surat.

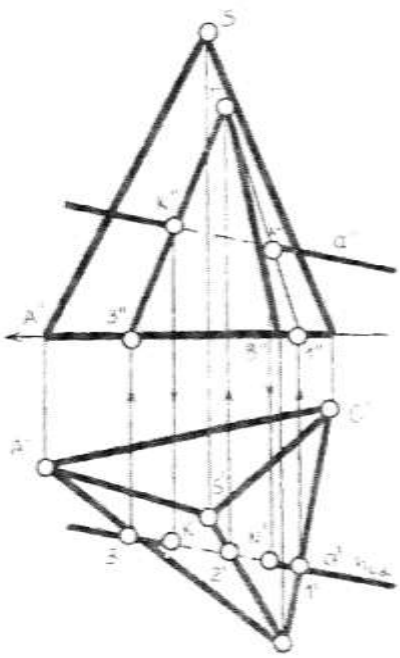


a – nji surat.

1) Üstleriň göni çyzyk bilen kesişme nokatlaryny tapmaklyk üçin aşakdaky ýaly girişilýär:
3. Berlen göni çyzykdan kömekçi tekizlik geçirilýär.
4. Berlen üstüň geçirilen kömekçi tekizlik bilen kesişme çyzygy (kesigi) gurulýar (tapylýar).
5. Berlen göni çyzygyň emele gelen kesişme çyzygy (kesigi) bilen kesişýän nokatlary tapylýar (kesgitlenýär). Şol nokatlar hem berlen göni çyzygyň berlen üst bilen kesişýän nokatlary bolar.

Ol nokatlara kä halatlarda üste girýän we üstden çykýan ýa-da göni çyzygyň üst bilen duşuşýan nokatlary diýilýär. Aşakda mysallara seredi-lendir.

2) **1-nji mysal. a** göni çyzygyň piramida bilen kesişme nokatlaryny tapmaly (14- nji surat).



151-nji surat.

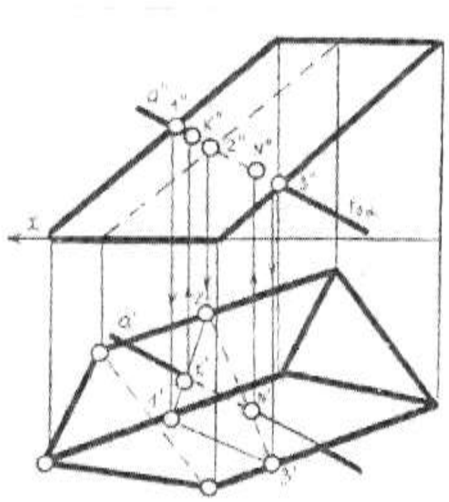
Çözülişi: 1)Gözlenýän nokatlary tapmak üçin berlen göni çyzykdan ýokarsyndan proýektirleýin α tekizlik geçirilýär.

2)Ol tekizligiň üstikesýän çyzygynyň ýokarsyndan proýeksiýasy tekizligiň ýokarsyndan proýeksiýasy (tekizligiň kese ýzy)bilen gabat gelýär . Ol cyzyk piramidanyň gapyrgalarynyň ýokarsyndan proýeksiýalarynyň α tekizligiň h0α yzyny kesýär 1′,2′ we 3′ nokatlaryny birleşdirbän üçburçlukdyr. Öňünden proýeksiýasy bolsa 1″2″3″ üçburçlugy bolar.

3) Göni çyzygyň öňünden proýeksiýasy bilen kesişýän K″ we N″ nokatlary göni çyzygyň girýän hem-de çykýan nokatlarynyň öňünden proýeksiýalary bolar-lar. Ol proýeksiýalar boýunça nokatlaryň K′ we N′ proýeksiýalary tapylýar. Göni çyzygyň piramidanyň içindäki KN kesimi görünýän däldir.

Bellik: Şu meseläni çözmek üçin berlen göni çyzykdan öňünden proýektir-leýän tekizligi geçirmekde bolardy.

3) 2- nji mysal. **a** göni çyzygyň ýapgyt prizma bilen kesişme nokatlaryny tapmaly. (152-njy syrat).



152- njy surat.

Çözülişi: 1) Bu ýerde a göni çyzykdan öňünden proýektirlenýän α tekizlik geçirilendir.

2)Ol tekizligiň üsti kesýän çyzygyň öňünden proýeksiýasy f0α yzyny kesýän 1″,2″,3″ nokatlaryny birleşdirýän üçburçlukdyr. Ol nokatlar boýunça 1′,2′,3′ nokatlary nokatlary tapyp özara birleşdirmeli.

3)1′2′3′ üçburçlugyň a′ göni çyzyk bilen kesişýän K′ we N′ nokatlary, a göni çyzygyň prizmany kesýän nokatlaryň ýokarsyndan proýeksiýalarydyr. Olar boýunça K″we N″ nokatlar tapylýar.

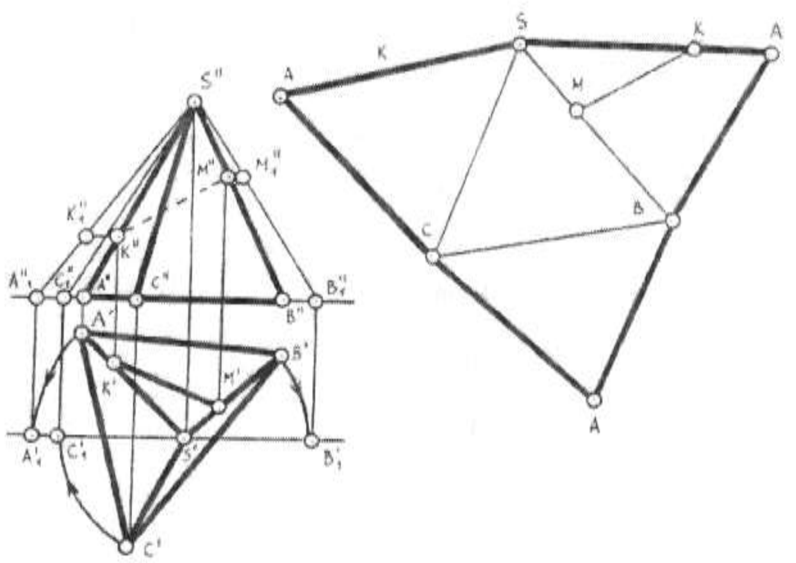
T1 tekizlikde göni çyzygyň K′N′kesimi we N′ nokatdan tä çetki gapyrganyň ýokarsyndan proýeksiýasyna çenli bolan bölümi prizmanyň aşagynda ýerleşendigi üçin görünmeýär. T2 tekizlikde K we N nokatlarda ýerleşýänligi üçin tä 1″ we 3″ nokatlara çenli görünmez.

Piramidanyň ýazgyn şekilini gurmak.Piramidanyň gapdal üstüniň ýazgynyny gurmaklyk üç tarapy boýunça üçburçluklary yzygiderli gurmaklykdan ybaratdyr, şol üçburçluklaryň her biriniň hakyky ululygy bolsa degişlilikde piramidanyň gapdal granlarynyň hakyky ululygyna deňdir.

2 –nji mysal.SABC piramidanyň üstüniň ýazgynyny gurmaly. (b – nji surat).

Çözülişi: Piramidanyň ýazgynyny gurmak üçin, gapdal gapyrgalaryň hakyky ululyklaryny kesgitlemek gerek. Şol gapyrgalar piramidanyň depesinden geçýän i $\perp$ T_1 okuň daşynda T_2 tekizlige parallel ýagdaýyna çenli aýlandyrylýar. Olaryň hakyky ululyklary $S''A_1''$, $S''B_1''$we $S''C_1''$kesimler bolar.$S''A_1''$,$S''B_1''$we A′B′ taplary boýunça piramidanyň SAB granynyň hakyky ululygy gurulýar, soňra ýanaşyk SBC we SAC granlaryň hakyky ululyklary-da onuň gapdalynda yzygiderli birleşdirip SABC piramidanyň gapdal üstüniň ýazgyny alynýar. Piramidanyň doly üstüniň ýazgynyny almak üçin ýaňky emele gelen gapdal üstüniň ýazgynyna onuň esasynyň hakyky ululygy goşulýar.

Piramidanyň üstünde ýatan nokadyň ýa – da göni çyzygyň ýazgyndaky ýagdaýyny tapmak kyn däldir. Mysal üçin, goý, SAB granda KM göni çyzyk hem-de K€(SA) we M€(SB) ýatan bolsun.SA we SB gapyrgalaryň hakyky ululyklary bilen bilelikde SK we SM kesimleriniňki hem şol bir SA we SB gapyrgalarda tapylýar.Soňra ol kesimleri ýazgynda degişlilikde SA we SB kesimlerde goýup, emele gelen K we M nokatlar birleşdirilýär.Eger piramidanyň granlarynda haýsy hem bolsa bir nokat berlen bolsa, onuň kömegi bilen ol nokadyň ýazgyndaky ýagdaýyny tapmak bolar.



b – nji surat.

Prizmanyň tekizlik bilen kesişmesi. Göni üçburçly prizmanyň ″P″ tekizlik bilen kesişme çyzygyny tapmaly.

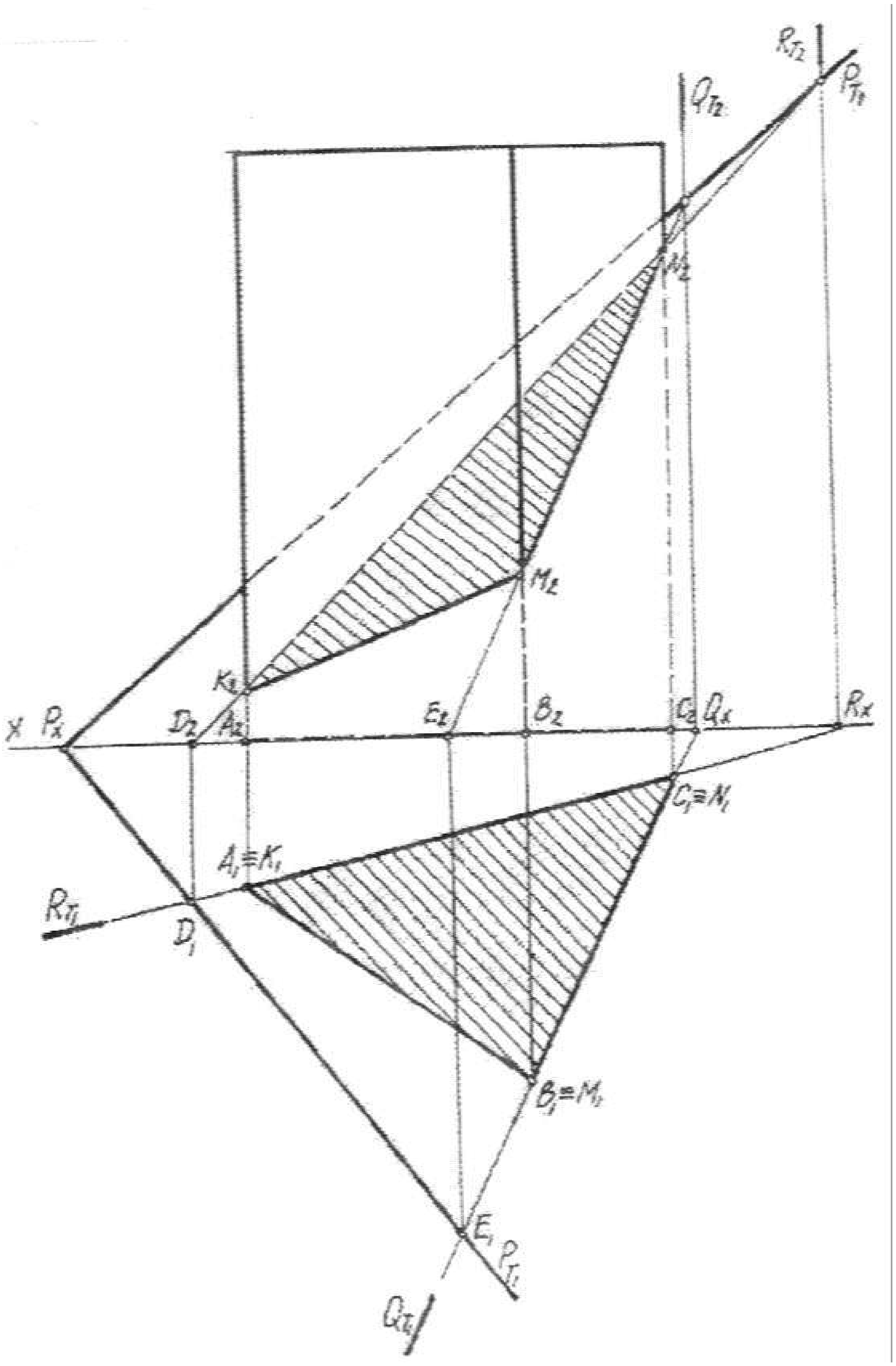
Berlen prizma ″H″ tekizlige görä göni bolany üçin bu ýerde prizmanyň her bir grany grany gorizontal usulyndan proýeksirleýji tekizllikdir. Şonuň üçin hem meseläni işlemek üçin granlar usulyndan ulanmak has amatlydyr. Prizmanyň A║B grany gorizontal proýeksirleýji tekizlik. Onuň gorizontal yzy Rh, frontal yzy bolsa Rv. ″R″ tekizlik ″P″ tekizlik bilen kesişýän göni çyzyk DT. Şol göni çyzyk A║C granyň frontal proýeksiýasyny KM göni çyzyk boýunça kesip geçýär. A gapyrgany K nokatda,C gapyrgany M nokatda.

Şonuň ýaly hem prizmanyň B║C grany dowam edip, onuň ″P″ tekizligi EF kesimi tapylýar (çyzgydan görünýär).Şol EF kesim B║C grany frontal proýeksiýasyny m′n′ göni çyzyk boýunça kesýär,B gapyrgany M nokatda,C gapyrgany N nokatda.

Prizmanyň galan A‖B grany ″P″tekizlik bilen kesişýän çyzygyny tapmaklyk hökman hem däldir. Çünki prizmanyň her bir gapyrgasynda onuň ″P″ tekizlik bilen kesişýän çyzygyny tapmaklyk hökman hem däldir. Çünki prizmanyň her bir gapyrgasynda onuň ″P″ tekizligi bilen kesişýän nokady eýýäm emele gelendir.

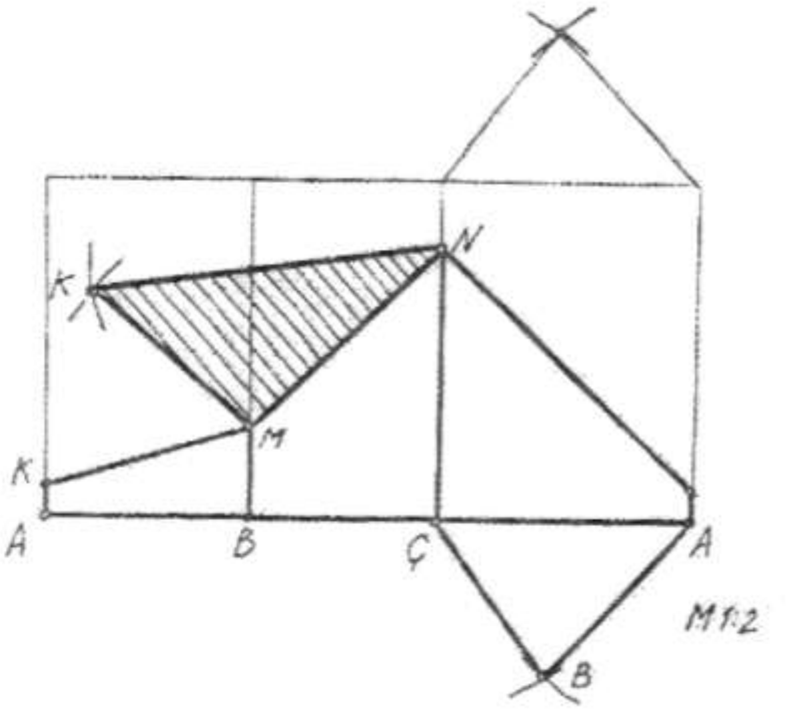
Prizma göni bolansoň kesigiň gorizoltal proýeksiýasy prizmanyň gorizontal proýeksiýasy proýeksiýasy bilen gabat gelýändir. Şonuň üçin hem bu ýerde kesik görünmeýän bolsa hem prizmanyň ýokary esasy ondan ýokarda bolup görünýändir,hem-de bu hili ýagdaýda görünmekligi kesgitlemegiň geregi ýokdyr.

″V″ tekizlikde A‖B we B‖C granlary we olaryň üstünde ýatan k′m′ we m′n′ kesimleri görünýändirler, galanlary bolsa görünýän däldirler.



153– nji surat.

6)Prizmanyň ýazgyn şekilini gurmak.Öňürti prizmanyň doly ýazgynyny gurýarys. Berilen prizmanyň gapyrgalary proýeksiýalaryň tekizlikleriniň birine perpendikulýar bolsa, onda prizmanyň şol tekizlikdäki proýeksiýasy onuň normal (adaty) kesigi bolar. Şol sebäpli-de ýazgynyny gurmak örän aňsat bolar. ″H″ tekizlikde prizmanyň normal kesigi bolany üçin ABC üçburçlugyň perimetrini bir göni çyzykda ýerleşdirýäris. OL kesimde üçburçlygyň depeleriniň üstünden oňa perpendikulýar bolan göni çyzyklary geçirýäris, ol perpendikulýaryň üstünde prizmanyň ″V″ tekizlikden alnan gapyrgalarynyň uzynlyklaryny goýarys. Emele gelen nokatlary birleşdirip göniburçluk alýarys.Ol gönüburçlyk esaslary biri –birine parallel, gapyrgalary bolsa ″H″ tekizlige perpendikulýar bolan göni prizmanyň ýazgynydyr. Bu ýerde prizmada ýatan K,M we N nokatlaryň ýazgyndaky ýagdaýyny tapmak has hem aňsatdyr. Ol çyzgydan aýdyň görünýändir. K,M we N nokatlary birleşdirýäris.Şol döwük çyzyk kesilen prizmanyň ýazgynydyr. Kesimiň esasynyň hakyky ululygyny tapyp, biz kesilen prizmanyň doly ýazgynyny gurýarys.(152– nji surat).



