Rozyýew Işanguly, Soltanow Hajymämmet

D I F F E R E N S I A L

G E O M E T R I Ý A

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2010

Rozyýew I., Soltanow H. DIFFERENSIAL GEOMETRIÝA, Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. Aşgabat , 2010.

Okuw kitaby Türkmen döwlet uniwersitetiniň matematika hünäriniň okuw maksatnamasyna laýyklykda taýýarlandy we uniwersitetleriň, mugallymçylyk institutynyň matematika, fizika hünärleri boýunça okaýan talyplaryna hem-de inžener- tehniki ugurlar boýunça okaýan talyplara we aspirantlara niýetlenendir.

Giriş

Häzirki zaman ylmynyň we tehnikasynyü ösüşi hünärmenlerden dünýä ülüňlerine laýyk gelýän bilmleri almaklygy talap edýär. Bu talap bolsa, ylmyň dürli ugurlaryny özara sazlaşykly, düýpli hemmetaraplaýyn öwrenmeklik bilen amal edilýär. Matematika ylmynyň şu ugurdaky dersleriniň biri-de matematiki derňewiň we analitik geometriýanyň çatrygynda, matematiki fizikanyň we topologiýanyň başlangyçlarynda duran differensial geometriýa dersidir.

Differensial geometriỳa – bu analitik geometriỳa esaslanỳan, matematiki derňewiň, ilki bilen differensial hasaplamalaryň usullaryny, başgaça aỳdylanda tükeniksiz kiçiler usullaryny giň ulanỳan matematikanyň bölegi bolup geometriki obrazlary- şekilleri: egrileri we üstleri öwrenỳan ylymdyr. Differensial geometriỳa mahsus bolan aỳrätynlyk bu egrileri we üstleri “ujypsyz kiçi “ ỳagdaỳda, başgaça aỳdylanda egrileriň we üstleriň ỳeterlik derejedäki kiçi böleklriniň häsiyeterini öwrenmeklikdir.

Material nokadyň wagta baglylykda geçen ỳoluny $S = S(t)$ kanun boỳunça kesgitleỳän göniçyzykly, deňölçegsiz hereketine seredeliň. Bu hereketi t-den $t+\Delta t$ aralygynda öwreneliň. Bu ỳerde $\Delta t -$örän kiçi ululyk. Matematiki derňewden belli bolşy yaly, $\Delta t-$ wagtda geçilen ỳol

$$\Delta S = S'(t)\Delta t + \varepsilon \cdot \Delta t$$

kanun boỳunça aňladylar. Bu ỳerde $S'(t)$ önüm, $\varepsilon \to 0$, $\Delta t \to 0$, we $\varepsilon \cdot \Delta t$ ululyk $\Delta t-$ ululyga görä ỳokary tertipli tükeniksiz kiçi ululyk, şonuň üçin hem $\Delta t \to 0$ bolanda

$$\Delta S \approx S'(t)\Delta t\,.$$

Bu ỳerden görnüşi ỳaly ΔS ululygyň $\Delta t-$ ululyga gatnaşygy çyzykly bolar, başgaça aỳdylanda hereket hemişelik tizlikli $S'(t)$ deňölçegli hereket bolar.

Bu mysalda görkezilen usul differensial hasaplamalaryň esasyny düzỳar, ỳagny ỳokary tertipli tükeniksiz kiçiler taşlansa, onda çylşyrymly prosesler ỳönekeỳleşỳär, deňölçegsiz hereketler deňölçegli bolỳarlar. Şunlukda, tükenikiz kiçiler usulynda prossesleri öwrenmeklik ỳönekeỳleşỳär. Bu ỳagdaỳ bolsa wajypdyr, sebäbi seredilen mysalda geçilen ỳoly wagta görä differensirläp biz pursatlaỳyn tizligi aldyk. Bu ỳerden bolsa gerek ỳagdaỳynda integralyň kömegi bilen prossese bitewilikde seretmäge mümkinçilik alỳarys.

Differensial geometriỳa bolsa, şu görkezilen usuly geometriỳada amala aşyrỳar, başgaça aýdylanda egriler we üstler özleriniň gurluşy boỳunça tükeniksiz kiçi böleklerde öwrenilỳär.

Differenial geometriỳa geometriỳanyň meselelerinde ỳüze çykỳan hem bolsa, matematiki derňew bilen berk baglylykda emele geldi we ösdi. Köp geometriki düşünjeler matematiki derňewiň käbir düşünjeleriniň emele gelmegine itergi berdi: Mysal üçin galtaşỳan – önüm, meỳdan, göwrüm – integral düşünjeleri bilelikde ösdüler.

Differensial geometriỳanyň emele gelmegi XVII asyryň ahyry, XVIII asyryň birinji ỳarymyna degişli bolup, L.Eỳleriň, G.Monjyň we beýleki görnükli alymlaryň atlary bilen berk baglydyr.

Differensial geometriỳanyň emele gelmeginde we ähli matematikanyň güýçli ösmeginde Peterburg (Sankt-Peterburg şäheri, Rossiýa) Akademiýasynyň agzasy, belli matematik L.Eỳleriň(1707-1783) işleri örän uly itergi berdi. Ol - üstleriň berlen nokatdaky normal kesikleriniň egriligni derňedi, üstlerdäki baş ugurlary girizdi. Olar üçin Eỳler funksiỳasyny açdy; egrileriň natural deňlemelerini girizdi.

Differensial geometriỳanyň L.Eỳlerden soňky ösüşi fransuz matematigi, inženeri G.Monjyň (1746- 1818) mekdebine degişlidir.

Üstleriň içki geometriỳasy K.Gaussa (1777-1855) degişlidir, ol bu netijelere geodeziỳadaky amaly işleriniň kömegi bilen gelỳar. 1827-nji ýylda Gauss "Üstlerdäki egrileriň umumy derňewi" atly işinde häzirki zaman görnüşinde üstler nazarýetiniň esasyny berỳär. Şu döwürden başlap hem differensiỳal geometriỳa matematiki derňewiň bölegi bolmakdan aỳrylyp özbaşdak ylym hökmünde ösüp başlaỳar.

N.I.Lobaçewskiỳ tarapyndan ýewklid däl geometriỳanyň açylmagy ähli geometriỳanyň, şol sanda, differensial geometriỳanyň ösmegine uly täsir edỳär.

1854-nji ỳylda B.Riman özüniň "Geometriỳanyň esaslaryny düzỳan gipotezalar hakynda" diỳen işinde Riman geometriỳasy atly düşünjäniň düỳbini tutyar.

Kleỳniň 1872-nji ỳylda "Erlangen maksatnamasy" atly işinde beýan eden ideýasynyň differensiỳal geometriỳanyň ulanyşyna degişli işleri E.Kartan tarapyndan ösdürilip proỳektiw we affin geometriýalary düşünjelerine gelinýär.

Russiỳada F.Minding (1806- 1886), K.M.Peterson (1828 - 1881) tarapyndan differensial geometriỳa ösdürildi we olaryň esasy işleri üstler nazarýetine bagyşlanandyr. K.M.Peterson Moskwanyň matematikler jemgyýetini(1867ýyl) esaslandyryjylaryň biridir. Onuň käbir işleri beýleki alymlaryň atlaryna ýazylypdyr. Ýogsam ol Maýnardiden 4 ýyl öň, Kodassiden 15 ýyl öň özüniň çap edilmedik dissertasiýasynda birinji we ikinji kwadrat formalaryň koeffisiýentleriniň özara baglanyşygyny gökezýän Maýnardi-Kodassi formulasyny açypdyr. Şol işinde birinji we ikinji kwadrat formalar berlende üsti kesgitläp bolýan Bonne atly teoremany hem subut edipdir. K.M.Peterson "Üstler we egriler hakynda" işinde Şşwarsyň – minimal üstleriň epilmesi, Biankiniň – göçürme üstlerine degişli teoremalarynyň subutlaryny beripdir. Differensial geometriýanyň ösmegine D.F.Ýegorow (1869-1930), B.K.Mlodzeewskiý (1858-1923) soňy bilen bolsa S.P.Finikow uly goşant goşupdyrlar.

1920-nji ỳyllardan başlap öňki SSSR- de tenzor diffrensiỳal geometriỳasy has çalt ösüp başlady. W.R.Kaganyň (1869- 1953) Beỳik Watançylyk urşundan soňraky differensiỳal geometriỳadaky ylmy işleri şekilleri "bitewilikde" öwrenmeklige bagyşlanandyr. Bu işler özüniň soňky güýçli ösüşlerini A.D.Aleksandrowyň we N.W.Ýefimowyň hem-de olaryň okuwçylarynyň işlerinde öz beýanyny tapdy.

Differensial geometriýadan türkmen dilindäki ilkinji okuw gollanmalary merhum ýaşuly mugallymymyz G. Gylyjowa degişlidir. A.Çaryýew we N.Gurbanow türkmen alymlarynyň işlerini öz içine alýan, mysallar bilen üsti ýetirilen çaklaňja okuw gollanmasynyň awtorlarydyr.

Hormatly Prezidentimiziň ýolbaşçylygynda Türkmenistanyň Beýik Galkynyşlar we özgertmeler eýýamynyň her bir güni üstünliklere we ösüşlere beslenýär. Beýik Galkynyşlar we özgertmeler eýýamy bolsa Türkmen ylmynyň we medeniýetiniň ösen döwletleriň derejesinde bolmagyny talap edýär. Munuň üçin durnukly we döwrebap bilimiň berilmegi zerurdyr, onuň gözbaşy bolsa döwrebap okuw kitaplary we okuw gollanmalary bolup durýar.

§1. Dekart we egriçyzykly koordinatalar. Koordinatalary özgertmek. Ýakobian

Çyzykly algebra kursynda R^n ýewklid giňişligi girizilýär we $e_1, e_2, ..., e_n$ wektorlaryň toplumy bu giňişlikde ortanormirlenen bazisi kesgitleýär. Bu bazise görä R^n ýewklid giňişliginiň islendik nokady $x^1, x^2, ..., x^n$ sanlaryň toplumy bilen bir bahaly kesgitlener. $x^1, x^2, ..., x^n$ sanlaryň toplumyna berlen bazise görä dekart koordinatalary diýilýär.

Dekart koordinatalary belli bolan $P \in R^n, Q \in R^n$ nokatlary koordinatlar başlangyjy bilen birikdirip $\overline{OP}(x^1, x^2, ..., x^n)$, $\overline{OQ}(y^1, y^2, ..., y^n)$ radius wektorlary kesgitleỳäris. Bu wektorlaryň jemi $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n)$, wektoryň skalỳara köpeltmek hasyly $(\lambda x^1, \lambda x^2, ..., \lambda x^n)$ ýaly kesgitlenýär.

Goý, $\xi = \overline{OP}, \eta = \overline{OQ}$ bolsunlar. Eger-de R^n giňişlikde $\xi, \eta \in R^n$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ görnüşde kesgitlense, onda bu giňişlik R^n ýewklid giňişligi bolar. Skalýar köpeltmek hasylyň häsiỳetleri:

1. $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$

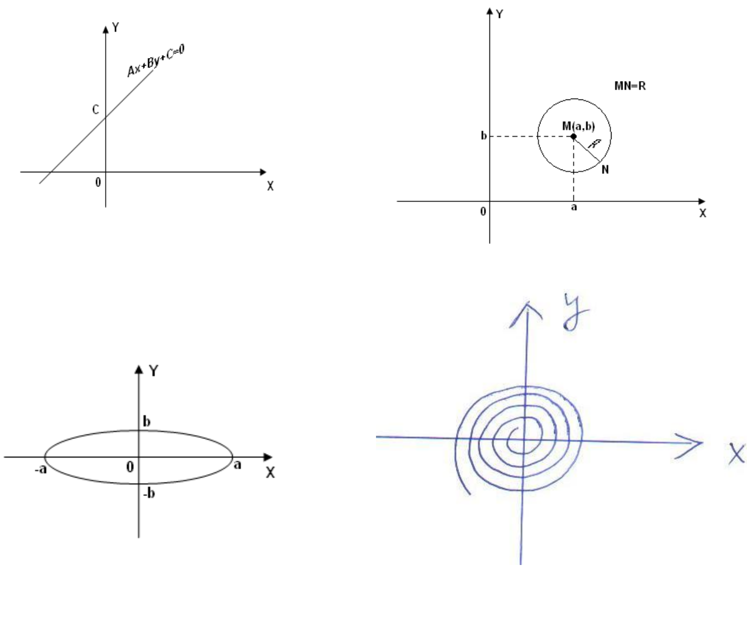
2. $(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta) = \lambda_1 (\xi_1, \eta) + \lambda_2 (\xi_2, \eta)$

3. $(\xi, \xi) > 0, \xi \neq 0$

Köp mysallarda prosessleriň analitik ỳazgysyny almak üçin dekart koordinatalary ỳeterlik bolmaỳar. Çyzyklaryň deňlemelerini düzmek meselesine seredeliň. Eger-de göni çyzyk, töwerek, ellips we ş. m. ýaly ỳönekeỳ tebigatly mysallara seredilse, onda olaryň dekart koordinatlardaky aşakdaky deňlemelerini alarys:

$$Ax + By + C = 0, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1-nji çyzgy

Belli mehaniki we fiziki meselelere seredilende endigan egriler alynỳar, ỳöne olaryň deňlemelerini dekart koordinatalarda aňlatmak oňaỳly bolup durmaỳar. Egriçyzykly koordinatalarda bu deňlemeler örän ỳönekeỳ görnüşe gelip bilerler.

Mysal hökmünde spiralyň dekart koordinatalardaky (1-nji çyzgy) $\sqrt{x^2+y^2}-e^{\lambda\left(arctg\frac{y}{x}\right)}=0$ deňlemesine seredeliň. Polýar $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ koordinatalarda bu deňleme örän ỳönekeỳleşer we $r=e^{\lambda\varphi}$ görnüşe geler. Bu deňleme material nokadyň hereketini öwrenmekde uly rol oỳnaỳar.

R^n-ýewklid giňişliginde islendik açyk C ýaýla seredeliň. Açyk C ýaýlada $x\in C,$ $U(x)\subset C$ şertler ýerine ýetýär. Ýene bir R_1^n giňişlige seredeliň.

$P\in C\subset R^n$ degişlilik özara bir bahaly $(\text{P nokat})\leftrightarrow(x^1,x^2,...,x^n)$ degişliligi kesgitleýär. C ýaýlanyň islendik P nokadyna n hakyky sanlaryň degişli edilmegi bize kesgitleniş ýaýlasy C bolan n sany $x^1(P),x^2(P),...,x^n(P)$ funksiýalary kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Bu ýerde $x^1,x^2,..,x^n\in R_1^n$. Köplenç görkezilen funksiýalar endigan we üznüksiz bolsun diýilýär, ýagny P nokadyň islendik kiçi üýtgemeginde onuň koordinatalary hem örän kiçi üýtgeýärler. Şeýlelikde, $R^n(x^1, x^2,..., x^n)$, $R_1^n(x^1, x^2,..., x^n)$ giňişlikleriň özara baglanyşygyny ýola goýuldy. Goý $C \subset R^n$ bolsun.

1-nji kesgitleme. Eger-de funksiýalaryň $x^1(y^1,\ldots,y^n),\ldots,x^n(y^1,\ldots,y^n)$ ulgamy $C \subset R^n$ ýaýlany $A \subset R_1^n$ ýaýla geçirýän özara bir bahaly üznüksiz şekillendirmäni kesgitleýän bolsa, onda bu ulgama C ýaýladaky koordinatalaryň üznüksiz ulgamy diýilýär.

Başgaça $x^1(y^1 \ldots y^n),\ldots,x^n(y^1 \ldots y^n) : C \to A -$ gomoemorf şekillendirme C ýaýlany A ýaýla geçirýär. Kesgitlemeden görnüşi ýaly C ýaýlanyň P nokatlarynyň üznüksiz üýtgemesine onuň koordinatasynyň üznüksiz üýtgemesi degişli bolup durýar. $x^1(P), x^2(P),\ldots,x^n(P)$ funksiýalara $f : C \to A$ koordinata şekillendirmesine görä P nokadyň koordinatalary diýilýär.

Mysal üçin, koordinata şekilledirmesi hökmünde toždestwolaýyn $x^1 = y^1,\ldots,x^n = y^n$ şekillendirmäni alyp bolar. Egerde berlen

$f : C \to A$ şekillendirme üçin $P(x^1(P),...,x^n(P)) = P(x^1, x^2,...,x^n)$.bolsa, onda f we f^{-1} endigan şekillendirmeler hökmünde alynýar.

Goý, f : C $\to A$-endigan şekillendirme $x^i(y^1...y^n)(i=\overline{1,n})$ funksiýalaryň kömegi bilen berlen bolsun.

2-nji kesgitleme.

$$df = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} \cdots \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} \cdots \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

funksional matrisa *f* şekillendirmäniň Yakobi matrisasy diýilýär. $I(f) = \|df\|$**-ululyga bolsa onuň ýakobiany diýilýär.**

Bu ýerde matrissanyň elementleri ($x^1(P),...,x^n(P)$ koordinatalardan alnan hususy önümler), df we $I(f)$ ululyklar $P \in C$ nokada bagly ululyklardyrlar.

3-nji kesgitleme. Eger-de endigan funksiýanyň $x^1(y^1,...,y^n),...,x^n(y^1,...,y^n)$ **ulgamy özara bir bahaly *f:*** $C \to A \subset R_1^n$ **şekillendirmäni**

kesgitleýän bolsa we $I(f)|_{P\in C}\neq 0$ bolsa, onda bu ulgama R^n ýewklid giňişliginiň C ýaýlasynda kesgitlenen koordinatalaryň regulýar ulgamy diýilýär. C ýaýlada kesgitlenen koordinatalaryň regulýar ulgamyna başgaça C ýaýladaky koordinatalaryň egriçyzykly ulgamy hem diýilýär.

Indi, C ýaýlada iki dürli egriçyzykly koordinatalara seredeliň:

$$x^1(P), x^2(P), ..., x^n(P),$$
$$z^1(P), z^2(P), ..., z^n(P).$$

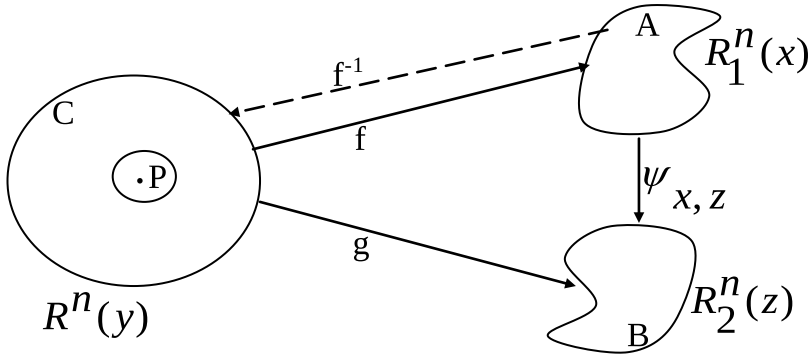
Bular iki sany regulýar $f: C \to A \subset R_1^n(x^1, ..., x^n), g: C \to B \subset R_2^n(z^1, ..., z^n)$ şekillendirmäniň berlendigini tassyklaýar. Başgaça, her bir $P \in C$ nokat üçin iki sany egriçyzykly $\{x^i(P)\}$, $\{z^i(P)\}$ $i=1,2,...,n$ koordinatalaryň alnandygyny tassyklaýar. Şekillendirmeleriň özara bir bahalydygyny hasaba alyp P nokadyň $\{x^i(P)\}$ koordinatalaryny $\{z^i(P)\}$ koordinatalara degişli edip bolar: Ol

$$\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$$

görnüşli şekillendirme hökmünde gurulýar. Bu şekillendirmä bolsa C ýaýladaky koordinatalaryň özgertmesi (koordinatalaryň çalşyrmasy) diýilýär. Ýagny P nokadyň $x^i(P)$ koordinatalary $z^i(P)$ koordinatalara çalşyrylýar.

Lemma: $\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$ **şekillendirme özara bir bahaly, endigan şekillendirmäni kesgitleýär we onuň ýakobiany noldan tapawutlydyr.**

Subudy: Şekillendirmäniň özara bir bahalylygy koordinatlar ulgamlarynyň regulýarlygyndan, endiganlygy bolsa iki sany endigan şekillendirmeleriň kompozisiýasynyň ýene-de endigan bolýanlygyndan gelip çykýar. Biz şekillendirmäniň ýakobianynyň noldan tapawutlydygyny, ýagny $I(\psi_{x,z}) \neq 0$ deňsizligi subut ederis. Berlen $\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$ şekillendirme iki sany şekillendirmeleriň kompozisiýasyna $\psi_{x,z} = g \cdot f^{-1} : A \to B$ dargaýar.



2-nji çyzgy

$\psi_{x,z}$ şekillendirmäniň ýakobi matrissasy f^{-1} we g şekillendirmeleriň matrissalarynyü köpeltmek hasylyna dargaýar. Hakykatdan hem, $d\psi_{x,z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. $\frac{\partial z^i}{\partial x^j}$ önümleri hasaplaýarys, bu ýerde $z^i = z^i(y^1, y^2, ..., y^n)$, $y^\alpha(x^1, x^2, ..., x^n), 1 \le \alpha \le n$ funksiýalar endigan $f^{-1}: A \to C$ şekillendirmäni kesgitleýär. Onda çylşyrymly funksiýanyň önümini hasaplamagyň formulasyna görä $\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$. Bu bolsa $d\psi_{x,z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ matrissanyň df^{-1} we dg matrissalaryň köpeltmek hasylyna deňdigini görkezýär. Indi df^{-1} we df ýakoby matissalarynyň özara baglanyşygyny alalyň.

Seredilýän ulgamyň regulýar bolýandygy üçin $f^{-1} \circ f$ kompozisiýa C ýaýlanyň öz-özüne bolan toždestwen şekillendirmesidir, şonuň üçin hem $d(f^{-1} \circ f) = df^{-1} \circ df = E,$ nirede E - n ölçegli birlik matrissa. Bu ýerden alarys: $df^{-1} = (df)^{-1}$. Bu bolsa $d\psi_{x,z} = (dg) \cdot (df)^{-1}$ deňligi subut edýär, soňky deňlik bolsa öz gezeginde $I(\psi_{x,z}) = \dfrac{I(g)}{I(f)}$ deňlige getirer; $I(g), I(f)$ ýakobianlaryň bolsa noldan tapawutlygy üçin $I(\psi_{x,z}) \neq 0$. Lemma subut edildi.

Netije. C ýaýlany A ýaýla geçirýän f şekillendirme C ýaýlada egriçyzykly koordinatalary kesgitleýän bolsa, onda A ýaýlany C ýaýla geçirýän f şekillendirmä ters bolan f^{-1} şekillendirme hem A ýaýlada egriçyzykly koordinatalary kesgitlär.

C ýaýlada egriçyzykly koordinatalary kesgitleýän ulgam käbir deňlemeleriň kömegi bilen koordinat çyzyklarynyň maşgalasyny kesgitleýär, meselem, i -nji koordinat çyzygy

$$x^1(P) = C_1, x^2(P) = C_2, ..., x^{i-1}(P) = C_{i-1},$$
$$x^i(P) = t, x^{i+1}(P) = C_{i+1}, ..., x^n(P) = C_n$$

deňlemeleriň kömegi bilen alynýar, bu ýerde C_i - ululyklar hemişeliklerdir, t-üznüksiz parametrdir. t parametriň alýan bahasyna görä P nokat C

ýaýlada käbir endigan traýektoriýany geçýär. Şeýlelikde, C ýaýlanyň her bir P nokadyndan n sany koordinat çyzyklary çykýar. Başga bir nokat üçin başga koordinat çyzyklary çykar. Eger-de ulgam dekart koordinatalary kesgitleýän bolsa, onda onuň koordinat çyzyklary P nokatdan geçýän koordinata oklaryna parallel bolan göni çyzyklardyrlar.

Egriçyzykly koordinatalar ulgamlarynyň mysallary:

1. Polýar koordinatalar ulgamy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$r > 0$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

2. Silindrik koordinatalar ulgamy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$r > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

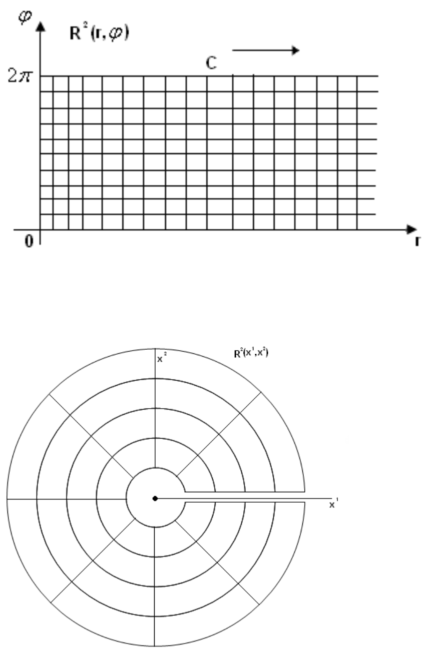
$$-\infty < z < +\infty$$

3. Sferik koordinatalar ulgamy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} r > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 < \theta < \pi \end{matrix}$$

Ýokarda getirilen egriçyzykly koordinatlar ulgamlarynyň käbir derňewlerini geçireliň. Ýewklid tekizliginde berlen (r,φ) polýar koordinatlar ulgamy R^2 tekizligiň ähli ýerinde egriçyzykly koordinatlaryň regulýar ulgamyny emele getirmeýär. Hakykatdan hem, polýar koordinatlardan dekart koordinatlara geçmegiň $x = x^1 = r\cos\varphi, y = x^2 = r\sin\varphi$ funksiýalaryny alýarys. Bu ulgam üçin ýakoby matrissasy $d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, ýakobiany bolsa $I(\psi) = r$ bolar. Ýakobian koordinatlar başlangyjynda $I(\psi) = 0$. Şeýle hem, bu ulgam ýewkid tekizliginiň öz-özüne bolan özara bir bahaly degişliligini emele getirmeýär, sebäbi (r,φ) we $(r,\varphi + 2\pi)$ nokatlar şol bir nokada geçerler.

Indi, polýar koordinatalar ulgamynyň regulýar bolýan C ýaýlasyny kesgitläliň. Ýewklid $R^2(y^1 = r, y^2 = \varphi)$ tekizliginde $0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < r < +\infty$ deňsizlikler bilen emele getirilen tükeniksiz C ýaýlany alalyň. Onda A ýaýla hökmünde ikiölçegli $R^2(x^1,x^2)$ tekizligiň $x^1 \geq 0,\ x^2 = 0$ şöhleden başga hemme ýerini alyp bolar(3-nji çyzgy)



3-nji çyzgy

Bu şertlerde $f : C \to A$ şekillendirme $x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi,$ deňlemeler bilen berler we özara birbahaly, regulýar ulgamy emele getirer. 3-nji çyzgydan görnüşi ýaly $f : C \to A$

şekillendirmede dekart koordinatlaryň göniburçly tory polýar toruna geçýär.

Üçölçegli $R^3(y^1, y^2, y^3)$ giňişligiň silindriki $y^1 = r, y^2 = \varphi, y^3 = z$ koordinatalary üçin egriçyzykly koordinatalar $x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\cos\varphi,\ x^3 = r$ funklsiýalar bilen berilýär. Bu çalşyrma $R^3(x^1, x^2, x^3)$ giňişlikden $(\varphi = 0,\ r \geq 0)$ bilen kesgitlenen ýarymtekizligiň kesilip aýrylan böleginiň A ýaýla hökmünde alynmagyndaky endigan $f : C \to A \subset R^3(x^1, x^2, x^3)$ şekillendirmesini kesgitleýär. $(\varphi = 0,\ r \geq 0)$ ýarymtekizligiň kesilip aýrylmagy özara birbahaly degişliligi üpjün edýär. Bu çalşyrmanyň ýakoby matrissasy

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

we ýakobiany $I(\psi) = r$. Ýakobian diňe *r=0* bahada(z okda) nola deň bolup biler.
Diýmek, silindriki koordinatalar *r>0* bolanda *A* ýaýlada regulýar ulgamy emele getirer.

Indi, $R^3(y^1, y^2, y^3)$, $y^1 = r, y^2 = \theta, y^3 = \varphi,$ sferiki koordinatalara seredeliň.