154 – nji surat.

Tema 12
Aýlama üstler.

Sapagyň meýilnamasy:

1. **Aýlanma üstler.**
2. **Silindriň tekizlik bilen kesişmesi we ýazgyn şekilini gurmak.**
3. **Konusyň tekizlik bilen kesişmesi konusyň ýazgyn şekilini gurmak.**
4. **Aýlama üstleriň göni çyzyk bilen kesişmegi.**

1. Islendik aýlanma üstüň tekizlik bilen kesigi,üstüň merdiananyň görnüşine we oka görä ýerleşişine baglylykda her hili tekiz çyzyk bolup biler. Diňe üst oka perpendikulýar tekizlik bilen kesişende töwerek emele geler.

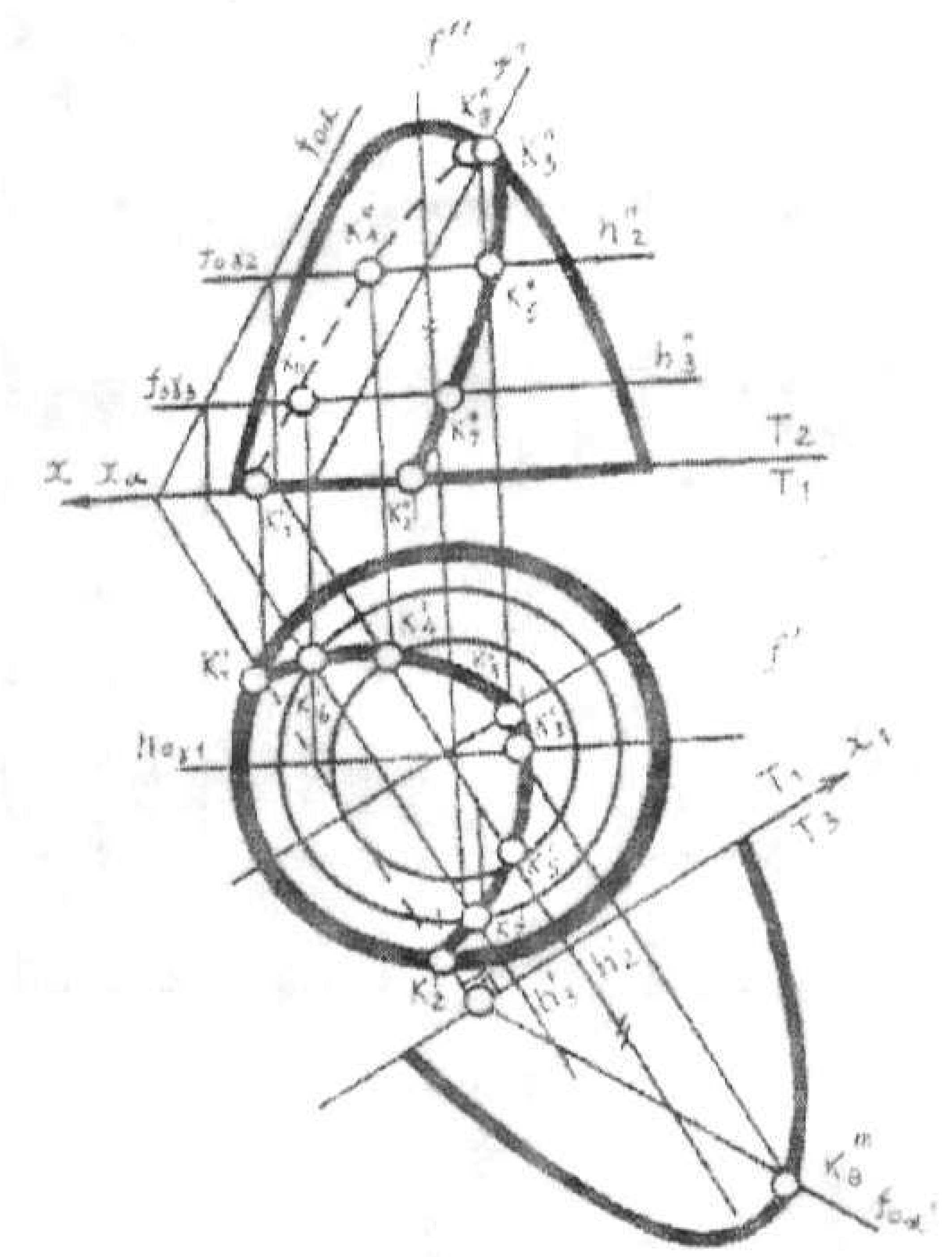
Mysal.Aýlanma üstüň α tekizlik bilen kesişme çyzygyny tapmaly.(154- nji surat).

Çözülişi: A) Häsiýetli nokatlardan ikisi, K1 we K2 nokatlar, h0α yzyň berlen üstüň T1 tekizlikde ýatan esasy bilen kesişen ýerinde emele gelýärler, çünki üstüň esasy hem, T1 tekizlige degişlidir. Üstüň okundan geçýän kesiji γ1║T2 tekizlik, berlen üsti öňünden proýeksiýasyndaky serhedi boýunça, α tekizligi bolsa f ýüzbe – ýüz çyzygy boýunça kesýär. Olaryň öňünden proýeksiýalarynyň kesişen ýerinde häsiýetli K_3'' nokat emele geler. K_3'€ h0α1 bolar. Soňra kesiji γ_2║T_1 tekizlik geçirilýär. Ol tekizlik berlen üsti töwerek boýunça, tekizligi bolsa h_2 kese çyzygy boýunça keser. Olaryň kesişmeginden K_4 we K_5 nokatlar alnar.Şonuň ýaly hem γ_3║T_1 tekizligiň kömegi bilen K_6 we K_7 nokatlar alynýar. Kesişme çyzygyň iň ýokarky nokadyny almak üçin T_2 tekizligi $T_3 \perp T_1$ we $T_3 \perp \alpha$ tekizlik bilen çalyşmaly. Onda α tekizlik T_3 tekizlige görä proýektirlenýän ýagdaýy eýelär. Berlen üstüň T_3 tekizlikdäki proýeksiýasy ozal belli usul boýunça tapylýar. $f_0\alpha 1$ yzyň berlen üstüň T_3 tekizlikdäki proýeksiýasy bilen kesişen ýerinde K_8''' nokady alynýar. Soňra K_8 nokadyň T_1 we T_2 tekizlikdäki proýeksiýalary tapylýar. K_8 nokat kesişme çyzygyň iň ýokarky nokadydyr. Kömekçi kesiji γ_2,γ_3 tekizlikleri K_8 nokat dan ýokarda geçirmeli däldir, eger şeýle geçirilse, onda ol tekizlikleriň kömegi bilen hiç hili nokat alyp bolmaz.

B) Bu ýerde hem berlen üst aýlanma üst bolansoň hem-de onuň aýlanma oky T_1 tekizlige perpendikulýar bolansoň, nokatlaryň yzygiderligi ýokarsyndan proýeksiýalar tekizliginde aýdyň görünýär, ýagny üstüň okunda durup K_1 nokatdan başlap aýlanylsa, onda nokatlaryň yzygiderligi K_1-K_6-K_4-K_8-K_3-K_5-K_7-K_2 tertipde bolar.Şu tertipde hem nokatlaryň biratly proýeksiýalary birleşdirilýär.

Ç)Berlen üstüň T_1 tekizlikde hemme gapdal üsti görünýär. Kesişme çyzygyň berlen üstüň gapdal üstünde ýatan bölegi T_1 tekizlikde görünýär, emma esasy bilen kesişýän K_1K_2 kesimi görünýän däldir.T_2 tekizlikde üstüň öň tarapy görünýär.Diýmek, kesişme çyzygyň öň tarapda ýatan K_2-K_7-K_5-K_3 bölegi görünýändir , galan bölegi bolsa görünýän däldir.

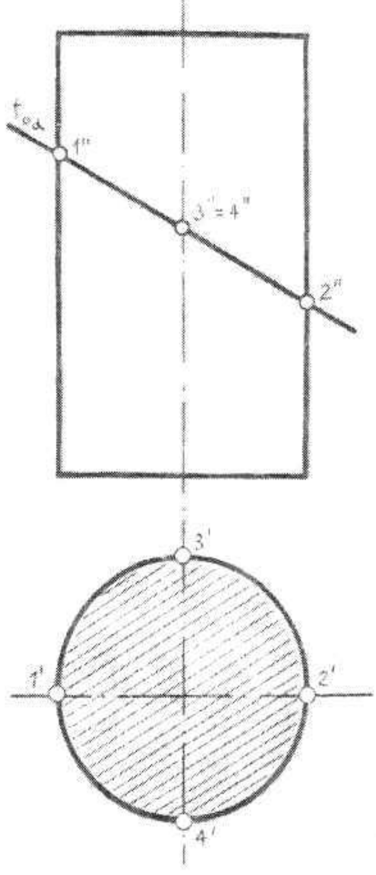
D)**Islendik üstüň tekizlik bilen kesişmegi.**Islendik üst tekizlik bilen kesişende her hili tekiz çyzyklar emele gelip biler.Ol çyzyklar berlen üste görä ýerleşişine baglydyr.



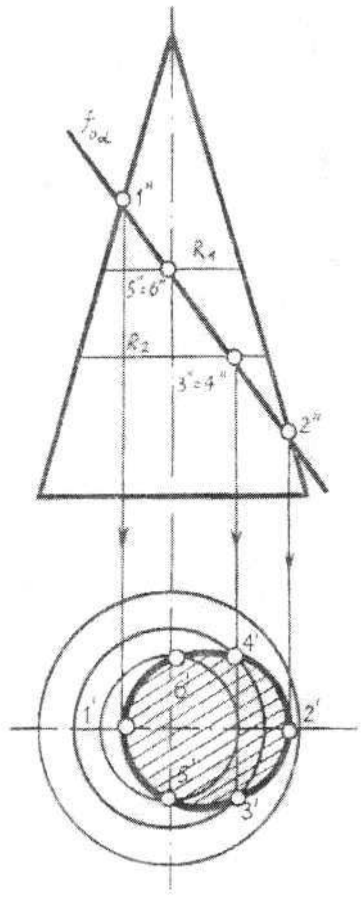
155- nji surat.

Üstleriň proýektirlenýän tekizlikler bilen kesişmekleri. Üstler proýektirlenýän tekizlikler bilen kesişenlerinde kesikde emele gelýän tekiz figuranyň bir proýeksiýasynyň , has takygy kesiji tekizlik haýsy proýeksiýalar tekizligine perpendikulýar bolsa, şol tekizlikdäki proýeksiýalary göni çyzyk bolar.

Şeýlelikde,kesiji tekizlige we berlen üste degişli bolan umumy nokatlary tapmaklyk meselesi tekizlikde ýerleşen figuranyň (kesigiň) belli bir proýeksiýasy boýunça onuň ikinji proýeksiýasyny tapmaklykdan ybaratdyr. Görnüşi ýaly kesişme çyzyklaryň öňünden proýeksiýalary kesiji tekizlikleriň ýüzbe-ýüz yzy bilen gabat gelýän göni çyzyklardyr. Olaryň ýokarsyndan proýeksiýalarynyň tapylyşy (kesgitlenişi), emele gelen umumy nokatlarynyň özara birleşdirilişi we görünýänliginiň kesgitlenişi ozaldan mälimdir.



156- nji surat.



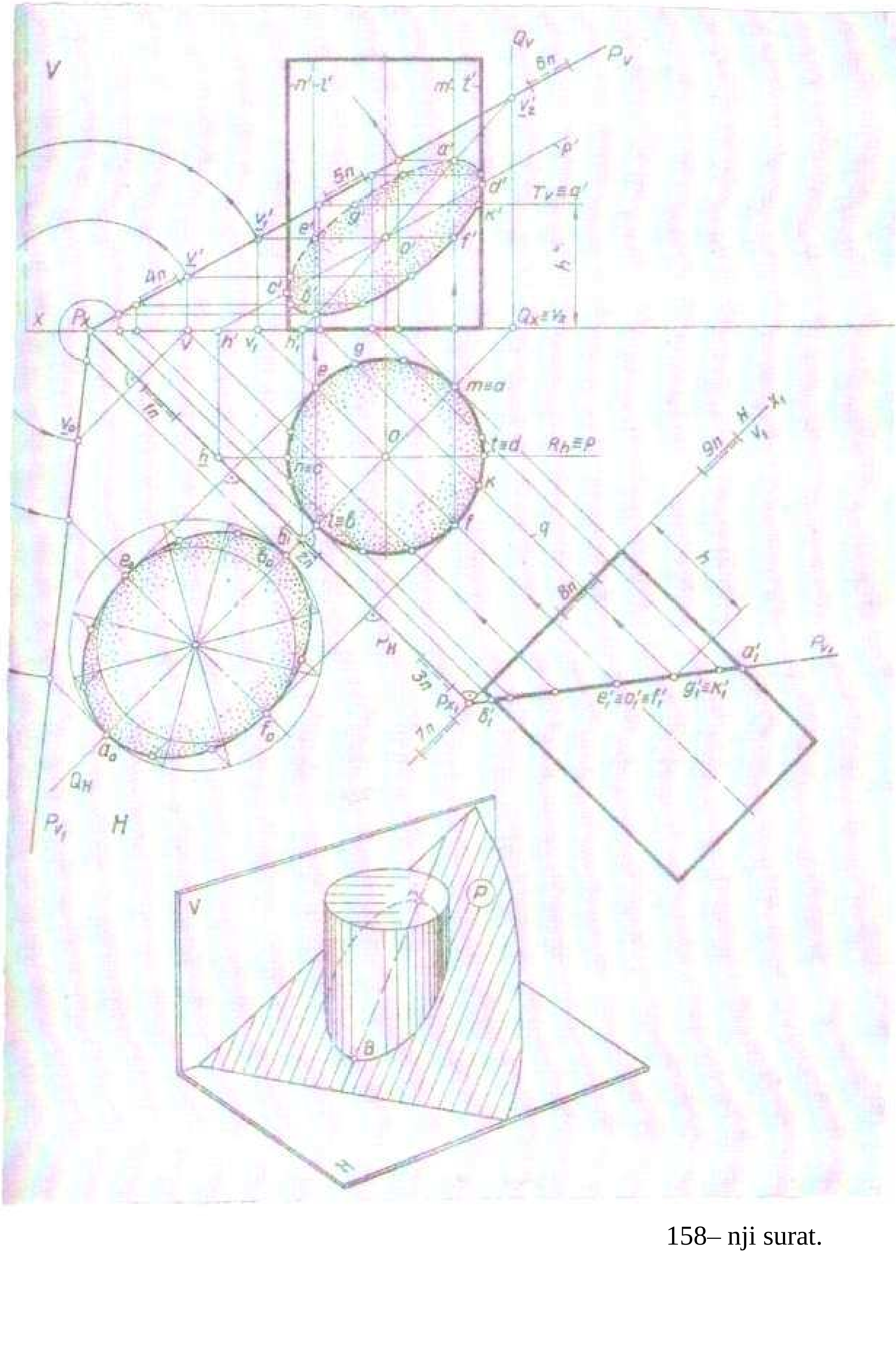
157- nji surat.

2. Silindriň tekizlik bilen kesişmegi. Kesiji tekizligiň we silindriň özara ýerleşişlerine görä kesişme çyzykda aşakdaky çyzyklar emele gelip biler.Eger silindr bolsa, onda şeýle silindriň gapdal üsti:

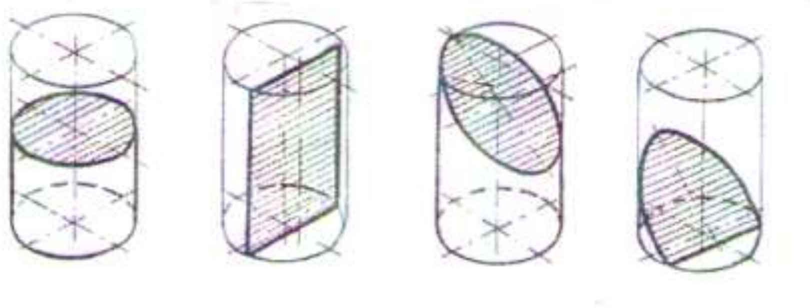
—özüniň okuna perpendikulýar bolan tekizlik bilen **töwerek** boýunça;

—özüniň okuna parallel bolan tekizlik bilen **emelegetirjiler** (tekizlik silindre galtaşanda —bir emelegetiriji, esasyny kesende —iki emelegetiriji, esasyndan daşlykda geçse-hyýaly emelegetiriji) boýunça;

— galan ýagdaýlar bolsa ellips boýunça kesişerler.Ellipsiň emele gelşi subut edilendir galanlary subutsyz aýdyňdyr. (158-nji surat).



158– nji surat.



159-njy surat.

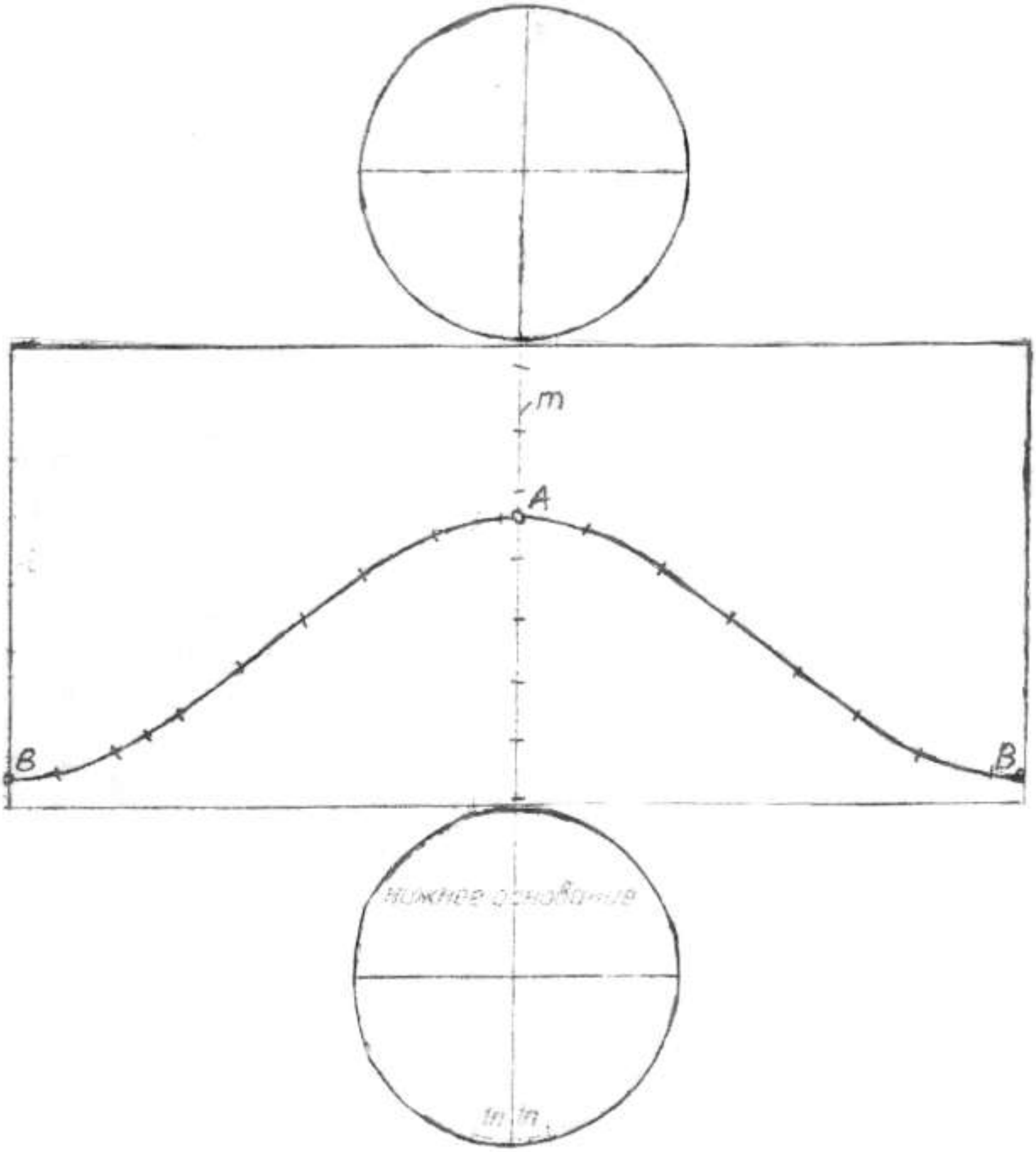
Silindriň α tekizlik bilen kesişme çyzygyny tapmak üçin umumy usulyny ulanmak ýa-da gapyrgalar usulyny ulanmak bolar. Häsiýetli nokatlary tapmak üçin gapyrgalar usuly ulanylýar. Häsiýetli nokatlar silindriň proýeksiýasynyň T_1 we T_2 tekizliklerdäki iň çetki emelegetirijileriniň α tekizligi kesýän nokatlary-dyr. Birnäçe tekizlikler geçirip kesişme çyzygyna degişli bolan islendik sandaky nokatlary tapyp bolýar.

Silindriň tekizlik bilen kesişende nähili çyzygy emele getirýändigini anyklamaklyk çyzgy geometriýasyna degişli däldir. Ýöne islendik ýagdaýda we görnüşde berlen silindriň islendik ýagdaýda berlen silindriň islendik ýagdaýda berlen we ýerleňen tekizlik bilen ellips boýunça kesişer.

T_1 we T_2 tekizlikde emele gelen kesişme çyzygy görünýän we görünmeýän böleklere bölünýärler. (T_2 tekizlikdäki c′ d′ - nokatlara häsiýetli nokatlar diýilýär).

Silindriň ýazgyn şekilini gurmaly.Silindriň ýazgyny hem onuň içinden çyzylan prizmanyň ýazgyny ýaly gurulýar, bu ýerde-de silindriň perpendikulýar (adaty) kesigini ulansaň bolýar, ýa-da onuň içinden çyzylan prizmanyň granlaryny üçburçluklara bölüp gurmakda bolýar. Durmuşda silindriň ýazgynyny gurmak üçin köplenç halatlarda togalama (togarlama) usuly diýilýän usul ulanylýar.

Eger- de silindr togalak bolup, esasynyň tekizlikleri bolsa onuň okuna perpendikulýar bolsa,onda onuň gapdal üstüniň ýazgyny gönüburçluk bolar.Ol göniburçlugyň beýikligi silindriň beýikligine, ini bolsa silindriň esasynyň uzynlygyna deň bolar. (160- njy surat).

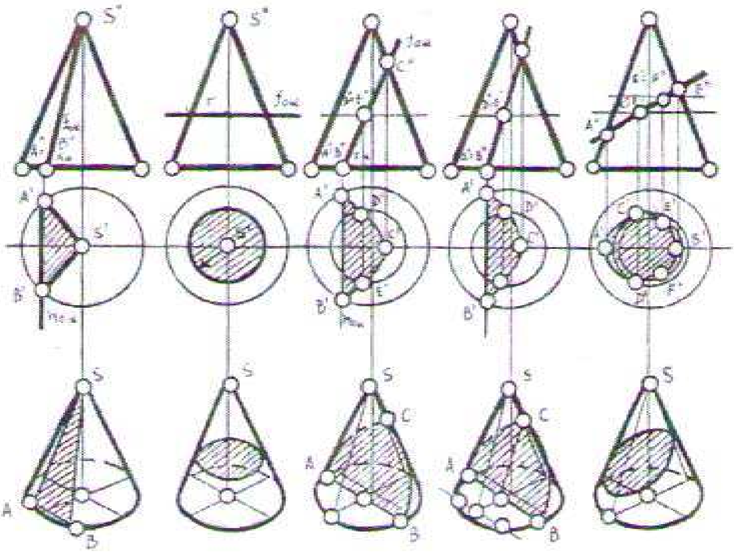


160-njy surat.

3.Konusyň tekizlik bilen kesişmegi. Kesiji tekizligiň we tegelek konusyň özara ýerleşişlerine görä kesikde aşakdaky çyzyklar emele gelip biler.(161-nji surat).

1. Kesiji tekizlik konusyň emelegetirijileri bilen diňe onuň depesinde duşuşyp geçende, **diňe bir S nokat** emele geler.
2. Kesiji tekizlik konusa onuň emlegetirijisi boýunça galtaşanda diňe bir göni çyzyk – **galtaşma çyzyk** emele geler.
3. Kesiji tekizlik konusyň depesinden geçip,onuň esasyny kesende **üçburçluk** emele geler.

4. Kesiji tekizlik konusyň aýlanma okuna perpendikulýar bolanda **töwerek** emele gelýär.
5. Kesiji tekizlik aýlanma konusyň emelegetirijileriniň birine parallel bolanda **parabola** emele geler.
6. Kesiji tekizlik aýlanma konusyň emelegetirijileriniň islendik ikisine parallel bolanda**, giperbola** emele geler.
7. Kesiji tekizlik aýlanma konusyň emelegetirijileriniň ählisini kesende we ol konusyň okuna perpendikulýar bolmadyk ýagdaýynda **ellips** emele geler.



161- nji surat.

Konusyň kesiji tekizlik bilen kesişende parabolanyň, giperbolanyň we ellipsiň emele gelişi subut edilendir, galanlary bolsa subutsyz aýdyňdyr.

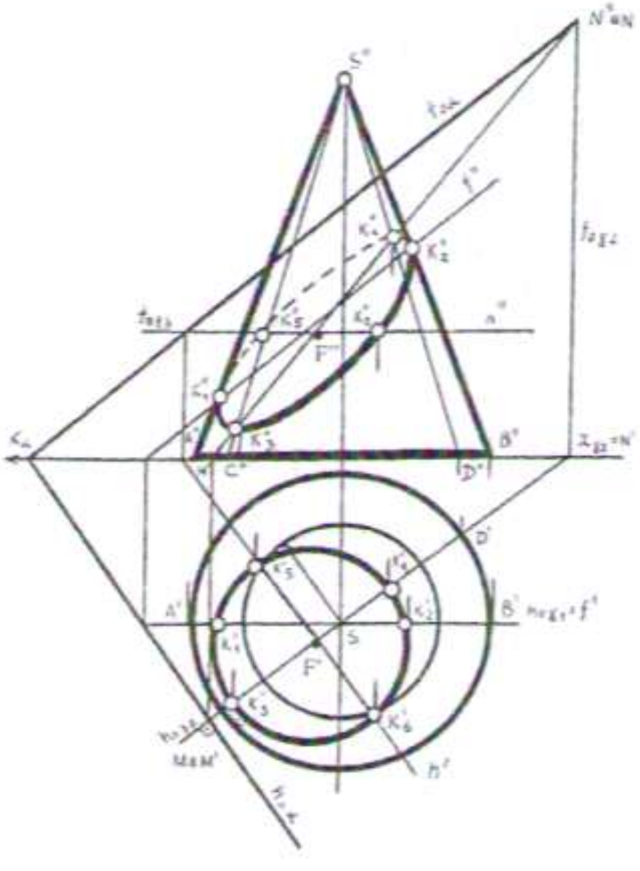
Mysal. Konusyň α tekizlik bilen kesişme çyzygyny tapmaly (162-nji surat). **Çözülişi:** A).Konusyň umumy ýagdaýdaky tekizlik bilen emele gelen kesigini gurmak üçin ilki bilen häsýetli nokatlary kesgitlemek gerek.Ol nokatlar konusyň öňünden proýeksiýasynda iň çetki emelegetirijilerinde ýatýan nokatlardyr.Konusyň aýlanma okundan geçirilen çüzbe-ýüz γ1 tekizligiň kömegi bilen şol häsýetli K1we K2 nokatlar tapylar.Bu kesiji γ1 tekizlik konusyň gapdal üstüne çetki SA we SB emelegetirijiler boýunça, α tekizligi bolsa onuň f ýüzbe – ýüzi boýunça keser. Ýüzbe – ýüzüň çetki emelegetirijiler bilen kesişen ýerinde bolsa K1 we K2 nokatlar emele geler. Kesişme çyzyga degişli bolan ýerine iki sany nokady tapmak üçin konusyň okundan α tekizlige perpendikulýar bolan ýokarsyndan proýektirlenýän γ2 tekizligi geçirilýär. Şu tekizlik konusyň gapdal üstüni SC we SD emelegetirijiler boýunça, α tekizligi bolsa MN göni çyzygy boýunça keser, olar bolsa özara kesişip K3 we K4 nokatlary emele getirýär. │K3′K4′│ we │K3″K4″│ kesimler kesişme çyzykda emele gelýän ellipsiň uly okunyň proýeksiýalarydyr. Ondan başga-da K4 nokat bu kesigiň iň ýokarky, K3 nokat bolsa iň aşakdaky nokatlardyr, çünki γ1┴T1 tekizlikde ellipsiň

Kiçi okunyň proýeksiýasyny gurmak üçin uly K3K4 okuň ortasyndaky F nokatdan kese γ3 tekizligi geçirmeli. γ3 tekizlik konusy töwerek bilen kesişip, K5 we K6 nokatlary berer.

Kesişme çyzygyna degişli bolan aralyk nokatlary tapmak üçin goşmaça kese γ3 kysymly kesiji tekizlikleri peýdalanmak amatlydyr, şol tekizlikler konusy töwerekler boýunça, tekizligi bolsa kese çyzyklar boýunça keserler. Ýöne şolar ýaly tekizlikleri K3 nokatdan aşakda we K4 nokatdan ýokarda geçirmeli däldir. Çünki olar umumy nokatlary tapmaga mümkinçilik bermezler.

B) Tapylan umumy nokatlary birleşdirmek üçin olaryň yzygiderligini kesgitlemeli. Bu ýerde hem ol nokatlary S depeden emelegetirijileriň ugry boýunça konusyň esasyna proýektirlemek bolar.Ýöne konusyň ýokarsyndan proýeksiýasyna S nokatdan seredip nokatlaryň K1-K3-K6-K2-K4-K5-K1 yzygiderlikdedigi şeýle-de görünçär. Şu tertipde hem ol nokatlaryň biratly proýek-siýalary birleşdirilýär.

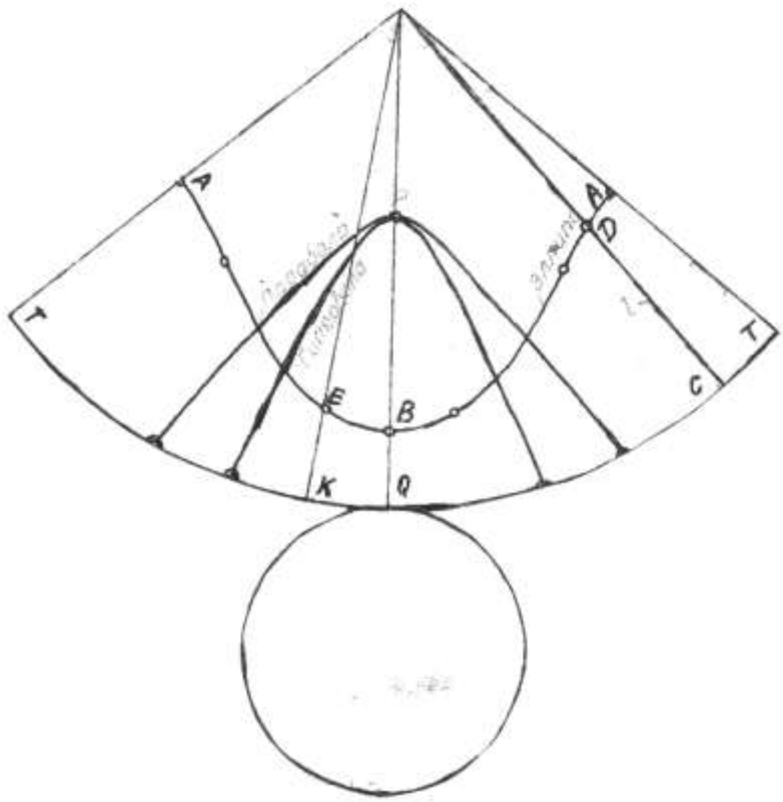
Ç) K1...,K6 nokatlaryň hemmesi-de konusyň gapdal üstünde ýerleşendir. Konusyň gapdal üsti T1 tekizlikde görünýändir. Diýmek, ellipsiň ýokarsyndan proýeksiýasy görünýändir. T2 tekizlikde konusyň diňe SA we SB emelegetirijiler-den öň tarapy görünýändir. Şol tarapda bolsa kesişme çyzygyň K1-K3-K6-K2 bölegi ýerleşýändir.Diýmek,ol bölek T2 tekizlikde görünýändir .Galan bölegi bolsa konusyň görünmeýän aňyrky üstünde ýatyp,görünýän däldirler.



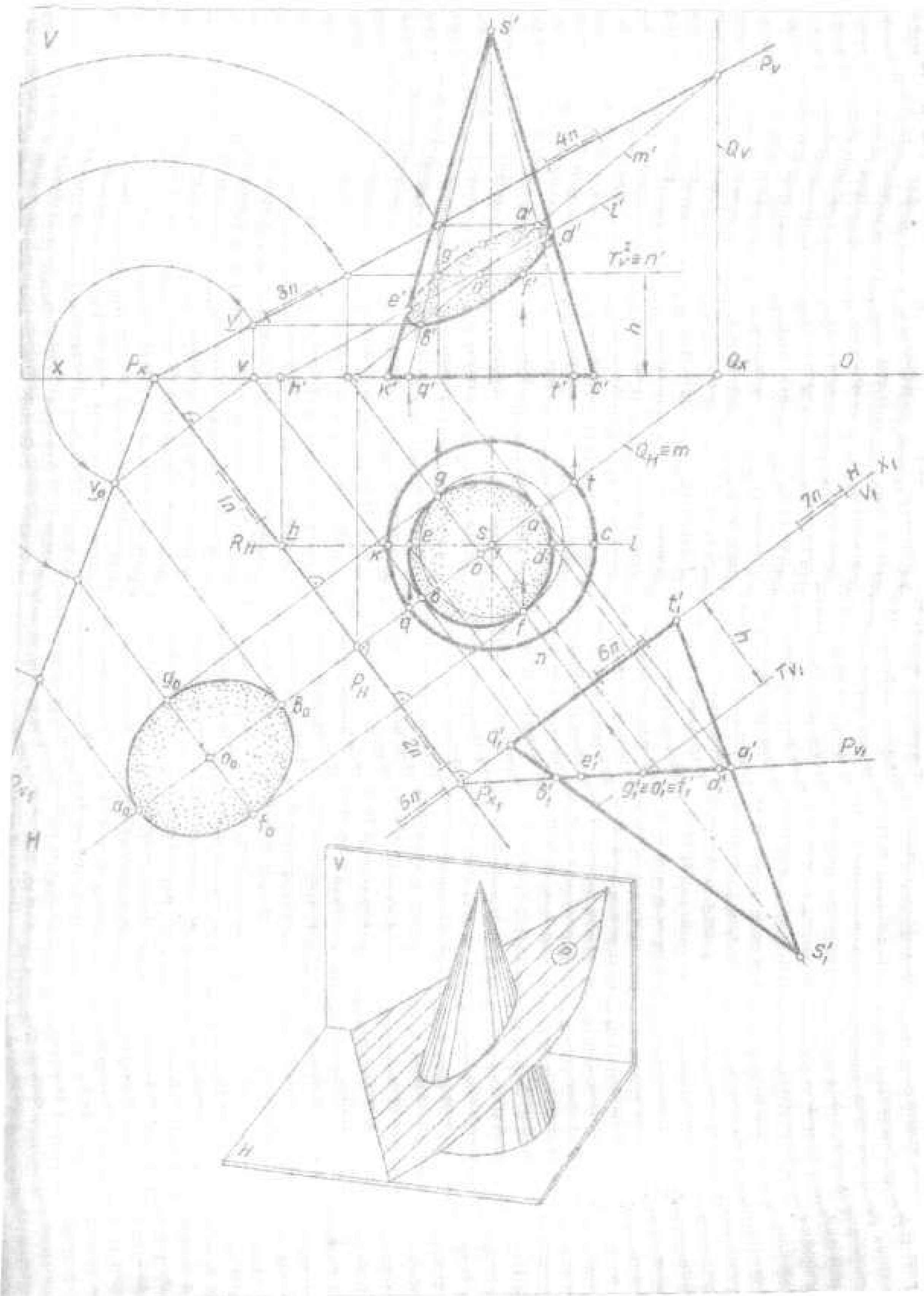
162 – nji surat.