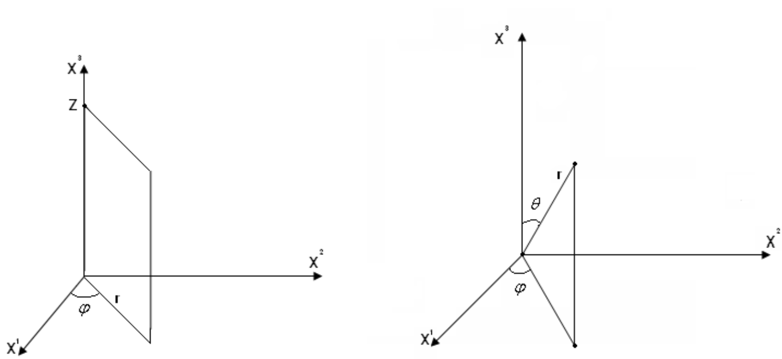
Bu ulgam üçin egriçyzykly koordinatalar $r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$ şertler ýerine ýetende $x^1 = r\cos\varphi\sin\theta,\ x^2 = r\sin\varphi\sin\theta,\ x^3 = r\cos\theta$ funklsiýalar bilen berilýär.

Onda

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -\mathrm{r}\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$I(\psi) = r^2\sin\theta.$$

Ýakobianyň bahasy diňe x^3 okda hola deň bolar. Özara bir bahaly degişliligi üpjün etmek üçin giňişlikden $(x^2 = 0,\ x^1 \ge 0)$ ýarymtekizligiň nokatlaryny hem aýyrmaly.



4-nji çyzgy

§2. Skalýar argumentli wektor funksiýa. Predel we üznüksizlik hakyndaky teoremalar

Goý, bize käbir R^n giňişlik we onuň C ýaýlasy berlen bolsun. Käbir $[a,b]\in R^1$ kesimiň C ýaýla bolan şekillendirmesine seredeliň.

1-nji kesgitleme: [*a*,*b*] kesimiň özara birbahaly üznüksiz C ýaýla bolan şekillendirmesiniň netijesinde alynýan obrazyna – şekiline elementar (ýönekeý) egri diýilýär.

Goý, $P\in C, t\in[a,b]$ bolsun. Onda P nokadyň bu giňişlige görä koordinatalary bardyr. Eger-de $t\to F(t)$ ýa-da $F:[a,b]\to C$ özara birbahaly üznüksiz şekillendirme bolsa, onda her bir t üçin C ýaýlanyň dürli P nokatlaryny alarys. Netijede, P nokadyň koordinatalary t parametre görä üýtgeýärler. Başgaça aýdylanda t argumentli funksiýalar bolarlar: $P(x_1, x_2,..., x_n)$, $P(t)=(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$.

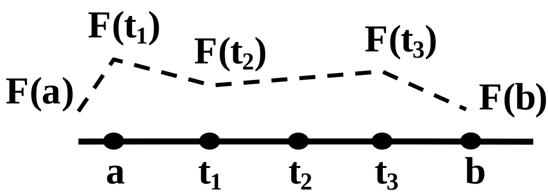
Bu funksiýalaryň ulgamy her bir seredilýän t üçin giňişlikde dürli P nokatlary kesgitleýärler. Şonuň üçin, $[a,b]$ kesimiň ähli nokatlary üçin P nokatlaryň geometrik orny käbir egrini kesgitlär. Şeýlelikde, bu ulgama

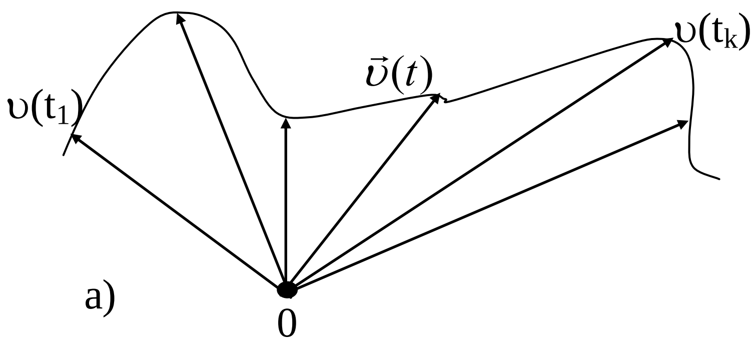
egriniň deňlemeleri hökmünde seredip bolar. Bu ulgama egriniň **parametrlenmesi** hem diýilýär.
Bellik: Parametrleriň saýlanyp alnyşyna görä egrileriň dürli parametrlenmelerini alyp bolýar.

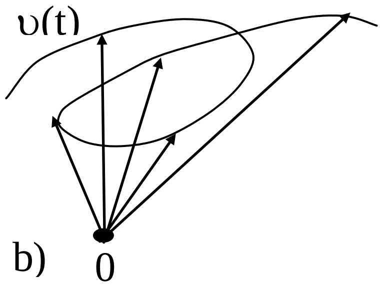
2-nji kesgitleme: Eger egriniň parametrlenmesine girýän funksiýalar üçin $x_1'^2(t)+ x_2'^2(t)+\ldots+ x_n'^2(t)\neq 0$ deňsizlik ýerine ýetirilse, onda bu elementar egrä endigan egri diýilýär.

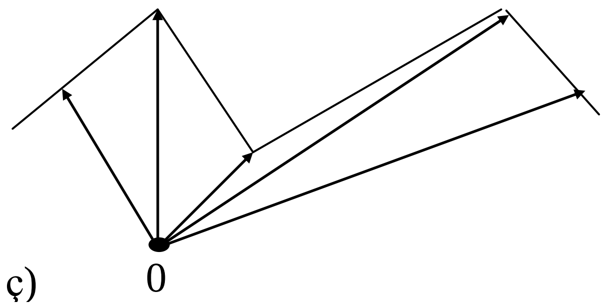
Indi, egriniň wektor deňlemesiniň alnyşyna seredeliň. Goý, $t \to F(t)$ berlen bolsun. t_1, t_2 dürli bahalar üçin giňişligiň dürli $F(t_1), F(t_2)$ nokatlary alnar. Ol nokatlary koordinatalar başlangyjy bilen birikdirsek, onda t parametriň dürli bahalary üçin dürli bolan t parametre bagly $\overline{OF}(t_1), \overline{OF}(t_2)$ radius wektorlary alarys. Netijede, t parametriň üýtgeýän ýaýlasyna laýyklykda **skalýar argumentli** $\boldsymbol{v}$(t)= $\overline{OF}(t)$ **wektor funksiýa** düşünjesine gelinýär. Bu funksiýanyň grafigi t parametriň üýtgemeginde alynýan radius wektorlaryň uçlarynyň emele getirýän nokatlarynyň geometrik orny bolar. Oňa wektor funksiýanyň **godografy** diýilýär. Ol aşakdaky ýaly alnar.

Goý, bize käbir $f: C \to R^n$ şekillendirme berlen bolsun. Anyklyk üçin goý: $C = [a,b] \subset R^{'}$ Onda bu $f:[a,b] \to R^3(R^n)$ görnüşde ýa-da $F:[a,b] \to R^3$ ýaly bolar. Bu şekillendirmäniň netijesinde her bir berkidilen $t \in [a,b]$ san käbir $D \in R^3$ nokada geçiriler. Şunlukda şekillendirme özara birbahaly bolar.









5-nji çyzgy

Skalýar argumentli wektor funksiýanyň predeli, üznüksizligi hakyndaky teoremalara geçýäris..

Goý, käbir skalýar argumentli $v(t)=\{v_1(t),v_1(t),....,v_n(t)\}$ wektor funksiýa we hemişelik $a=\{a_1,a_1,...,a_n\}$ wektor berilsin.

3-nji kesgitleme: Eger-de $t \to t_0$ **bolanda**

$$\lim_{t \to t_0} |v(t) - a| = 0$$

deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\upsilon(t)$ **wektor funksiýa** t_0 **nokatda** a **predele eýe diýilýär.**

Bu ýerde

$$|v(t) - a| = \sqrt{(v_1(t) - a_1)^2 + (v_2(t) - a_2)^2 + ... + (v_n(t) - a_n)^2}$$

we $|v(t) - a| \to 0$ bolanda

$$\begin{cases} v_1(t) \to a_1 \\ v_2(t) \to a_2 \\ .... \\ v_n(t) \to a_n \end{cases}$$

4-nji kesgitleme: Goý $[a,b]$ **kesimde** $\upsilon(t)$ **wektor funksiýa kesgitlenen bolsun we bu kesimiň käbir** t_0 **nokadynda** $\upsilon(t_0)$ **wektor funksiýa kesgitlenen bolsun. Eger-de** $t \to t_0$ **bolanda**

$$\lim_{t \to t_0} |v(t) - v(t_0)| = 0$$

deňlik ýerine ýetirýän bolsa, onda $\upsilon(t)$ **wektor funksiýa** t_0 **nokatda üznüksizdir diýilýär. Eger wektor funksiýa kesimiň ähli nokatlary üçin üznüksiz bolsa, onda bu funksiýa seredilýän kesimde üznüksizdir diýilýär.**

Mysal üçin $v(t)=\{(1+1/t)^t, 1/t\}$ wektor funksiýanyň R^1 giňişlikde üznüksiz bolýan aralyklary $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ bolar.

Skalýar argumentli $v(t)=\{v_1(t),v_1(t),....,v_n(t)\}$ wektor funksiýa üçin şekillendirme, predel, üznüksizlik hakyndaky aşakdaky tassyklamalary getirýaris.

Şekillendirmeler üçin:

$$(u+v)(t)=u(t)+v(t);$$

$$(f\cdot v)(t)=f(t)\cdot u(t);$$

$$(u,v)(t)=(u(t),v(t));$$

$$[u,v](t)=[u(t),v(t)].$$

Bu ýerde $f(t)$ skalýar argumentli funksiýa, $(u(t),v(t))$ iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyny, $[u(t),v(t)]$ iki wektoryň wektor köpeltmek hasylyny kesgitleýär.

Predeller üçin: Goý, wektor funksiýalar üçin $v(t)\to a,\ \ u(t)\to b,\ \ \omega(t)\to c\ \ (t\to t_0)$ we $f(t)\to d(t\to t_0)$ bolsunlar. Onda

$$\lim_{t\to t_0}(u(t)\pm v(t))=\lim_{t\to t_0}u(t)\pm\lim_{t\to t_0}v(t)=a\pm b$$

$$\lim_{t\to t_0}(u(t)/v(t))=\lim_{t\to t_0}u(t)/\lim_{t\to t_0}v(t)=a/b$$

$$\lim_{t\to t_0}(f(t)\cdot v(t))=\lim_{t\to t_0}f(t)\cdot\lim_{t\to t_0}v(t)=d\cdot a$$

$$\lim_{t\to t_0}(u(t),v(t))=(\lim_{t\to t_0}u(t),\lim_{t\to t_0}v(t))=(a,b)$$

Üznüksizlik üçin: Eger-de $v(t)\to v(t_0),\ u(t)\to u(t_0),\ \omega(t)\to\omega(t_0)\ (t\to t_0)$ we $f(t)\to d(t\to t_0)$ bolsalar, onda predeller hakyndaky teoremalarda degişli çalşyrmalar geçirip, üznüksizlik hakyndaky teoremalary alarys:

$$\lim_{t\to t_0}(u(t)\pm v(t))=u(t_0)\pm v(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}(u(t)/v(t))=u(t_0)/v(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}(f(t)\cdot v(t))=f(t_0)\cdot v(t_0)$$

$$\lim_{t\to t_0}(u(t),v(t))=(u(t_0),v(t_0))$$

Bellik: Bu teoremalaryň her biri aýratyn subut edilip bilner. Onuň üçin skalýar argumentli funksiýalarda geçirilen subutlary ulanyp bolar.

§3. Skalýar argumentli wektor funksiýanyň önümi we integraly

Goý, käbir $[a,b]$ kesimde $v(t)$ funksiýa we käbir $t_0 \in [a,b]$ nokatda $v(t_0)$ kesgitlenen bolsunlar. Önüm düşünjesi skalýar argumentli wektor funksiýalar üçin hem matematiki derňewde kesgitlenşi ýaly, käbir

$$\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

gatnaşygyň predeli hökmünde kesgitlenýär.

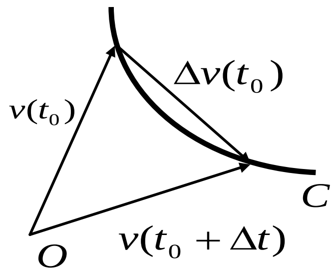
1-nji kesgitleme: Eger-de $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ **gatnaşygyň** $t \to t_0$ **bolanda tükenikli predeli bar bolsa, onda ol predele wektor funksiýanyň önümi diýilýär we ol**

$$\lim_{t\to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}=v'(t_0)$$

görnüşde kesgitlenýär.

Goý ***v(t)*** funksiýa käbir C egrini kesgitleýän bolsun. Şol C egri üçin wektor funksiýanyň artdyrmasynyň kesgitlenşine seredeliň:

$$\Delta v(t_0)=v(t_0+\Delta t)-v(t_0)=v(t)-v(t_0)$$



6-njy çyzgy

Bu artdyrma görä önümiň kesgitlemesini

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0)$$

deňlik bilen hem alyp bolar

Bu deňlemelerden görnüşi ýaly $t+\Delta t \to t_0 (\Delta t \to 0)$ bolanda C egriniň üsti bilen ***v(t₀)*** wektora ýakynlaşma bolup geçýär. Predel ýagdaýda biz seredilýän C egriniň t_0 nokadynda oňa geçirilen galtaşýan ***v´(t₀)*** wektory alarys.

Matematiki derňewde görkezilişi ýaly wektor funksiýalar üçin hem önüm hakyndaky aşakdaky teoremalar dogrudyrlar:

1. (u(t)+υ(t))´=u´(t)+υ´(t)

2. (f(t)υ(t))´=f´(t)υ(t)+f(t)υ´(t)

3. (u(t),υ(t))´=(u´(t),υ(t))+(u(t),υ´(t))

4. [u(t),υ(t)]´=[u´(t),υ(t)]+[u(t),υ´(t)]

5. (u(t),υ(t),ω(t))´=(u´(t),υ(t),ω(t))+

+(u(t),υ´(t),ω(t))+(u(t),υ(t),ω´(t))

Bu teoremalaryň hemmesi matematiki derňewde görkezilen şol bir usul bilen subut edilýär. Bularyň üçünjisiniň subudy aşakdaky ýaly alynýar:

Subudy:

$$(u(t),v(t))' = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\big(u(t_0+\Delta t),v(t_0+\Delta t)\big)-\big(u(t_0),v(t_0)\big)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\big(u(t_0+\Delta t),v(t_0+\Delta t)\big)-\big(u(t_0),v(t_0+\Delta t)\big)}{\Delta t}+\\ +\dfrac{\big(u(t_0),v(t_0+\Delta t)\big)-\big(u(t_0),v(t_0)\big)}{\Delta t}\end{array}\right) =$$

$$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0+\Delta t)-u(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0} v(t_0+\Delta t)\right) +$$

$$+ \left(u(t_0), \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}\right) =$$

$$= \big(u'(t_0),v(t_0)\big)+\big(u(t_0),v'(t_0)\big).$$

Indi, wektor funksiýanyň differensialyny kesgitläliň. Onuň üçin $\boldsymbol{v}(t_0)$ wektor funksiýanyň t_0 nokatdaky Δt artdyrmasyna seredeliň. Eger şol artdyrmanyň baş bahasy Δt ululyga çyzykly bagly bolsa, başgaça aýdylanda wektor funksiýanyň artdyrmasy

$$\Delta\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}'(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

görnüşde alynýan bolsa, onda wektor funksiýa t nokatda differensirlenýär diýilýär we şol artdyrmanyň baş bahasy wektor funksiýanyň differensiýaly hökmünde alynýar. Şol differensiýal

$$d\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{v}'(t)\Delta t=(d\boldsymbol{v}(t)/dt)\Delta t.$$

Soňky deňlikden görnüşi ýaly $\Delta t>0$ bolanda wektor funksiýanyň $d\boldsymbol{v}(t)$ differensiýalynyň ugry onuň $d\boldsymbol{v}(t)/dt$ önüminiň ugry bilen gabat gelýär, eger $\Delta t<0$ olaryň ugurlary gapma- garşydyrlar.

Wektor funksiýanyň modulyndan differensiýalyň alnyşyna seredeliň. Goý, wektor funksiýa R^3 giňişlikde berlen bolsun:

$$\boldsymbol{v}(t)=\{\boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t), \boldsymbol{v}_3(t)\}= \boldsymbol{v}_1(t)i+ \boldsymbol{v}_2(t)j+ \boldsymbol{v}_3(t)k.$$

Wektor funksiýanyň modulynyň kwadratynyň

$$|\boldsymbol{v}(t)|^2=\boldsymbol{v}_1^2(t)+\boldsymbol{v}_2^2(t)+\boldsymbol{v}_3^2(t),$$

we onuň öz-özüne skalýar köpeltmek hasylynyň

$$(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t))=\boldsymbol{v}_1^2(t)+\boldsymbol{v}_2^2(t)+\boldsymbol{v}_3^2(t)$$

deňlikler bilen hasplanýandyklaryna görä, olaryň sag böleklerini deňeşdirip

$$(\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{v}(t))=|\boldsymbol{v}(t)|^2$$

deňlige geleris.

Bu deňligiň iki bölegini hem differensirläris:

$$2|\boldsymbol{v}(t)|\cdot d|\boldsymbol{v}(t)|=2(\boldsymbol{v}(t),d\boldsymbol{v}(t)).$$

Bu ýerden

$$d|\boldsymbol{v}(t)|=(\boldsymbol{v}(t)/|\boldsymbol{v}(t)|,d\boldsymbol{v}(t))=(\boldsymbol{v}_e(t),d\boldsymbol{v}(t)).$$

Bu deňlik wektoryň modulynyň differensiýaly bilen onuň differensiýalyny baglanyşdyrýan deňlikdir.

1-nji mysal: $v(t)=\left\{\sin^2\frac{t}{2},\mathrm{e}^{t-t^3}\right\}$ wektor funksiýadan önüm almaly bolsun. Önümiň kesgitlemesine görä bu wektoryň her bir koordinatasyndan skalýar funksiýanyň önümi ýaly önümleri kesgitlemeli we ol koordinatalary wektor funksiýanyü önüminiň koordinatalary hökmünde almaly, ýagny

$$v'(t)=\left\{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)',\ \left(t-t^3\right)'\cdot e^{t-t^3}\right\}= .$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\sin t,\left(1-3t^2\right)e^{t-t^3}\right\}.$$

Wektorlaryň skalýar we wektor köpeltmek hasyllarynyň häsiýetlerini ulanyp, wektor funksiýadan ýokary tertipli önümlerini kesgitlemegiň mysallaryna seredeliň.

2-nji mysal.

a). $(v^2)'=(v,v)'=(v',v)+(v,v')=2(v',v)=2vv'.$

b). $[v',v'']'=[v'',v'']+[v',v''']=[v',v''']..$

ç). $(v',v'',v''')'=(v'',v'',v''')+(v',v''',v''')+(v',v'',v^{(4)})=(v',v'',v^{(4)})$

Wektor funksiýanyň integralyny kesgitlemäge girişeliň.

Wektor funksiýalaryň integrallary hem skalýar funksiýalaryň integrallarynyň kesgitlenşi ýaly kesgitlenýär. Hakykatdan hem, goý **v**(t) wektor funksiýa $[a,b]$ kesimde berlen bolsun. Bu kesimi n bölege böleliň:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b, \quad [t_{i-1}, t_i] \subset [a,b]$$

Bu bölek kesimleriň her birinden $\tau_i \in [t_{i-1,} t_i]$ nokatlary alyp, olarda wektor funksiýanyň $\boldsymbol{v}(\tau_i)$ bahalaryny we ol bahalar üçin integral jemleri kesgitleýäris:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \upsilon(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

2-nji kesgitleme: Eger [*a,b*] kesimiň ähli mümkin bolan böleklemeleri üçin $\boldsymbol{\tau_i}$ sanlaryň saýlanyp alnyşyna bagly bolmazdan ýokarky integral jemiň n→∞ ymtylanda predeli bar bolsa, onda ol predele *v*(t) wektor funksiýadan alnan integral diýilýär we ol aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\int_a^b v(t)dt = i \cdot \int_a^b v_1(t)dt + j \cdot \int_a^b v_2(t)dt + k \cdot \int_a^b v_3(t)dt$$

Bu deňligiň sag böleginiň integrallarynyň skalýar funksiýalara görä kesgitli integrallardygy üçin wektor funksiýalaryň integrallarynyň aşakdaky häsiýetleri dogrudyrlar:

1. $$\left|\int_a^b v(t)dt\right| \le \int_a^b |v(t)|dt$$

2. $$\int_a^b [C, v(t)]dt = \left[C, \int_a^b v(t)dt\right]$$

3. $$\int_a^b v'(t)dt = v(b) - v(a)$$

Bu häsiýetleri özbaşdak subut etmeli.

3-nji mysal: $v(t) = \{\sin t, \cos t\}$ wektor funksiýany $[0, \pi]$ aralykda integrirlemeli.

Integrirlemegiň kesgitlemesine görä alarys:

$$\int_0^\pi v(t)dt = \int_0^\pi \{\sin t, \cos t\}dt = i \cdot \int_0^\pi \sin tdt + j \cdot \int_0^\pi \cos tdt =$$
$$= i \cdot (-\cos \pi + \cos 0) + j \cdot (\sin \pi - \sin 0) = 2i.$$

§4. Teýlor formulasy. Egriniň natural deňlemesi

Wektor funksiýalaryň önümi we differensiýaly kesgitlenenden soňra matematiki derňewde görkezilişi ýaly, bu funksiýalar üçin hem matematiki derňewiň esasy düşünjeleriň biri bolan Teýlor formulasy düşünjesi girizilýär. Sebäbi egrileriň galtaşmasy, üstlerdäki egriler we olar bilen bagly beýleki düşünjeler öwrenilende skalýar argumentli wektor funksiýalaryň käbir nokadyň etrabynda hatara dargamasy ulanylýar.

Ilki bilen skalýar $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokadyň etrabynda Teýlor formulasyna dagydylşyna seredeliň. Matematiki derňewde görkezilişi ýaly, bu dargama n - tertipli üznüksiz önüme eýe bolan $f(x)$ funksiýa üçin aşakdaky ýaly alynýar:

$$f(x)= f(x_0)+[f'(x_0)/1!]\cdot(x-x_0)+[f''(x_0)/2!]\cdot(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\left[f^{(n)}(x_0)/n!\right]\cdot(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

Bu dargamanyň $v(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ wektor funksiýa üçin $t_0\in[a,b]$ berkidilen nokatda alnyşyna seredeliň. Elbetde $x(t),y(t)$, $z(t)$ funksiýalar t_0 nokadyň etrabynda n –

tertipli üznüksiz önümlere eýe bolsunlar. Onda bu funksiýalar üçin Teýlor formulalaryny alarys:

$$x(t)=x(t_0)+[x'(t_0)/1!]\cdot(t-t_0)+[x''(t_0)/2!]\cdot(t-t_0)^2+$$
$$+\ldots+[x^{(n)}(t_0)/n!]\cdot(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$$

$$y(t)=y(t_0)+[y'(t_0)/1!]\cdot(t-t_0)+[y''(t_0)/2!]\cdot(t-t_0)^2+$$
$$+\ldots+[y^{(n)}(t_0)/n!]\cdot(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$$

$$z(t)=z(t_0)+[z'(t_0)/1!]\cdot(t-t_0)+[z''(t_0)/2!]\cdot(t-t_0)^2+$$
$$+\ldots+[z^{(n)}(t_0)/n!]\cdot(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$$

Bu formulalary degişlilikde **i, j, k** wektorlara köpeldip, soňra degişli elementlerini hasaba almak bilen goşsak, onda ***v(t)*** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargamasyny alarys:

$$v(t)=v(t_0)+[v'(t_0)/1!]\cdot(t-t_0)+[v''(t_0)/2!]\cdot(t-t_0)^2+$$
$$+\ldots+[v^{(n)}(t_0)/n!]\cdot(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$$

1-nji mysal. $v(t)=\{e^t,\sin t,\cos t\}$ wektor funksiýanyň $t_0=0$ nokadyň etrabynda Teýlor formulasyna dagytmasyny almak üçin $e^t,\sin t,\cos t$ funksiýalaryňTeýlor formulalaryny

$$e^t = 1 + t + t^2 / 2! + \ldots + t^n / n! + o\left(t^n\right)$$

$$\sin t = t - t^3 \big/ 3! + t^5 \big/ 5! - t^7 \big/ 7! + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} t^{2n-1} \big/ (2n-1)! + o(t^n)$$

$$\cos t = 1 - t^2 \big/ 2! + t^4 \big/ 4! - t^6 \big/ 6! + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} t^{2n-2} \big/ (2n-2)! + o(t^n)$$

alýarys we bu formulalary degişlilikde ***i, j, k*** wektorlara köpeldip soňra degişli elementlerini hasaba almak bilen goşsak, onda ***v(t)*** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargamasyny alarys.

Indi ***v(t)*** wektor funksiýanyň onuň differensiýallary boýunça Teýlor formulasyna dargadylyşyna seredeliň.

Onuň üçin $\Delta v(t) = v(t) - v(t_0) \approx dv$ deňligi ulanyp ***v(t)*** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargatmasyndan wektor differensiýalyň dargamasy alarys:

$$dv \approx \Delta v(t) = dv\left(t_0\right) + \frac{1}{2!} \cdot d^2 v\left(t_0\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} \cdot d^n v(t_0) + o(t^n)$$

Egriniň tebigy (natural) deňlemesiniň alnyşyna seredeliň.

Goý, **$v(t)$** funksiýa käbir $[a,b]$-de berilsin. Bu funksiýanyň godografy giňişlikde C egrini kesgitleýär. Wektor funksiýanyň dürli parametrlenmesinde şol bir godograf alnyp, parametrleriň dürli bahalary üçin godografyň dugalary alynýar. Egriniň dugasynyň uzynlygy bilen alynýan parametrlenmesine egriniň **natural** deňlemesi diýilýär. Berlen egriniň üstünde nokatlary berkidip onuň birnäçe dugalaryny alarys. Goý, ol dugalaryň biriniň uzynlygy

$$s = \left| M_i M_{i+1} \right|$$

bolsun. Duganyň uzynlygynyň

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

formulasyndan deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp, duganyň differensialy üçin aşakdaky formulany alarys:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\ .$$

Bu deňligiň egriniň natural deňlemesini almakda ulanylyşyna seredeliň.

2-nji mysal.
$v(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}=i\cdot a\cos t+j\cdot a\sin t+k\cdot bt$
wint çyzygy üçin natural deňlemelere geçmeli.

Onuň üçin

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{(a\cos t)'^2+(a\sin t)'^2+(bt)'^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

we

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

deňlikleri ulanyp, dürli parametrleriň arasyndaky

$$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

baglanyşygy alarys we ony wektor funksiýanyň deňlemesinde t parametriň ornuna goýsak, wektor funksiýanyň tebigy (natural) deňlemesine geleris:

$$v(t)=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

.

3-nji mysal. $v(t)=\{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ wektor funksiýanyň natural deňlemesini düzmeli.

2-nji mysalda görkezilişi ýaly duganyň differensialynyň formulasyndan peýdalanýarys:

$$(e^t \cos t)'^2 = e^{2t}(1 - \sin 2t)$$

$$(e^t \sin t)'^2 = e^{2t}(1 + \sin 2t)$$

$$(e^t)'^2 = e^{2t}$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = e^t\sqrt{3}$$

Onda duganyň differensialy

$$ds = e^t\sqrt{3}dt$$

bolar. Bu ýerden bolsa, dürli parametrleriň arasyndaky baglanyşyklaryň birini

$$t = \ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

alyp, berlen wektor funksiýanyň natural deňlemesini aşakdaky ýaly ýazarys:

$$v(t) = \left\{\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right\}$$

§5. Galtaşýanlar; normallar; galtaşma

Egriler we üstler öwrenilende olara geçirilen galtaşýanlaryň, normallaryň özara ýerleşişlerini we egri bilen egriniň, üst bilen egriniň özara galtaşmalaryny öwrenmeklik zerurlygy ýüze çykýar. Bu düşünjeleri girizeliň.