Konusyň ýazgyny. Konus üstüň ýazgyny konusyň içinden çyzylan piramidanyň ýazgyny ýaly edip gurulýar. Ilki başda ýazgyn üç tarapy boýunça umumy S depede gurlan ýanaşyk yzygiderlirli üçburçluklaryň birnäçesi hökmünde çyzylýar,soňra esasa degişli nokatlar egri çyzyk arkaly yzygiderli birleşdirilýär.

Eger-de konus aýlanma konus bolup,onuň aýlanma oky hem proýeksiya-lar tekizligine perpendikulýar bolsa,onda şeýle konusyň gapdal üstüniň ýazgy-ny **töweregiň sektory** bolar. Ol sektoryň radiusy berlen konusyň emelegetirijisiniň uzynlygyna, dugasynyň uzynlygy bolsa konusyň esasy bolan töweregiň uzynlygyna deň bolar. (163- nji surat).



163- nji surat.



164-nji surat.

4. 1-nji mysal. a göni çyzygyň ýapgyt silindr bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.(165- nji surat).

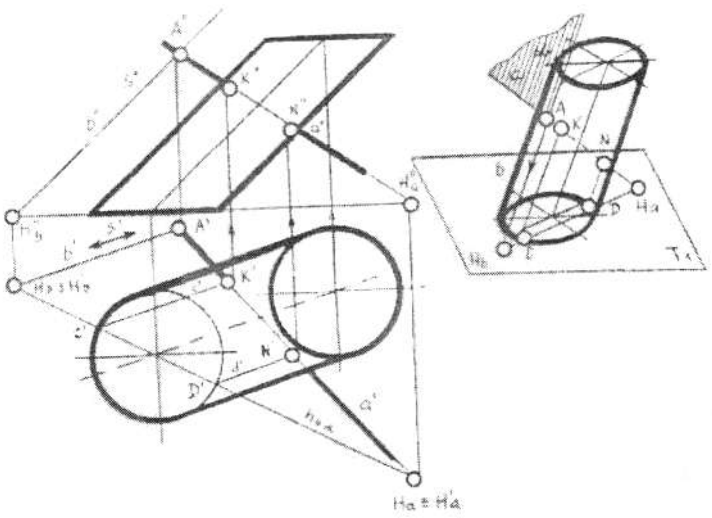
Çözülişi: 1) Bu ýerde hem a göni çyzykdan proýektirleýän tekizlikleri geçirmeklik amatsyz bolar, çünki ol tekizlikler silindri ellipsler boýunça keserler.

Eger a göni çyzykdan silindriň emelegetirijisine parallel bolan tekizlik geçirilse, onda ol tekizlik silindriň gapdal üstüni göni çyzyklar — emelegetirijiler boýunça keser. Şeýle tekizligi kesişýän göni çyzyklaryň üsti bilen aňladyp bolar. Ýagny A€ **a** nokatdan a göni çyzygy kesip geçýän hem-de silindriň emelegetirijisine parallel bolan b göni çyzyk geçirilýär. Kesişýän a we b göni çyzyklar kömekçi kesiji α tekizligi aňladýar.

2) Onuň silindriň üstüni kesýän emelegetirijilerini tapmak üçin, ol emelegetirijilere degişli bolan nokatlary kesgitlemeli . Ol nokatlar bolup α tekizligiň silindriň esasyndaky (şu mysalda T1 tekizlikdäki) yzyny tapmaly.Ol yz α tekizlige degişli bolan a we b göni çyzyklaryň degişlilikde Ha we Hb yzlaryndan geçer.h0α yzyň silindriň esasyny kesýän C we D nokatlary alynýar.Ol nokatlardan silindriň c we d emelegetirijileri geçirilýär.

3) c we d emelegetirijileriň a göni çyzygy kesýän ýerinde a göni çyzygyň silindri kesýän K we N nokatlary alynýar.Ýokardaky aýdylanlaryň çyzgyda alnyşy,guralyşy we geçirilişi suratda aýdyň görünýär.a göni çyzygyň KN kesi-mi görünýän däldir.T_1 tekizlide a göni çyzyk silindri N nokatda kessede N nokatdan silindriň T_1 tekizlikdäki iň sagdaky emelegetirijisine çenli bölegi görünýän däldir, çünki N nokat silindriň görünmeýän üstünde ýatýar.Şonuň ýaly hem göni çyzygyň K“ nokatdan silindriň iň çepdäki emelegetirijisine çenli bolan aralygy-da T_2 tekizlikde görünýän däldir.

Bellik. Bu ýerde hem α tekizlige **ýönekeý kesiji tekizlik** diýilýär.

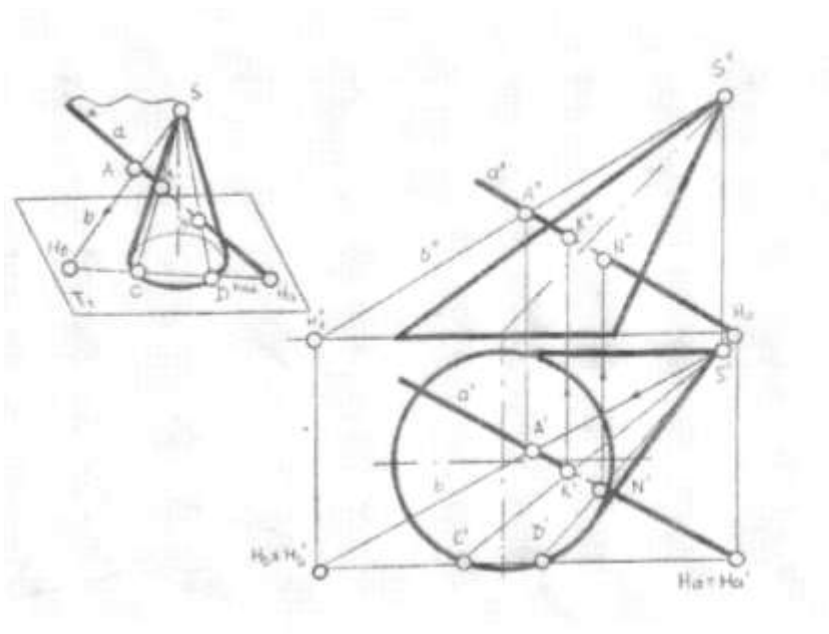


165-nji surat.

2-nji mysal. a göni çyzygyň tegelek esasly ýapgyt konus bilen kesişme nokatlaryny tapmaly.(166- njy surat).

Çözülişi: 1) Göni çyzygyň konus bilen kesişýän nokatlaryny tapmak üçin göni çyzykdan proýektirleýän tekizlik geçirilse, onda ol kömekçi kesiji tekizlik konusy egri çyzyklar (ellips, giperbola ýa-da parabola) boýunça keserdi. Şol egri çyzyklary gurmaz ýaly kömekçi kesiji α tekizlik konusyň S depesinden we a göni çyzykdan geçirilýär. Bu tekizlik konusy belli bolşy ýaly iki sany emelegetirijisi boýunça keser.

2) Ol emelegetirijileri kesgitlemek üçin S nokatdan başga-da her bir emelegetirijide ýene bir nokat tapmaly. Ol nokatlary konusyň esasynda almak aňsatdyr. Şonuň üçin α tekizligiň konusyň esasynda almak aňsatdyr. Şonuň üçin α tekizligiň konusyň esasynyň tekizligindäki (şu mysalda T_1 tekizlik-däki) yzyny tapmaly.



166-njy surat.

Ol yzy tapmak üçin a göni çyzykda islendik A nokat alynýar. S we A nokatlardan b göni çyzyk geçirilýär. Diýmek, α tekizlik iki sany a we b kesişýän göni çyzyklar bilen aňladylandyr. Olgöni çyzyklaryň kese yzlaryny tapyp, ol yzlardan tekizligiň h0α yzy geçirilýär. Onuň konusyň esasyny kesýän ýerinde C we D nokatlar alyn-ýar. C we D nokatlary S depe bilen birleşdirip α tekizligiň konusy kesýän SC we SD emelegetirijileri alynýar.

1) a göni çyzygyň SC we SD emelegetirijileri bilen kesişýän K we N nokatlary a göni çyzygyň konusy kesýän nokatlarydyr.

Ol nokatlaryň proýeksiýalarynyň tapylyşy suratdan aýdyň görünýär.a göni çyzy-gyň KN kesimi görünýän däldir. Galan bölekleri görünýändir.

Bellik: α tekizlige ýönekeý kesiji tekizlik diýilýär. Çünki ol tekizlik konusy ýönekeý çyzyklar boýunça kesýär.

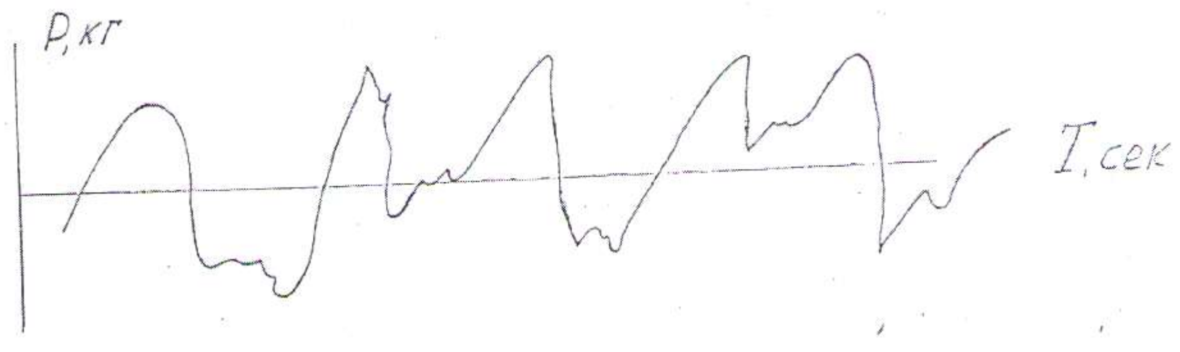
Tema 13

Egri çyzyklar.

Sapagyň meýilnamasy:

1.Egri cyzyklaryň görnüşleri.
2. Egri çyzyklaryň proýeksiýalarynyň häsiýetleri.
3. Tekiz egri çyzyklar.
4. Giňişlikdäki egri çyzyklar.
5.Wint hyrly çyzyklar.
6. Silindrik hyrly çyzyk.
7. Koniki hyrly çyzyk.

1. Egri çyzyklaryň maşyn gurluşygynda ähmiýeti ulydyr. Olaryň kömegi bilen maşynlaryň daşky keşbi,olaryň şaýlarynyň üsti ýerine ýetirilýär we iş organlary ýasalýar. Egri çyzyklar şinek transportlarynda, hyrlarda, oklaryň daşlary ýasalanda we ş.m. peýdalanýar. Egri çyzyklar özleriniň deňleme bilen ýazyp bolýanlara we deňleme bilen ýazyp bolmaýanlara bölünýär.Deňleme bilen ýazyp bolýanlar belli bir kanuna boýundyrlar.Bolmaýanlar olar tötänlik bilen bolup geçýän hadysa. Mysal üçin traktoryň yzyna dakylan azalyň garşylygy tötänlik diýip kabul etse bolar. Ol şu şekilde bolýar.(22-nji surat).



155-nji surat.

Egri çyzyklar özleriniň giňişlikde ýatyşy boýunça ikä bölünbär.

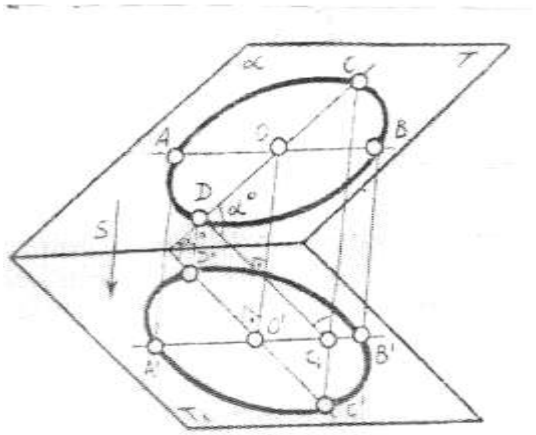
a) Bir tekizlikde ýatýan-töwerek, ellips,parabola,giperbola we ş.m.
b) Bir tekizlikde ýatmaýan – ýokarky egri çyzyklara girmeýän, mysal üçin nurbat egri çyzyklary.

2.Egri çyzygyň häsiýetleri.(156-njy surat).

a) Parallel proýektirlenende algebraik tekiz egri çyzyklaryň tertibi üýtgemän galýar. Dogrudan hem, belli bolşuna görä, tekiz egri çyzygyň tertibi onuň haýsy hem bolsa bir göni çyzyk bilen kesişen nokatlarynyň proýeksiýalary göni çyzygyň proýeksiýalarynyň egri çyzygyň proýeksiýasy bilen kesişen ýerinde bolar. Emma algebraik giňişlik egri çyzygyň parallel proýektirlemede tertibi üýtgeýär.Sebäbi ozal aýdylyşyna görä ol giňişlik egri çyzygyň tertibi onuň islendik bir tekizlik bilen kesişýän nokatlarynyň sanyna deňdir. Ol nokatlaryň sany bolsa parallel proýektirlemede üýtgeýändir, çünki giňişlik egri çyzygyň proýeksiýasy tekiz egri çyzykdyr.

b)Tekiz egri çyzyga galtaşýan göni çyzygyň proýeksiýasy hem egri çyzygyň proýeksiýasyna galtaşýan bolar. Bu ýagdaý hem ýokardaky ýaly düşündirilýär. Çünki, MM_1 kesiji göni çyzygyň proýeksiýasy hem egri çyzygyň proýeksiýasyny keser. M_1 nokat M nokada tarap m egri çyzyk boýunça hereket edende (ymtylanda) M′ nokada m′ çyzyk boýunça ymtylýar.M_1M kesiji çyzyk m çyzyga galtaşanda M'_1M' çyzyk hem **m′** çyzyga galtaşýar. Giňişlik egri çyzyga galtaşýan göni çyzygyň proýeksiýasy,eger-de ol (galtaşýan göni çyzyk) nokat bolup proýektirlenmese, egri çyzygyň proýeksiýasyna galtaşýan göni çyzyk bolar. Eger göni çyzygyň proýeksiýasy egri çyzygyň diňe bir proýeksiýasyna galtaşýan bolsa, onda ol göni çyzyk giňişlikde egri çyzyga galtaşman hem biler.Eger göni çyzyk egri çyzyga galtşýan bolsa, onda ol göni çyzygyň iki proýeksiýasy hem egri çyzygyň degişli proýeksiýasyna şol bir nokatda galtaşýan bolmalydyr.Şeýle hem egri çyzyklaryň kesişme nokatlarynyň proýeksiýalary,olaryň proýeksiýalarynyň kesişme nokatlary bolarlar.

Umumy ýagdaýda ýerleşen töweregiň proýeksiýasy. Egri çyzyklaryň iň ýönekeýi töwerekdir.Eger töweregiň tekizligi proýektirlemegiň ugruna parallel bolsa,onda onuň proýeksiýasy göni çyzyk bolar. Eger-de töweregiň tekizligi proýeksiýalar tekizligine parallel bolsa,onda onuň şol tekizlikdäki proýeksiýasy onuň özüne kongruent bolan töwerek bolar.Umumy ýagdaýdaky tekizlikde ýerleşen töweregiň göniburçly proýeksiýasy ellips bolar,çünki ol töweregi proýeksiýalar tekizligine proýektirleýän silindrik üst tegelek bolmaz hem-de proýeksiýalar tekizligi bilen töwerek boýunça kesişmän ellips boýunça kesişer. Şonuň ýaly töweregiň proýeksiýasy bolan ellipsi ýokarda aýdylan usul bilen, ýagny oňa degişli nokatlaryň proýeksiýalarynyň kömegi bilen gurman,eýsem ellipsi uly we kiçi oklarynyň ýa-da baglanyşykly diametrleriniň ugurlary we ululyklary boýunça gurmak has amatly bolar.



156-njy surat.

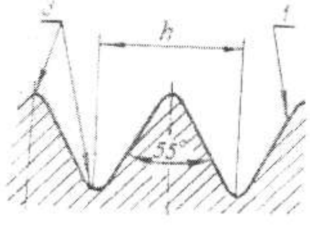
3.**Tekiz egri çyzyklaryň** hemme nokatlary bir tekizlikde ýatýarlar.töwerek, ellips, parabola, giperbola we ş.m. tekiz egri çyzyklara degişlidir.

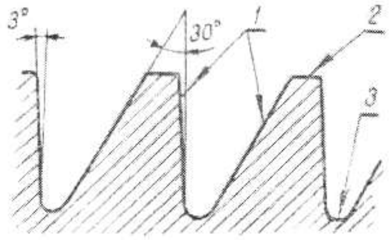
6. **Giňişlik egri çyzyklaryň** hemme nokatlary bir tekizlikde ýatýan däldir.Olara tekiz egri çyzyklardan başga hemme egri çyzyklar degişlidirler (mysal üçin, hyrly çyzyklar we ş.m.).

Egri çyzyklar kanuny we kanuny däl bolan egri çyzyklara bölünýärler.Kanunalaýyk egri çyzyklar belli bir kesgitli kanuna laýyklykda emele gelýär.Olar analitiki (deňlemeler bilen)we grafiki görnüşde berlip bilinýärler.Kanunalaýyk egri çyzyklar hem öz gezeginde algebraik we transendent egri çyzyklara bölünýärler.Algebraik egri çyzyklar Dekartyň koordinatalar sistemasynda algebraik deňlemeler bilen häsiýetlendirilýär, transendent egri çyzyklar bolsa algebraik däl (transendent) funksiýalar bilen kesgitlenýär.

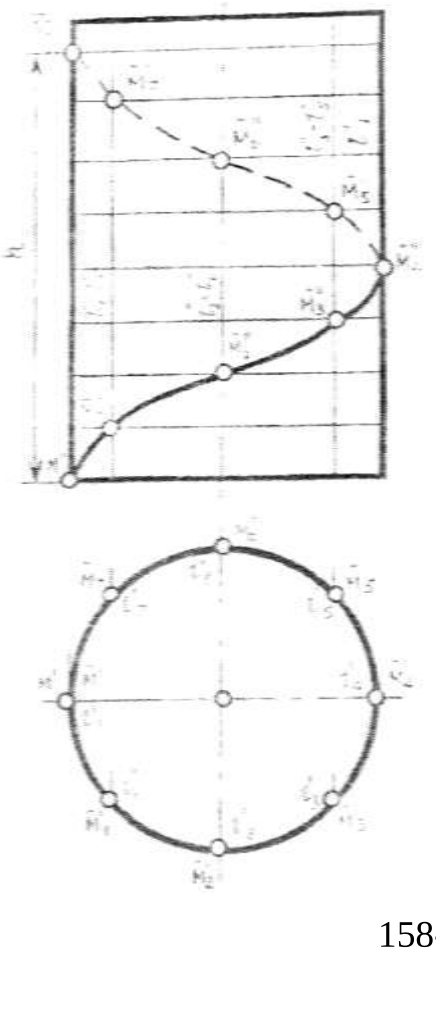
Algebraik deňlemäniň derejesine egri çyzygyň tertibi diýilýär. Tekiz egri çyzyklaryň tertibi onuň göni çyzyk bilen kesişýän (hakyky we hyýaly) nokatlarynyň sany bilen,giňişlik egri çyzyklaryň tertibi bolsa onuň tekizlik bilen kesişýän nokatlarynyň sany bilen kesgitlenýär.

5.Wint hyrly cyzyklar. Giňişlik egri çyzyklardan has köp ulanylýanlary hyrly çyzyklardyr.Hyrly çyzyklar aýlanma üstlerde emele gelýärler.Merdiananyň berlen üstüň okunyň daşynda birmeňzeş burç tizligi bilen aýlanýan wagtynda, onda ýatan nokadyň merdian boýunça haýsy hem bolsa bir tarapa üznüksiz hereket etmeginden emele gelen giňişlik egri çyzyga **hyrly çyzyk** diýilýär.Nokadyň ilki ýagdaýyndan (M nokatdan) bir aýlawdan soň ýene şol öňki merdiana gelendäki ýagdaýy ($\bar{M}$ nokat) bilen aralygyna hyrly çyzygyň ädimi diýilýär we h bilen bellenýär.Nokat meridian boýunça üýtgemeýän ýa-da belli bir kanunalaýyklykda üýtgeýän tizlik bilen hereket edip biler. Şol sebäpli-de hyrly çyzygyň ädimi üýtgeýän ýa-da üýtgemeýän bolup biler. Hyrly çyzygyň M we $\bar{M}$ nokatlaryň arasyndaky dugasyna onuň bir sargysy (sarymy) diýilýär. Eger-de aýlanma üste onuň oky boýunça seredilende hyrly çyzygy, emele getirýän nokat sagat diliniň ugry boýunça aýlanyp seredijiden daşlaşsa, onda hyrly çyzyga sag hyrly çyzygy, eger-de seredijä golaýlasa onda çep hyrly çyzygy diýilýär.157-nji surat.



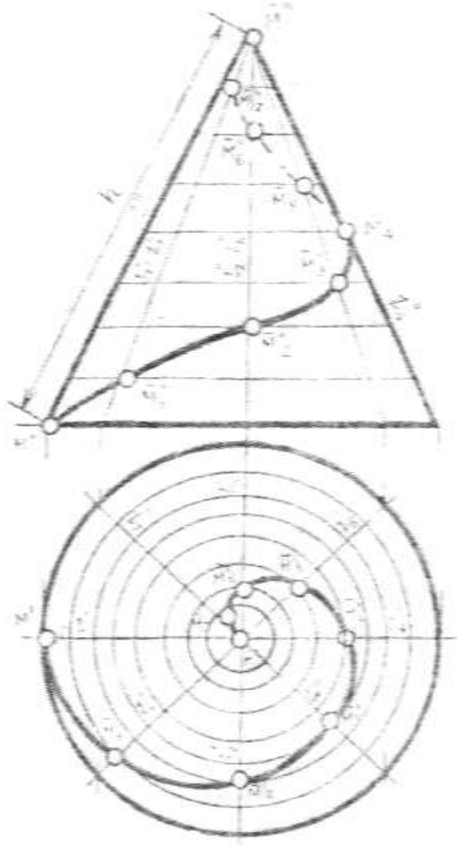


6. Silindrik hyrly çyzyk. Eger hereket edýän nokat aýlanma silindriň üstüne degişli bolsa, onda onuň emele getirýän hyrly çyzygyna silindik hyrly çyzygy diýilýär.158-nji suratda aýlanma silindrde silindrik hyrly çyzygyň proýeksiýalarynyň gurluşy görkezilen-dir. Şu berlen ýagdaýda M nokat silindriň emelegetirijisi boýunça deňölçegli hereket edýär, emelegetiriji bolsa okuň daşynda deňölçegli tizlik bilen aýlanýar. Silindrik hyrly çyzygyň ädimi edip l emelegetirijide ýatan M we $\bar{M}$ nokatlarynyň aralygyny alyp bolar.
Hereketleriň deňölçegli bolýandyklary üçin silindriň esasyny we hyrly çyzygyň ädimini deň bolan böleklere (mysalda deň 8 bölege) bölmeli . Silindriň esasyny bölýän nokatlardan onuň biri –birinden deň aralykda ýerleşen 8 sany emelegetirijilerini geçirmeli. Hereket edýän M nokat l emelegetiriji boýunça ädimiň sekizden bir bölegini geçende, ol nokadyň ýatan l emelegetirijisi hem aýlanma okuň daşyndan bir aýlawyň sekizden birini aýlanyp l_1 ýagdaýyna süýşýär.Ýagny,M nokat $l_1$emelegetirijidäki $\bar{M}_1$ nokada süýşýär.$\bar{M}_1$ nokat hem M nokat ýaly hereket edip M_2 nokada, M_2 nokat hem öz gezeginde M_3 nokada süýşýär.Şeýle hereketiň dowamynda M nokada gelin-ýär. Şeýle tertipde emele gelen nokatlary olaryň hereket ediş yzygiderliginde birleş-dirmeli. Şeýlelikde emele gelen egri çyzyk silindrik hyrly çyzygyň bir sargysy bolar. Şeýlelik-de, sag silindrik hyrly çyzygy alynýar.Onuň ýokarsyndan proýeksiýasy görnüşi ýaly silindriň ýokarsyndan proýeksiýasy bilen gabat gelýär.Diýmek,silindrik hyrly çyzygyň ýokarsyndan proýeksiýasy töwerekdir.onuň öňünden proýeksiýasy bolsa sinusoidadyr,çünki onuň gurluşy edil sinusoidanyň gurluşy ýalydyr.



158-nji surat.

7. Koniki hyrly çyzyk. Eger hereket edýän nokat aýlanma konusyň üstüne degişli bolsa,onda onuň emele getirýän hyrly çyzygyna koniki hyrly çyzyk diýilýär.26-nji suratda aýlanma konusda koniki hyrly çyzygyň proýeksiýasy görkezilendir.Ol ýerde M nokat konusyň l emelegetirijisi boýunça, l emelegetiriji bolsa öz gezeginde okuň daşynda deňölçegli tizlik bilen hereketlenýär.Koniki hyrly çyzygyň ädimi edip, l emelegetirijidäki M we ¯M nokatlaryň aralygyny almak bolar. Hereketiň deňölçeglidigi üçin konusyň esasy we ädimi deň bolan böleklere (mysalda deň 8 bölege)bölünmelidir. Hereket edýän M nokat l emelegetiriji boýunça ädimiň sekizden birini geçende, emelegetiriji hem okunuň daşynda bütün aýlawyň sekizden birini aýlanyp l1 emelegetirijidäki ¯M1 nokada süýşýär.¯M nokat M nokadyň bir aýlawdan soňky barýan ýeridir.Şeýle tertipde emele gelen nokatlary olaryň hereket ediş yzygiderliginde birleşdirip sag koniki hyrly çyzyk alynýar.Şeýle tertipde hem olaryň biratly proýeksiýalary birleşdirilýär.
M¯M1¯M2...¯M egri çyzyk koniki hyrly çyzygyň bir sargysy bolar.
Koniki hyrly çyzygyň ýokarsyndan proýeksiýasy Arhimediň spiralydyr,öňynden proýeksiýasy bolsa tolkunlarynyň beýikligi peselýän sinusoidadyr.



159-njy surat.

Tema 14

Üstleriň özara kesişme çyzyklaryny gurmak - kömekçi kesiji tekizlikler usuly.

Sapagyň meýilnamasy:

1. **Üstleriň kesişmekleri barada umumy düşünje.**
2. **Kesiji tekizlikler usuly barada düşünje.**
3. **Silindr bilen şaryň kesişme çyzygyny gurmak.**
4. **Prizmanyň we konusyň kesişme çyzygynyň gurluşy.**

1. Üstleiň özara kesişmekleri çyzmaly geometriýanyň iň esasy bölegidir. Çünki, praktikada özara kesgitli baglanyşykda bolan üstler bilen elmydama iş salyşylýar. Şol üstler biri-biri bilen baglanyşykly bolmakda haýsy hem bolsa bir predmetiň obrazyny düzýärler hem-de iki üste hem degişli bolan kesişme çyzygyny emele getirýärler. Şol kesişme çyzygy boýunça bir üst beýleki bir üste geçýär. Şonuň üçin **kesişme çyzygyna** kä halatda **geçme çyzygy** hem diýilýär.

Çyzmaly geometriýada üstleriň kesişme çyzygyny tapmak meselesini doly işlemeklik üçin aşakdaky **üç punkty** ýerine ýetirmeli:

1. Üstlere degişli bolan umumy nokatlary tapmak;

2. Tapylan umumy nokatlary yzygiderli birleşdirmek;

3. Emele gelen çyzyklaryň görünýänligini kesgitlemek;

Şu punktlaryň her haýsysyna aýratynlykda garap geçeliň.

1. Berlen iki üste degişli bolan umumy nokatlary tapmaklyk üçin aşakdaky ýaly yzygiderlikde girişilýär /160-njy surat./

a) Berlen iki $\boldsymbol{\alpha}$ we $\boldsymbol{\beta}$ üst bilen kesişýän kömekçi üçünji bir $\boldsymbol{\gamma}$ üst geçirilýär.

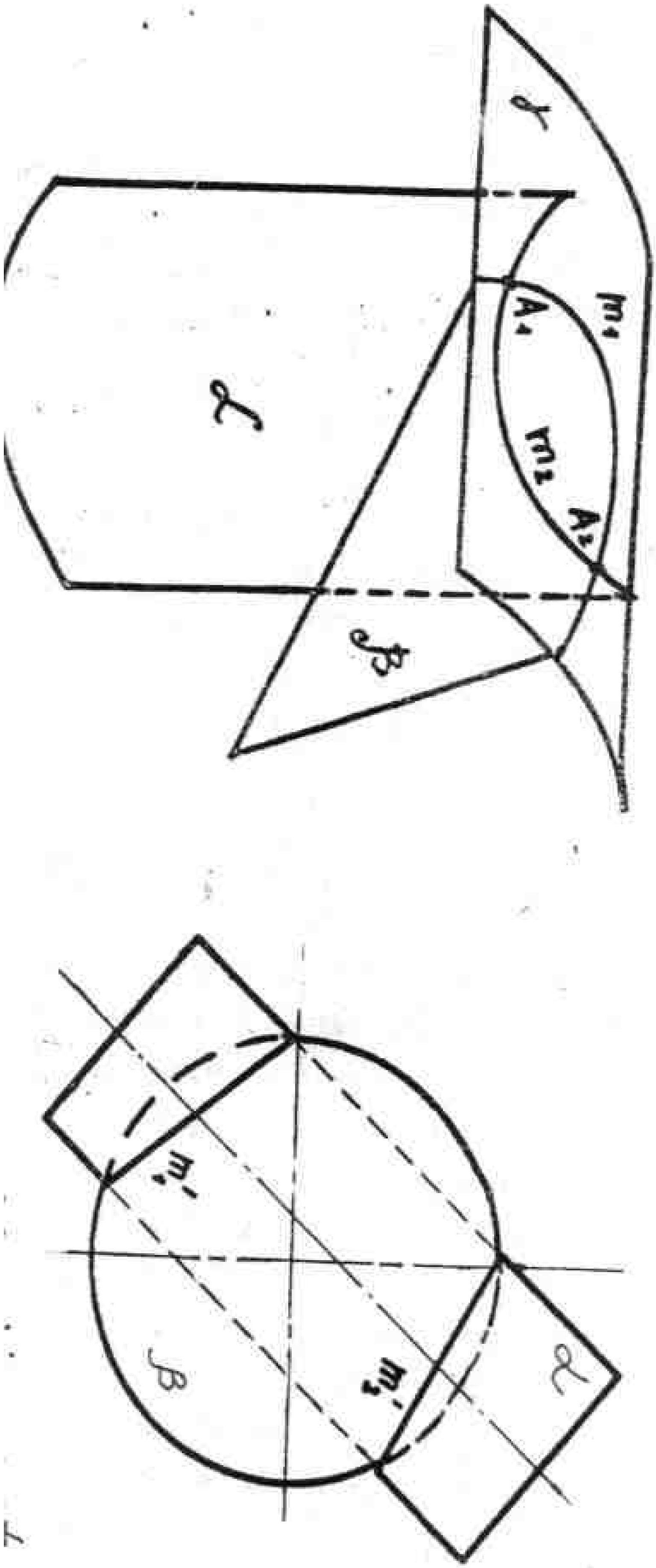
b) Kömekçi $\boldsymbol{\gamma}$ üst bilen aýratynlykda berlen iki $\boldsymbol{\alpha}$ we $\boldsymbol{\beta}$ üstleriň kesişme m_1 we m_2 umumy çyzyklary tapylýar.

w) Tapylan m_1 we m_2 çyzyklaryň kesişme A_1 we A_2 nokatlary alynýar.

Alnan A_1 we A_2 nokatlar kesişýän iki $\boldsymbol{\alpha}$ we $\boldsymbol{\beta}$ üstlerde hem ýatýarlar, ýagny berlen iki üstüň kesişme çyzygyna degişlidirler. Şunuň ýaly hem islendik sandaky kömekçi kesiji $\boldsymbol{\gamma_i}$ üstlerini geçirip berlen iki $\boldsymbol{\alpha}$ we $\boldsymbol{\beta}$ üste degişli bolan

A_3, A_4 ... nokatlar alynýar. Şunlukda iki üstüň kesişme çyzygyny kesgitlemek meselesiniň çözülişiniň algoritmi:

$$(\forall L)\cdot(L\in l)\cdot[L_i=(\alpha\cap\gamma)\cap(\beta\cap\gamma)]$$



160-njy surat

I-nji bellik. Kesiji γ üstüň berlen α we β üstler bilen hersiniň aýratynlykda kesişme m_1 we m_2 çyzygyny tapmaklyk, berlen iki α we β üstüň kesişme çyzygyny tapmaklykdan has kyn bolmazlygy üçin kesiji γ üsti berlen α we β üstler bilen kesişende ýönekeý çyzyklar /ýagny çyzgynyň we sirkulyň kömegi bilen çyzylýan çyzyklar/ emele geler ýaly edip saýlamaly.