Goý, R^3 giňişligiň adaty nokatlarynda ($(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\neq 0$ şertde)wektor funksiýa $v(t)=i\cdot x(t)+j\cdot y(t)+k\cdot z(t)$

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t), \end{cases}$$

ulgamyň kömegi bilen **C** egrini kesgitleýän bolsun.

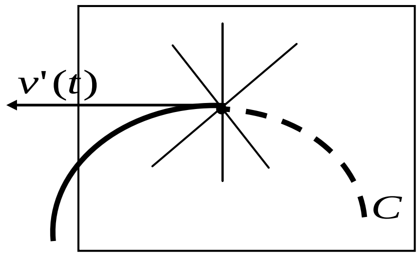
1-nji kesgitleme. $v'(t)=\left\{\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt}\right\}$ **wektora *C* egriniň *t* nokatdaky galtaşýan ýa-da tizlik wektory diýilýär.**

Galtaşýan $v'(t)$ wektor C egrä onuň *M(t)* galtaşma nokadynda geçirilen galtaşýanyň ugry boýunça ýatar. Onda analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, *M(t)* nokatdan geçýän galtaşýan bilen ugurdaş bolan göni çyzygyň – $v'(t)$ galtaşýanyň deňlemesini

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)}$$

görnüşde alarys.

2-nji kesgitleme. Galtaşma nokadynda galtaşýana galdyrylan perpendikulýara egriniň normaly diýilýär. Bu normallar bütün tekizligi doldurýarlar. Galtaşma nokadynda galtaşýana perpendikulýar bolan tekizlige normal tekizlik diýilýär.



7-nji çyzgy

Kesgitlemä görä, galtaşýan $v'(t)$ wektor normal tekizlige perpendikulýar, şonuň üçin hem analitik geometriýadan normal tekizligiň deňlemesini
$$x'(t)\cdot(X-x(t))+y'(t)\cdot(Y-y(t))+z'(t)\cdot(Z-z(t))=0$$
görnüşde alarys.

Indi, bu düşünjeleri üstler üçin hem girizeliň. Goý, käbir üst $F(x,y,z)=0$ deňleme bilen berilsin. Bu üstde

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases}$$

ulgamyň kömegi bilen käbir egrini geçireliň. Onda t parametriň islendik bahasy üçin $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadyň koordinatalary

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$$

toždestwony kanagatlandyrar. Bu toždestwony t görä differensirläp

$$F_x(x, y, z) \cdot x'(t) + F_y(x, y, z) \cdot y'(t) + F_z(x, y, z) \cdot z'(t) \equiv 0$$

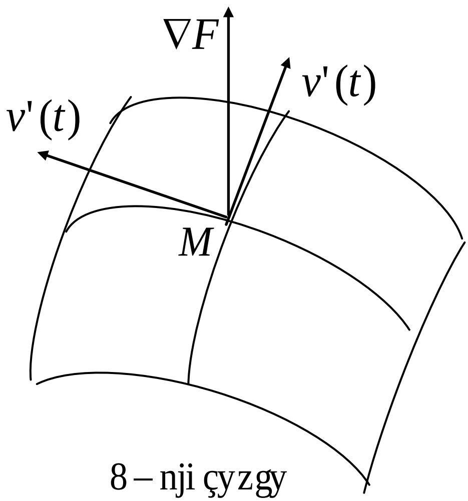
toždestwony alýarys. Käbir

$$\nabla F = F_x(x, y, z) \cdot i + F_y(x, y, z) \cdot j + F_z(x, y, z) \cdot k$$

wektory girizeliň. Onda ýokarky toždestwony adaty nokatlar ($F_x \neq 0, F_y \neq 0, F_z \neq 0$) üçin:

$$(\nabla F, v'(t)) = 0 .$$

Şuňa meňzeşlikde, $M(x(t), y(t), z(t))$ nokatdan seredilýän üstde tükeniksiz köp egrileri we ol egriler üçin galtaşýanlary geçirip bolar. Şol galtaşýanlaryň hemmesi hem ∇F wektora perpendikulýar bolarlar we şol bir tekizlikde ýatarlar.



$8-$nji çyzgy

Bu tekizlige hem üstüň $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadyndaky **galtaşýan tekizligi** diýilýär. Analitik geometriýadan bolsa, galtaşýan tekizligiň deňlemesini

$$F_x(x,y,z)\cdot[X-x(t)]+F_y(x,y,z)\cdot[Y-y(t)]+$$
$$+F_z(x,y,z)\cdot[Z-z(t)]=0$$

görnüşde alarys.

Egrilere meňzeşlikde, $M(x(t), y(t), z(t))$ nokatda galtaşýan tekilige galdyrylan perpendikulýara **üstüň normaly** diýilýär. Elbetde, bu normal ýeke-täkdir we ∇F wektor bilen ugurdaşdyr. Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, üstüň normalynyň deňlemesini

$$\frac{X-x(t)}{F_x(x,y,z)}=\frac{Y-y(t)}{F_y(x,y,z)}=\frac{Z-z(t)}{F_z(x,y,z)}$$

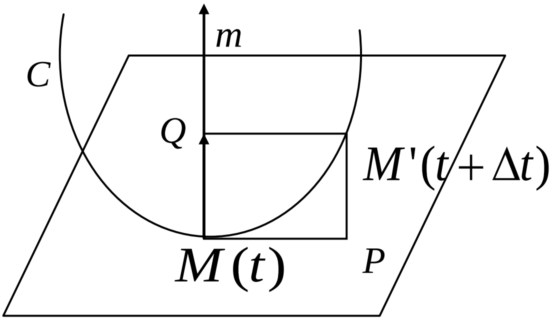
görnüşde alarys.

Bellikler: 1. Eger-de üstüň $M(x(t),y(t),z(t))$ nokadynda oňa geçirilen galtaşýan egrini alsak we bu nokatda egrä galtaşýan geçirsek, onda $(\nabla F, v'(t))=0$ bolar, we ol galtaşýan galtaşýan tekizlikde ýatar. Şunlukda, egri bilen üstüň arasynda **1-nji tertipli galtaşma** boldy diýilýär.

2. Şundan başlap, ähli ýerde üstüň adaty nokatlaryna serdiler. Eger-de aýratyn aýdylmasa $v'(t)$ we $v''(t)$ wektorlar kollinear däl hasap ediler.

Goý, indi käbir egri $v(t)=i\cdot x(t)+j\cdot y(t)+k\cdot z(t)$ wektor bilen berilsin. Bu egriniň $M(t)$ nokadynyň üsti bilen geçýän we bu egrä "tükeniksiz golaýlaşdyrylan" tekizligi, başgaça aýdylanda, $M(t)$ nokatda mümkin bolan uly tertipdäki galtaşmany emele getirýän tekizligi tapmak meselesine seredeliň.

Goý, $M(t)$ nokatdan egriniň m normaly galdyrylan, $M'(t)$ nokat $M(t)$ nokada tükeniksiz golaýlaşýan bolsun.



9 – njy çyzgy

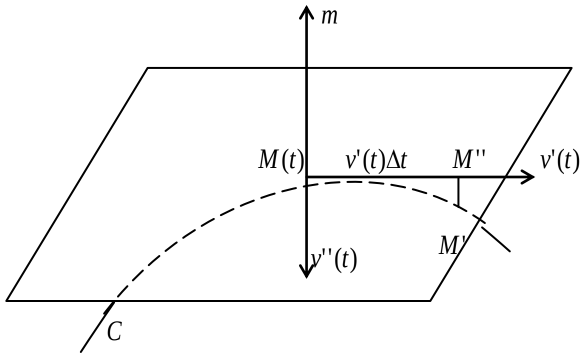
Onda $PM'(t) \to 0$ bolar, ýagny $PM'(\Delta t)$ uzaklyk Δt ululyga görä *(n+1)* tertipli tükeniksiz kiçi ululyga öwrüler. Bu ýagdaýda MM' wektoryň Teýlor formulasyna we Teýlor hataryna dargamasyna seredeliň:

$$MM' = v(t+\Delta t) - v(t) = v'(t)\Delta t + v''(t)\cdot\frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{1}{6}Q\left[(\Delta t)^2\right]$$

$$MM' = v(t+\Delta t) - v(t) = v'(t)\Delta t + v''(t)\cdot\frac{\Delta t^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

we $PM' = mMM'$ bolýandygy üçin alarys:

$$PM' = mMM' = mv'(t)\Delta t + mv''(t)\cdot\frac{\Delta t^2}{1\cdot 2} + \ldots$$



$10-$njy çyzgy

Şeýlelikde 1). Eger-de $mv'(t)\neq 0$ bolsa, onda PM'- 1-nji tertipli tükeniksiz kiçidir, başgaça aýdylanda nol tertipli galtaşma bolýar, ýagny egri tekizligi deşip geçýär.
2). Eger-de $mv'(t)=0$ bolsa, onda PM'- 2-nji tertipli tükeniksiz kiçidir, başgaça aýdylanda 1-nji tertipli galtaşma bolýar, egrä geçirilen galtaşýan m normala perpendikulýar bolup, gözlenýän tekizlikde ýatar.
3). Eger-de $mv'(t)=0$, $mv''(t)=0$ bolsalar, egri bilen gözlenýän tekizligiň arasynda 2-nji tertipli galtaşma emele geler. Bu ýagdaýda gözlenýän tekizlige **galtaşyjy tekizlik** diýilýär.

Goý indi, käbir egri iki sany $F(x,y,z)=0$ we $\Phi(x,y,z)=0$ üstleriň kesişmesi hökmünde berlen bolsun. Onda bu egri çyzyk üçin galtaşýan göniniň we normal tekizligiň deňlemelerini düzeliň. Belli bolşy ýaly, galtaşýan göniniň deňlemesi

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)}$$

bilen berilýär. Üstleriň deňlemelerini differensirläp alarys:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot x'+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot y'+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot z'=0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\cdot x'+\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\cdot y'+\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\cdot z'=0 \end{cases}$$

Bu ulgamdan

$$x':y':z'=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$. Onda

galtaşýanyň deňlemesi aşakdaky görnüşe geçer:

$$\frac{X-x(t)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y(t)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z(t)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix}}.$$

Şuňa meňzeşlikde, normal tekizligiň deňlemesinde degişli ornuna goýmalary ulansak, onda normal tekizligiň deňlemesini alarys:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \big(X - x(t)\big) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix} \cdot \big(Y - y(t)\big) +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \big(Z - z(t)\big) = 0$$

Bu deňligi göz öňünde tutup, normal tekizligiň deňlemesini 3-nji tertipli kesgitleýjiniň kömegi bilen

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

görnüşde alarys.

§6. Ýewklid giňişliginde egriniň uzynlygy. Egrileriň arasyndaky burç

Ýewklid giňişliginde käbir wektor funksiýa bilen kesgitlenen egriniň dugasynyň uzynlygynyň alnylyşyna seredeliň. Goý, käbir R^n ýewklid giňişliginde $[a,b]$ kesimde kesgitlenen, bahalary bu giňişlikde bolan $v(t)$ wektor funksiýa berlen bolsun.

$$v(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\},$$

$$v[a,b]; \; x_1\, x_2, \ldots, x_n \in R^n .$$

Belli bolşy ýaly, ýewklid giňişliginde $\xi, \mu \in R^n$ wektorlaryň kömegi bilen olaryň skalýar köpeltmek hasylyny kesgitleýäris:

$$(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \, \mu^i$$

Ilki bilen seredilýän giňişlige degişli bolan her bir wektoryň uzynlygynyň, iki wektoryň arasyndaky uzaklygyň, wektorlaryň arasyndaky burçuň skalýar köpeltmek hasyl bilen alynýan formulalaryny getireliň:

$$\xi = \{\xi_1 \ldots, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$

$$\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$$

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2} = \sqrt{\xi_1\ \xi_1 + \ldots + \xi_n \xi_n} = \sqrt{(\xi,\xi)}$$

$$|\xi - \mu| = \sqrt{(\xi - \mu,\ \xi - \mu)}\ ;$$

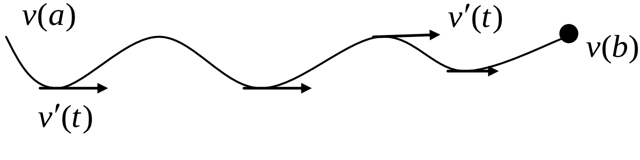
$$\cos\varphi = \frac{(\xi,\mu)}{\sqrt{(\xi,\xi)}\ \sqrt{(\mu,\mu)}}$$

Şulara meňzeşlikde, skalýar köpeltmek hasylynyň kömegi bilen egrileriň uzynlygyny kesgitläp bolýar. Belli bolşy ýaly, $v(t) = \{x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)\}$ wektor üçin tizlik wektor

$$v'(t) = \left\{\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{dx_n}{dt}\right\}$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

Wektor funksiýanyň koordinatalary $[a,b]$ kesimde endigan funksiýalardyr; kesgitlemeden görnüşi ýaly, berlen wektor bilen onuň tizlik wektorynyň arasyndaky baglanşyk 11-nji çyzgydan görünýär.



11-nji çyzgy

Lemma: Koordinatalary [*a,b*] kesimde endigan bolan $v(t)$ wektor funksiýanyň modulynyň hemişlik bolmagy üçin,

$$\big(v(t),\ v'(t)\big) = 0$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerurdyr.

Subudy: Hakykatdan hem, goý, $|v(t)| = C$ - hemişelik bolsun. Onda

$$|v(t)| = \sqrt{x^2{}_1(t) + x^2{}_2(t) + \dots + x^2{}_n(t)} = C$$

deňligiň iki böleginden hem t parametra görä önüm alyp, drobuň nola deň bolmak şertinden alarys:

$$2x_1(t)\cdot x_1'(t) + 2x_2(t)\cdot x_2'(t) + \dots + 2x_n(t)\cdot x_n'(t) = 0$$

Bu deňlik Lemmany subut edýär.

2-nji kesgitleme: Goý, $v(t)$ wektor funksiýa [*a,b*] kesimde kesgitlenen bolsun we onuň koordinatalary bu kesimde endigan bolsunlar. Goý, $v(a), v(b)$ kesgitlenen bolsunlar. Onda

$$l\,(v(t))\,\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{(v'(t), v'(t))}\,dt = \int_a^b |\,v'(t)\,|\,dt$$

ululyga $v(t)$ wektor funksiýanyň $v(a)$ nokatdan $v(b)$ nokada çenli emele getiren dugasynyň uzynlygy diýilýär. Bu formula koordinatlar görnüşinde

$$l\,(v(t))\,|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\,dt$$

Goý, $\tau \in [\alpha, \beta]$. Koordinatalary endigan bolan $v(t)$ wektor funksiýa t we τ parametrlere görä iki dürli parametrlemelere eýe bolsun. Bu parametrleriň özara baglanyşygy $t=t(\tau)$ deňlik bilen berilsin we $\frac{dt}{d\tau} > 0$ bolsun, onda dürli parametrlemeler üçin hem egriniň dugasynyň uzynlygy hemişelikdir, ýagny

$$l(v(t))\,|_a^b = l(v(\tau))\,|_\alpha^\beta, \quad v(a) = v(\alpha), v(b) = v(\beta)$$

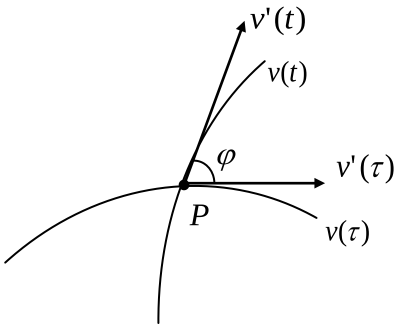
Hakykatdan hem,

$$l(v(t))\,|_a^b = \int_a^b \sqrt{v_t'(t), v_t'(t)}\,dt =$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(v'_{\tau}(\tau)\ ,v'_{\tau}(\tau)\cdot\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{2}}\cdot dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(v'_{\tau}(\tau)\ ,\ v'_{\tau}(\tau))}d\tau=l\big(v(\tau)\big)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Indi $v(t)$ we $v(\tau)$ wektor funksiýalaryň arasyndaky burçy kesgitläliň. Goý, bu wektorlar käbir $P=v(a)=v(b), t=a, \tau=b$ nokatda kesişsinler:



12-njy çyzgy

12-nji çyzgydan görnüşi ýaly, $v(t)$ we $v(\tau)$ wektor funksiýalaryň arasyndaky burç olaryň kesişme nokadyndaky tizlik wektorlaryň arasyndaky burça deňdir:

$$\cos\varphi=\frac{(v'_{t}(a),\ v'_{\tau}(b))}{|\ v'_{t}(a)\ |\cdot|v'_{\tau}(b)\ |}.$$

Egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasynyň kömegi bilen öňden belli bolan formulalaryň alnylyşyna seredeliň.

a) <u>Kesimiň uzynlygy</u>. Goý, $v(t)$ egri çyzykly

$$x^i(t) = \alpha^i \cdot t(\alpha^i = const, t \in [a,b], i = \overline{1,n})$$

funksiýalar bilen berilsin. Onda bu egriniň $t = a$ nokatdan $t = b$ nokada çenli uzynlygy

$$l(v(t))|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt = (b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2}$$

bolar. Başgaça, bu egri üçin başlangyç nokadyň $\{\alpha^i \cdot a\}$, ahyrky nokadyň $\{\alpha^i \cdot b\}$ bolýandyklary üçin adaty kesimiň uzynlygy hem $(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha^i)^2}$ bolar

b) <u>Töweregiň uzynlygy</u>. Goý, $v(t)$ egri

$$x^1(t) = R\cos t, x^2(t) = R\cos t, t \in [0, 2\pi]$$

funksiýalar bilen berilsin. Onda bu egriniň $t = 0$ nokatdan $t = 2\pi$ nokada çenli uzynlygy

$$l(v(t))|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt = 2\pi R.$$

Öňden belli formula doly gabat gelýär.

§7. Egriçyzykly koordinatalar ulgamynda egriniň uzynlygy

Goý, R^n giňişligiň käbir C ýaýlasynda kesgitlenen $v(t)=\{x^1(t),x^2(t),...,x^n(t)\}$ wektor funksiýa berlen bolsun. Belli bolşy ýaly, käbir (a,b) aralykda ýewklid koordinatalar ulgamynda egrileriň uzynlygy

$$l\,(v(t))\,|_a^b=\int_a^b\sqrt{(v'(t),v'(t))}dt=\int_a^b|\,v'(t)\,|\,dt$$

formula bilen kesgitlenendir.

Egriçyzykly koordinatalar ulgamynda

$$z(t)=\left\{z^j(t)\right\}=\left\{z^1(t),z^2(t),...,z^n(t)\right\}$$

egriçyzykly koordinatalar ulgamy berlip,

$x^i=x^i(z(t)),\ (1\le i\le\ n)$ deňlikler ýerine ýetsinler.

Bu ýagdaýda

$$v(t)=\left\{x^i(z(t))\right\}\ \ (1\le i\le n)$$

Bu wektor funksiýa üçin tizlik wektoryň özgerşine seredeliň. Onuň üçin çylşyrymly funksiýanyň önümini kesgitlenişine görä alarys:

$$v'(t)=\left\{\frac{dx^i}{dt},\,1\le i\le n\right\},$$

$$\frac{dx^i}{dt}=\frac{dx^i(z(t))}{dt}=\frac{dx^i(z^1(t),\dots,z^n(t))}{dt}=$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\cdot\frac{\partial z^1}{\partial t}+\ \frac{dx^i}{\partial z^2}\cdot\frac{dz^2}{dt}+\dots+\frac{\partial x^i}{\partial z^n}\cdot\frac{dz^n}{dt}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial z^k}\cdot\frac{dz^k}{dt},\quad (1\le i\le n).$$

Onda duganyň uzynlygynyň formulasyndan

$$l=\big(v(t)\big)\big|_a^b=\int_a^b\sqrt{(v'(t),\,v'(t))}dt=$$

$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{dx^k(z(t))}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_m\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\cdot\frac{dz^m}{dt}\cdot\sum_p\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\cdot\frac{dz^p}{dt}\right)}dt=$$

$$=\int_a^b\sqrt{\sum_{m,p}\frac{dz^m}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\cdot\frac{dz^p}{dt}}\,dt$$

$$g_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$$

$$l = \left(v(t)\right)\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} \frac{dz^m}{dt}\, g_{mp}\, \frac{dz^p}{dt}}\, dt$$

Bu formula egriçyzykly koordinatalar ulgamynda duganyň uzynlygynyň formulasy diýilýär. g_{mp} ulgam z üýtgeýänlere baglydyr we käbir $g_{mp} = G(z)$ matrissany kesgitleýär. Sebäbi x ýewklid koordinatalardan z egriçyzykly koordinatalara geçirilende bu özgertmäniň ýakobi matrissasy

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = d\psi_{zx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \cdots \frac{\partial x^1}{\partial z^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \cdots \frac{\partial x^2}{\partial z^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial z^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

bolar.

Bu matrissany transponirläp alarys:

$$(d\psi_{zx})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} \; \frac{\partial x^2}{\partial z^1} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial z^1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial z^n} \; \frac{\partial x^2}{\partial z^n} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

Onda $g_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$ üçin

$$G(z) = g_{mp} = (d\psi_{zx})^T (d\psi_{zx})$$

özgertmäni alarys.

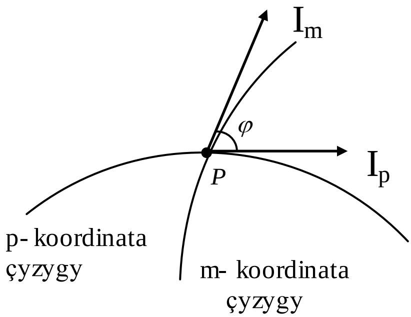
Indi, bu matrissanyň geometrik manysyna seredeliň. Onuň üçin seredilýän wektor funksiýanyň koordinat çyzyklaryny alalyň. Goý, olar käbir nokatda kesişsinler.

$$v_m(t) = \{c^1, c^2, ..., c^m = t, ..., c^n\}$$

$$v_p(t) = \{c^1, c^2, ..., c^p = t, ..., c^n\}$$

$$I_m = v'_m(t)$$

$$I_p = v'_p(t)$$



13 – nji çyzgy

Şeýlelikde g_{mp} = G(z)=(I_m, I_p) matrissanyň geometrik manysy *m* we *p* koordinat çyzyklarynyň tizlik wektorlarynyň skalýar köpeltmek hasylydyr.

Eger–de *z* egriçyzykly koordinatalardan *y* egriçyzykly koordinatalara geçmek zerurlygy ýüze çyksa, onda seredilýän matrissanyň özgertme kanuny aşakdaky ýaly bolar:

$$G(y) = (d\psi_{yz})^T \cdot G(z) \cdot (d\psi_{yz})$$

Eger-de *x*- dekart koordinatalardan *z* egriçyzykly koordinatalara geçmek ýüze çyksa, onda ýokarky formuladaky

$$G(z) = (d\psi_{zx})^T \cdot G(x) \cdot (d\psi_{zx})$$

G(x) matrissa birlik matrissa öwrüler . Bu ýagdaýda geçiş kanuny aşakdaky bolar:

$$G(z) = (d\psi_{zx})^T \cdot E \cdot (d\psi_{zx}) .$$

Belli bolşy ýaly, egriçyzykly koordinatalar ulgamynyň polýar, slindriki we sferiki görnüşlerine seretdik. Bu ulgamlar üçin egrilerniň dugalarynyň uzynlyklarynyň formulalarynyň alnyşyna seredeliň:

Polýar koordinatalar üçin:

$$1)\ R^2(r,\varphi);\ r = z^1,\ \varphi = z^2,$$

$$x^1 = r\cos\varphi, \qquad x^2 = r\sin\varphi,$$

$$d\psi_{zx} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\ r\ \sin\varphi \\ \sin\varphi & r\ \cos\varphi \end{pmatrix};$$

$$(d\psi_{zx})^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$g_{mp} = G(z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

Onda, polýar koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy

$$l\,\Big|_a^b=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

bolar.

Silindriki koordinatalar üçin:

$$2)R^3(r,\varphi,z),\quad z^1=r,\quad z^2=\varphi,\quad z^3=z$$
$$x^1=r\cos\varphi,\quad x^2=r\sin\varphi,\quad x^3=z$$

$$G(t)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot E\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

Slindrik koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy:

$$G(z)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

Sferik koordinatalar üçin:

3) $R^3(r,\varphi,z),\qquad z^1=r,\qquad z^2=\varphi,\quad z^3=z$

$$x^1=r\cos\varphi\sin\theta,\qquad x^2=r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$x^3=r\cos\theta$$

Sferik koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy:

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

sebäbi

$$G(z)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

Şeýlelikde, duganyň uzynlyklarynyň formulalaryny aldyk. Köplenç, amaly hasaplamalardan duganyň uzynlygynyň formulasy dälde duganyň differensialynyň fomulasyny ulanmak amatly bolýar. R^3 giňişlikde duganyň differensialynyň kwadratlary üçin:

sferik koordinatalarda

$$1)(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta(d\varphi)^2 \ ;$$

silindirik koordinatalarda

$$2)(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2 \ ;$$

polýar koordinatalarda

$$3)(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2;$$

ýewklid koordinatalarda

$$4)(dl)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2;$$

formulalar dogrudyrlar.

§8. Riman giňişligi we metrikasy. Indefinit metrikalar

7-nji paragrafda görkezilişi ýaly, her bir giňişlik üçin onuň metrikasy kesgitlenýär. Şeýle hem, C ýaýlada berlen her bir z egriçyzykly koordinatalar ulgamyna koordinatalaryň çalyşmasynda kwadrat forma ýaly özgerýän endigan funksiýalardan düzülen $G(z)$ matrissa degişli edilýär.

Mysal üçin, ýewklid giňişliginde metrika hökmünde iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly alynýar. Şol skalýar köpeltmek hasylyň kömegi bilen bolsa wektoryň uzynlygyny, olaryň arasyndaky burçy, egriniň dugasynyň uzynlygyny we beýleki hasaplamalary geçirip bolýar.

1-nji kesgitleme: Goý, ýewklid giňişliginiň islendik *C* ýaýlasynda egriçyzykly $z^1, z^2, \dots, z^n$ koordinatalaryň regulýar ulgamy üçin endigan funksiýalaryň $g_{mp} = G(z)$ toplumy kesgitlenen bolsun. Eger-de

1). $G(z) = (g_{mp}(z))$ matrissa simmetrik bolsa, ýagny $g_{pm}(z) = g_{mp}(z)$.

2). $G(z)$ matrissa položitel kesgitlenen we $|G(z)| \neq 0$.

3). Egriçyzykly koordinatalaryň $z \to y$ çalşyrmasynda $G(y)$ geçiş matrissasy $G(y) = \left(d\psi_{yz}\right)^T \cdot G(z) \cdot \left(d\psi_{yz}\right)$ kanun boýunça kesgitlenýän bolsa, onda seredilýän giňişlikde Riman metrikasy girizilen diýilýär, giňişlige bolsa Riman giňişligi diýilýär.

2-nji kesgitleme. Eger-de C ýaýlada $G(y)$ matissany birlik matrissa öwürýän koordinatalaryň y ulgamy tapdyrsa, onda C ýaýlada kesgitlenen Riman metrikasyna ýewkild metrikasy diýilýär.

Bu kesgitlemelerden, "ýewklid däl" giňişlikleriň bar bolmaklygy hiç bir egriçyzykly koordinatalarda metrikany $\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ görnüşde ýazyp bolmaýanlygyna bagly däldigi gelip çykmaýar. Hasaplamalarda, kesgitlemedäki $G(z) = (g_{mp}(z))$ matissany almakdan egriniň dugasynyň differensialynyň kwadratyny almak amatly bolup durýar(§7).

Diýmek, giňişlik kesgitlenende, onuň elementleri üçin skalýar köpeltmek hasylyny kesgitlemeli. Ýewkid giňişliginde $\xi = \{\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n\}$, $\mu = \{\mu^1, \mu^2, ..., \mu^n\}$ wektorlar üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly $(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \ \mu^i$ deňlik bilen hasaplanan bolsa, onda ýokarky kesgitlemä laýyklykda Riman giňişlikleri üçin elementleriň skalýar köpeltmek hasyly

$$(\xi, \mu) = \sum_{m,p} g_{mp}(z)\, \xi^m \ \mu^p$$

deňlik bilen kesgitlener.