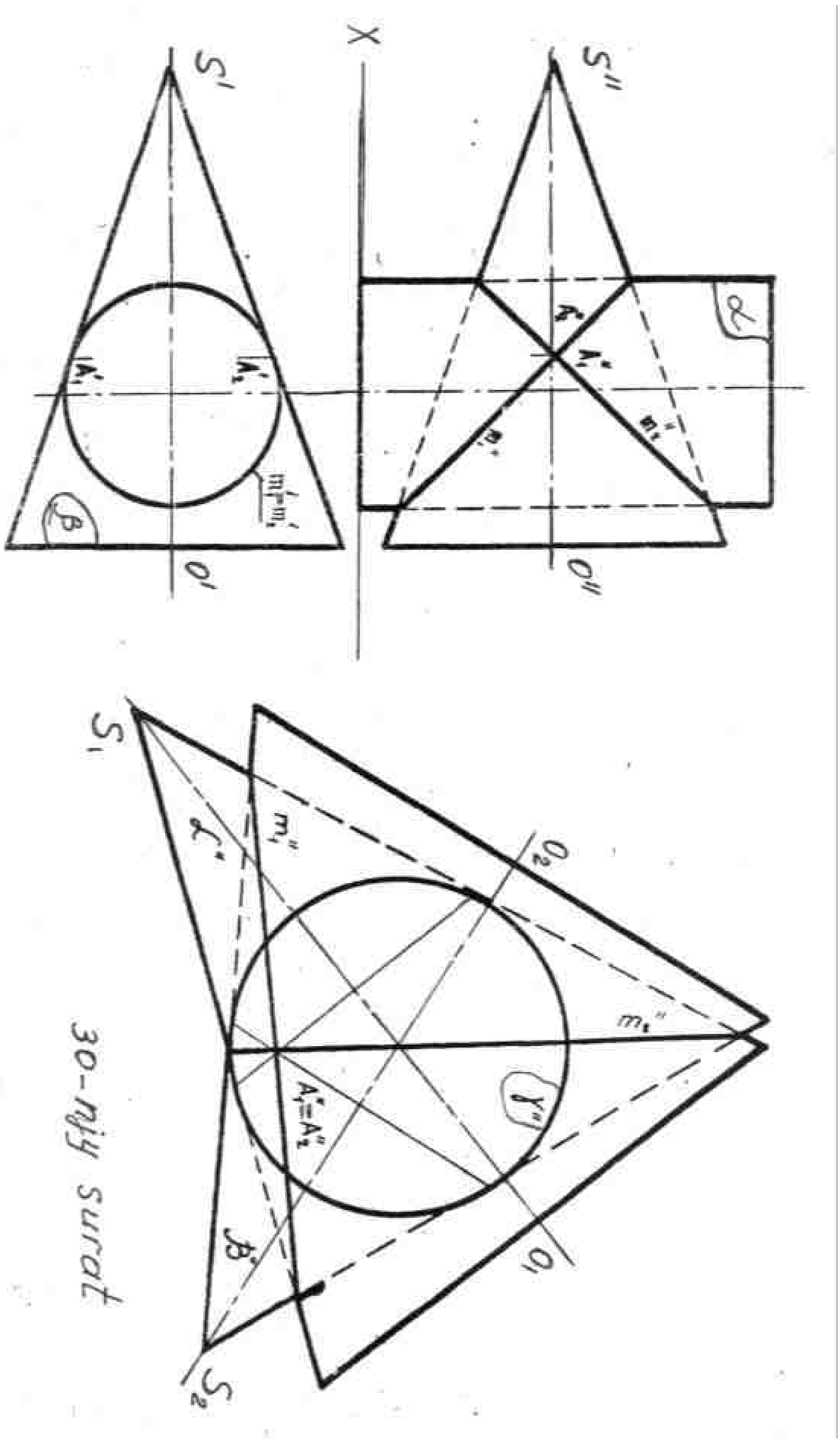
2-nji bellik. Meseläni has takyk işlemek üçin kesişme çyzygyna degişli bolan häsiýetli /esasy/ nokatlary tapmakdan başlamaly. Olara aşakdakylar degişlidirler:

- iki köpgranly üstler kesişenlerinde, bir köpgranlygyň gapyrgalarynyň beýleki köpgranly üst bilen kesişýän nokatlary we tersine;
- iki gyşyk-ýapgyt aýlanma üstler kesişenlerinde, bir üstüň proýeksiýalar tekizliklerine iň çetki proýesirlenýän emelegetirijileriniň beýleki üst bilen kesişýän nokatlary we tersine;
- köpgranly üst bilen gyşyk-ýapgyt üst kesişenlerinde köpgranlygyň gapyrgalarynyň gyşyk üst bilen kesişýän nokatlary we gyşyk üstüň proýeksiýalar tekizliklerine iň çetde proýesirlenýän emelegetirijileriniň köpgranly üst bilen kesişýän nokatlary we ş.m.

2. Tapylan umumy nokatlary yzygiderli birleşdirmek üçin bar bolan usullardan /shematik ýazgyny, birmeňzeş belgiler we beýleki/ peýdalanmaly hem-de aşakdaky ýagdaýlary göz öňünde tutmaly;

Teorema I. Eger ikinji tertipli iki üst bir tekiz çyzyk bilen kesişýän bolsa, onda ol ýene bir tekiz çyzyk bilen hem kesişýändir /160-njy surat, epýurda diňe frontal proýeksiýalary görkezilendir/.

Teorema 2. Eger ikinji tertipli iki üsti iki sany nokatda A_1 we A_2 galtaşsalar, onda üstleriň kesişme çyzygy galtaşma A_1 we A_2 nokatlary birleşdirýän göni çyzygyň üstünden geçýän iki sany ikinji derejeli m_1 we m_2 çyzyga dargaýandyr /161-njy surat/.



161-njy surat

Teorema 3. Eger ikinji derejeli iki **α** we **β** üst üçünji bir **γ** üstüň daşyndan ýa-da içinden çyzylan bolsalar, onda olaryň kesişme çyzygy galtaşýan çyzyklaryň kesişme A_1 we A_2 nokatlaryny birleşdirýän göni çyzygyň üstünden geçýän iki sany ikinji derejeli m_1 we m_2 çyzyga dargaýandyr. /161-njy surat, epýurda diňe frontal proýeksiýalary görkezilendir/.

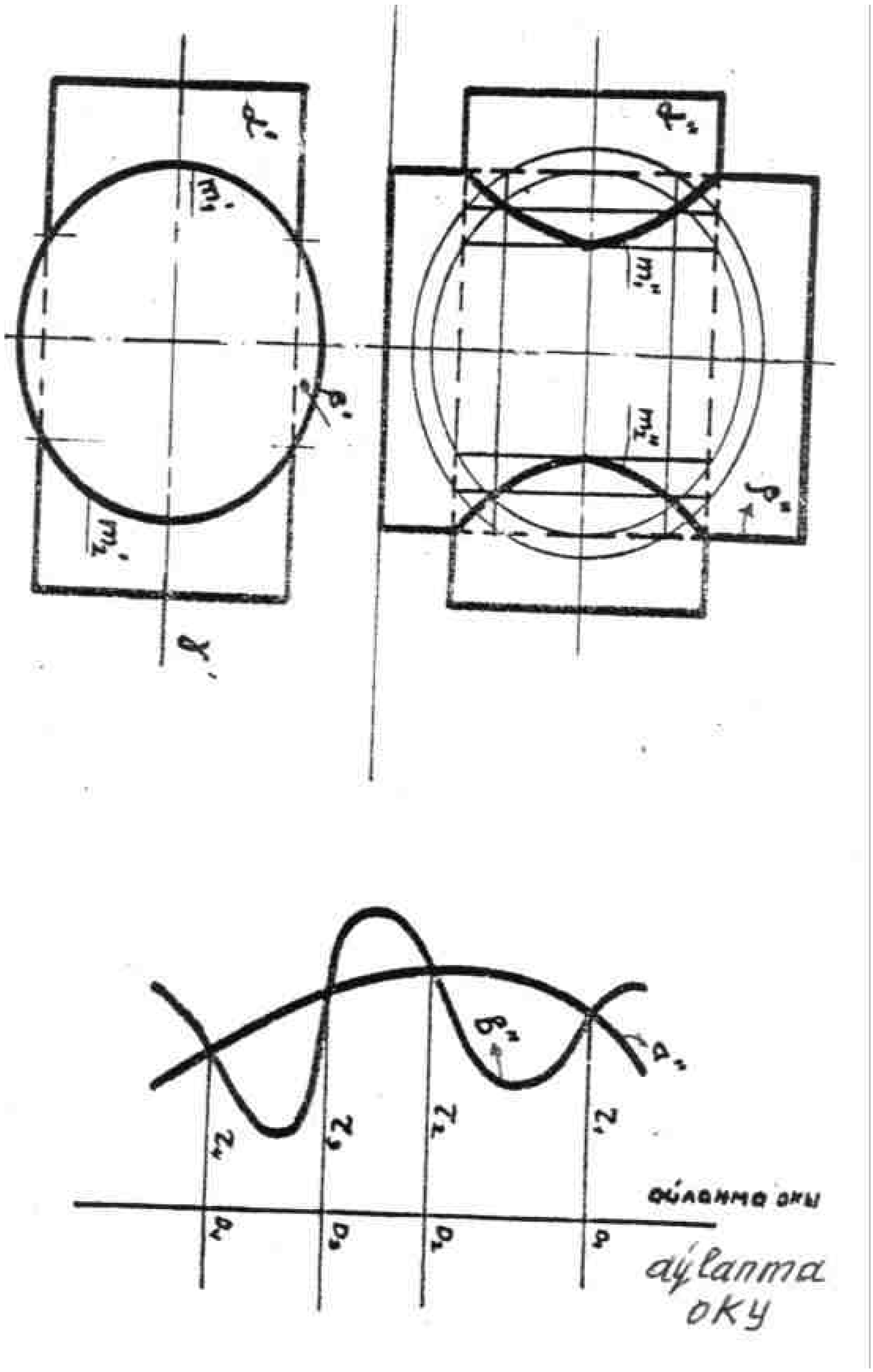
Eger ikinji derejeli **α** we β iki üstüň umumy **γ** simmetriýa tekizligi bolsa, onda olaryň kesişme m_1 we m_2 çyzygy şol **γ** tekizlige /ýa-da oňa parallel bolan tekizliklere/ ikinji derejeli çyzyk bolup proýesirlenýär / 162-nji surat/.

Iki sany umumy okly aýlanma üstler kesişenlerinde, şol üstleriň **a** we **b** meridianlarynyň kesişme nokatlary näçe bolsa, şonça töwerek boýunça hem üstler kesişýändirler.

Eger iki **α** we **β** kesişýän üstleriň biri /**β**/ haýsy hem bolsa bir proýeksiýalar tekizligine /H/ proýesirleýji ýagdaýda bolsa, onda şol tekizlikde üstleriň kesişme m_1 we m_2 çyzyklarynyň m'_1 we m'_2 proýeksiýasy proýesirleýji **β** üstüň **β'** proýeksiýasy bilen gabat gelýär;

Kesişme çyzyklarynyň proýeksiýary iki üstüň biratly proýeksiýalarynyň gabat gelýän /biri-biriniň üstüne düşýän/ meýdanynyň daşynda bolmaýar, çünki her bir umumy nokat iki üste hem degişlidir.

3. Emele gelen kesişme çyzyklarynyň görünýändiklerini kesgitlemek üçin aşakdakylary bilmeli : kesişme çyzygyna degişli bolan nokat iki görünýän çyzygyň
kesişmeginden emele gelen bolsa görünýär; egerde biri görünýän, beýlekisi bolsa görünmeýän ýa-da ikisi hem görünmeýän çyzyklaryň kesişmeginden emele gelen bolsa görünmeýär. Başgaça aýdanymda, eger nokat görünýän tekizligiň /üstüň/ üstünde ýatan bolsa görünýär, görünmeýän tekizligiň üstünde bolsa görünmeýär.

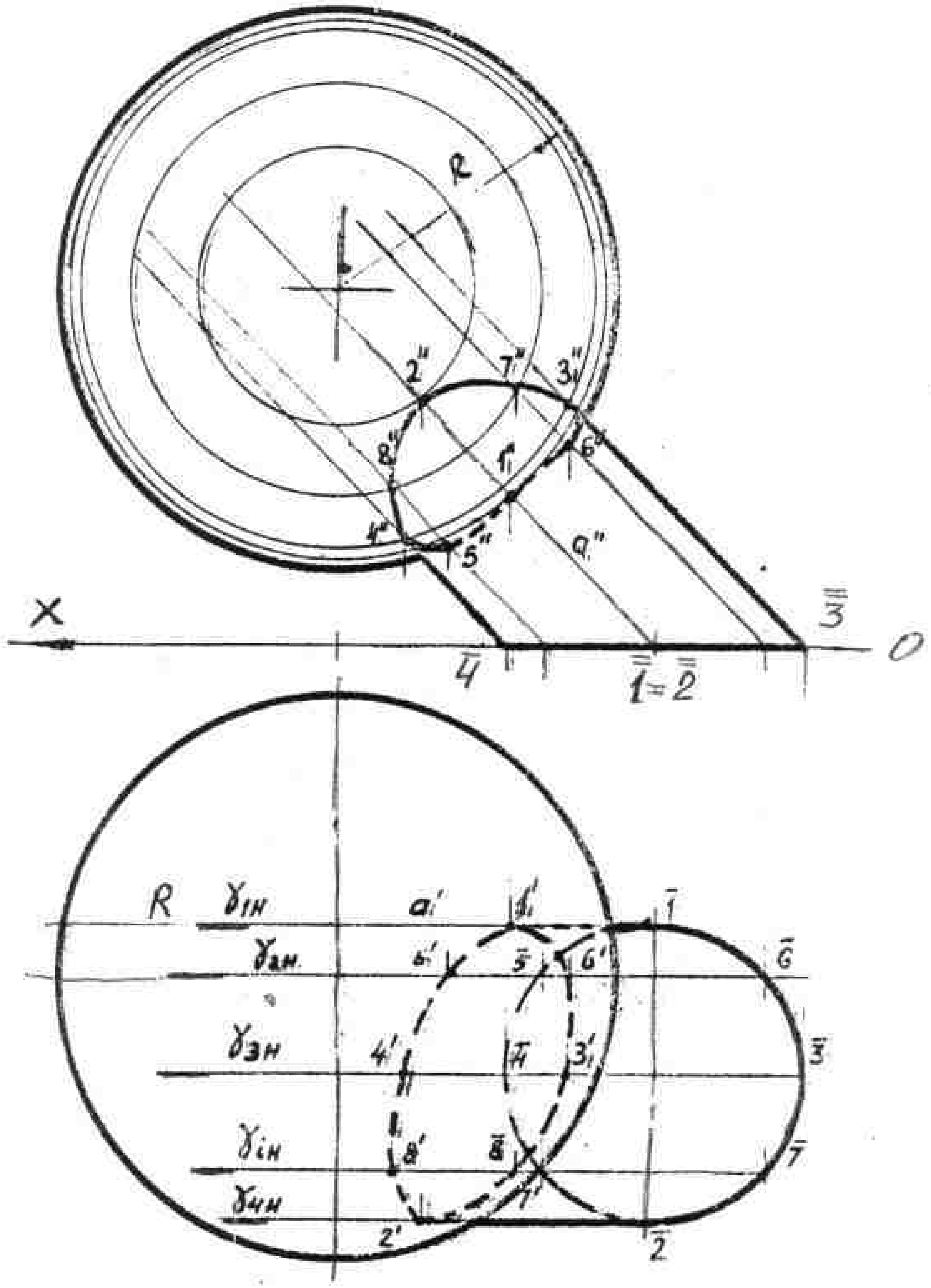


162-nji surat

3.4-nji mysal. Berilen silindir bilen şaryň umumy kesişme çyzygyny tapmaly /163-nji surat./

Çözülişi: I. Şaryň islendik tekizlik bilen kesigi töwerek bolýar. Silindiriň H tekizligi bilen kesigi töwerek bolany üçin kesiji üstler deregine H tekizligine parallel bolan tekizlikleri hem almak bolar. Emma şeýle hili tekizlikler arkaly birinjiden-ä häsiýetli nokatlary tapmak kyn bolar, ikinjiden hem haýsy aralyklarda şonuň ýaly kesiji tekizlikleri geçirmekligiň gerekdigi nägümana bolar. Şonuň üçinem hem ***V*** tekizligine parallel bolan kesiji tekizlikleri geçirmeklik amatlydyr. Şeýle tekizlikleri ulanmaklyk umumy nokatlary yzygiderli birleşdirmek üçin hem amatly bolar.

2. Häsiýetli nokatlara silindriň proeksiýalar tekizliklerindäki iň çetki emelegetirijileriniň şaryň üsti bilen kesişýän nokatlary we şaryň ptoeksiýalar tekizliklerine proesirlenýän uly tegelekleriniň silindriň üsti bilen kesişýän nokatlary degişlidirler.



163-nji surat

OL nokatlary $\gamma_i // \gamma // V$ $(i=1,2,3,4)$ tekizlikleriň kömekleri bilen taparys. Mysal üçin, γ_1 kesiji tekizlik silindriň üstüni iň yzky α emelegetiriji bilen, şaryň üstüni bolsa R radiusly töwerek boýunça kesýändir. Tapylan α

emelegetirijiniň R radiusly töwerek bilen kesişýän I-nji nokady umumy nokatlara degişlidir. Edil şonuň ýaly γ_4 kesiji tekizliginiň kömegi bilen silindriň iň öňdäki emelegetirijisiniň şaryň üsti bilen kesişýän 2-nji nokady, γ_3 kesiji tekizligiň kömegi bilen bolsa silindriň V tekizlikdäki iň çetki emelegetirijileriniň kesişýän 3-ni we 4-nji nokatlary tapylandyrlar.

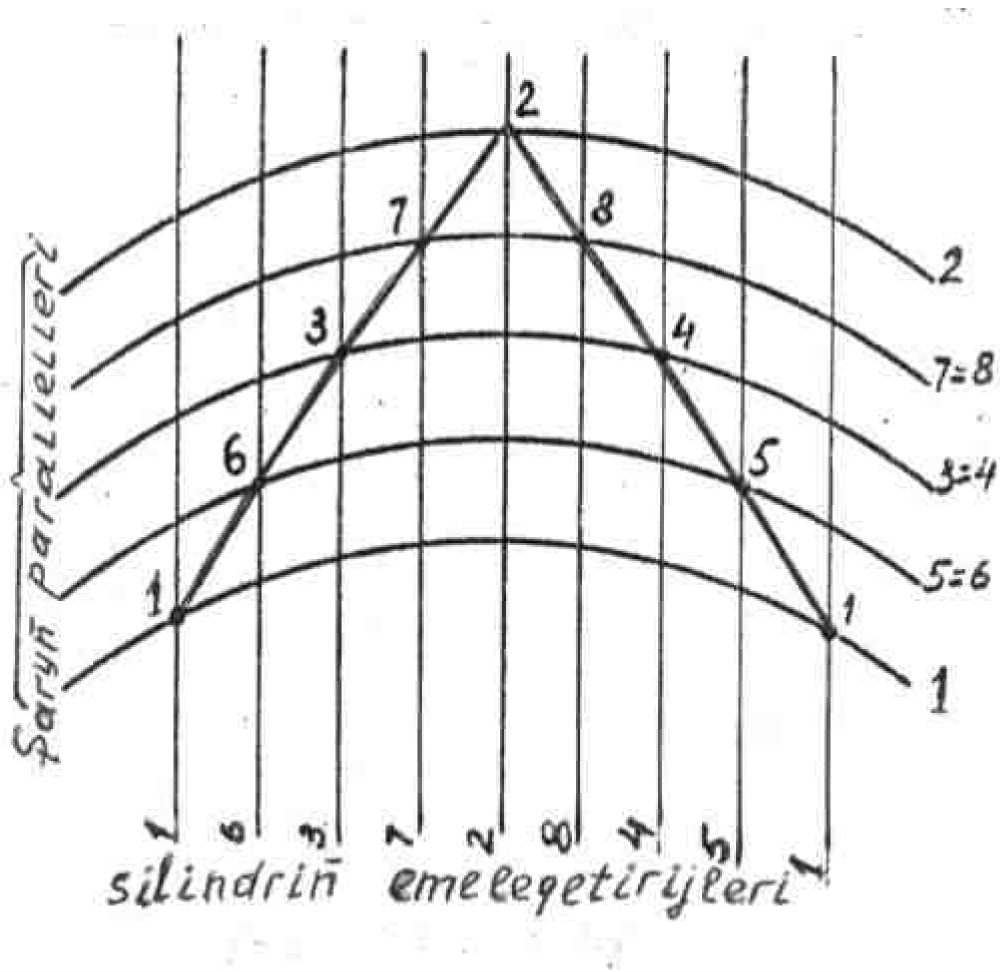
V tekizlikdäki şaryň uly tegeleginiň silindriň üsti bilen kesişýän nokatlary /5-nji we 6-njy/ γ_2 kesiji tekizligiň kömegi bilen tapylandyrlar. Islendik $\gamma_i // \gamma$ tekizligiň kömegi bilen 7-nji we 8-nji nokatlar tapylandyrlar.

Alnan nokatlaryň gorizontal proeksiýalaryny silindriň emelegetirijileriniň degişlilikde gorizontal proeksialarynyň üstünde baglanyşyk üyzygy boýunça alýarys.

3.Nokatlaryň silindriň H tekizlikdäki kesigine bolan gyşykburçly proeksiýanyň kömegi bilen shematiki ýazgyny /shema-2/ gurup, nokatlaryň yzygiderli birleşişlerini alýarys. Ýagny 1-6-3-7-2-8-4-5-1 çyzygyny alýarys. Edil şu yzygiderlikde-de olaryň biratly proeksiýalaryny birleşdirýäris.

BELLIK: Şaryň shematik ýazgynyny gurmak üçin töweregiň dugalaryny alýarys. Ýazgyndaky her bir goňşy dugalar şaryň üstündäki goňşy töwerekleri aňladýandyrlar.

SILINDRIŇ EMELE GETIRIJILERI



1-6-3-7-2-8-4-5-1

4. Alnan nokatlaryň görünýändigini kesgitlemek üçin şaryň we silindriň proeksiýalarynyň özara ýerleşişlerini we ***H*** we ***V*** tekizliklere görä ýerleşişlerini göz öňünde tutmaly. Mysal üçin, kesişme çyzygynyň gorizontal proeksiýasy şaryň aşaky böleginde ýerleşýändigi sebäpli götünýän däldir. Alnan çyzyklaryň frontal proeksiýalarynyň silindriň we şaryň öňki tarapynda ýatýan bölekleri, ýagny 3-7-2-8-4 bölegi görünýändir, galanlary bolsa görünýän däldirler.

5-nji mysal. Berlen konusyň we üçgranly prizmanyň umumy kesişme çyzygyny tapmaly. /164-nji surat./

Çözülişi I. Kesiji üstleriň deregine H tekizligine parallel bolan γ_i tekizlikleri geçirýäris. Çünki şonuň ýaly γ_i tekizlikler konusy R radiusly töwerek boýunça, prizmany bolsa KLMN gönüburçlygy boýunça kesýär.

4. Prizmanyň gapyrgalarynyň konusyň üsti bilen kesişýän nokatlary-häsiýetli nokatlardyrlar. Şeýlelikde prizmanyň AB, CD we EF gapyrgalarynyň konusyň üsti bilen kesişýän nokatlaryny tapmak üçin şol gapyrgalaryň üstünden degişlilikde γ_i *// **H** (i=1,2,3)* tekizlikleri geçirip 1 we 2, 3 we 4, 5 we 6 häsiýetli nokatlary alýarys. Islendik umumy nokatlary tapmak üçin islendik γ_i *// **H*** tekizligi geçirip 7,8,9 we 10 nokatlary alýarys.

3. Alnan nokatlary yzygiderli birleşdirmek üçin bize ozal „Konusyň tekizlik bilen kesişmegi" diýen bölümde belli bolan ýagdaýlardan peýdalanýarys. Şonuň üçin hem konusyň üstüni prizmanyň ABCD grany **parabola** boýunça, ABEF grany ellips we CДEP grany bolsa **töwerek** boýunça kesýändirler.

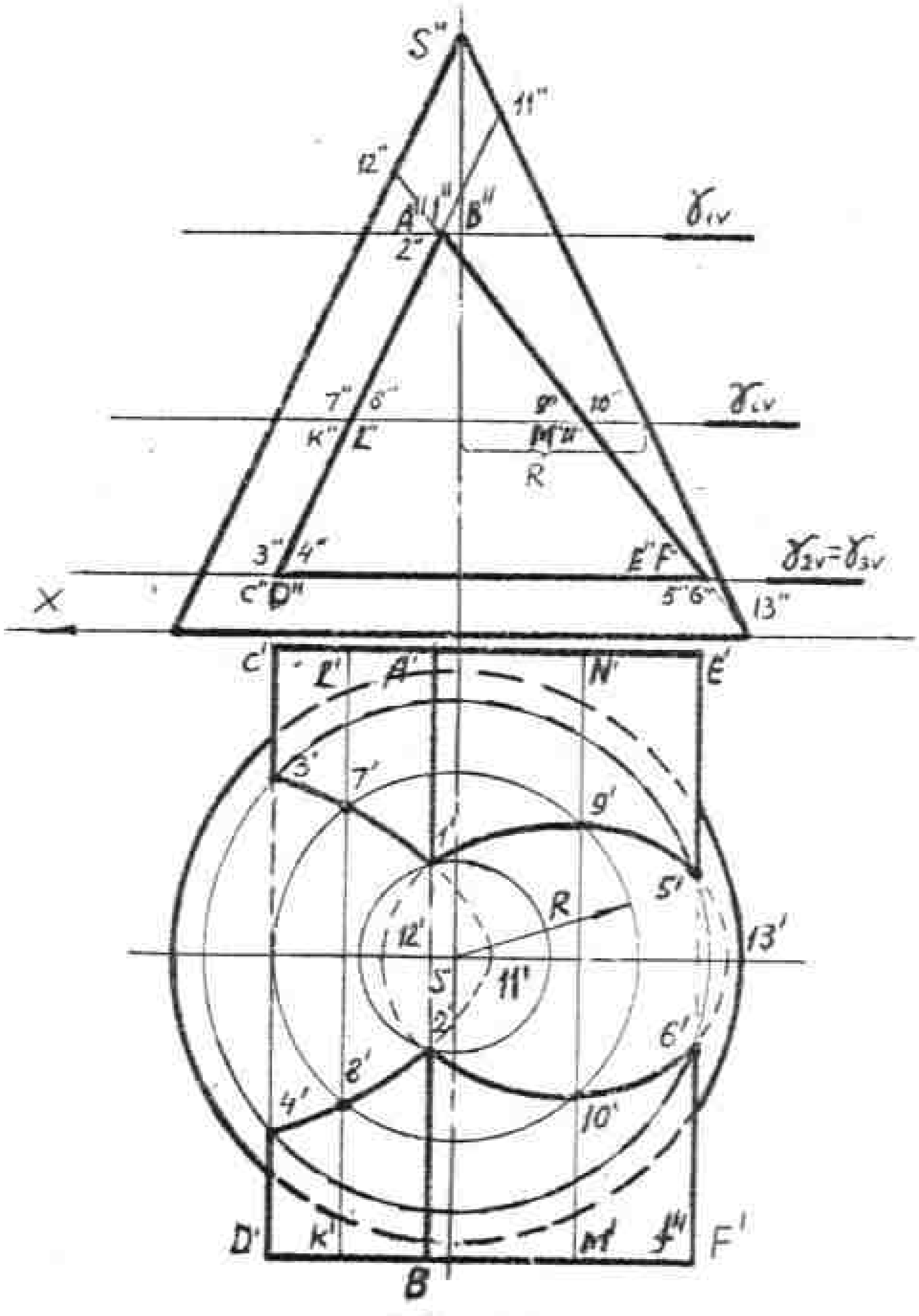
Parabolanyň iň ýokarky **11-nji** nokadyny almak üçin prizmanyň ABCD granynyň frontal prpoeksiýalaryny konusyň iň sagdaky emelegetirijisiniň frontal proeksiýasy bilen kesişýänçä dowam etdirýäris. Şonuň ýaly hem ellipsiň iň ýokarky **12-nji** we iň **13-nji** nokadyny alýarys. Prizmanyň gapdal üstüniň V tekizligine perpendikulýar bolanlygy üçin emele gelen umumy nokatlaryň frontal proeksiýalary şonuň ýaly emele gelen **parabolanyň, ellipsiň** we **töweregiň** frontal proeksiýalary prizmanyň frontal proeksiýalary bilen gabat gelýärler.

Alnan 3-7-1-/11/-2-8-4 nokatlaryň gorizontal proeksiýalary **parabolany**, /12/-1-3-5-/13/-6-10-2-/12/ nokatlaryň gorizontal proeksiýalary bolsa ellipsi emele getirýärler. Skopka alnan nokatlary birleşdirmän degişlilikde **parabolanyň** we **elipsiň prizmanyň** üstüne degişli bolan bölegini almak bolar. Edil şonuň ýaly hem **prizmanyň** CDEF granynyň **konusyň** üsti bilen kesişýän çyzygy-töweregiň 3-5 we 6-4 dugalarydyrlar.

4. Emele gelen kesişme çyzyklarynyň hemmesiniň konusyň gapdal üstüne degişli bolany üçin olaryň gorizontal proýeksiýalary görünýändirler. Emma H tekizliginde edil şol çyzyklaryň biriniň-töweregiň / 3-5 we 6-4 dugalarynyň/

prizmanyň H tekizligindäki görünmeýän granynyň üstünde ýatýandyklary üçin gorizontal proýeksiýalary görünýän däldirler.

Prizmanyň gapdal üstüne degişli bolan /emele gelen/ çyzyklar V tekizliginde görünmeýän bolsalar hem prizmanyň frontal proýeksiýasy bilen gabat gelýärler.



164-nji surat

Tema 15

Üstleriň kesişmegi – sferalar usuly.

Sapagyň meýilnamasy:

1.Kesiji sferalar usuly barada düşünje.
2. Kesiji konsentriki sferalar usuly.
3. Kesiji ekssentriki sferalar usuly.

1.Üstleriň kesişme çyzygyny tapmaklykda kömekçi kesiji üstleriň deregine sferalary peýdalanmaklyk giňden ulanylýar. Onuň oňaýly sebäpleri şu aşakdakylardan ybaratdyr:

- sferanyň proýeksiýasy has ýönekeý gurulýär;
- sferanyň üstünde islendik sanda töwerekleriň sistemasyny alyp bolýar;
- her bir merkezden geçýän tekizlik sferanyň simmetriýa tekizligi bolup hyzmat edýär;
- eger sferanyň merkezi aýlanma üstüň okunda ýatan bolsa, onda ol /sfera/ aýlanma üsti bilen / bir we birnäçe / töwerekler boýunça kesişýändir. / Kesişmän hem biler? / Şol töwerekler oka parallel bolan tekizliklere göniçyzyk bolup, perpendikulýar bolan tekizliklere bolsa hakyky ululygy bolup proýesirlenýändirler.

Şonuň üçin hem umumy simmetriýa tekizligi bolan islendik aýlanma üstleriň kesişme çyzygyny tapmak meselesinde kömekçi kesiji sferalar giňden ulanylýar. Kesiji sferalary bir merkezden / konsentriki sferalar / we aýry-aýry merkezden / ekssentriki sferalar / hem geçirmek bolar.

Kesiji konsentriki sferalar usuly.

Kesiji konsentriki sferalar usulyny ulanmak üçin şu aşakdaky şertler gerek:

1. Kesişýän üstler-aýlanma üstleri bolmalydyrlar;
2. Kesişýän üstleriň H, V ýa-da W tekizlikleriniň haýsy hem bolsa birine parallel bolan umumy simmetriýa tekizligi bolmalydyr;
3. Kesişýän üstleriň aýlanma oklary özära kesişmelidirler;

I-nji. BELLIK: Eger-de ýokardaky görkezilen şertleriň haýsy hem bolsa biri ýerine ýetirilmese, onda sferalar usulyny ulanmaklyk örän amatsyzdyr.

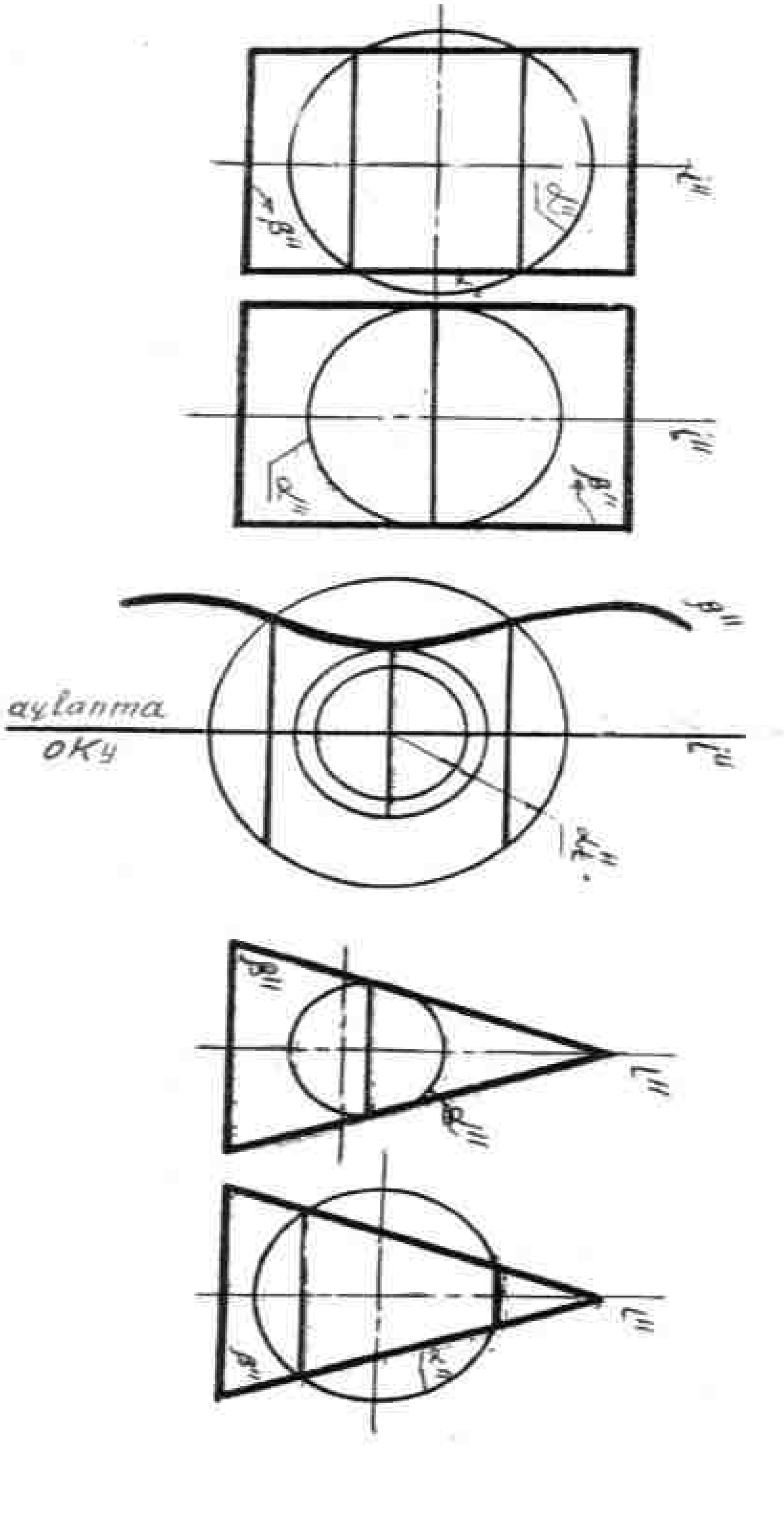
2-nji. BELLIK: Eger-de umumy simmetriýa tekizligi H, V ýa-da W tekizlikleriniň hiçisine-de parallel bolmasa, onda proýeksiýalar tekizliklerini özgerdip / aýlanma ýa-da şekiller tekizliklerini çalşyrmak usullary bilen / umumy simmetriýa tekizligini proýeksiýalar tekizliklerine / H, V ýa-da W / parallel bolan ýaly etmelidir.

Mysal. Berlen silindriň we konusyň kesişme çyzygyny tapmaly .

Çözülişi: I. Kesiji üstleriň deregine ýokardaky görkezilen ýönekeý kesiji tekizlikleri hem geçirmek bolar. Ýöne ol ýönekeý kesiji tekizlikleriň berlen üstleri kesýän emelegetirijilerini tapmaklyk aňsat düşmez. Şonuň üçin hem kesiji üstler hökmünde konsentriki sferalaryň üstlerini ulanmaklyk örän amatlydyr, sebäbi bu ýagdaýda ýokarda görkezilen şertleriň hemmesi laýyk gelýärler.