Bir nokatdan çykýan iki wektor üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly koordinatalar ulgamynyň saýlanyp alnyşyna bagly däldir. Emma dürli nokatlardan çykýan wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly üçin inwariantlyk ýokdur. Riman metrikasy boýunça egriçyzykly koordinatlarda egriniň dugasynyň uzynlygy

$$l(v(t))\big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} \frac{dz^m}{dt} \ g_{mp} \ \frac{dz^p}{dt}} \ dt$$

formula bilen hasaplanar.

Girizilen Riman giňişliginde ýokarda kesgitlenen Riman metirkasyny ulanyp wektoryň uzynlygynyň, iki wektoryň arasyndaky burçuň, duganyň uzynlygynyň formulalaryny aşakdaky görnüşlerde alýarys: Ýewkild we Riman giňişlikleri üçin wektoryň uzynlygy:

$$|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)} \quad \text{we}$$

$$|\xi| = \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp}(z)\, \xi^m \ \xi^p}$$

wektorlaryü arasyndaky burç

$$\cos\varphi = \frac{(\xi, \mu)}{|\xi| \cdot |\mu|} \quad \text{we}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_1^m}{dt} \frac{dz_2^p}{dt}}{\sqrt{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_2^m}{dt} \frac{dz_2^p}{dt}} \cdot \sqrt{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_1^m}{dt} \frac{dz_1^p}{dt}}}.$$

formulalar bilen hasaplanar.

Ýokardaky kesgitlemelerde girizilen Riman metrikasy položitel kesgitlenen metrikadyr. Hususy halda, §7-de kesgitlenen metrikalar hem položitel kesgitlenen metrikalardyr. Emma, köp ýagdaýda položitel kesgitlenmedik metrikalar – indefinit metrikalar bilen işlemeli bolýar.

3-nji kesgitleme. Goý, ýewklid giňişliginiň islendik *C* ýaýlasynda egriçyzykly koordinatalaryň $z^1, z^2, ..., z^n$ **regulýar lgamy üçin endigan funksiýalaryň g_{mp} toplumy kesgitlenen bolsun. Eger-de**

1)$G(z)=(g_{mp}(z))$ **matrissa simmetrik bolsa, ýagny** $g_{pm}(z)=g_{mp}(z)$ **;**

2)$|G(z)|\neq 0$ **bolsa ;**

3) Egriçyzykly kooordinatalaryň $z \to y$ **geçiş matrissasy**

$$G(y)=\left(d\psi_{yz}\right)^T \cdot G(z)\cdot\left(d\psi_{yz}\right)$$

kanun boýunça kesgitlenýän bolsa, onda seredilýän giňişlikde indefinit metrikasy girizilen diýilýär. Giňişlige bolsa indefinit giňişligi diýilýär.

Indefinit giňişlikleriň mysaly hökmünde s indeksli R_s^n psewdoýewklid giňişliklerine seredýäris. Bu giňişliklerde metrikany gurmak üçin dekart koordinatalary berlen adaty ýewklid giňişliginde elementleriň skalýar köpeltmek hasyly hökmünde

$$(\xi, \mu)_s = -\sum_{i=1}^{s} \xi^i \mu^i + \sum_{j=s+1}^{n} \xi^j \mu^j$$

görnüşli biçyzykly formany almak ýeterlikdir. Bu metrika görä, metrikanyň otrisatel bahasy, şunlukda, bu giňişliklerde wektoryň

$$|\xi|_s = \sqrt{(\xi, \xi)_s}$$

uzynlygy hyýaly hem bolup biler. Bu metrikada endigan egriniň dugasynyň uzynlygy

$$l(v(t))|_a^b = \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{j=s+1}^{n} \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\, dt$$

formula bilen hasaplanar.

Bellikler: Psewdoýewklid giňişliklerinden

1). $n=4, s=1$ bolanda Minkowskiniň R_1^4 giňişligini alarys. 2). S=0 bolanda $R_0^n = R^n$ ýewklid giňişligi alynýar.

Minkowskiý R_1^4 giňişligi ähtimallyk nazaryýetiniň käbir effektlerini oňaýly ýagdaýda ýazmak üçin ýörite girizildi we ylmyň ösmegine uly täsir etdi. Bu giňişlikde

$$R_1^4 : x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

koordinatalar ulanyp, duganyň differensialynyň kwadraty üçin

$$dl^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

formula alynýar. Bu ýerde t wagty, c ýagtylygyň tizligini görkezýär.

R_1^4 giňişlikde ýewklid metrikasyna görä e_1, e_2, e_3, e_4 ortonormirlenen bazis alyp, bu giňişligi hem ortonormirleýärler. Bu giňişlikde haýsy bolsada bir material nokadyň $v(\tau)$ wektor bilen alynýan hereketiniň “dünýä çyzygy” diýip atlandyrylýan endigan traýektoriýasyna seredeliň. Eger-de x,y,z koordinatalary giňişlik koordinatalary hökmünde alsak, onda material nokadyň bu traýektoriýa boýunça hereketine giňişligiň ewolýusiýasy hökmünde seredip bolar.

§9. Sferadaky, tekizlikdäki geometriýalar

Ikiölçegli R^2 ýewklid giňişligine seredeliň. Bu giňişlikde x, y dekart koordinatalary, $dl^2=ds^2=dx^2+dy^2$ bolsa ýewklid metrikasyny kesgitleýän bolsun.Riman metrikasy $(\xi,\eta)=\xi^1\cdot\eta^1+\xi^2\cdot\eta^2$ skalýar köpeltmek hasyly bilen berilsin. Berlen nokatdan uzynlygy R bolan wektorlaryň uçlary-soňlary töweregi kesgitleýär. Eger-de tekizlikde polýar koordinatalary girizsek, onda merkezi $0(o,o)$ bolan töwerek $v(t)=const$ görnüşli koordinat çyzyklaryny berer:

$$x^2+y^2=R^2; \quad x=r(t)\cos\varphi(t)$$
$$y=r(t)\sin\varphi(t); \quad r^2(t)=R^2 \Rightarrow$$
$$\left(r(t)=R=const\right).$$

Polýar koordinatalar ulgamynda töweregiň dugasynyň uzynlygynyň tükeniksiz kiçi elmenti $dl=rd\varphi$ bolar. Sebäbi

$$dr=0; \quad dl^2=dr^2+r^2d\varphi^2.$$

Indi, iki ölçegli sferanyň dekart koordinatalary x, y, z bolan üç ölçegli giňişlige girizilişine seredeliň. Bu dekart koordinatalary O

nokatdan çykýan uzynlyklary R bolan wektorlaryň ahyrlary hökmünde alalyň.

Iki ölçegli sferanyň geometriýäsyny öwrenmezden öň käbir umumy meselä seredeliň. Goý, S^2 sferada endigan $v(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ egri berlip, onuň ***l(v)*** uzynlygyny kesgitlemek gerek bolsun.

Ýewklid giňişliginde dekart koordinatalary üçin $dl^2=dx^2+dy^2+dz^2$ deňlik ýerine ýetýär. Bu giňişlikde iki sany $v_1(t),v_2(t)$ egrileri alyp, olaryň arasyndaky burçy hasaplamak üçin $v_1'(t),v_2'(t)$ önümleri kesgitläliň.

S^2 sfera R^3 giňişlikde $x^2+y^2+z^2=R^2$ deňleme bilen berilýär. Sferadaky nokatlaryň ýagdaýyny kesgitleýän parametrleriň sany ikä, R^3 giňişlikde bolsa üçe deň. Goý, sferiki koordinatlar R^3 giňişlikde

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

deňlemeler bilen berilsin. Onda sferanyň deňlemesi egriçyzykly sferiki koordinatalarda $r=R=const$ bilen berler.

Goý, S^2 sferada ýatýan, $(\theta(t), \varphi(t))$ nokatda kesişýän $v_1(t), v_2(t)$ egrileriň koordinatalary $v_1(t) = \{R, \theta_1(t), \varphi_1(t)\}, v_2(t) = \{R, \theta_2(t), \varphi_2(t)\}$ we olaryň $v_1'(t), v_2'(t)$ önümleri hasaplanan bolsun. Bu önümleriň skalýar köpeltmek hasyly

$$\left(v_1', v_2'\right) = R^2(\theta_1' \cdot \theta_2' + \sin^2\theta \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2')$$

bolar. Sebäbi, Riman metrikasynda skalýar köpeltmek hasyl aşakdaky ýaly alynýar:

$$\left(\xi, \eta\right) = \sum_{i,j} g_{i,j} \xi^i \eta^j$$

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial z^j}$$

$$dl^2 = dr^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

1-nji kesgitleme. Biçyzykly $\left(v_1', v_2'\right) = R^2(\theta_1' \cdot \theta_2' + \sin^2\theta \cdot \varphi_1' \cdot \varphi_2')$ **forma** ***r=R=Const, θ=θ, φ=φ*** **ornuna goýmanyň kömegi bilen**

$$dr^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

formadan alynýan $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ **kwadrat formany kesgitleýär.** S^2 **sferada alnan bu metrika üçölçegli giňişligiň ýewklid**

metrikasyndan indusirlenip alnan metrika diýilýär.

S^2 sferada islendik nokadyň ýagdaýy giňlik (şirota) we dowamlylyk (dolgota) (θ,φ) bilen kesgitlenýär, onda S^2 sferada radius wektory

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,$$

$$y = R\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = R\cos\theta$$

görnüşde berip bolar, olary

$$(dx(\theta,\varphi))^2 + (dy(\theta,\varphi))^2 + (dz(\theta,\varphi))^2$$

formada goýup

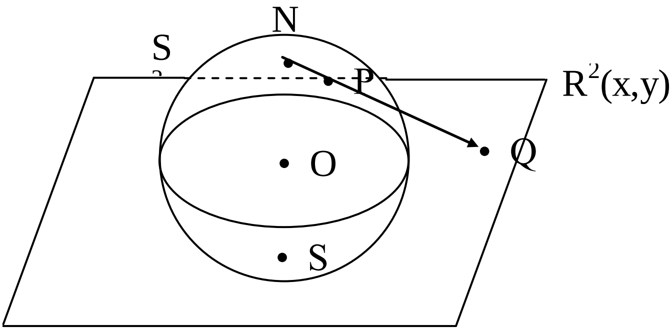
$$R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

aňlatmany alarys (hususy ýagdaý).

Bellik: S^2 sferada beýleki egriçyzykly koordinatlary hem girizip bolýar.

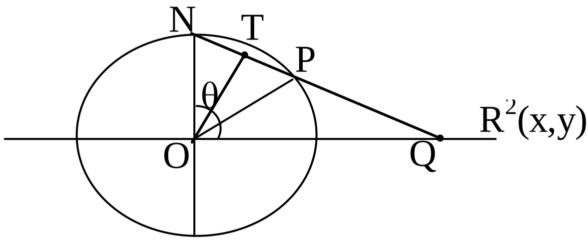
Üçölçegli giňişlige girizilen ikiölçegli S^2 sfera käbir üsti kesgitleýär. Goý, S^2 sfera R^3 giňişlikde indusirlenen $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ Riman metrikasy bilen berlen bolsun, $(\theta,\varphi)-$ sferik koordinatlar.

S^2 sferanyň R^2 tekizlige stereografiki proýeksiýasyna seredeliň. S^2 sferanyň merkeziniň koordinatalar başlangyjy bilen gabat getirýäris.



14-nji çyzgy

Çyzgy boýunça R – sferanyň radiusy, $P\neq N$; $P\in S^2$; $Q\in R^2$. NP–çyzygy Q çenli dowam edýäris. $P\rightarrow Q$ geçýär, ýagny $\{S^2\backslash N\}$ köplügiň ähli elementleri üçin stereografiki $\varphi_0: S^2\rightarrow R^2$ şekillendirmäni alýarys. N nokat tükeniksiz daşlaşan nokada geçýär diýen şerti goýýarys.. φ_0 – şekillendirmäni analitik görnüşde ýazmak üçin sferada we tekizlikde koordinatalary girizýäris. R^3 – de (r,θ,φ) koordinatalary alýarys. Onda bu koordinatalar sferada we tekizlikde indusirlenen koordinatalary kesgitleýär: $S^2(\theta,\varphi)$; $R^2(r,\varphi)$ polýar koordinatalar. Bu ýerden görnüşi ýaly φ_0 şekillendirme φ koordinatany üýtgetmeýär. Onda φ_0 şekillendirmäni tapmak üçin r ululygy θ burçuň üsti bilen aňlatmaly. Onuň üçin S^2 sferanyň N,Q,P nokatlardan geçýän tekiz kesigine seredeliň(15-nji çyzgy).



15-nji çyzgy

15-nji çyzgydan $\angle ONT = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ we ΔONQ – göni burçly üçburçluk.

$$r = OQ = Rtg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = Rctg\frac{\theta}{2}$$

Şeýlelikde üýtgeýänleri çalşyrmagyň formulalary

$$\varphi = \varphi; \quad r = Rctg\frac{\theta}{2}.$$

Üýtgeýänleri çalşyrmaklygyň Ýakobi matrisasy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{R}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} \end{pmatrix},$$

ýakobiany $I = -\dfrac{R}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$ bolar.

Sferanyň N nokatdan başga nokatlarynyň ählisinde regulýar orun çalşyrmak ýerine ýetýär.

Şeýlelikde , S^2 –sferada ýewklid tekizlikleriň polýar koordinatalaryna meňzeşlikde, koordinatalaryny alyp bolýar. Onda bu koordinatalarda S^2 sferanyň Riman metrikasynyň ahyrky görnüşi nähili bolar? – diýen sorag ýüze çykar we ol sorag aşakdaky ýaly çözüler: $dl^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$

Riman metrikasy üçin $r = Rctg\dfrac{\theta}{2}\cdot$ deňlikden

$dr = -\dfrac{R}{2\sin^2\theta/2}d\theta$ differensialy hasaplap,

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{R^2}{R^2 + r^2}; \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{r^2}{R^2 + r^2};$$

aňlatmalary we

$$\sin\theta = \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

formulany göz öňünde tutup, sferada Riman metrikasyny

$$dl^2 = \frac{4R^4}{\left(R^2 + r^2\right)^2}\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right)$$

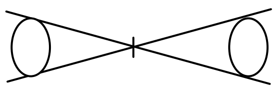
görnüşde alarys. Metrikanyň sferadaky bu görňüşi egriçyzykly polýar koordinatalarda alnan tekizlikdäki ýewklid metrikasyndan köpeldiji boýunça tapawutlanýar. Bu metrika **konform metrika** diýilýär.

§10. Psewdosfera we Lobaçewskiý geometriýasy

R_S^n psewdoýewklid giňişligine seredeliň. R^n ýewklid giňişliginde S^{n-1} sfera (gipersfera) koordinatalar başlangyjyndan ρ uzaklykda ýatan nokatlaryň köplügi hökmünde seredip bolar. R_S^n giňişlikde hem koordinatalar başlangyjyndan ρ uzaklykda ýatan nokatlaryň köplügine seredeliň. Bu ýerde ρ – hakyky, nol, hyýaly bahalary alýar. Bu nokatlaryň köplügine S_S^{n-1}; $S_0^{n-1} = S^{n-1}$ psewdosfera diýilýär. . Nol radiusly psewdosfera ikinji tertipli

$$-\sum_{i=1}^{S}\left(x^i\right)^2 + \sum_{j=S+1}^{n}\left(x^j\right)^2 = 0$$

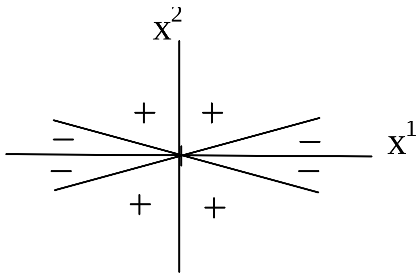
deňleme bilen berler. Bu ýerde $x^1, x^2, ..., x^n \in R^n$ dekart koordinatalary. Bu nol ýa-da izatrop konus bilen gabat geler.



16-njy çyzgy

1. Goý n=2; s=1. $x^1, x^2 \in R^2$ bolsunlar. Onda $(\xi,\xi) < 0$ bolanda $|x^2|<|x^1|$, $(\xi,\xi) > 0$ bolanda $|x^2|>|x^1|$, sebäbi

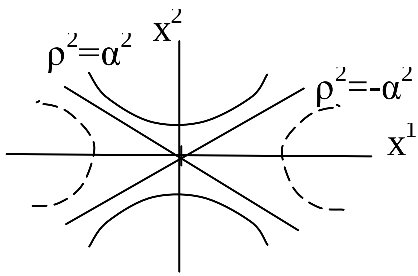
$$-x^{1^2}+x^{2^2}=0; \quad x^{2^2}=x^{1^2}; \quad x^2=\pm x^1$$



17-nji çyzgy

2. Hakyky radiusly psewdosfera bu giperboladyr.

$$-x^{1^2}+x^{2^2}=\alpha^2; \quad -x^{1^2}+x^{2^2}=-\alpha^2;$$



18-nji çyzgy

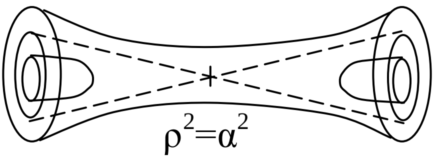
3. R_1^3 giňişlikde nol, hakyky, hyýaly radiusly psewdosferalara seredýäris.

$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=0$$

$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=\alpha^2$$

$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=-\alpha^2$$

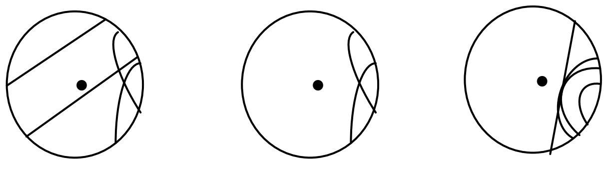
(Ox okly iki we bir gowakly giperboloidler).



19-njy çyzgy

R_1^3 giňişlikde hyýaly radiusly psewdosfera üçin alnan geometriýä R^2 – tekizlikdäki α radiusly tegelekdäki geometriýa bilen gabat gelýär. Bu ýagdaýda “nokatlar” hökmünde – çäkde ýerleşmeýän tegelegiň nokatlary; “gönüler” hökmünde – tegelegiň çägini göni burç boýunça kesýän töweregiň dugalaryny alsaň, onda **Lobaçewskiý geometriýasy** düşünjesine gelinýär.

Bu aýdylanlary aşakdaky çyzgylarda göz öňüne getirip bolar:



20-nji çyzgy

Lobaçewskiý geometriýasynyň ýewklid giňişligindäki α radiusly tegelekdäki modeline Puankare modeli diýilýär. Bu modelde ýewklid geometriýasynyň V postulatyndan başga ähli aksiomalary ýerine ýetýärler.

§11.Tekiz egriniň aýratyn nokatlary. Galtaşyjy töwerek. Orama

Göniburçly koordinatlar ulgamynda $F(x,y)=0$ deňleme bilen berlen γ tekiz egrä seredeliň. Goý γ egriniň islendik nokadynyň käbir etrabynda $F(x,y)$ funksiýa ähli argumentleri boýunça üznüksiz birinji tertipli önümlere eýe bolsun.

1-nji kesgitleme:

γ **egriniň** $F(x,y)$ **funksiýanyň ähli birinji tertipli hususy önümlerini nola öwürýän nokatlaryna onuň aýratyn nokatlary diýilýär.** γ **egriniň beýleki nokatlary adaty nokatlardyr**

Diýmek, egriniň aýratyn nokatlaryny

$$\left\{ M \in \gamma : \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \right\}$$

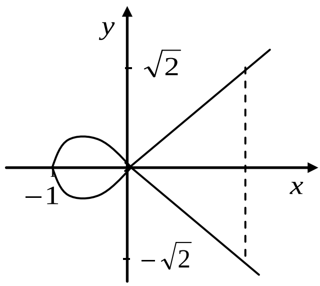
köplük görnüşinde alyp bolar.

Aýratyn nokatlaryň etrabynda $F(x,y)=0$ deňleme üçin anyk däl funksiýanyň barlygy hakyndaky teoremany ulanyp bolmaýar, beýle diýildigi bu deňleme oňa girýän üýtgeýänleriň hiç birine görä-de bir bahaly çözülmeýär ýa-da aýratyn nokadyň etrabynda koordinata oklarynyň hiç birine-de birbahaly şekillendirilmeýär.

1-nji mysal. x^2-y^2+x^3=0 egriniň aýratyn nokatlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Egriniň grafigini guralyň we üýtgeýänlere görä hususy önümleri kesgitläliň:

$$\begin{cases} \partial F/\partial x=2x+3x^2; \\ \partial F/\partial y=-2y; \end{cases}$$



21 – nji çyzgy

Bu önümler diňe (0;0) we (-2/3;0) nokatlarda nola deňdirler, ýone diňe (0;0) nokat egrä degişli we aýratyn nokatdyr. Grafikden görnüşi ýaly (0;0) nokat hiç bir koordinata okuna proýektirlenip bilinmez.

Goý indi, γ egri parametrik görnüşde

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

deňlemeler ulgamy bilen berlen bolsun we φ, ψ funksiýalar $t=t_0$ nokatda üznüksiz önümlere eýe bolsunlar. Bu ýagdaýda t_0 nokatda

$$\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)\neq 0$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $M_0(x_0,y_0)$ nokat egriniň adaty nokady bolar. Eger-de

$$\varphi'^2(t_0)+\psi'^2(t_0)=0$$

bolsa, onda $M_0(x_0,y_0)$ aýratyn nokatdyr.

Eger-de γ_1,γ_2 egriler kesişme M_0 nokadynda galtaşýanlara eýe bolsalar we ol galtaşýanlar gabat gelseler, onda γ_1 we γ_2 egrilere M_0 nokatda **galtaşýan egriler** diýilýär.

γ_1 we γ_2 egrileriň galtaşma şertlerine seredeliň.

Goý γ_1 egri (1)ulgamyň, γ_2 egri bolsa

$$F(x,y)=0 \qquad (2)$$

deňlemäniň kömegi bilen berlen bolsun. $M_0(x_0,y_0)$ nokat bu egrileriň umumy nokady bolsun($x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ we $F(x_0,y_0)=0$).

Goý, M_0 nokat γ_1 we γ_2 egrileriň adaty nokady we olar bu nokatda galtaşýan bolsunlar. Onda bu egriler M_0 nokadyň etrabynda differensirlenýän funksiýalaryň grafiklerini kesgitlärler. Goý (1) ulgamdan kesgitlenen $y=f_1(x)$ funksiýa γ_1 egriniň, (2) deňlemeden kesgitlenen $y=f_2(x)$ funksiýa γ_2 egriniň grafiklerini kesgitleýän funksiýalar bolsunlar. Funksiýalar M_0 nokatda şert boýunça galtaşýarlar, onda olaryň burç koeffisiýentleri özara deňdirler:

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0).$$

Bu ýerden parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň we anyk däl funksiýalaryň önümlerini kesgitlemeklige görä alarys:

$$\psi'(t_0)/\varphi'(t_0) = -F'_x(M_0)/F'_y(M_0)$$

$$\psi'(t_0)F'_y(M_0) + \varphi'(t_0)\,F'_x(M_0)=0 \qquad (3)$$

(3) formula deňlemeleri (1) we (2) bilen berlen γ_1 we γ_2 egrileriň M_0 nokatda galtaşma şertini kesgitleýär. Bu şerti başgaça

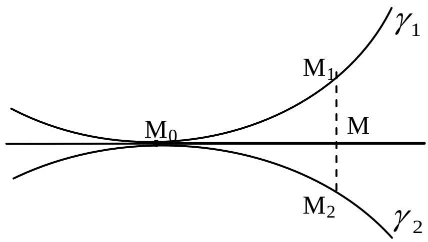
$$F_x'\cdot dx/dt + F_y'\cdot dy/dt = 0 \qquad (4)$$

görnüşde alyp bolar.

Bellik: Eger-de M_0 nokat γ_1, γ_2 egrileriň iň bolmanda biriniň aýratyn nokady bolsa hem (4) formulanyň manysy bardyr.

Indi **galtaşyjy töwerek** düşünjesine seredeliň.

Goý γ_1, γ_2 egriler M_0 nokatda galtaşýan bolsunlar. Galtaşýandan käbir M nokady alalyň we ondan perpendikulýar galdyralyň. Ol perpendikulýar γ_1 egrini M_1 nokatda, γ_2 egrini M_2 nokatda keser. Eger-de M nokat M_0 nokada has ýakyn bolsa, onda bu perpendikulýar egrileri diňe bir nokatda keser.



22-nji çyzgy

2-nji kesgitleme. Eger-de

$$\lim_{M \to M_0} \frac{|M_1M_2|}{|MM_0|^{n+1}} \qquad (5)$$

predeliň noldan tapawutly bahasy bar bolsa, onda γ_1 we γ_2 egriler M_0 nokatda n – tertipli galtaşma eýe diýilýär. Eger-de bu predel nol bahany alsa, onda egriler tükeniksiz tertipli galtaşma eýe diýilýär.

Goý γ_1, γ_2 egriler grafikleri $f_1(x)$, $f_2(x)$ bolan funksiýalar bilen berilsin we ol egriler adaty $M_0(x_0,y_0)$ nokatda galtaşýan bolsunlar. Eger-de Δx x_0 nokada berlen artdyrma bolsa $(x=x_0+\Delta x)$, onda γ_1, γ_2 egrileriň $\boldsymbol{n}$ – tertipli galtaşma şertini

$$\lim_{M\to M_0}\frac{|f_1(x_0+\Delta x)-f_2(x_0+\Delta x)|}{|\Delta x|^{n+1}}=$$
$$=\lim_{M\to M_0}\frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{|x-x_0|^{n+1}}$$

predeliň üsti bilen alyp hem bolar.

Bellik. Eger-de $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiýalar x_0 nokadyň käbir etrabynda (***n+1***) gezek differensirlenýän, şunlukda (***n+1***) tertipli önüm x_0 nokatda üznüksiz bolsa we

$$f_1^k(x_0)=f_2^k(x_0), k=1,2,...,n$$
$$f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_1^{(n+1)}(x_0)$$

ýerine ýetse, onda (5) şert bu egrileriň ***n*** – tertipli galtaşmasyny kesgitleýär.

Goý, γ egri $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bolsun we M_0 bu egriniň käbir nokady bolsun. M_0 nokatdan geçýän töwerek bilen γ egriniň galtaşmasyna seredeliň (beýle töwerekleriň sany tükeniksizdir).

3-nji kesgitleme:γ egri bilen tertibi 2-den kiçi bolmadyk galtaşma emele getirýän töwerege γ egriniň M_0 nokatdaky galtaşyjy töweregi diýilýär.

γ egriniň M_0 nokatda galtaşyjy töwerege eýe bolmagynyň şertini aşakdaky teorema berýär.

Teorema: Goý, γ egri *y=f(x)* funksiýanyň grafigi bolsun. Eger *f(x)* funksiýa x_0 nokatda nola deň bolmadyk ikinji tertipli

önüme we üznüksiz üçünji tertipli önüme eýe bolsa, onda γ egri üçin $M_0(x_0;y_0)$ nokatda galtaşyjy töwerek bardyr.

Subudy: Galtaşyjy töweregiň deňlemesini

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$$

(a, b, ρ – kesgitlenmäge degişli hemişelikler) görnüşde gözläliň. Bu deňlemäni $y_0=f(x_0)$, $y'_0=f'(x_0)$, $y_0''=f''(x_0)$ deňlikleri hasaba alyp, iki gezek differensirläp a,b,ρ üýtgeýänlere görä ulgam alarys:

$$\begin{cases} (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=\rho^2 \\ (x_0-a)+(y_0-b)\cdot y_0'=0 \\ 1+(y_0')^2+(y_0-b)\cdot y_0''=0 \end{cases}$$

$y_0''=f''(x_0)\neq 0$ şertde bu ulgam ýeke-täk çözüwe eýedir:

$$\begin{cases} a=x_0-[(1+y_0'^2)y_0']/y_0'' \\ b=y_0+(1+y_0'^2)/y_0'' \\ \rho=(1+y_0'^2)^{3/2}/|y_0''| \end{cases}$$

bu bolsa gözlenýän töweregiňbarlygygny subut edýär.