2. Merkezi berlen üstleriň oklarynyň kesişme nokadynda ýatýan konsentriki sferalary geçirýäris. Üstleriň umumy simmetriýa tekizligi V tekizligine parallel bolany üçin kesiji sferanyň berlen üstler bilen kesişýän töwerekleri V tekizligine göni çyzyk bolup şekillendirilýär. Şonuň üçin hem kömekçi kesiji sferalaryň merkezini üstleriň oklarynyň frontal proýeksiýalarynyň kesişýän K nokadynda alýarys.

Mysal üçin, merkezi K / K" / nokadyndan R radiusly γ_i (γ_i") kömekçi kesiji sferany geçireliň. Bize belli bolşy ýaly , şu sfera konusy degişlilikde frontal proýeksiýalary göni çyzyk bolup düşýän $ч_1$ ($ч_1$") *we* $ч_2$ ($ч_2$") towerekleri , silindri bolsa $ч_3$ ($ч_3$") töweregi boýunça kesýär.

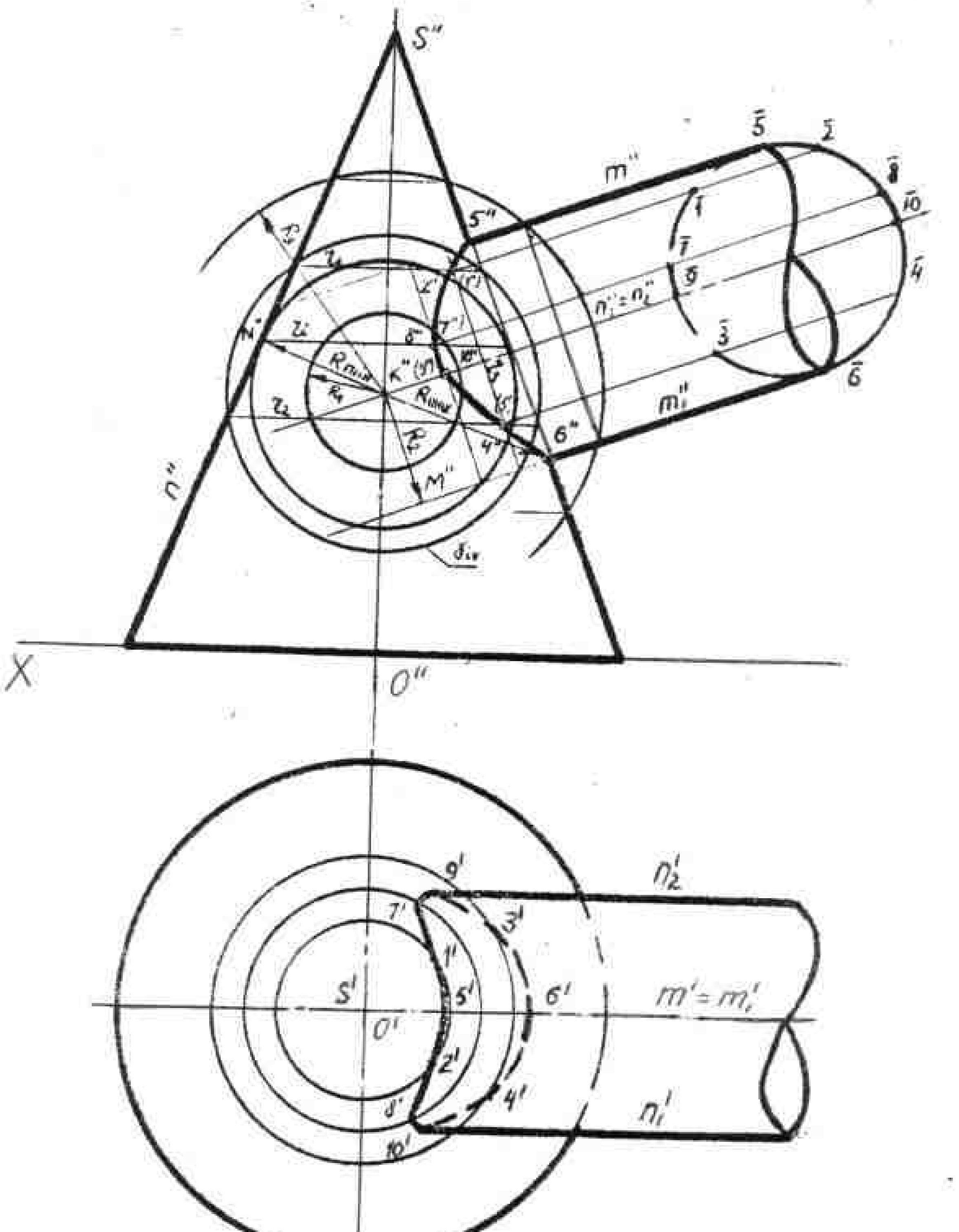


165-nji surat.

Alnan $ч_1$ *we* $ч_2$ töwerekleriň $ч_3$ töweregi bilen kesişýän I, 2 we 3, 4 / 1'', 2'', 3'', 4'' / nokatlary umumy nokatlara degişlidirler. Ýöne mesele işlenilip başlananda ilki bilen häsiýetli nokatlary tapmalydyrys. Ol nokatlar konusyň we silindriň simmetriýa tekizliginde ýatýan emelegetirijileriniň özära kesişýän 5-nji / 5" / we 6-njy / 6" / nokatlarydyrlar. Şeýle hem 5-nji / 5" / we 6-njy / 6" / nokatlary silindriň frontal proýeksiýasyndaky iň çetki emelegetirijileriniň konusyň üsti bilen kesişýän nokatlarydyr / hem-de konusyň **V** tekizligindäki iň sagdaky emelegetirijisiniň silindriň üsti bilen kesişýän nokatlarydyr / . Görnüşi ýaly, kömekçi kesiji sferany islendik radiusda geçirip, umumy nokatlary alyp bolmaýar. Mysal üçin, R_1, R_2 we R_3 radiusly sferalar berlen üstlere degişli bolan umumy nokatlary almaga mümkinçilik bermeýärler. R_1 radiusly sfera berlen üstleriň hiçisi bilen hem kesişmeýär. R_2 adiusly sfera diňe silindriň üsti bilen bir töwerek boýunça kesişip, konusyň üsti bilen bolsa kesişmeýär, R_3 radiusly sferanyň bolsa konusyň we silindriň üstlerini kesýän töwerekleri özara kesişmeýärler. Şeýle ýagdaýda eýsem nähili radiusly sferalary geçirmelidiris?

Iň kiçi (R_{min}) we iň uly (R_{max}) radiusly sferalary geçirmäni bilmelidiris. Iň kiçi radiusly sferany tapmak üçin K (K") nokadyndan silindriň we konusyň m(m") we n(n") esasy meridianlaryna KM we KN (K"N" we K"N") perpendikulýary geçirýäris. Şol geçirilen perpendikulýaryň ulusy $K''N''=R_{min}$ deňdir. Şol radiusdan kiçi radiusly geçirilen sferalar silindriň üsti bilen kesişseler-de, konusyň üsti bilen kesişmeýärler.

Iň uly radiusly sferany tapmak üçin K/K"/ nokadyny berlen üstleriň V töweregindäki iň çetki emelegetirijileriniň kesişýän 5-nji we 6-njy / 5 we 6 / nokatlary bilen birleşdirýäris. Şol /k" 5" we k" 6"/ aralyklaryň ulusy K"6" / aralyklaryň ulusy $K''6''=R_{max}$ deňdir. Şol radiusdan uly radiusly geçirilen sferalaryň silindriň we konusyň üstlerini kesýän töwerekleri özara kesişmeýärler. R_{max} radiusly sferanyň silindriň we konusyň üstlerini kesýän töwerekleri bolsa diňe galtaşýarlar. Biziň seredýän üstlerimizde 6-njy /6"/ nokatda galtaşýarlar. Bu häsiýetli nokady bolsa ozal tapypdyk.



166-njy surat

Şeýlelikde kesiji üstleriň deregine $R_{min} \le R_i < R_{max}$ radiusly kesiji sferalary ulanýarys. R_{min} radiusly kesiji sferany geçirip, 7-nji /7''/ we 8-nji /8''/ nokatlary tapýarys.

Tapylan nokatlaryň gorizontal proýeksiýalaryny tapmaklyk üçin üstleriň **V**
tekizligindäki iň çetki emelegetirijileriň gorizontal proýeksiýalaryny /5-nji we 6-njy nokatlar üçin / hem-de konusyň üstünde ýatan we degişlilikde I we 2, 3 we 4, 7 we 8 nokatlaryň üstünden geçýän we H tekizligine parallel bolan $ч_1$, $ч_2$ we $ч_i$ radiusly töwerekleriň gorizontal proýeksiýalaryny ulanýarys.

3.Tapylan nokatlary yzygiderli birleşdirmek üçin şol nokatlaryň silindriň kesigindäki / $\overline{1},...,\overline{8}$ / gyşykburçly proýeksiýalaryny ulanýarys. Şol gyşykburçly proýeksiýalary tapanymyzda nokatlaryň berlen üstleriň öň we iz tarapynda ýerleşýänlerini göz öňünde tutýarys. Şonuň üçin yz tarapynda ýerleşenlerini skobkanyň içine alýarys hem-de silindriň kesigini V tekizlige parallel bolan ýagdaýa çenli öwrüp, silindriň görünýän tarapyny bitewi-tutuş çyzyk, görünmeýän tarapyny bolsa ştrihli çyzyk bilen belleýäris.

Şeýlelikde 5-2-8-4-6-3-7-I-5 çyzygyny alýarys. Edil şu tertipde-de nokatlaryň biratly proýeksiýalaryny yzygiderli birleşdirýäris.

I-nji bellik. Ozal bize belli bolşy ýaly, emele gelen çyzygyň frontal proýeksiýasynyň **5-2-8-4-6** we **5-I-7-3-6** bölekleri gabat gelýärler.

2-nji bellik. **H** tekizliginde silindriň üstüniň iň öňdäki n_1 iň yzdaky n_2 emelegetirijileriniň konusyň üsti bilen kesişýän häsiýetli nokatlaryny tapmak üçin, şol emelegetirijileriň frontal n_1'' we n_2'' proýeksiýalarynyň kesişme çyzygynyň frontal proýeksiýasy bilen kesişýän 9-njy we 10-njy nokatlaryny tapýarys. Soňra bolsa baglanyşyk çyzygynyň kömegi bilen şol nokatlaryň 9'-njy we 10'-njy gorizontal proýeksiýalaryny degişlilikde emelegetirijiniň üstünde tapýarys. Şeýle hem **H** tekizliginde yzygiderliligi takyklamak üçin 9''-njy we 10''-njy nokatlary silindriň **V** tekizligindäki kesigine gyşykburçly proýesirleýäris.

4. Emele gelen kesişme çyzygynyň H tekizliginde görünýänligini kesgitlemek üçin silindriň kesigini ulanýarys. Konusyň gapdal üsti H

tekizliginde görünýändir. Silindriň bolsa diňe ýokary tarapy görünýändir.Ol tarapda bolsa emele gelen çyzygyň **9-7-I-5-2-8-10** bölegi ýatýandyr. Diýmek, şol bölegi **H** tekizliginde görünýändir. Galan **9-3-6-4-10** bölegi bolsa görünýän däldir. **V** tekizliginde ozal aýdyşymyz ýaly silindriň aňyrky görünmeýän üstünde ýatýan **5-I-7-3-6** bölegi görünmese-de, bärki görünýän **5-2-8-4-6** bölegi bilen gabat gelýär.

Kesiji ekssentriki sferalar usuly.

Kesiji ekssentriki sferalary ulanmak üçin şu aşakdaky şertler gerek:

I. Kesişýän üstler aýlanma üstleri ýa-da üstlerinde töwerekleriň sistemasy bolan üstler bolmalydyrlar.

2. Kesişýän üstleriň **H, V** ýa-da **W** tekizlikleriniň haýsy hem bolsa birine parallel bolan umumy simmetriýa tekizligi bolmalydyr.

I-nji bellik. Eger-de ýokardaky görkezilen şertleriň haýsy hem bolsa biri ýerine etmese, onda sferalar usulyny ulanmaklyk örän amatsyzdyr.

2-nji bellik. Eger-de umumy simmetriň tekizligi **H, V** ýa-da **W** tekizlikleriniň hiçisine-de parallel bolmasa, onda proýeksiýalar tekizliklerini özgerdip, umumy simmetriýa tekizligini proýeksiýalar tekizliklerine parallel bolan ýaly etmelidir.

Mysal. Berlen konusyň we halkanyň kesişme çyzygyny tapmaly.

Çözülişi I. Kesişýän üstleriň ikisiniň hem aýlanma üstleri bolandyklary üçin kömekçi kesiji üstleriň deregine sferalary almak amatlydyr.
Berlen iki üstüň üstünde-de töwerekleriň degişlilikde sistemasy bardyr. Kesik konusyň üstünde H tekizligine parallel töwerekleriň sistemasy, halkada bolan halkanyň merkezinden geçýän we V tekizligine perpendikulýar bolan islendik tekizlikler bilen halkanyň kesişmeginden emele gelen töwerekleriň sistemasy bardyr.

Bellik: Mundan başga-da V tekizligine parallel bolan töwerekleriň sistemasy hem bardyr.

Bize belli bolşy ýaly, konusyň okunyň üstünde merkezi bolan her bir kesiji sfera konusyň üstüni töwerekler boýunça kesýändirler.

MAZMUNY.

EDEBIÝAT :

1.Gurbanguly Berdimuhammedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat – 2007 ý.

2.Gurbanguly Berdimuhammedow. Eserler ýygyndysy
1-nji tom Aşgabat – 2007 ý.

3.Gurbanguly Berdimuhammedow. Ösüşleriň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler Tom №1
Aşgabat – 2008 ý.

4.Türkmenistanyň Prezidentiniň “Obalaryň şäherleriň etrapdaky şäherleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin ” Milli maksatnamasy Aşgabat 2007 ý.

5.Э.Аннабердиев. Начертал геометрия. Ашгабат. Магарыф. 1988.

6.E. Annaberdiýew. Inženerçilik çyzgy. Aşgabat. Türkmen döwlet neşirýt gullugy. 2002.

7. Э Аннабердиев, Б.А.Ашыров Устлерин кесишмеги. Ашгабат, 1981.

8. Х.А.Арустамов. Сборник задач по начертательной геометрии. М., Машгиз. 1965.

1. Б.А.Ашыров. Рабочая тетрадь по начертательной геометрии. Издание № 1, часть первая, Ашхабад, 1973.

2. Б.А.Ашыров. Чызыклы геометрия (Нокат, гони чызык ве текизлик). Биринжи нешир, Ашгабат, 1976.

3. Б.А.Ашыров. Чызыклы геометрия (Айламак, проекциялар текизликлерини чалшырмак) Ашгабат, 1980.

4. Абдумаликов А Чизмачиликдан терминалогик лугам справочник «Укутувчи» - Ташкент 1977

5. Х.Б.Буравцев и другие. Черчение и начертательная геометрия.Издательство "Просвещение" М., 1969

14. А.Б.Бубеньников, М.Ю.Громов Начертательная геометрия Издательство "Высшая школа" 1973

15. Х А Глаголев Начертательная геометрия Госиздат М 1953

16. К.Х.Гордеев О взаимного пересечения поверхностей и их развертках. ИздательствоТомского университета, 1958

17. Б.О.Гордон, М.А.Семенцов–Огиевский Курс начерта-тельной геометрии "Высшая школа" М., 1971

18. А.И.Добряков Курс начертательной геометрии Госиздат М-Л 1962

19. В.Д.Засов и др. Задачник по начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1968.

20. Е.Б.Зеленин Курс начертательной геометрии М Физматгиз 1961

21. П. И. Ивашкевич Пересечение поверхностей тел Ленинград 1959

22. А.М.Иерусалимский. Начертательная геометрия. Росвузиздат, 1963.

23. Н.Н.Крылов и др. Начертательная геометрия. «Высшая школа», 1977.

24. Н.С. Кузнецов. Начертательная геометрия. Издательсиво «Высшая школа», Москва. 1969.

25. С.М.Колотов и др. Курс начертательной геометрий. Госстройиздат УССР, Киев, 1961.

26. А.Б.Ланюк Аксонометрические проекции «Госстройиздат» Москва 1956

27. А. Г. Климухин Начертательная геометрия Стройиздат М 1973

28. А.С.Куликов Начертательная геометрия в применении к черчению, конструированию и проектиро-ванию Госиздат 1959

29. Киргизбаев Ю. Чизма геометрия «Укутувчи» - Ташкент 1972

30. Киргизбаев Ю. Чизма геометриядан масалалар туплами «Укутувчи» - Ташкент 1976

31. Сабитов Е. Чизма геометрия кичка курсы «Укутувчи» Ташкент 1973
32. А.И.Островский Начертательная геометрия в популярном Изложении. Госиздат М., 1963
33. А.Д.Посвянский Краткий курс начертательной геометрии “Высшая школа” М., 1965
34. С .Б. Розов Курс черчении Издательство “Машиностроение” М 1975
35. Н.Л.Русскевич. Начертательная геометрия. Издате-льство Харковский государственный университет, 1961.
36.А.К.Рудаев. Сборник задач по начертательной геометрии, Физико-математическая литература, М., 1962.
37. Ю С Тимрот Начертательная геометрия Стройиздат М 1973
38. С.А.Фролов. Методы преобразования ортогональных проекций. Машгиз, М., 1963.
39. С.А.Фролов. Начертательная геометрия. Машино-строение, М., 1978.
40. А. М. Хаскин Начертательная геометрия Киев 1959.
41. Р.Хорунов. Чизма геометрия курси. «Учитель», Ташкент, 1964.
42. Н.Ф.Четверухин и др.Начертательная геометрия. «Высшая школа»,М 1963.
43. А.Г.Чалый. Курс начертательной геометрии. Машгиз, Москва .1962.