Tekiz egriler maşgalasynyň oramasy hakynda durup geçeliň. Üç argumentli $F(x,y,c)$ funksiýa seredeliň. C parametriň her bir bahasy üçin

$$F(x,y,c)=0 \qquad (6)$$

deňlemäniň kömegi bilen **egriler maşgalasy** kesgitlenýär, ýagny egrileriň bir parametrli maşgalasy kesgitlenýär. Mysal üçin $y=(x-c)^2$ görnüşli funksiýa Ox oky boýunça süýşýän parabolalaryň maşgalasyny kesgitleýär.

Goý, $F(x,y,c)$ funksiýa özüniň berlen ýaýlasynda ähli argumentler boýunça differensirlenýän bolsun.

4-nji kesgitleme: Eger-de $M(x,y)$ nokadyň koordinatalary

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F_C(x,y,C)=0 \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

ulgamy kanagatlandyrýan bolsa, onda ol nokada C parametre görä alynýan egriler maşgalasynyň häsiýetlendiriji nokady diýilýär.

5-nji kesgitleme: Eger-de käbir egri özüniň her bir nokadynda egriler maşgalasynyň diňe bir egrisine, dürli nokatlarynda dürli egrilerine galtaşýan bolsa, onda ol egrä bir parametrli egriler maşgalasynyň oramasy diýilýär.

Görnüşi ýaly orama maşgalanyň egrilerine diňe häsiýetlendiriji nokatlarda galtaşýar. Şonuň üçin hem oramany häsiýetlendiriji nokatlaryň geometrik orny hökmünde alyp bolar. Şeýlelikde oramanyň deňlemesi hökmünde (7) ulgamdan ***C*** parametri gysgaldyp alynýan deňlemäni alyp bolar.

2-nji mysal. Käbir göni çyzyk tekizligiň birinji çäryeginde süýşip şol bir S hemişelik meýdanly üçburçlugy emele getirýär. Bu gönileriň ýerleşişleriniň dürli ýagdaýlarynda ýüze çykýan göni çyzyklar maşgalasynyň oramasyny tapmaly.

Çözülişi: Göni çyzygyň birinji çäryekde süýşip üçburçluk emele getirmegi üçin onuň koordinata oklaryny kesmegi zerurdyr, diýmek, göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesini, ähli ýagdaý üçin bolsa bu deňlemeleriň maşgalasyny

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ deňleme bilen kesgitläris. Göniburçly üçburçlugyň meýdanynyň fomulasyndan $b=\frac{2S}{a}$ parametri kesgitläp berlen deňlemede ornuna goýsak birparametrli deňlemeleriň

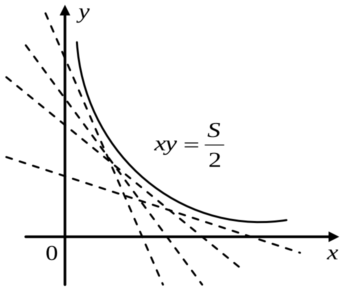
$$f(x,y,a)=\frac{x}{a}+\frac{ay}{2S}-1=0 \qquad (*)$$

maşgalasyny alarys we onuň üçin oramany taparys. Differensirlemeden soňra

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{2S}=0$$

deňlemä geleris we ondan $a=\sqrt{\frac{2xS}{y}}$ taparys.

a parametriň bahasyny **(*)** deňlemede ornuna goýup, egriler maşgalasynyň oramasyny $xy = \frac{S}{2}$ görnüşde alarys(23-nji çyzgy).



23-nji çyzgy

3-nji mysal. Dekart koordinatalarda $x^3 + y^3 = 3axy$, parametriki görnüşde $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ deňlemeler bilen berlen Dekart listiň aýratyn nokatlaryny, galtaşýanlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Dekart listiň dekart koordinatalardaky $x^3 + y^3 = 3axy$ deňlemesinden alarys:

$$F(x, y, a) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Onda

$$\begin{cases} F_x(x,y,a) = 3x^2 - 3ay = 0 \\ F_y(x,y,a) = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

Bu deňlemeleriň birinjisini x-a, ikinjisini y-e köpeldip biri-birinden aýyrsak, onda

$$3x^3 - 3y^3 = 0 \quad \text{ýada}$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemeden $x = y$ ýada $x = \dfrac{-y(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$ çözüwlere geleris. Şeýle hem $x + y + a = 0$- asimptotanyň deňlemesini tapýarys. Aýratyn nokat $O(0,0)$ bolar. Bu nokat üçin

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 6x\Big|_{x=o} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 6y\Big|_{y=o} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{y=0,x=0} = -3a\Big|_{(0,0)} = -3a$$

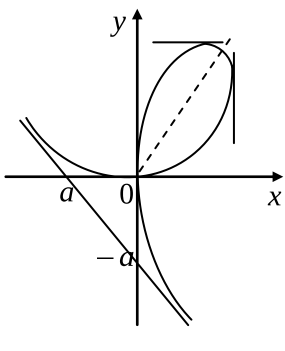
we $H=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)=9a^2>0.$

Diýmek, aýratyn $O(0,0)$ nokat öz-özüni kesýän uzel nokadydyr.

Galtaşýanyň

$$Y-y_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Big|_{(0,0)}(X-x_0)$$

deňlemesinde degişli ornuna goýmalardan soňra $y=-\frac{0}{0}x$ ýaly kesgitsizlige geleris. Galtaşýanlar *x=0, y=0* koordinata oklary bolar(24-nji çyzgy).



24-nji çyzgy

§12. Ugradyjy üçgranlyk

Goý, bize käbir üznüksiz **v**(t) $(a \le t \le b)$ wektor funksiýa berlen bolsun. Onuň godografyny gurup käbir γ egrini alarys. Goý, γ egri parametrlenen bolsun,

$$\boldsymbol{v}(\mathrm{t}) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}. \qquad a \le t \le b$$

Belli bolşy ýaly γ egriniň $[t_0, t]$ aralyk üçin dugasynyň uzynlygyny

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |v'(t)| dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

görnüşde kesgitleýäris. Formuladan görnüşi ýaly $l=l(t)$ birbahaly üznüksiz funksiýa; soňky deňligi t görä çözüp $t=t(l)$ alyp bolýar. Bu ýagdaýda **v**(t)=**v**(t(l))=**v**(l)=**v** tebigy parametrlemä gelýäris.

Indi **v**=**v**(l) deňleme bilen berlen egrä seredeliň. Onuň her bir nokadynda (l – üçin) tizlik **t**=**v'**(l) wektory kesgitläris. Bu **t** wektor bu egrä geçirilen galtaşýanyň ugruny görkezer.

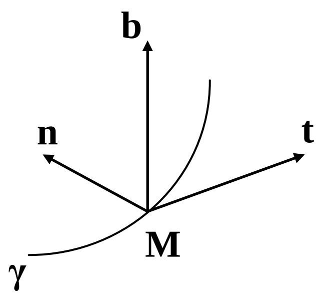
Belli bolşy ýaly, hemişelik uzynlykly wektoryň önümi onuň özüne ortogonaldyr:

$$|v(t)|^2 = \rho^2 \qquad 2(v(t), v'(t)) = 0$$

Onda **t'**=***v***''(l) we **t=*v*'**(l) wektorlar özara ortogonal bolarlar. Şeýlelik bilen **t'** wektoryň ugruna

$$\mathbf{n}=\boldsymbol{v}''(l)/|\boldsymbol{v}''(\boldsymbol{l})|$$

birlik wektory kesgitläris. Bu **t, n** üçin $\bar{n} \perp \bar{t}$. Onda **b**=[**t, n**] wektor köpeltmek hasylyň kömegi bilen üç sany **t, n, b** özara perpendikulýar birlik wektorlaryň üçlügini alarys. Bu üçlük her bir nokat üçin kesgitlener, ol üçlüge **esasy reper** ýa-da **esasy üçgranlyk (ugradyjy üçgranlyk)** diýilýär(25-nji çyzgy)**.**



25-nji çyzgy

Bu üçlügiň depesiniň egri boýunça hereketiniň kömegi bilen egrini doly häsiýetlendirip bolýar.

b=[t, n], t=[n, b], n=[b, t].

Bu kesgitlenen birlik wektorlara **t** – galtaşýanyň, **b** – binormalyň, **n** – normalyň birlik wektorlary diýilýär. Bu wektorlaryň kömegi bilen ***v*(*l*)** egriniň her bir nokady üçin koordinatalar ulgamyny kesgitleýäris. Onda bu ulgamyň koordinata oklary: Galtaşýan, baş normal we binormal (**t, n, b** - boýunça) wektorlaryň ugry boýunça ýatarlar. Koordinata tekizlikleri (esasy üçgranlygyň granlary) bolsa aşakdaky ýaly kesgitlenýärler:

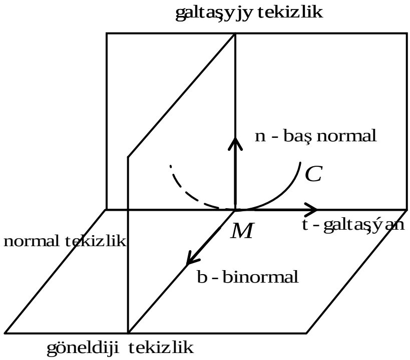
1) M nokatdan geçýän we **t** wektora perpendikulýar bolan (ýagny **n** we **b** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige **normal** tekizlik;

2) M nokatdan geçýän we **n** wektora perpendikulýar bolan (ýagny **t** we **b** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige **göneldiji** tekizlik;

3) M nokatdan geçýän we **b** wektora perpendikulýar bolan (ýagny **n** we **t** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige **galtaşyjy** tekizlik diýilýär.

Şeýlelikde, (**t, n, b**) – ugradyjy koordinatalar ulgamy girizilenden soňra koordinata oklarynyň we tekizlikleriň deňlemelerini kesgitlemek zerurdyr.

Mesele: $v=v(l)$ **deňleme bilen berlen egri üçin M nokatda galtaşýanyň, baş normalyň, binormalyň deňlemelerini hem-de normal, göneldiji, galtaşyjy tekizlikleriň deňlemelerini düzmeli(26-njy çyzgy).**



26-njy çyzgy

Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, $\boldsymbol{v_0}$ – radius wektorly nokatdan geçýän we käbir ***a*** wektoryň ugryna alnan göni çyzygyň wektor deňlemesi

$$\frac{\bar{\rho}-\bar{\upsilon}_0}{\bar{a}}=\lambda, \qquad (-\infty<\lambda<\infty)$$

ýa-da

$$\bar{\rho}=\bar{\upsilon}_0+\bar{a}\lambda$$

ýaly bolar. Şeýlede $\boldsymbol{v}_0$ – radius wektorly nokatdan geçýän we käbir ***a*** wektora perpendikulýar bolan tekizligiň wektor deňlemesi

$$(\bar{\rho}-\bar{\upsilon}_0,\bar{a})=0$$

görnüşde berilýär. Bu formulalary ulansak $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{l})$ wektor funksiýaly γ egri üçin galtaşýanyň

$$\bar{\rho} = \bar{\upsilon}_0 + \bar{\upsilon}_0{}'\lambda$$

baş normalyň

$$\bar{\rho} = \bar{\upsilon}_0 + \bar{\upsilon}_0{}''\lambda$$

binormalyň

$$\bar{\rho} = \bar{\upsilon}_0 + [\bar{\upsilon}_0{}'\bar{\upsilon}_0{}'']\lambda$$

deňlemelerini, şeýlede

normal tekizligiň

$$\left(\bar{\rho} - \bar{\upsilon}_0, \bar{\upsilon}_0{}'\right) = 0$$

göneldiji tekizligiň

$$\left(\bar{\rho} - \bar{\upsilon}_0, \bar{\upsilon}_0{}''\right) = 0$$

galtaşyjy tekizligiň

$$\left(\bar{\rho} - \bar{\upsilon}_0, [\bar{\upsilon}_0{}', \bar{\upsilon}_0{}'']\right) = 0$$

deňlemelerini alarys.

Emma hasaplamalarda köp ýagdaýda egri ***v***=***v***(t) görnüşde berilýär. Şonuň üçin hem bu deňlemeleri ***t*** parametre görä almak zerurlygy ýüze çykýar.

Goý, bize giňişlik egrisi ***v***=***v***(t)=*x(t)**i**=y(t)**j***+*z(t)**k*** wektor funksiýanyň kömegi bilen berlen bolsun we ***v'***(t)≠0, $(x'^2(t)+ y'^2(t)+ z'^2(t)\neq 0)$ bolsun, ýagny egrä adaty nokatlarda seredýäris. ***v***=***v***(t) bilen kesgitlenen γ egriniň *M* nokadynda galtaşýanyň ugry ***v'***(t) wektoryň ugry bilen gabat gelýär. Şonuň üçin hem *M* nokatda galtaşýanyň deňlemesini alarys:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

X, Y, Z - egriniň gözlenýän nokatlary, $\mathbf{v}'(t)=\{x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\}$. Giňişlik egrisine geçirilen **normal** diýlip, onuň galtaşýan geçirilen M nokadynda galdyrylan perpendikulýara aýdylýar. Onda analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, normal tekizligiň deňlemesini

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0$$

görnüşde alarys.

Bu meseläniň üstler üçin çözlüşine seredýäris.

Goý, käbir üst $F(x, y, z)=0$ deňleme bilen berilsin. Onuň käbir $M(x(t),\ y(t),\ z(t))$ nokadynda oňa geçirilen galtaşyjy tekizligiň we normalyň deňlemeleriniň alnyşyna seredeliň. M nokat F üstde ýatýar. Şonuň üçin

$$F(M)=F(x(t),\ y(t),\ z(t))=0.$$

Bu deňlemeden önüm alalyň:

$$F_x'x'(t)+F_y'y'(t)+F_z'z'(t)=0 \Rightarrow$$

$$(\nabla F, \bar{\upsilon}'(t))=0 \begin{cases} F_x' \neq 0 \\ F_y' \neq 0 \\ F_z' \neq 0 \end{cases}$$

$\nabla F = \{F_x, F_y, F_z\}$ - gradiýent , ∇ - nable belgisi. Hemme galtaşýanlar bir galtaşyjy tekizlikde ýatýarlar. Şeýlelikde galtaşýanyň

$$\frac{X-x(t)}{F_x}=\frac{Y-y(t)}{F_y}=\frac{Z-z(t)}{F_z},$$

normal tekizligiň

$$F_x(X-x(t))+F_y(Y-y(t))+F_z(Z-z(t))=0$$

deňlemeleri alyndy.

Bellik: $\boldsymbol{v}'(t) \neq 0$

Galtaşýanyň we normal tekizlikleriň deňlemesini aldyk. Indi galtaşyjy tekizligiň deňlemesini düzeliň.

Bu tekizlik $\boldsymbol{v}'$ we $\boldsymbol{v}''$ wektorlaryň üstünde ýatýar. Şonuň üçin olaryň wektor köpeltmek hasylyny tapýarys.

$$[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = (y'z''-y''z')i +$$

$$+(z'x''-x'z'')j+(x'y''-y'x'')k$$

we

$$[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''] \neq 0$$

Bu wektor galtaşyjy tekizlige perpendikulýar, şonuň üçin hem ol normal wektor bolup biler. Şeýlelik bilen, egriniň M(x, y, z) nokadyndan geçýän we bu wektora perpendikulýar bolan galtaşyjy tekizligiň deňlemesi:

$$(X-x(t))(y'z''-y''z')+(Y-y(t))(z'x''-x'z'')+$$
$$+(Z-z(t))(x'y''-y'x'')=0$$

Galtaşyjy tekizligiň wektor deňlemesi:

$$(\overline{\rho}-\overline{\upsilon}_0,[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''])=0$$

Bu ýerde **ρ** –galtaşyjy tekizligiň radius wektory, X,Y,Z – gözlenýän koordinatalar. Bu deňlemäni kesgitleýjiniň kömegi bilen aşakdaky ýaly ýazmak hem bolar:

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Şeýlede, galtaşyjy tekizligiň wektor deňlemesini

$$(\bar{\rho} - \bar{\upsilon}_0, \bar{\upsilon}_0', \bar{\upsilon}_0'') = 0$$

görnüşde hem alyp bolar.

Binormal galtaşyjy tekizlige perpendikulýar, onda [***v*´, *v*´´**] wektor hem oňa perpendikulýar bolar. Şonuň üçin ilki bilen binormalyň deňlemesini düzeliň. Ol M(x,y,z) nokatdan geçýär we [***v*´, *v*´´**] wektor bilen özara paralleldir. Onda binormalyň deňlemesi

$$\frac{X-x(t)}{y'z''-z'y''} = \frac{Y-y(t)}{-x'z''+z'y''} = \frac{Z-z(t)}{-y'x''+x'y''}$$

bolar.

Indi, baş normalyň deňlemesini düzeliň. Onuň üçin oňa perpendikulýar bolan ***v*´** we [***v*´,*v*´´**] wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapalyň. Bu wektor baş normala parellel bolar. Ony ikigat wektor köpeltmek hasyly görnüşde alarys:

$$\left[\overline{\upsilon}',\left[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right]\right]=\overline{\upsilon}'\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right)-\overline{\upsilon}''\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'\right)=$$

$$=K\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\left[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right]=ai+bj+ck$$

$$\begin{cases} a=x'\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right)-x''\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'\right) \\ b=y'\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right)-y''\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'\right) \\ c=z'\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''\right)-z''\left(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'\right) \end{cases}$$

Bu belgilemelerden soňra baş normalyň deňlemesi

$$\frac{X-x(t)}{a}=\frac{Y-y(t)}{b}=\frac{Z-z(t)}{c},$$

göneldiji tekizligiň deňlemesi bolsa

$$a\left(X-x(t)\right)+b\left(Y-y(t)\right)+c\left(Z-z(t)\right)=0$$

görnüşde bolarlar.

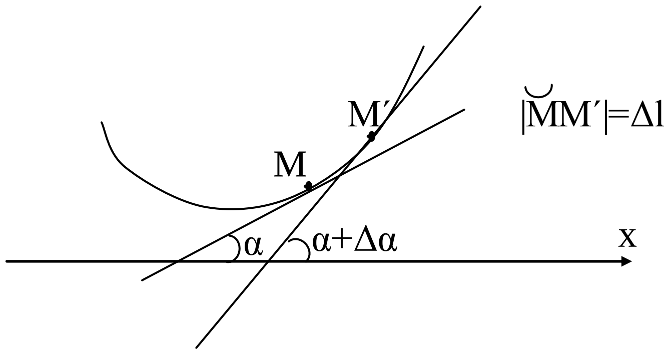
Şeýlelikde, seredilýän mesele doly çözüldi, ýagny islendik berlen egriniň ädaty nokadynda oňa geçirilen galtaşýanyň, baş normalyň, binormalyň we galtaşyjy, göneldiji, normal tekizlikleriň deňlemeleri egriniň dürli parametrlenmeleri üçin alyndy.

§13. Egrilik we towlulyk. Frene formulalary

Ugradyjy üçgranlyk düşünjesi, ýagny galtaşýan, başnormal, binormal we galtaşyjy, göneldiji, normal tekizlikler öwrenilenden we **t,n,b** wektorlaryň özara ýerleşişleri alnandan soňra olaryň özgertmelerini öwrenmek zerurlygy ýüze çykýar. Ýagny, tekiz egriler öwrenilende olaryň her bir nokady üçin **t** we **n** wektorlary gurýarys. Şol wektorlaryň ugruna göni çyzyklary alsak, onda şol göni çyzyklar seredilýän nokatda koordinatalar ulgamyny çalşyryp biler. Başgaça aýdylanda, **t** we **n** wektorlaryň kömegi bilen täze koordinatalar ulgamy girizilýär. Egri boýunça hereket edilende, ýagny bir nokatdan beýleki nokada geçilende koordinatalar ulgamy özgerer. Şol özgerme **t** we **n** wektorlaryň kömegi bilen alnar. Şeýlelikde **t** we **n** wektorlar bilen olaryň önümleriniň arasyndaky baglanşygy görkezýän formulalary tapmak zerurlygy ýüze çykýar. Ol formulalar fransuz matematigi Žan Frene (1801-1880 ý) tarapyndan açylypdyr.

Ilki bilen tekiz egriniň egriligi hakynda durup geçeliň.

Goý, bu egriniň ähli nokatlarynda oňa galtaşýanlar geçirilýän bolsun(27-nji çyzgy)



27-nji çyzgy

Çyzgydan görnüşi ýaly seredilýän egriniň egriligi galtaşyanlaryň emele getirýän burçlaryna we duganyň örän kiçi özgertmesine bagly bolýar. Şonuň üçin hem $\Delta\alpha/\Delta l$ ululygy seredilýän duganyň orta k_0 egriligi hökmünde alyp bolar.

1-nji kesgitleme: Eger-de $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|$ **predeliň tükenikli bahasy bar bolsa,**

onda ol predele egriniň egriligi diýilýär we

$$\lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right| = k.$$

Şeýlelikde, egriniň egriliginiň geometrik manysy egriniň nokatlarynda geçirilýän galtaşýanlaryň *ox* oky bilen emele getirýän burçlarynyň özgertmesini kesgitleýär.

$t = \bar{t}$ we $n = \bar{n}$ wektorlaryň özgertmesine seredeliň. Goý, egri özüniň $v = v(l) = \overline{\vartheta}(l)$ natural deňlemesi bilen berlen bolsun. l_0 nokatda $\overline{OM} = v_0 = \overline{\vartheta}_0$ radius wektorlar kesgitlenen bolsun. $M \in \gamma$, M nokatda galtaşýany girizeliň, onda oňa perpendikulýar edip normaly hem geçireris. Belli bolşy ýaly $\bar{t} = \overline{\vartheta}'(l)$, birlik wektor, şeýle hem hemişelik wektoryň onuň önüminiň özüne ortogonaldygyny peýdalansak, $\bar{t}'$ wektoryň $\bar{n}$ wektoryň ugry boýunça ýatjakdygyna göz ýetireris, ýagny

$$\bar{t}' = k\bar{n} \qquad \text{(I)}$$

$\bar{n}$ wektoryň özgertmesine seredeliň, bu wektor hem hemişelik, şonuň üçin-de

$\bar{n}' \perp \bar{n}$. Şeýlede $\bar{t} \perp \bar{n}$, onda $\bar{n}'$ wektor $\bar{t}$ wektora kolleniardyr. Olar biri-birinden käbir α san boýunça tapawutlanýarlar, ýagny $\bar{n}' = \alpha \cdot \bar{t}$.

(I) formulany ulanyp we $(\bar{t}, \bar{n}) = 0$ deňligi diferensirläp α koeffisiýenti kesgitleýäris.

$$(\bar{t}', \bar{n}) + (\bar{t}, \bar{n}') = (k\bar{n}, \bar{n}) + (\bar{t}, \alpha\bar{t}) = k + \alpha = 0,$$

$$-k = \alpha, \quad \text{onda}$$

$$\bar{n}' = -kt \qquad (II)$$

(I) we (II) formulalara tekiz egri üçin **Frene formulalary** diýilýär.

Bu deňlikleriň iki bölegini-de dl köpeldip we özgertmeleri geçirip tekiz egri üçin differensiallardaky Frene formulalaryny alarys:

$$\begin{cases} \bar{t}' dl = k\bar{n}dl \\ \bar{n}' dl = -k\bar{t}dl \end{cases} \quad \text{ýada} \quad \begin{cases} d\bar{t} = k\bar{n}dl \\ d\bar{n} = -k\bar{t}dl \end{cases}$$

Teorema: Tekiz egriniň göni çyzyk bolmagy üçin onuň ähli nokatlarynda bu egriniň egriliginiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy: Zerurlyk. Goý, berlen egri göni bolsun, onda bu çyzygyň ähli hokatlarynda galtaşýan, $\overline{t}$ wektoryň kesgitlenişine görä, hemişelik wektor bolar, ýagny $\overline{t} = c$ ululyk constant. Onda egriniň egriligi $k = \left|\overline{t}'\right| = 0$.

Ýeterlik. Goý berlen tekiz egriniň egriligi *k=0* bolsun. Onda

$$\left|t'\right| = 0, \ t' = 0$$

Bu ýerden $\overline{t}$ galtaşýan wektoryň hemişelikdigini göreris, onda $\overline{t}$ wektor üçin alarys:

$$\overline{t} = \overline{\vartheta}'(l) = \frac{d\vartheta}{dl}, \quad d\vartheta = \overline{t}dl$$

bu deňligi $[l_0; l]$ aralykda integrirleýäris:

$$\overline{\vartheta}(l) - \overline{\vartheta}(l_0) = \overline{t}(l - l_0), \quad \overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}_0 + \overline{t} \cdot \Delta l$$

bu formula ***t*** wektor boýunça ugrykdyrylan $\overline{\vartheta}_0$ radius wektorly göni çyzygyň deňlemesidir. Teorema subut edildi.

Frene formulalarynyň giňişlik üçin alnyşyna seredeliň. Giňişlikde Frene formulalary $\bar{t},\bar{n},\bar{b}$ we $\bar{t}',\bar{b}',\bar{n}'$ wektorlaryň özara baglanyşygyny kesgitleýär hem-de giňişlikde egriniň **towlanmasyny** häsiýetlendirýär.

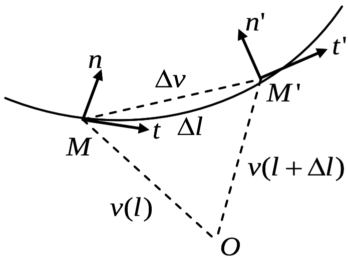
Giňişlik egrisi natural parametrlenen görnüşde

$$\overline{\vartheta}=\overline{\vartheta}(l)=x(l)i+y(l)j+z(l)k$$

ýaly berisin.

$\bar{t},\bar{n},\bar{b}$ wektorlaryň kesgitlemesine görä:

$$\bar{t}=\bar{t}(l),\ \bar{n}=\bar{n}(l),\ \bar{b}=\bar{b}(l)\ we$$
$$\bar{t}=\left[\bar{n},\bar{b}\right],\ \ \bar{n}=\left[\bar{b},\bar{t}\right],\ \ \bar{b}=\left[\bar{t},\bar{n}\right]$$



28-nji çyzgy

Tekiz egri üçin Frene formulasyny ulanýarys. $\bar{t} \perp \bar{n}$ we ol öz önümine ortogonaldyr $\bar{t} \perp \bar{t}'$; Şeýle-de $\bar{t}' = (\bar{t})' = \bar{\vartheta}''(l)$ bu wektor $\bar{n}$ wektoryň ugruna ýatar.

Şunlukda duganyň uzynlygynyň alnyşyna baglylykda $\bar{t}'$ wektor üýtgär, emma $\bar{t}$ wektor üýtgewsiz galar. Şunlukda egri $\bar{n}$ wektora görä gyşaryp $\bar{t}$ wektordan daşlaşýar, sebäbi $\bar{\vartheta}(l)$ wektoryň M nokatdaky dargamasynda (Teýlor hataryna) oňa täsir etjek doşulyjylar ikinji goşulyjydan başlap iki we ondan ýokary tertipli önümlerdir.

$$\bar{\vartheta}(\Delta l + l) - \bar{\vartheta}(l) = \bar{\vartheta}'(l)\Delta l + \frac{\bar{\vartheta}''(l)}{2!}\Delta l^2 + ... = \vec{M}\vec{M}'$$

Şeýlelikde, $\bar{t}'$ we $\bar{n}$ wektorlar kollinear bolarlar, ýagny olar biri-birinden käbir hemişelik bilen tapawutlanarlar:

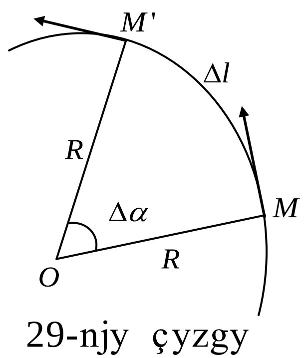
$$\bar{t}' = k\bar{n} \qquad \text{(I)}$$

<u>Bellik:</u> Giňişlik egrisi üçin hem egrilik

$$\lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta l} \right| = k = |\bar{t}'|$$

predel hökmünde alynýar.

Seredilýän egri üçin M we M' nokatlardan egrilik tegeligini geçirýäris.



29-njy çyzgy

M nokatdan bu tegeligiň merkezine çenli ululyk R bolsa, onda

$$\left|\overset{\cup}{MM'}\right| = \Delta l, \qquad \Delta l = R\Delta\alpha ,$$

bu ýerden

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \approx k \quad \text{ýa-da} \quad R = \frac{1}{k} - \text{egrilik radiusy}.$$

$\bar{b} = [\bar{t}, \bar{n}]$ wektoryň özgertmesine sredeliň.

$$\bar{b}' = \left[\bar{t}', \bar{n}\right] + \left[\bar{t}, \bar{n}'\right] = [k\bar{n}, \bar{n}] + \left[\bar{t}, \bar{n}'\right] = \left[\bar{t}, \bar{n}'\right]$$

sebäbi $[\bar{n}, \bar{n}] = 0$, bu ýerden iki sany $\bar{t}, \bar{n}'$ wektorlaryň $\bar{b}'$ wektora perpendikulýarly -- gyndan we $\bar{n}', \bar{n}$ wektorlaryň özara perpendikulýardyklaryndan $\bar{b}'$ wektoryň $\bar{n}$ wektoryň ugruna görä ýatjakdygyny göreris. Diýmek $\bar{b}'$ wektor $\bar{n}$ wektor bilen käbir hemişelik ululyk boýunça tapawutlanýar. Şol hemişelik ululygy χ (kappa) bilen belgileýärler we wektorlaryň arasyndaky baglanşygy

$$\bar{b}' = -\chi\bar{n} \qquad \text{(II)}$$

bilen alarys. χ-kappa ululyga **egriniň towlulygy** diýilýär. Indi $\bar{n}$ wektoryň özgertmesine seredeliň we (I),(II) formulalardan:

$$\bar{n}' = \left[\bar{b}', \bar{t}\right] + \left[\bar{b}, \bar{t}'\right] = \left[\chi\bar{n}, \bar{t}\right] + \left[\bar{b}, k\bar{n}\right] =$$

$$= -\chi\left[\bar{n}, \bar{t}\right] + \left[\bar{b}, \bar{n}\right] = \chi\bar{b} - k\bar{t} \qquad \text{(III)}$$

Şeýlelikde, giňişlik üçin Frene formulalary

$$\bar{t}' = k\bar{n}$$

$$\bar{n}' = \chi\bar{b} - k\bar{t}$$

$$\bar{b}' = -\chi\bar{n}$$

Bu ýerde ***k***-egriniň egriligini, χ-egriniň towlylygyny aňladýar.

Frene formulalary egri boýunça hereket edilende ugradyjy üçgranlygyň özgertmesini häsiýetlendirýär.

Goý, $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(l)$ wektor 1-nji, 2-nji, 3-nji tertipli üznüksiz önümlere eýe bolsun. $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ wektorlar we χ, k ululyklar bilen $\bar{\vartheta}', \bar{\vartheta}'', \bar{\vartheta}'''$ önümleriň arasyndaky baglanşygy kesgitleýän deňlikleriň alnyşyna seredeliň. Bu deňlikler egriligi we towlylygy hasaplamagyň formulalaryny berýärler. Belli bolşy ýaly

$$\bar{v}' = \bar{t}, \quad k = \left|\bar{v}''\right|, \quad \bar{n} = \frac{\bar{v}''}{\left|\bar{v}''\right|}, \quad \bar{v}'' = k\bar{n}$$

formulalary peýdalanyp,

$$\left[\bar{v}', \bar{v}''\right] = \left[\bar{t},\ k\bar{n}\right] = k\bar{b},$$

$$\bar{b} = \frac{\left[\bar{v}', \bar{v}''\right]}{\left|\bar{v}''\right|}$$

fomulalary, soňra bolsa üçünji tertipli önümi kesgitleýäris:

$$\left(\bar{v}''\right)' = k'\bar{n} + k\bar{n}' = k'\bar{n} + k(\chi\bar{b} - k\bar{t}) =$$

$$= k'\bar{n} + k\chi\bar{b} - k^2\bar{t}.$$

Onda garyşyk köpeltmek hasyl

$$\left(\left(\bar{v}''\right)',\bar{v}'',\bar{v}'\right)=\left(\left(\bar{v}''\right)',\left[\bar{v}'',\bar{v}'\right]\right)=$$

$$=\left(k'\bar{n}+k\chi\bar{b}-k^2\bar{t},\ k\bar{b}\right)=$$

$$=k'k\left(\bar{n},\bar{b}\right)+k^2\chi\left(\bar{b},\bar{b}\right)-k^3\left(\bar{t},\bar{b}\right)=k^2\chi,$$

aňlatma deň bolar. Bu ýerde skalýar köpeltmek hasylyň

$$\left(\bar{n},\bar{b}\right)=0,\ \left(\bar{b},\bar{b}\right)=1,\ \left(\bar{t},\bar{b}\right)=0$$

häsiýetleri ulanyldy. Şeýlelikde, egriniň

towlulygy üçin

$$\chi=\frac{\left(\left(\bar{v}''\right)',\bar{v}'',\bar{v}'\right)}{\left|\bar{v}''\right|^2}$$

formulany alýarys.

Egriligi we towlulygy hasaplamak üçin galtaşýan, baş normal, binormal birlik wektorlary we olaryň özgertmeleriniň (tizlikleriniň) arabaglanşygyny kesgitleýän hasaplamaga degişli formulalaryň alnyşlaryna seretdik.

Goý, käbir egri

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(l) = x(l)i + y(l)j + z(l)k$$

wektor funksiýa bilen berlen bolsun. Hasaplamalarda peýdaly boljak aşakdaky formulalary getirýäris:

$$\bar{v}' = \bar{t} = \{x'(l), y'(l), z'(l)\};$$

$$\bar{n} = \frac{x'' \cdot i + y'' \cdot j + z'' \cdot k}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}};$$

$$k = \left|\bar{v}''\right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2};$$

$$\left[\bar{v}'', \bar{v}'\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

$$\bar{b} = \frac{\left[\bar{v}'', \bar{v}'\right]}{\left|\bar{v}''\right|}.$$

§14. Ewolýuta we ewolwenta

Belli bolşy ýaly, tekizlikde egriniň hereketini oňa geçirilen galtaşýan bilen häsiýetlendirip bolar, ýagny egrä birinji tertipli galtaşma geçirilýär. Bu ýagdaýda iki we ondan ýokarky tertipli tükeniksiz kiçiler taşlanýar. Şeýle hem galtaşyjy töwerek düşünjesi girizilende 2-nji tertipli galtaşma seredilipdi. Bu ýagdaýda bolsa üç we ondan ýokary tükeniksiz kiçi ululyklar taşlanýar. Egriniň berlen nokadynda galtaşyjy töwerek geçirilen bolsa, onda bu egriniň islendik nokadyny ulanyp onuň galtaşyjy töwerekden daşlaşmasyny kesgitlemek gerek bolýar. Onuň üçin aşakdaky mesele çözülmelidir.

Mesele. Egriniň berlen nokadynda egri bilen 2-nji tertipli galtaşmany emele getirýän galtaşyjy töweregi kesgitlemeli.

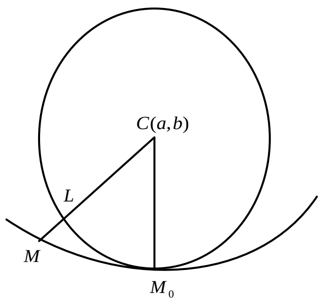
Çözülişi. Goý, seredilýän egri

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

ulgamyň kömegi bilen berlen bolsun. t - parametriň käbir berkidilen t_0 bahasy üçin egriniň $M(t_0) = M_0(x_0, y_0)$ nokadyny berkideliň. Goý, egrä $C(a,b)$ merkezli R radiusly galtaşyjy teöwerek geçirilen bolsun. a,b,R - kesgitlenmedik hemişelik ululyklar. Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly töweregiň deňlemesi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

görnüşde alynýar. Egriniň üstünde t_0 nokatdan tükeniksiz kiçi aralykda ýerleşen t nokat üçin M nokady alalyň we egriniň üsti bilen M nokatdan M_0 nokada tükeniksiz kiçi ýakynlaşmada M nokadyň galtaşyjy töwerekden daşlaşmasyny kesgitlemäge girişeliň(30-njy çyzgy).



30-njy çyzgy

Goý,

$$LM=CM-CL,\ t\to t_0 \text{ bolanda } |L\ M|$$

aralygy kesgitlemek gerek bolsun.

LM - daşlaşma t nokadyň saýlanyp alynyşyna bagly bolýar. Şonuň üçin hem bu ululyk ($t - t_0$) aňlatmanyň islendik derejesine, ýagny tükeniksiz kiçilere bagly bolar, beýleki tarapdan bu daşlaşma ***CM^2* – *CL^2*** ululygyň $t - t_0$ tükeniksiz kiçilere baglylyk tertibi boýunça deňdir. Hakykatdan hem,

$$\frac{CM^2 - CL^2}{CM - CL} = CM + CL \xrightarrow[t \to t_0]{} 2R$$

Şonuň üçin aşakdaky funksiýa serederis.

$$\varphi(t) = CM^2 - CL^2 = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 - R^2$$

Bu funksiýany t_0 nokadyň etrabynda Teýlor hataryna dargadalyň.

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi'(t_0)}{1!}(t - t_0) +$$

$$+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{\varphi'''(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \ldots$$

Meseläniň şertine görä seredilýän daşlaşmanyň 3-nji we ondan ýokary tertipli tükeniksiz kiçilere bagly bolmagy üçin Teýlor hataryna görä:

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0$$

ýerine ýetirilmelidir. Bu deňlikleri $\varphi(t)$ funksiýa üçin ulanalyň, ýagny

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0 \\ \varphi'(t_0) = 2(x_0 - a)x'_0 + 2(y_0 - b)y'_0 = 0 \\ \varphi''(t_0) = x_0'^2 + (x_0 - a)x''_0 + y_0'^2 + (y_0 - b)y''_0 = 0 \end{cases}$$

Bu ulgamyň soňy iki deňlemesinden alarys.

$$x_0 - a = -\frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'};$$

$$x_0'^2 - \frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'} \cdot x_0'' + y_0'^2 + (y_0 - b)y_0'' = 0$$

Bu ýerden bolsa

$$x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'} \cdot x_0'' - (y_0 - b)y_0'';$$

$$x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{y'_0 x_0'' - x_0' \; y_0''}{x_0'} \cdot (y_0 - b);$$

$$y_0 - b = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$x_0 - a = -\frac{y_0'}{x_0'} \cdot \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$b = y_0 - \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$a = x_0 + \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)y_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

Şeýlelikde, galtaşyjy töweregiň ***C (a,b)*** merkezi kesgitlendi. Ýokarky ulgamyň 1-nji deňlemesini ulanyp bu töweregiň R radiusyny kesgitläris.

$$R = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{| y_0' x_0'' - x_0' y_0'' |},$$

Şeýlelikde, a, b, R ululyklar kesgitlenildi. Başgaça aýdylanda galtaşjy töwerek tapyldy. Mesele çözüldi.

Bellikler 1. Galtaşjy töweregiň ***R*** radiusyna egrilik radiusy we ***C (a,b)*** nokada egrilik merkezi diýilýär.

2. **E**griniň ***t₀*** nokadyndaky ***k*** egriligi bilen ***R*** egrilik radiusy ***kR=1*** deňligi ýerine ýetirýär.

Şonuň üçin hem, egri

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}$$

deňlemeler bilen berlende, onuň egriligi

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|\, y_0' \, x_0'' - x_0' \, y_0'' \,|}{(x_0'^2 + y_0'^2)^{3/2}}$$

formula bilen hasaplanýar.

3. Berkidilen ***t₀*** nokat seredilýän egriniň islendik nokady bolup biler:

$$a = x(t) - y'(t) \cdot \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y'(t)\, x''(t) - x'(t)\, y''(t)};$$

$$b = y(t) + x'(t) \cdot \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)};$$

$$R = \frac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)|};$$

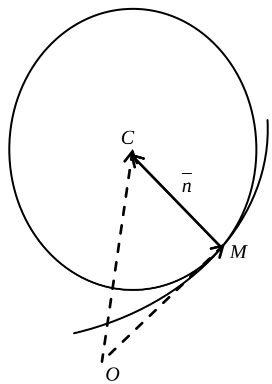
4. Eger-de wektor funksiýanyň godografy $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bolsa, onda egrilik radiusy we egrilik merkezi aşakdaky ýaly alnar:

$$a = x - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''}; \qquad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

Şeýlelikde, berlen egri üçin onuň ewolýutasyny egrilik tegelekleriniň merkezleriniň geometrik orny hökmünde alyp bolýar. Diýmek, ewolýuta egriniň ähli mümkin bolan nokatlarynda geçirilen egrilik tegelekleriniň merkezleriniň üsti bilen geçýär. Şol merkezlerden geçende her bir egride bolşy ýaly ewolyuta hem özüniň galtaşýanlary bilen häsiýetlendirip bilner. Diýmek ewolýutanyň galtaşýanlaryny kesgitlemek zerurlygy ýüze çykýar. Onuň üçin ewolýutanyň wektor deňlemesini düzýäris.

Goý, egri özüniň wektor $\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}(t)$ deňlemesi bilen berlen bolsun, onuň godografynda käbir M nokady berkideliň. Bu nokatda galtaşyjy töweregi geçirip, onuň $C(a,b)$ merkezi we M nokat üçin radius wektorlary geçireliň. Wektorlary goşmagyň düzgünini ulanyp ewolyutanyň wektor deňlemesini alarys(31-nji çyzgy):



31-nji çyzgy

$$\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC}$$

$$\overline{OM} = \overline{\vartheta}(l),\ \overline{MC} = \overline{n}R$$

$$\overline{OC} = \overline{\rho}(l)$$

Onda ewolýutanyň wektor deňlemesi:

$$\overline{\rho}(l)=\overline{\vartheta}(l)+\overline{n}R \text{ -}$$

Bu deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp, Frene formulalaryny ulansak:

$$d\overline{\rho}=d\overline{\vartheta}+d\overline{n}\cdot R+\overline{n}dR=$$

$$=\overline{\vartheta}'dl+\overline{n}'Rdl+\overline{n}dR=$$

$$=\bar{t}dl+(-k\bar{t})\cdot Rdl+\overline{n}dR;$$

$$d\overline{\rho}=\overline{n}dR\ .$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly ewolýutanyň $d\overline{\rho}$ - galtaşýany berlen egriniň $\overline{n}$ normaly bilen ugurdaşdyr. Şeýlelikde ewolýutanyň godografy berlen egriniň ähli mümkin bolan nokatlarynda geçirilen galtaşyjy töweregiň merkezleri bilen geçýärler we berlen egriniň şol nokatda geçirilen normallary bilen galtaşýandyr. Bu ýagdaýda ewolýutany berlen egriniň normallarynyň oramasy hökmünde hem alyp bolar. Hakykatdan hem,

$$(x-x(t))x^{'}(t)+(y-y(t))y^{'}(t)=0$$

normalyň deňlemesi üçin oramanyň kesgitlemesini ulanalyň:

$$\begin{cases}(x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0 \\ x''(t)\cdot(x - x(t)) + y''(t)(y - y(t)) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0\end{cases}$$

Bu ulgamyň çözüwi:

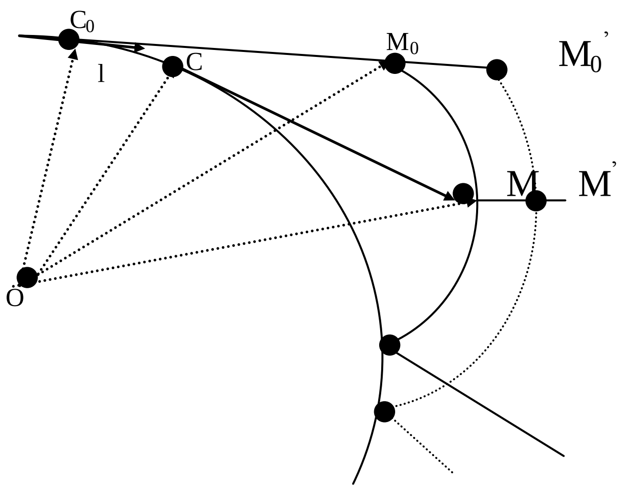
$$x = a = x(t) - y'(t)\cdot\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)y'(t)};$$

$$y = b = y(t) + x'(t)\cdot\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)y'(t)};$$

Bellik: Ewolýutanyň bu deňlemesinden, eger-de egri polýar koordinatalarda berlen bolsa hem peýdalanyp bolar. Emma bu aňlatmalar degişli hasaplamalardan soňra özgerer.

Indi tekiz egriniň **ewolwentasy** düşünjesini kesgitlemäge girişeliň. Onuň üçin, goý, wektor funksiýa $\vartheta = \overline{\vartheta}(l)$ deňleme berlen bolsun. Egriniň godografyny onuň radius wektorlarynyň kömegi bilen gurup, käbir nokatlarda galtaşýanlaryny geçireliň. Bu galtaşýanlaryň položitel ugurlaryna göni çyzyklary dowam edip C_0 nokatda geçirilen galtaşýanyň dowamyndaky çyzykda uzynlygy $\boldsymbol{l_0}$ deň bolar ýaly edip M_0 nokady belläliň. $|\boldsymbol{C_0 M_0}|=\boldsymbol{l_0}$ Görnüşi ýaly M_0 nokat erkin saýlanyp alynýar. Şonda bu egriniň üstünde C_0 nokatdan $\boldsymbol{l}$ uzaklykda ýerleşen C nokady belläliň, ýagny $\left|\overset{\cup}{C_0 C}\right| = l$.

C nokatdaky geçirilen galtaşýanyň dowamyndaky göni çyzykda (şöhlede) $C_0M_0 = C_0\breve{C} + CM$ deňlik ýerine ýeter ýaly M nokady belgiläliň(32-nji çyzgy).



32-nji çyzgy

Çyzgydan görnüşi ýaly, egride M_0 nokadyň saýlanyp alynyşyna görä birnäçe ewolwentalar kesgitlenýär:

$$C_0M_0 = C_0\breve{C} + CM$$

$$CM = C_0M_0 - C_0\breve{C} = l_0 - l$$

Ýagny, saýlanyp alnan M nokatlaryň geometrik orny berlen egriniň **ewolwentasy** hökmünde kesgitlenýär. 32-nji çyzga görä ewolwentanyň wektor deňlemesini aşakdaky görnüşde alyp bolar:

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM}$$

$$\overline{\rho}(l) = \vartheta(t) + (l_0 - l)\bar{t};$$

-ewolwentanyň wektor deňlemesi

Bu deňlemäni differensirleýäris we Frene formulasyny ulanýarys:

$$d\overline{\rho} = d\overline{\vartheta} + d\bar{t}(l_0 - l) =$$

$$= \bar{t}dl + (l_0 - l)k\bar{n}\,dl - \bar{t}\,dl = k(l_0 - l)\bar{n}\,dl;$$

Netije: Ewolwentanyň galtaşýany berlen egriniň normaly berlen ugurdaşdyr.

§15. Üstdäki egriler we egriçyzykly koordinatalar

Tekiz egriler we olar üçin egriçyzykly koordinatlar ulgamy girizilenden soňra, giňişlikdäki egriler üçin ugradyjy üçgranlyk we olaryň egriligi, towlulygy öwrenilenden soňra üstdäki egrileriň häsiýetlerini hem öwrenmäge girişýäris. Goý, käbir üst

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

deňleme bilen berlen bolsun. Bu deňlemäniň çözüwlerinden üýtgeýänleriň haýsy hem bolsa birine görä çözülmegini üpjün edýän adaty nokatlaryna seredýäris:

$$z=f(x,y) \qquad (2)$$

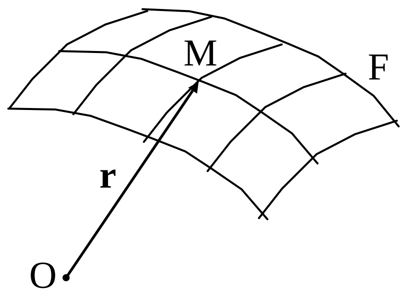
Üstler öwrenilende olar parametrik deňlemeler bilen berilse amatly bolýar. Şonuň üçin, goý, üst iki u, v skalýar argumentlere bagly bolan

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k} \qquad (3)$$

wektor funksiýa bilen berlen bolsun. M nokat F üstüň adaty nokady, $\mathbf{r}=\mathbf{OM}$-radius wektory bolsun, ýagny $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. $M(x,y,z)\in \mathbf{F}$. Onda F üstüň u, v parametrlere görä deňlemesini alarys:

$$\begin{cases} x = x(u,\upsilon) \\ y = y(u,\upsilon) \\ z = z(u,\upsilon) \end{cases} \qquad (4)$$

Hakykatdan hem, haçanda u, υ argumentler özgeriş ýaýlasyna degişli ähli bahalaryny alsalar, onda M nokat özüniň (4) koordinatalary bilen ýa-da koordinatalary (4) bolan $\boldsymbol{r}(u,\upsilon)$ wektor funksiýanyň godografy käbir üsti kesgitlär.



33-nji çyzgy

Şeýlelikde, (4) ulgam şol üstüň parametrik aňladylyşy bolar. Şunlukda her bir (u,υ) jübüte F üstüň bir M nokady degişli bolar.

Hususy önümleri kesgitläliň:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{r}_u(u,\upsilon)=x_u(u,\upsilon)i+y_u(u,\upsilon)j+z_u(u,\upsilon)k\\ \bar{r}_\upsilon(u,\upsilon)=x_\upsilon(u,\upsilon)i+y_\upsilon(u,\upsilon)j+z_\upsilon(u,\upsilon)k\end{array}\right\}$$

Bellik: Üstüň $\mathbf{r}_u$ we $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlaryň kollinearlygyny üpjün etmeýän ($\mathbf{r}_u$,$\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlar özara parallel däl) nokatlaryna seredilýär.

Bu wektorlaryň koordinatlaryndan düzülen

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon & z_\upsilon \end{pmatrix}$$

matrissany we ondan 2-nji tertipli noldan tapawutly kesgitleýjileriň birini alalyň.

Goý, $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon \end{vmatrix} \neq 0.$ Onda matematiki derňewden belli bolşy ýaly (u,υ) nokadyň käbir etrabynda

$$\begin{cases} x = x(u,\upsilon) \\ y = y(u,\upsilon) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy u, υ üýtgeýänlere görä bir bahaly çözülýär:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ \upsilon = \upsilon(x, y) \end{cases}$$

Bu bahalary (2) deňlemede ornuna goýup alarys:

$$Z = z(u, \upsilon) = z(u(x, y), \upsilon(x, y)) = z(x, y);$$

ýa-da $z = f(x, y)$;

Şeýlelikde, esasy kesgitleýji şert $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_\upsilon$ wektorlaryň kollinear bolmazlyk şertidir we bu şert adaty nokadyň etrabynda üstüň nokatlary bilen parametrleriň (u, υ) jübütleriniň arasynda özara bir bahaly degişliligi almaga mümkinçilik döredýär. Şunuň esasynda hem **(u,υ)** parametrlere **üstdäki egriçyzykly koordinatlar** diýilýär.

Indi, **üstdäki egrileriň** kesgitlenişine seredeliň. Egriçyzykly koordinatlary

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t) \\ \upsilon &= \upsilon(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(*t* – bagly däl üýtgeýän ululyk), deňlemeler bilen kesgitlenen üstdäki nokatlaryň geometrik ornuna seredeliň. Onda üstüň parametrik deňlemesini ulanyp

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \upsilon) = \bar{r}(u(t), \upsilon(t)) = \bar{r}(t) \qquad (6)$$

alarys. Bu deňlikden görnüşi ýaly eger-de t üýtgese, onda $\boldsymbol{r}$ wektor özüniň ahyry bilen käbir egrini kesgitleýär. Şeýlelikde (5) deňlemeler **üstdäki egrini** kesgitlär.

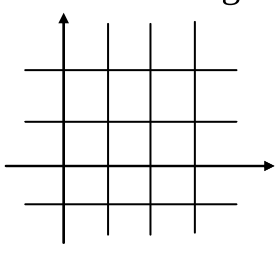
Hususy ýagdaý: Goý, $\boldsymbol{u=t}$; $\boldsymbol{\upsilon=\upsilon(t)=\upsilon(u)}$; $\boldsymbol{\upsilon=\upsilon(u)}$.

Şeýle baglanyşykda bolýan üstdäki egriçyzykly koordinatlar ulgamy bilen **koordinat çyzyklary** diýilýän düşünje kesgitlenilýär. Bu çyzyklarda egriniň ähli ugruna parametrleriň haýsy hem bolsa biri hemişelik bolup galýarlar:

$$\{u,\ \upsilon = const\} \quad \text{ýa-da} \quad \{u = const,\ \upsilon\}.$$

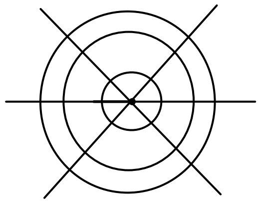
Bu ýerden koordinat gözenegi ýa-da koordinat tory düşünjesine gelinýär. Koordinat torunyň dürli koordinatalar ulgamy üçin mysallaryna seredeliň.

1. Dekart koordinatalar ulgamy(Parallel gönüler).



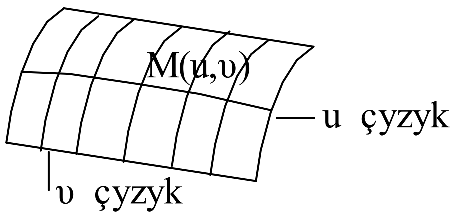
(x,y)

2. Polýar koordinatalar ulgamy(konsentrik töwerekler).



(r, φ)

3. Egriçyzykly koordinatalar ulgamy(koordinat çyzyklary).



Üstde egriler düşünjesini girizenimizden soňra bu egrilere galtaşýanlaryň geçirilişine seredeliň. Goý, üstde egri

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t) \\ \upsilon &= \upsilon(t) \end{aligned}\right\}$$

deňlemeler bilen berilsin. Onuň parametrik deňlemesi

$$\bar{r} = \bar{r}\left[u(t), \upsilon(t)\right]$$

bolar. Egriniň parametrik deülemesi iki üýtgeýänlere baglydyr, şonuü üçin hem matematiki derňewde görkezilişi ýaly, onuň differensiýaly

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_\upsilon d\upsilon;$$

hususy önümleri we differensiallary

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_u &= \bar{r}_u(u,\upsilon) \\ \bar{r}_\upsilon &= \bar{r}_\upsilon(u,\upsilon) \end{aligned}\right\}$$

we

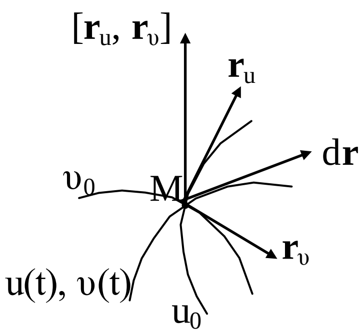
$$du = u'\,dt$$

$$d\upsilon = \upsilon'\,dt;$$

Şol bir wagtda d***u***, d***υ*** ≠ 0. Onda

$$d\bar{r} = \bar{r}_u \cdot u'\,dt + \bar{r}_\upsilon \cdot \upsilon'\,dt = \bar{r}'\,dt \neq 0.$$

$\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ (u,υ) parametrlere bagly, şol bir tekizlikde ýatýarlar; d**r**, $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlar bolsa özara komplanar bolarlar.



34-nji çyzgy

Netije: Eger-de üstüň M nokadynyň üstünden mümkin bolan ähli egrileri alyp, olaryň ählisine galtaşýanlary geçirsek, onda olaryň hemmesi-de $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlaryň ýatýan tekizliginde ýatarlar; hemmesi üçin $[\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_\upsilon]$ wektor normal wektor bolar. Şonuň üçin normalyň we galtaşyjy tekizligiň deňlemelerini alyp bolar.

Hakykatdan hem, M(u,υ) nokatdan geçýän galtaşýan tekizlik $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlaryň üsti bilen geçýär. Şonuň üçin olaryň deňlemeleri wektor köpeltmek hasylyň kömegi bilen alnyp bilner.

$$[\bar{r}_u,\bar{r}_\upsilon]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon & z_\upsilon \end{vmatrix}$$

Özara parallel däl $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlar üçin $[\bar{r}_u,\bar{r}_\upsilon]\neq 0$, onda galtaşýan tekizligiň deňlemesini

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon & z_\upsilon \end{vmatrix}=0$$

ýa-da

$$(X-x)\begin{vmatrix} y_u & y_\upsilon \\ z_u & z_\upsilon \end{vmatrix} + (Y-y)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_\upsilon & x_\upsilon \end{vmatrix} +$$

$$+(Z-z)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_\upsilon & u_\upsilon \end{vmatrix} = 0$$

görnüşde alyp bolar.

Bu ýerde $\{X-x, Y-y, Z-z\}$ tapawutlaryň koeffisiýentleri [$\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$] wektoryň koordinatlary bilen gabat gelýär. Şeýle hem normalyň deňlemesi:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_\upsilon \\ z_u & z_\upsilon \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_\upsilon \\ x_u & x_\upsilon \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_\upsilon \\ y_u & y_\upsilon \end{vmatrix}}$$

[$\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$] wektoryň ugry boýunça geçýär.

§16. Birinji kwadratik forma

Üsti onuň käbir M(u,v) nokadynyń golaýynda tükeniksiz kiçiler manysynda őwrenmäge girişŷäris. Üstdäki

$$u = u(t), \quad v = v(t) \qquad \textbf{(1)}$$

deńlemeler bilen berlen egriniń M nokadyndan käbir M' nokadyna süŷşŷäris. Goŷ, dt ululyk t – parametriň artdyrmasy bolsun. Onda egriçyzykly koordinatalaryň üstdäki differensiallary

$$du = u'(t)dt, \qquad dv = v'(t)dt$$

bolar. Belli bolşy ŷaly d$\boldsymbol{v}$:d$\boldsymbol{u}$ gatnaşyk galtaşŷanyń süŷşme kanunyny kesgitleŷär. Bu süŷşmä degişli radius-wektoryń differensiŷalyny kesgitläliń : $dr = r_u du + r_v dv$

Bu wektoryň uzynlygy bilen onuň godografynyň dugasynyň uzynlygynyň arasynda $|dl| = |dr|$ deňlik bar, sebäbi $dl = l'(t)dt = |r'(t)|dt$

Onda MM' duganyń differensiŷaly üçin

$$|dl| = |dr| = |r_u du + r_v dv| \qquad \text{ŷa-da}$$

$$dl^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2$$

Soňky deňlikden bolsa

$$dl^2 = r_u^2 du^2 + 2 r_u r_v du dv + r_v^2 dv^2 \qquad (2)$$

(2) deňligiň skalŷar kőpeltmek hasyllary üçin (olar M-e bagly) gysgaça belgilemeleri girizeliń :

$$r_u^2 = (r_u, r_u) = E(u,v), \qquad (r_u, r_v) = F(u,v),$$

$$r_v^2 = (r_v, r_v) = G(u,v)$$

Onda (2) formula

$$dl = \sqrt{E(u,\upsilon)du^2 + 2F(u,\upsilon)du d\upsilon + G(u,\upsilon)d\upsilon^2} \quad (3)$$

görnüşe geler.

Bu formula **birinji kwadratik forma** diýilýär.

Bu köpagzanyň üstde kwadratik formany kesgitlemegi üçin onuň birjynsly 2-derejeli kőpagza bolmagy zerurdyr. Diýmek, (3) gőrnüş $du, d\upsilon$ differensiŷallara gőrä kwadratik formadyr. E , F , G - koeffisiýentler ol differensiŷallara bagly däldirler. Bu koeffisiýentler üstüň M(u,υ) nokadynyň saŷlanyp alnyşyna baglydyrlar, ýagny M(u,υ) nokatda hasaplanŷar.

(3) kwadratik formanyń ŷene bir ähmiŷeti ol üstdäki tükeniksiz kiçi süŷşmedäki duganyń differensiŷalynyń kwadratyny (dl^2) kesgitleŷär. Şunlukda E, F, G - koeffisiýentler kwadratik formanyň kömegi bilen üstdäki tükeniksiz kiçi dügany őlçemäge mümkinçilik döredýär.

(3) deňlik bilen berlen birinji kwadratik formadan integrirlemäniń kőmegi bilen duganyń uzynlygyny hem kesgitläp bolar. Goŷ 1-nji kwadratik forma belli, ŷagny E,F,G koeffisiŷentler kesgitlenen bolsunlar. Goŷ, duganyń käbir bőlegi u=u(t) , υ=υ(t), ($T_0 \le t \le T$) deňlemeler bilen berlen bolsun. (3) formuladan

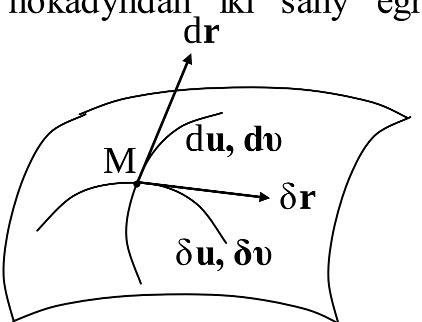
$$dl = \sqrt{E(u,\upsilon)du^2 + 2F(u,\upsilon)dud\upsilon + G(u,\upsilon)d\upsilon^2}$$

formulany alyp, ondan integrirlemäniń kőmegi bilen $M(T_0)$ nokatdan $M(T)$ çenli duganyń takyk uzynlygyny alyp bileris:

$$l = \int_{T_0}^{T} \sqrt{Edu^2/dt^2 + 2Fdu/dt \cdot d\upsilon/dt + Gd\upsilon^2/dt^2}\, dt,$$

$$E(u,v) = E, \quad F(u,v) = F, \quad G(u,v) = G$$

Birinji kwadratik forma belli bolanyndan sońra üstde egrileriń arasyndaky burçlary hem kesgitläp bolýar. Hakykatdan hem goŷ, üstüň şol bir M nokadyndan iki sany egri geçýän bolsunlar.



35-nji çyzgy

Bir egri boŷunça tükeniksiz kiçi süýşmäniň egriçyzykly koordinatalarynda birinji egri üçin differensiŷallary ***du, dv***; ikinjisi üçin ***δu, δv*** belläliń. Degişli radius wektorlar d***r***, δ***r*** bolsunlar. Onda

$$dr = r_u du + r_v dv\,,\ \delta r = r_u \delta u + r_v \delta v \qquad (4)$$

differensiŷallar galtaşýanlaryň ugurlary boŷunça ŷatŷarlar. Onda egrileriń arasyndaky burçy bu wektorlaryń arasyndaky burç diŷip hasaplap bolar:

$$\cos(dr, \delta r) = \frac{dr\delta r}{|\,dr\,\|\,\delta r\,|} =$$

$$= \frac{r_u r_u du\delta u + r_u r_v(du\delta v + dv\delta u) + r_v r_v d\upsilon\delta\upsilon}{|\,dl\,\|\,\delta l\,|} \qquad (5)$$

Óńki belgimelere salgylansak, onda iki dürli wektorlaryń arasyndaky burç aşakdaky deňlik bilen berler:

$$\cos(dr, \delta r) =$$

$$= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \quad (6)$$

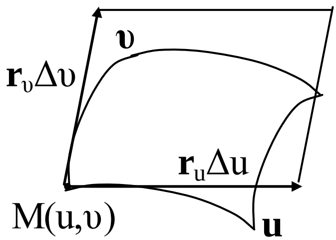
Hususy halda, eger-de koordinat çyzyklarynyń arasyndaky φ burçy kesgitlemeli bolsa, onda du>0 , dυ=0 (u-çyzyk boŷunça onuń artŷan ugruna süŷşme)

δu=0 , δυ>0 (υ-çyzyk boŷunça onuń artŷan ugruna süŷşme)

Onda (6) formuladan $\cos\varphi = \dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

Eger-de F=0 bolsa, onda koordinat çyzyklary perpendikulŷardyrlar.

Birinji kwadratik forma üstleriń meŷdanlaryny hasaplamakda hem uly rol oŷnaŷar. Egriçyzykly paralellogram bilen gőniçyzykly paralellogramlaryń meŷdanlary őrän ŷakyn(36-njy çyzgy).



36-njy çyzgy

Onda egriçyzykly paralellogramyň meýdanyny

$$\Delta\sigma = \left|\left[r_u\Delta u, r_v\Delta v\right]\right| = \left|\left[r_u, r_v\right]\right|\Delta u\Delta\upsilon$$

deňlik bilen alyp bolar. Meýdanyň bu formulasyny birinji kwadratik formanyń koeffisiýentleriniń üsti bilen ańlatmak üçin wektor we skalŷar kőpeltmek hasyllaryny ulanyp alarys:

$$(a,b)=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha,$$

$$[a,b]=|a|\cdot|b|\cdot\sin\alpha,$$

$$[a,b]^2+(a,b)^2=a^2\cdot b^2,$$

$$a^2=(a,b),\quad b^2=(b,b)$$

Bu deňlikleri r_u, r_v wektorlar üçin ulanýarys:

$$[r_u,r_v]^2+(r_u,r_v)^2=(r_u,r_u)(r_v,r_v)=r_u^2r_v^2$$

$$[r_u,r_v]^2=r_u^2r_v^2-(r_u,r_v)^2$$

Soňky formuladan degişli belgilemeleri ulanyp alarys:

$$\left|[r_u,r_v]\right|=\sqrt{EG-F^2}\ .$$

Onda meýdanyň formulasynda degişli çalşyrmalary geçirip alarys:

$$\Delta\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta \upsilon$$

$$\sum \Delta\sigma = \sum \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v \ ,$$

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \lim \sum_D \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u \Delta v$$

<u>Bellikler</u>: 1. $\left|[r_u, r_v]\right|^2 = EG - F^2 > 0$.

2. Duganyń differensiŷalyny ***u*** – koordinata çyzygynyň ugruna hasaplasak, onda ***dv=0*** , ŷagny

$$dl^2 = Edu^2, \quad E > 0, \quad dl = \sqrt{E}du$$

v – koordinata çyzygynyň ugruna hasaplasak, onda ***du=0*** , ŷagny

$$dl^2 = Gdv^2, \quad G > 0, \quad dl = \sqrt{G}dv$$

§17. Ikinji kwadratik forma

Üstüň islendik M nokadyndan bu nokatdan üçtüň islendik egrisi boýunça örän kiçi süýşülende üstüň bu nokatdaky galtaşyjy teizlikden daşlaşmasyna seredeliň. Goý, MM' egri üstdäki M nokatdan geçýän egrileriň haýsy hem bolsa biri bolsun. Berlen egriniň MM' dugasynyň l-uzynlygyny parametr hökmünde alnyp, egriniň parametrlenen gönüşde

$$u=u(l),\ \upsilon=\upsilon(l)$$

deňlemelerini alarys. Onda üstüň wektor deňlemesi:

$$\bar{r}=\bar{r}(u(l),\upsilon(l)) \qquad (1)$$

M nokatdan M' nokada şol egriniň ugry boýunça süýşme geçireliň we ol tükeniksiz kiçi ululygy $MM'=\Delta l$ diýip alalyň. Bu Δl artdyrma degişli r wektoryň artdyrmasy

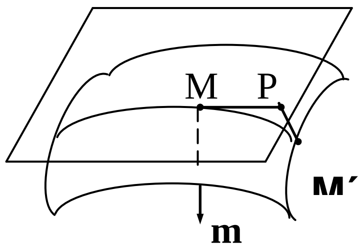
$$\Delta\bar{r}=\bar{r}(l+\Delta l)-\bar{r}(l).$$

Şeýle hem Teýlor formulasyny ulansak, alarys

$$\overline{MM'} = \Delta\bar{r} = \bar{r}'\Delta l + \frac{1}{2}\bar{r}''(\Delta l)^2 + \dots \quad (2)$$

Bu ýerde r', r'' wektorlar M nokatda hasaplanýar.

Goý, $\Delta l \to 0$. Eger-de süýşme 1-nji tertipli takyklykda geçirilse, onda süýşme galtaşýan boýunça gider, sebäbi $\bar{r}'\Delta l = d\bar{r}$. Emma bu paragrafda 2-nji tertipli takyklykda süýşmäni amala aşyrarys. Bu ýagdaýda süýşmäni galtaşýan tekizlik boýunça alyp bolmaz. Şonuň üçin şol süýşmäniň galtaşýan tekizlikden daşlaşmasyny bahalandyrýarys(37-nji çyzgy).



37-nji çyzgy

Çyzgyda görkezilişi ýaly, ol daşlaşma PM' kesimi emele getirýär.

Goý, M' nokatdan galtaşýan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň esasy P nokat bolsun. M nokatdan üstüň normalynyň ugruna birlik **m** wektory guralyň. Onda

$$\overline{PM'} = l \cdot \overline{m}, \qquad (l > 0,\ l < 0 \ \text{ bolup biler}).$$

Bu ýerden modula geçsek, alarys:

$$|\,\overline{PM'}| = |l| \cdot |\overline{m}| = |l|$$

Çyzgydan görnüşi ýaly,

$$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l \cdot \overline{m}. \qquad (3)$$

$$\overline{MP} + l \cdot \overline{m} = \overline{r}'\Delta l + \frac{1}{2}\overline{r}''(\Delta l)^2 + \ldots \qquad (4)$$

Bu deňligiň iki bölegini hem **m** wektora skalýar köpeldip alarys:

$$l = \overline{r}' \cdot \overline{m}\Delta l + \frac{1}{2}\overline{r}'' \cdot \overline{m}(\Delta l)^2 + \ldots$$

Sebäbi:

$(\overline{MP}, \overline{m}) = 0,\ (\overline{m}, \overline{m}) = 1,\ (\overline{r}', \overline{m}) = 0.$ we $\overline{r}'$ egrä geçirilen galtaşýan. Soňky deňlikden görnüşi ýaly l - daşlaşma 2-nji tertipli tükeniksiz kiçi ululyklara bagly bolar. Ondan ýokarky tertipli tükeniksiz kiçilere hem baglydyr.

Indi $(\bar{r}'',\bar{m})$ skalýar köpeltmek hasylyny tapmaga girişeliň. $\bar{r}',\bar{r}''$ wektorlary hasaplaýarys:

$$\bar{r}'=\bar{r}_u u'+\bar{r}_\upsilon \upsilon',$$

$$\bar{r}_u=\bar{r}_u(u(l),\upsilon(l)),\bar{r}_\upsilon=\bar{r}_\upsilon(u(l),\upsilon(l))$$

$$\bar{r}''=\bar{r}_{uu}u'^2+\bar{r}_{u\upsilon}u'\upsilon'+\bar{r}_u\cdot u''+\bar{r}_{\upsilon\upsilon}\upsilon'^2+$$
$$+\bar{r}_{\upsilon u}u'\upsilon'+\bar{r}_\upsilon\cdot\upsilon''$$

$\bar{r}_{uu},\bar{r}_{u\upsilon},\bar{r}_{\upsilon u},\bar{r}_{\upsilon\upsilon}$ - ikinji tertipli hususy önümler. $\bar{r}_u,\bar{r}_\upsilon$ galtaşýanlaryň galtaşma tekizliginde ýatýanlygyny hasaba alyp $\bar{r}''$ önümi **m** wektora skalýar köpeldeliň:

$$(\bar{r}'',\bar{m})=(\bar{r}_{uu},\bar{m})u'^2+2(\bar{r}_{u\upsilon},\bar{m})u'\upsilon'+(\bar{r}_{\upsilon\upsilon},\bar{m})\upsilon'^2 \quad (5)$$

bu ýerde $(\bar{m},\bar{r}_u)=(\bar{m},\bar{r}_\upsilon)=0$

Belgilemeleri girizeliň:

$$\left.\begin{aligned}(\bar{r}_{uu},\bar{m})&=L(u,\upsilon)\\(\bar{r}_{u\upsilon},\bar{m})&=M(u,\upsilon)\\(\bar{r}_{\upsilon\upsilon},\bar{m})&=N(u,\upsilon)\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

L, M, N ululyklar (*u, υ*) jübütiň üstde saýlanyp alnyşyna bagly bolarlar, sebäbi **m** wektoryň ugry nokadyň saýlanyşyna görä üýtgäp biler. Şeýlelikde, bu ululyklar alamatlary boýunça doly kesgitlenmedik bolar. Bu näsazlygy aýyrmak üçin **m** wektory normirläliň:

$$\overline{m} = \frac{[\overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon]}{\left|[\overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon]\right|} = \frac{[\overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon]}{\sqrt{EG - F^2}}; \; |\overline{m}| = 1. \qquad (7)$$

Bu şertde **m** wektor üstüň normalynyň ugruna ýatar. Şeýlelikde **m(*u,υ*)**, ***L(u,υ), M(u,υ), N(u,υ)*** kesgitli bolarlar. (6), (7) deňlemelerden

$$\left.\begin{aligned} L(u,\upsilon) &= \frac{(\overline{r}_{uu}, \overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ M(u,\upsilon) &= \frac{(\overline{r}_{u\upsilon}, \overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon)}{\sqrt{EG - F^2}} \\ N(u,\upsilon) &= \frac{(\overline{r}_{\upsilon\upsilon}, \overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon)}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

(6) belgilemeleri (5) deňlikde ulanyp:

$$\overline{r}''\overline{m} = L(u,\upsilon)u'^2 + 2M(u,\upsilon)u'\upsilon' + N(u,\upsilon)\upsilon'^2 \quad (9)$$

deňlige geleris. Bu deňligiň iki bölegini-de

$\frac{1}{2}(\Delta l)^2$ köpeldip $(u' dl) = du, (\upsilon' dl) = d\upsilon$

deňlikleri hasaba alsak, onda :

$$l \approx \frac{1}{2}\bar{r}''\overline{m}(\Delta l)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(L(u,\upsilon)du^2 + 2M(u,\upsilon)dud\upsilon + N(u,\upsilon)d\upsilon^2\right)$$

ýa-da

$$l = \frac{1}{2}\left(L(u,\upsilon)du^2 + 2M(u,\upsilon)dud\upsilon + N(u,\upsilon)d\upsilon^2\right)$$

Netije: Üst boýunça M nokatdan oňa tükeniksiz kiçi aralykda bolan M' nokada süýşmede galtaşýan tekizlikden üstüň daşlaşmasynyň baş bölegi ***du, dυ*** ululyklara görä

$$Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2 \quad (10)$$

görnüşli kwadrat formanyň ýarysy bilen kesgitlenilýär. Bu forma **ikinji kwadrat forma** diýilýär.

(8) deňlikler I we II kwadrat formalaryň koeffisiýentleriniň arasyndaky baglanyşygy görkezýär.

Indi **L, M, N** koeffisiýentleriň (8) belgilemelerden başgaça aňladylyşyna seredeliň: Belli bolşy ýaly: $(\overline{m}, \overline{r}_u) = (\overline{m}, \overline{r}_\upsilon) = 0$. Bu deňlikleri argumentlerine görä differensirläp alarys:

$$\left.\begin{array}{lcl} \overline{m}_u \overline{r}_u + \overline{m}\,\overline{r}_{uu} = 0 & & \overline{m}_\upsilon \overline{r}_\upsilon + \overline{m}\,\overline{r}_{\upsilon\upsilon} = 0 \\ & \text{we} & \\ \overline{m}_\upsilon \overline{r}_u + \overline{m}\,\overline{r}_{u\upsilon} = 0 & & \overline{m}_u \overline{r}_\upsilon + \overline{m}\,\overline{r}_{\upsilon u} = 0 \end{array}\right\}$$

(6) deňlikleri ulansak:

$$\left.\begin{array}{c} L(u,\upsilon) = -\overline{m}_u \overline{r}_u \\ M(u,\upsilon) = -\overline{m}_\upsilon \overline{r}_u = -\overline{m}_u \overline{r}_\upsilon \\ N(u,\upsilon) = -\overline{m}_\upsilon \overline{r}_\upsilon \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Beýleki tarapdan, degişli wektorlaryň differensiallary üçin:

$$d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_\upsilon d\upsilon$$
$$d\overline{m} = \overline{m}_u du + \overline{m}_\upsilon d\upsilon$$

we deňlikleri (11)-de ulansak:

$$(d\overline{r}, d\overline{m}) = -Ldu^2 - 2Mdu\,d\upsilon - Nd\upsilon^2$$

ýa-da

$$Ldu^2+2Mdu\,d\upsilon+Nd\upsilon^2=-(d\bar{r},d\overline{m})(12)$$

deňligi alarys. Degişli diferensiýaliaryň hemmesi $M(u,\upsilon)$ nokat-da hasaplanýar.

$\bar{r}'=\bar{t}$; $\bar{t}'=k\bar{n}=\bar{r}''$ formulalary we skalýar köpeltmek hasylyň $\bar{r}''\overline{m}=\left(\bar{r}'',\overline{m}\right)$ görnüşli belgilemesini ulanyp, has wajyp netijelere hem gelinýär. Onda

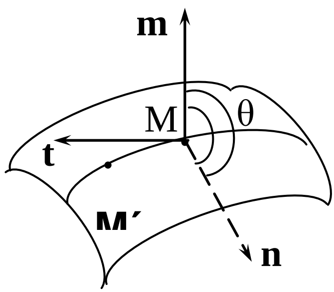
$$\left(\bar{r}'',\overline{m}\right)=\left(k\bar{n},\overline{m}\right)=k\left(\bar{n},\overline{m}\right),$$

$$\cos\theta=\frac{\left(\bar{r}'',\overline{m}\right)}{|\bar{r}''||\overline{m}|};$$

$$\left(\bar{r}'',\overline{m}\right)=|\bar{r}''||\overline{m}|\cos\theta=|k|\cdot|\overline{m}|\cos\theta,$$

$$k=|\bar{r}''|,\ |\overline{m}|=1$$

Netije-de $\left(\bar{r}'',\overline{m}\right)=k\cos\theta$ bolar.



38-nji çyzgy

k – egrilik koeffisiýenti, **n** – baş normal boýunça birlik wektor, θ=(**n^m**), ýagny *MM′* egrä baş normalyň položitel ugry bilen M nokatda üste geçirilen normalyň arasyndaky burç.

(9) deňlikden alarys:

$$k\cos\theta = \left(\bar{r}'', \bar{m}\right) = Lu'^2 + 2Mu'\upsilon' + N\upsilon'^2 =$$

$$= L\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + 2M\frac{du}{dl}\cdot\frac{d\upsilon}{dl} + N\left(\frac{d\upsilon}{dl}\right)^2 \qquad (13)$$

$$du = u'\,dl, \qquad\qquad d\upsilon = \upsilon'\,dl$$

Belli bolşy ýaly

$$dl^2 = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2 \qquad (14)$$

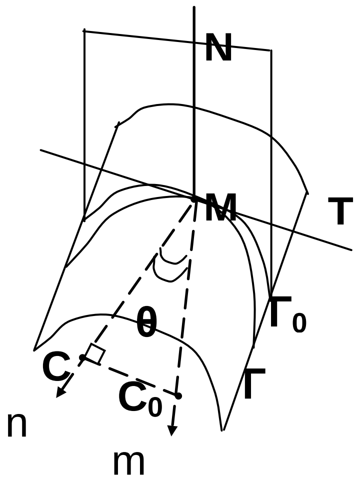
(13), (14) deňliklerden alarys:

$$k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2}{Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2}$$

Bu formula differensial geometriýanyň esasy formulasy diýilýär. Bu formulanyň esasy ähmiýeti üstüň M nokadyndan geçýän ähli egriler üçin galtaşýanyň ugry, galtaşyjy tekizligiň ýagdaýy we M nokatdaky egrilik arasynda kesgitli bir baglylygyň alynmagynda ýüze çykýar.

§18. Meńýe teoremasy

Egrä geçirilen galtaşýanyň berlen ýagdaýynda egriniň egriligiň galtaşyjy tekizligiň ýagdaýyna baglylygyny öwrenmäge girişeliň(39-njy çyzgy).



39-njy çyzgy

MT çyzyk *Γ* we Γ_0 egrilere geçirilen umumy galtaşýan. $\overline{MN}$ wektor üste geçirilen normal. *C*, C_0 - degişlilikde *Γ* we Γ_0 egrileriň egrilik merkezleri. **n** we **m** bu egrilere geçirilen baş normallar. Umumy MT galtaşýanly egrileriň içinden üst bilen has köp baglysyny tapalyň. Üsti oňa geçirilen normal boýunça kessek, netijede kesikde egri emele geler, oňa normal kesik (Γ_0) diýip at berýäris.

Bellik: Eger-de II kwadrat formanyň koeffisiýentleri üçin $L=M=N=0$ bolsalar, onda islendik galtaşýan ugur asimptotik bolar.

Goý, Γ_0 egriniň egriligi k_0 ($k_0>0$) bolsun. C_0 - egrilik merkezi. k_0 egriligiň alamaty boýunça alynýar we $R_0=1/k_0$ egrilik radiusy. *TMN* tekizlik Γ_0 normal kesik üçin galtaşyjy tekizlik bolar.

$\overline{MN}$ wektor Γ_0 üçin baş normal bolar. *MN* çyzygyň dowamynda C_0 nokady ýerleşdirýäris we şol ugurda $\overline{m}=\overline{n}_0$ wektory hem alarys, $\overline{n}_0 - \Gamma_0$ egriniň baş normalynyň ugruna birlik wektor. Üstdäki egriler üçin differensial geometriýanyň esasy formulalaryny alarys:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma - \text{ucin}: k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2}{Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2} \\ &\Gamma_0 - \text{ucin}: k_\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdud\upsilon + Nd\upsilon^2}{Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2} \end{aligned}\right\}$$

Sebäbi Γ_0 üçin $\mathbf{m}=\mathbf{n_0}$ we $\theta=(\mathbf{m}\wedge\mathbf{n_0})=0$. $\cos\theta=1$. Bu ulgamdan

$$\boldsymbol{k\cos\theta=k_0}$$

deňlige geleris. θ - burçuň ýitiligi üçin $\cos\theta>0$, hem-de $k_0>0$; onda $k>0$.

Soňky deňlikde egrilik radiuslaryny ulansak

$$\frac{1}{R}\cos\theta = \frac{1}{R_0},$$ ýa-da

$$R = R_0 \cos\theta$$

deňlige geleris. Çyzgydan görnüşi ýaly

$\overline{m} \perp \overline{MT},\ \overline{n} \perp \overline{MT}$ we

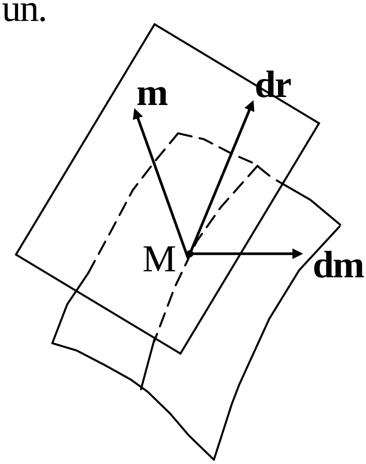
$\theta = (\overline{m} \,\hat{}\, \overline{n})-$ burç MTC we MTC_0 tekizlikleriň arasyndaky ikigranly burçy kesgitleýär. Şeýlelikde **Meńýe teoremasy** dogrudyr:

Üstdäki berlen nokatdan geçýän we şol bir galtaşýanly Γ_0 normal kesik we erkin Γ egri üçin Γ egriniň egrilik radiusy Γ_0 egriniň egrilik radiusynyň bu egrileriň galtaşyjy tekizlikleriniň arasyndaky ikigranly burçunyň kosinusyna köpeldilmegine deňdir.

§19. Üstleriň baş ugurlary we baş egrilikleri. Eýler formulasy

Üstlerdäki baş ugurlar we baş egrilikler üstleri öwrenmekde möhüm ähmiýete eýedirler. Ilki bilen baş ugurlaryň kesgitlenşine seredeliň.

Goý, $\bar{r} = \bar{r}(u, \upsilon)$ wektor funksiýa käbir üsti kesgitlesin. Üsti $\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon$ wektorlaryň özara parallel däl bolmak şerti ýerine ýetirýän M nokadynyň etrabynda öwrenmäge geçýäris. Goý $\bar{m} = \bar{m}(u, \upsilon)$ üste geçirilen birlik normal wektor bolsun.



40-njy çyzgy

Eger-de M nokatdan üst boýunça tükeniksiz kiçi süýşme geçirilse, onda iki wektor hem artdyrma alar, olaryň baş bahalary

$$\left.\begin{array}{l} d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_\upsilon d\upsilon \\ d\bar{m} = \bar{m}_u du + \bar{m}_\upsilon d\upsilon \end{array}\right\}$$

differensiallaryň kömegi bilen galtaşýan wektorlar hökmünde berler.
Hemişelik wektorlar üçin

$$\left(d\bar{m}, \bar{m}\right) = 0, \quad d\bar{m} \perp \bar{m}.$$

M nokatdan düli ugur boýunça süýşme geçirip bolýanlygy üçin d**r**, d**m** wektorlar süýşme ugruna we ululygyna bagly bolarlar. Bu süýşmeleriň islendigi üçin d**m** wektor d**r** wektora baglylykda elmydama kesgitli bir çyzykly wektor funksiýa bilen kesgitlenip bilner, olaryň özara baglanyşygy:

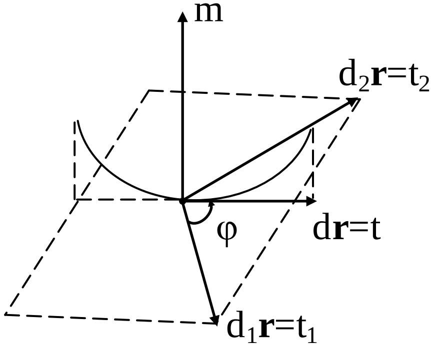
$$A\left(d\bar{r}\right) = d\bar{m} \qquad (1)$$

Şeýle hem tekizlikde kollinear däl wektorlar üçin olary kollinear däl wektorlara geçirýän çyzykly wektor funksiýany gurup bolýar:

$$A\left(\bar{r}_u\right) = \bar{m}_u, \quad A\left(\bar{r}_\upsilon\right) = \bar{m}_\upsilon. \quad (\mathbf{r}_u \nparallel \mathbf{r}_\upsilon), (\mathbf{m}_\upsilon \nparallel \mathbf{m}_u)$$

Belli bolşy ýaly, hususy ugurlar hususy wektorlaryň kollinearlygyndan alynýar we *M* nokatdan galtaşýan tekizlikde özara ortogonal bolan A(***u***) wektoryň ugurlaryny kesgitläp bolýar, (degişli hususy bahalary bilen).

1-nji kesgitleme: Üstüň her bir berlen nokadynda A(*u*) wektor ($A\bar{a}=\lambda\bar{a}$, λ - hususy baha, *a* - hususy wektor) funksiýanyň hususy ugurlaryna üstdäki baş ugurlar diýilýär.



41-nji çyzgy

Çyzgydaky wektorlar üçin

$$A(\bar{t}_1)=\lambda_1\bar{t}_1$$

$$A(\bar{t}_2)=\lambda_2\bar{t}_2$$

Menýe teoremasy boýunça

$$k\cos\theta=k_0,$$

ýa-da erkin Γ egriniň egriligi Γ_0 normal kesigiň egriligi bilen aňladylýar (şol bir nokatda, şol bir galtaşýan bilen).

Bu ýagdaýda “Süýşmäniň ugruna baglylykda normal kesigiň $\boldsymbol{k_0}$ egriligi nähili üýtgeýär?” diýlen soragyň ýüze çykmaklygy tebigydyr. Bu sorag aşakdaky ýaly çözülýär. Normal kesigiň baş normaly üstüň normaly bilen gabat gelýär. $\bar{n}_0 = \pm \bar{m}$ bolany üçin θ=0 ýa-da $\pi \Rightarrow \cos\theta = \pm 1$. Bu ýerde

$$\bar{n}_0 = \bar{m} \Rightarrow k_0 > 0, \quad \bar{n}_0 = -\bar{m} \Rightarrow k_0 < 0$$

Onda Menýe teoremasy boýunça

$$\tilde{k} = k_0 \cos\theta = \begin{cases} k_0, \\ -k_0, \end{cases} \quad (k_0 \geq 0)$$

Şeýlelikde, $\tilde{k}$ >0 bolanda Γ_0 egri öz galtaşýanyndan **m** wektora we $\tilde{k}$ <0 bolanda bolsa Γ_0 egri öz galtaşýanyndan **-m** wektora gyşarar. Başgaça aýdylanda bu formula Γ_0 normal kesigiň egriliginiň üstdäki nokadyň alnyşyna we onuň galtaşýanyna baglylygyny aňladýar. Diýmek, üsdäki baş ugurlar ondaky egrileriň galtaşýanlary boýunça ýatýarlar.

Indi üstdäki **baş egrilikleri** kesgitläliň. Goý, **t** normal kesigiň berlen nokatdaky birlik galtaşýan wektory bolsun. Goý, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ $(\mathbf{t}_1 \perp \mathbf{t}_2)$. Onda her bir φ($\boldsymbol{t_1}$ we $\boldsymbol{t_2}$ wektrolaryň arsyndaky burç) üçin kesgitli **t** galtaşýan wektor, kesfgitli normal kesik bolar: ýagny $\widetilde{k} = \widetilde{k}(\varphi)$ baglanşyk bardyr. Differensial geometriýanyň esasy

$$k_0 \cos\theta = \frac{II \text{ kwadrat forma}}{I \text{ kwadrat forma}}$$

deňlemesinden, hem-de birinji we ikinji kwadrat formalaryň kesgitlemelerinden:

$$II = -(d\bar{r}, d\overline{m}), \quad I = dl^2$$

we

$$\widetilde{k} = k_0 \cos\theta$$

deňlikden alarys:

$$\widetilde{k} = -\frac{(d\bar{r}, d\overline{m})}{dl^2} = -\left(\frac{d\bar{r}}{dl}, \frac{d\overline{m}}{dl}\right), \qquad A(d\bar{r}) = d\overline{m}$$

ýa-da

$$A\left(\frac{d\bar{r}}{dl}\right) = \frac{d\overline{m}}{dl} \quad we \quad \frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{t}$$

deňliklerden alarys.

$$\frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{t} = \bar{t}_1 \cos\varphi + \bar{t}_2 \sin\varphi$$

$$\frac{d\bar{m}}{dl} = A\left(\frac{d\bar{r}}{dl}\right) = A\left(\bar{t}_1 \cos\varphi + \bar{t}_2 \sin\varphi\right) =$$

$$= \cos\varphi \cdot A\left(\bar{t}_1\right) + \sin\varphi \cdot A\left(\bar{t}_2\right)$$

$$\frac{d\bar{m}}{dl} = \lambda_1 \bar{t}_1 \cos\varphi + \lambda_2 \bar{t}_2 \sin\varphi$$

Onda

$$\tilde{k} = -\left(\frac{d\bar{r}}{dl}, \frac{d\bar{m}}{dl}\right) =$$

$$= -\left(\bar{t}_1 \cos\varphi + \bar{t}_2 \sin\varphi, \lambda_1 \bar{t}_1 \cos\varphi + \lambda_2 \bar{t}_2 \sin\varphi\right);$$

Bu deňlikde saklýar köpeltmek hasyly ýerine ýetirip we degişli belgilemeleri ulanyp alarys:

$$\tilde{k} = -\lambda_1 \cos^2\varphi - \lambda_2 \sin^2\varphi \ .$$

Bu deňlik normal kesigiň egriliginiň onuň galtaşýanynyň birinji baş ugurdan daşlaşma burçuna baglylygyny görkezýär.

Bu deňligiň geometrik manysyna seredeliň. Goý, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Bu deňlik eger-de $\varphi = 0$ bolsa, onda $\bar{t} = \bar{t}_1$ galtaşýan normal kesikde birinji ugury we birinji normal kesigiň $k_1 = -\lambda_1$ egriligini kesgitlär; eger-de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $\bar{t} = \bar{t}_2$ galtaşýan normal kesikde ikinji ugury we ikinji normal kesigiň $k_2 = -\lambda_2$ egriligini kesgitlär $(k_1 \neq k_2)$.

Üstüň berlen nokadyndaky galtaşýanlary baş ugurlar boýunça ýerleşen normal kesiklerine üstüň baş kesikleri, olaryň egriliklerine (k_1,k_2) bolsa baş egrilikler diýilýär.

Degişli belgilemeler Eýler formulasyna getirýär:

$$\widetilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

Baş egrilikler üçin 1) $k_2 > k_1$ deňsizlik ýerliklidir. Hakykatdan hem

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi, \quad \widetilde{k} = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2 \varphi.$$

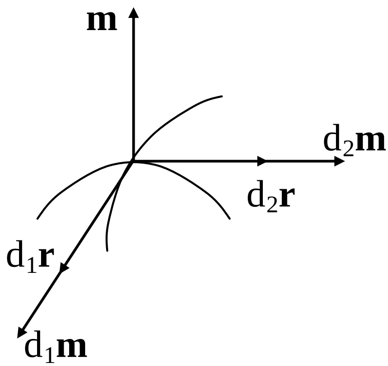
$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}(\max), \ \widetilde{k} = k_2$$

$$\varphi = 0(\min), \ \widetilde{k} = k_1.$$

2) $\varphi = -\varphi$ bolsa $\widetilde{k}$ - üýtgewsiz galar.

3) Galtaşýan birinji baş ugurdan ikinji baş ugura öwrülende normal kesigiň egriligi üçin $k_1 \leq \widetilde{k} \leq k_2$ deňsizlik dogry we $\widetilde{k}$ monoton artýar.

4) Baş ugurlar we baş egrilikler aşakdaky ýaly gysgaça hem berlip bilner. Tükeniksiz kiçi süýşme üçin alarys($d_1\overline{m}$, $d_2\overline{m}$ - baş ugurlar):



42-nji çyzgy

Hususy baha we hususy wektorlar üçin: $d\overline{m} = A(d\overline{r})$ we

$$A(d\overline{r}) = \lambda_1 d\overline{r} \qquad\qquad A(d\overline{r}) = \lambda_2 d\overline{r}$$

$$\lambda_1 = -k_1 \qquad \text{ýa-da} \qquad \lambda_2 = -k_2$$

$$d\overline{m} = -k_1 d\overline{r} \qquad\qquad d\overline{m} = -k_2 d\overline{r}$$

Bu ýerden $\qquad d\overline{m} = -kd\overline{r}$.

Hususy halda: $\lambda_1 = \lambda_2 = a,\ \ \widetilde{k} = -a$ bolanda $d\overline{m} = ad\overline{r}$ deňlik ýerine ýetýär. Bu ýagdaý sferanyň togalanmak nokadyny kesgitleýär.

§20. Baş egrilikleri we baş ugurlary hasaplamak

19-njy paragrafda baş egrilikleriň we baş ugurlaryň formulalary getirilip çykarldy. Bu paragrafda şol formulalary hasaplamakda ulanmaga oňaýly bolar ýaly görnüşe getirýäris. Goý, üst **r**=**r**(u,υ) deňleme bilen berilsin we onuň üçin I, II kwadratik formalaryň koeffisiýentleri kesgitlenen bolsun.
I kwadrat forma üçin:

$$dl^2 = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2$$

$$E = (\bar{r}_u, \bar{r}_u), \; F = (\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon), \; G = (\bar{r}_\upsilon, \bar{r}_\upsilon),$$

II kwadrat forma üçin:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + ndv^2 = -\left(d\overline{m}, d\bar{r}\right)$$

$$L = (\bar{r}_{uu}, \overline{m}) = -(\overline{m}_u, \bar{r}_u),$$

$$M = (\bar{r}_{u\upsilon}, \overline{m}) = -(\overline{m}_\upsilon, \bar{r}_u) = -(\overline{m}_u, \bar{r}_\upsilon)$$

$$N = (\bar{r}_{\upsilon\upsilon}, \overline{m}) = -(\overline{m}_\upsilon, \bar{r}_\upsilon)$$

$$\overline{m} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon]}{\left\|[\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon]\right\|}, \text{ bu ýerde } \left\|[\bar{r}_u, \bar{r}_\upsilon]\right\| = \sqrt{EG - F^2}$$

Belli bolşy ýaly $d\upsilon/du$ gatnaşyk tükeniksiz kiçi süýşmede baş ugury kesgitleýär. Baş uguryň we baş egriligiň

$$d\overline{m} = -kd\overline{r} \qquad (1)$$

deňlik bilen kesgitlenişini görkezýäris. Bu deňlikden differensiallary ulanyp alarys:

$$\overline{m}_u du + \overline{m}_\upsilon d\upsilon = -k\left(\overline{r}_u du + \overline{r}_\upsilon d\upsilon\right) \qquad (2)$$

Bu deňligi $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_\upsilon$ wektorlara skalýar köpeldeliň:

$$\begin{cases} (\overline{r}_u, \overline{m}_u)du + (\overline{m}_\upsilon, \overline{r}_u)d\upsilon = -k\left[\left((\overline{r}_u, \overline{r}_u)du + (\overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon)d\upsilon\right)\right] \\ (\overline{r}_\upsilon, \overline{m}_u)du + (\overline{m}_\upsilon, \overline{r}_\upsilon)d\upsilon = -k\left[\left((\overline{r}_u, \overline{r}_\upsilon)du + (\overline{r}_\upsilon, \overline{r}_\upsilon)d\upsilon\right)\right] \end{cases}$$

I, II kwadratik formanyň koeffisiýentlerini ulanýarys:

$$\begin{cases} -Ldu - Mdv = -k(Edu + Fdv) \\ -Mdu - Ndv = -k(Fdu + Gdv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ldu + Mdv = k(Edu + Fdv) \\ Mdu + Ndv = k(Fdu + Gdv) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} (L - kE)du + (M - kF)dv = 0 \\ (M - kF)du + (N - kG)dv = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Bu ulgam du,dυ ululyklara görä çözülýär. Onda

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$\left(EG - F^2\right)k^2 + \left(2MF - NE - LG\right)k + \\ + \left(LN - M^2\right) = 0 \qquad (5)$$

Bu deńleme k görä kwadrat deńlemedir, onuń k_1, k_2 köklerini Wiýetiń teoremasy boýunça alarys:

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}; \\ k_1 + k_2 = -\dfrac{2MF - LG - NE}{EG - F^2} = \dfrac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2} \end{cases}$$

$K = k_1 \cdot k_2$ - ululyga üstüň doly ýa-da Gauss egriligi, $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ - ululyga üstüň orta egriligi diýilýär. Olara baş egrilikler diýilýär. Baş egrilikleri hasplamak fomulalary alyndy.

Baş ugry kesgitlmegiň fomulalaryny almak üçin (3) ulgamdan k ululygy ýitirip, $d\upsilon/du$ gatnaşygy kesgitlemeli. Alarys:

$$\begin{vmatrix} Ldu + Md\upsilon & Edu + Fd\upsilon \\ Mdu + Nd\upsilon & Fdu + Gd\upsilon \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$du^2(LF - ME) + (MF + LG - NE - MF)dud\upsilon + \\ + d\upsilon^2(MG - NF) = 0$$

ýa-da

$$(LF-ME)+(LG-EN)\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)+$$

$$+(MG-NF)\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)^2=0$$

Bu deňlikden

$$\begin{cases}\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)_1\cdot\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)_2=\frac{LF-ME}{MG-NF}\\ \left(\frac{d\upsilon}{du}\right)_1+\left(\frac{d\upsilon}{du}\right)_2=-\frac{LG-NE}{MG-NF}=\frac{EN-LG}{MG-NF}.\end{cases}$$

Bu formulalar baş ugurlary hasaplamagyň formulalarydyr.

Bellik: Eger-de üstdäki egriniň galtaşýany baş ugurlaryň haýsy bolsa-da biri boýunça ugrukdyrylsa, onda ol egrä **egrilik çyzygy** diýilýär.

§21. Üstüň nokatlarynyň üç görnüşi

Matematiki fizikanyň deňlemeleri dersinde elliptik, parabolik we giperbolik üstler öwrenilýär. Şu paragrafda üstüň nokatlarynyň üç görnüşiniň - elliptik, parabolik we giperbolik üstleriň alynmak şertlerini öwreneris.

Goý, elementar F üst $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ deňleme bilen berlen bolsun. Üstüň M nokadyndan geçýän çyzyklaryň egrilikleriniň arasyndaky baglanşyga seredeliň. Bu nokatda geçirilen galtaşýanlar gönüler dessesini emele getirer we olaryň hemmesi M nokatda geçirilen galtaşýan tekizlige degişlidir. Bu dessäniň her gönüsinde M nokatdan uzynlygy $\left|\overline{MP}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{\left|k_{\overline{m}}\right|}}$ bolan kesimi iki tarapa hem alyp goýalyň. Bu kesimleriň uçlary ikinji tertipli çyzygy emele getirer. Ol çyzyga-da F üstüň M nokatdaky **Dýupeniň** ýa-da **egrilik indikatrisasy** diýilýär. Onuň deňlemesini düzeliň:

Goý, F üstüň M nokadyndan geçýän käbir çyzygyň deňlemesi

$$u = u(l), \qquad \upsilon = \upsilon(l) \qquad (1)$$

görnüşde berilsin. $P(x,y)$ indikatrisanyň islendik nokady bolsun. Indikatrisanyň gurluşy boýunça alarys:

$$\overline{MP} = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_{\overline{m}}|}} \cdot \mathbf{t} \qquad (2)$$

t – galtaşýan birlik wektor. Bu deňligi başgaça

$$\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{r}_u \frac{du}{dl} + \bar{r}_\upsilon \frac{d\upsilon}{dl}, \quad \overline{MP} = x\bar{r}_u + y\bar{r}_\upsilon$$

deňlikleriň kömegi bilen:

$$x\bar{r}_u + y\bar{r}_\upsilon = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_{\overline{m}}|}} \left(\bar{r}_u \frac{du}{dl} + \bar{r}_\upsilon \frac{d\upsilon}{dl} \right), \qquad (3)$$

görnüşe getirereris. Bu ýerde (x,y) koordinatalar P nokadyň $(M, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_\upsilon)$ affin koordinatalardaky koordinatalarydyr.

(3) deňlikden alarys:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_{\overline{m}}|}} \frac{du}{dl}, \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_{\overline{m}}|}} \frac{d\upsilon}{dl}$$

ýa-da

$$\frac{du}{dl} = \pm x\sqrt{|k_{\overline{m}}|}\ , \qquad \frac{d\upsilon}{dl} = \pm y\sqrt{|k_{\overline{m}}|}$$

Onda

$$k_{\overline{m}} = k \cdot \cos\theta = \frac{II(du, d\upsilon)}{I(du, d\upsilon)} = \frac{II(du, d\upsilon)}{dl^2}$$

deňleme aşakdaky ýaly özgerer:

$$k_{\overline{m}} = L(u,\upsilon)\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + 2M(u,\upsilon)\frac{du}{dl}\cdot\frac{d\upsilon}{dl} +$$

$$+ N(u,\upsilon)\frac{d\upsilon}{dl} = L(u,\upsilon)\left(\pm x\sqrt{|k_{\overline{m}}|}\right)^2 +$$

$$+ 2M(u,\upsilon)\left(\pm x\sqrt{|k_{\overline{m}}|}\right)\left(\pm y\sqrt{|k_{\overline{m}}|}\right) +$$

$$+ N(u,\upsilon)\left(\pm y\sqrt{|k_{\overline{m}}|}\right)^2$$

Bu ýerde deňligiň iki bölegini hem k_m – e gysgaldyp alarys:

$$L(u,v)x^2 + 2M(u,v)xy + N(u,v)y^2 = \pm 1 \qquad (4)$$

Bu deňlemä **Dýupeniň** deňlemesi ýa-da **egrilik indikatrisasy** diýilýär.

Üç ýagdaý emele gelmegi mümkin :
1. $\boldsymbol{LN\text{-}M^2}>0$ bolanda (4) deňlik **ellipsi** kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna **elliptik** nokat diýilýär. Üstüň elliptik nokatlarynyü köplügi elliptik üsti emele getirýär.
2. $\boldsymbol{LN\text{-}M^2}<0$ bolanda (4) deňlik **giperbolany** kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna **giperbolik** nokat diýilýär. Üstüň giperbolik nokatlarynyü köplügi giperbolik üsti emele getirýär.
3. $\boldsymbol{LN\text{-}M^2}=0$ bolanda (4) deňlik **parabolany** kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna **parabolik** nokat diýilýär. Üstüň parabolik nokatlarynyü köplügi parabolik üsti emele getirýär.

Myal üçin: Ellipsoidiň ähli nokatlary – elliptik; giperbolik paraboloidiň ähli nokatlary – giperbolik; silindriň ähli nokatlary – parabolik nokatlary emele getirýärler.

Bu üç ýagdaýyň Gauss ýa-da $K=k_1 \cdot k_2$ doly egrilik bilen alnyşyna seredeliň.

1). Goý, **K**(M)>0 bolsun. Bu ýagdaýda elmydama $\boldsymbol{EG\text{-}F^2}>0$. Onda

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} > 0$$

bu deňsizlikden

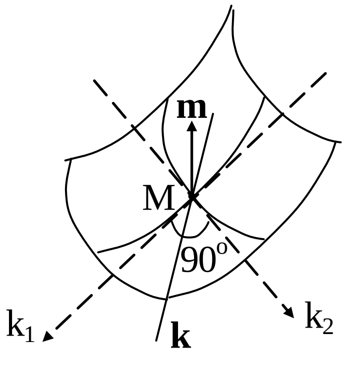
$$LN - M^2 > 0$$

deňsizlige geleris. Diýmek M nokat elliptik nokatdyr. $K=k_1 \cdot k_2>0$ bolanda $k_1>0$, $k_2>0$ bolarlar. Bu ýagdaýda iki baş ugur hem **m** normala tarap epilýär, ýagny Eýler formulasy boýunça

$$\overline{K} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi > 0$$

ähli normal kesikler **m** tarapa epilýär, sebäbi ählisiniň egrilikleri **K**>0. Şeýlelikde, üst ähli ugur boýunça bir tarapa epiler(43-nji çyzgy)

.



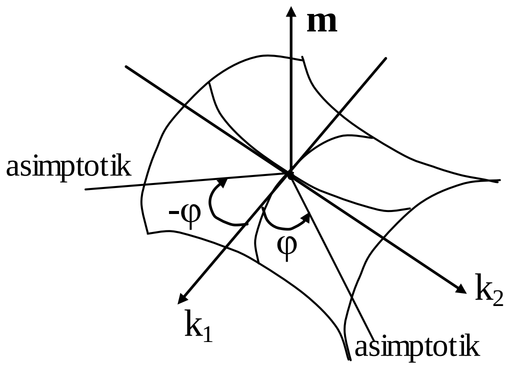
43-nji çyzgy

Belli bolşy ýaly, k_1 < ***k*** < k_2 , ýagny ***k*** egrilik monoton ösýär.
Eger-de $k_1<0$, $k_2<0$ bolsalar onda hemme ýagdaý **m** wektora görä üýtgär.

2). Goý, $\boldsymbol{K}(M) < 0$ bolsun. Bu ýagdaýda

$$\boldsymbol{LN-M^2}<0$$

deňsizlige geleris. Diýmek *M* nokat giperbolik nokatdyr. Onda $K=k_1 \cdot k_2 < 0$. Goý, $k_1<0$, $k_2>0$ bolsunlar. Bu ýagdaýda bir baş kesik **-m** wektora, beýlekisi **m** wektora tarap epilýär. Haçanda *M* nokatdaky galtaşýan bir baş ugurdan beýleki baş ugura aýlananda (90^o öwrülende) onuň ***k*** egriligi $k_1<0$ – dan $k_2>0$ çenli monoton artýar we arasynda $\boldsymbol{k}=0$ bahany hem alyp geçýär(44-nji çyzgy):



44-nji çyzgy

Eýler formulasy boýunça alarys:

$$\tilde{k} = 0 = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi \Rightarrow tg\varphi = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

Bu deňlikden birinji uguryň $\varphi = arctg\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ burç boýunça, beýleki uguryň bolsa $\varphi = -arctg\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ burç boýunça alynjakdygyna göz ýetireris.

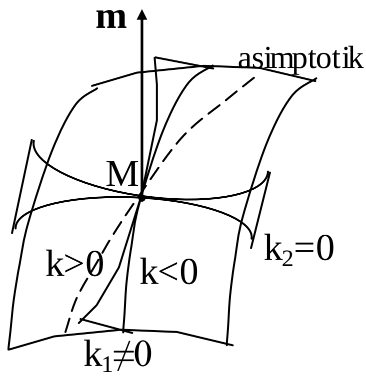
M noktda iki sany normal kesik bar. Şol kesikde $\tilde{k} = 0$, ol ýerde asimptotik çyzyklar bar. Giperbolik nokadyň etrabynda üst eýer görnüşdedir.

3) Goý, $\boldsymbol{K}(M)=0$ bolsun. Onda

$$\boldsymbol{LN-M^2}=0.$$

Bu ýagdaýda M nokat parabolik nokatdyr. $k_1 \bullet k_2=0$ bolanda $k_2=0$, $k_1 \neq 0$ bolýarlar. $k_1<0$ diýip **m** wektoryň tersine bir baş ugury alalyň. Ikinjisi üçin ($k_2=0$) egriniň gönelmesi ýüze çykýar. Netije-de üst tersine gyşarýar. Bu ýagdaýda asimptotik çyzyk k_2 baş ugur bilen gabat gelýär. Başgasy ýokdur.

Parabolik nokatlar giperbolik we elliptik nokatlary bir-birinden aýyrýarlar(45-nji çyzgy).



45-nji çyzgy

§22. Üstleriň içki geometriýasy. Geodeziýa egrileri

Üstleriň **içki geometriýasy** üstleriň, olaryň üstündäki figuralaryň epilme netijesinde üýtgemeýän häsiýetlerini öwrenýär. Ähli planimetriýa tekizlikdäki içki geometriýany kesgitleýär.

Goý, Φ we $\tilde{\Phi}$ üstler berlip, olar üçin üznüksiz f: $\Phi \rightarrow \tilde{\Phi}$ biektiw şekillendirme bar bolsun. Bu şekillendirme üstleriň nokatlarynyň arasynda özara birbahaly degişliligi berýär. Şunlukda Φ üstdäki her bir C egrä $\tilde{\Phi}$ üstdäki $\tilde{C}$ egrä degişli edilýär we tersine:

$$\tilde{C} = f(C), \ C = f^{-1}\left(\tilde{C}\right)$$

Eger-de, şunlukda C we $\tilde{C}$ egrileriň uzynlyklary gabat gelseler, onda $\tilde{\Phi}$ üst Φ üstden **epilmäniň (izgibaniýe)** kömegi bilen alnan diýilýär. Şekillendirmä bolsa izometriýa ýa-da **epilme** diýilýär.

Epılmänıň aşakdaky mysalyna seredelıň:

Goý, Φ we $\tilde{\Phi}$ üstler $\boldsymbol{r}(u,v)$, $\tilde{r}(u,v)$ wektor funksiýalar bilen parametrlensinler we ikisi-de şol bir V ýaýlada kesgitlenen bolsunlar.

Goý, $f\colon P \to \widetilde{P}$, $P \in \Phi$, $\widetilde{P} \in \widetilde{\Phi}$ bolsun. Onda alarys:

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(u,\upsilon))= \widetilde{r}(u,\upsilon)$.

Φ we $\widetilde{\Phi}$ üstler üçin birinji kwadrat formanyň koordinalarynyň özara deň ýagdaýyna seredeliň:

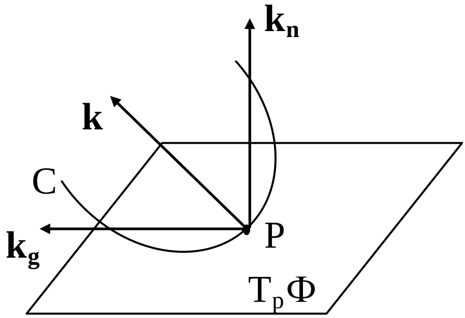
$$E(u,\upsilon) \equiv \widetilde{E}(u,\upsilon), F(u,\upsilon) \equiv \widetilde{F}(u,\upsilon), G(u,\upsilon) \equiv \widetilde{G}(u,\upsilon).$$

Bu ýagdaýda f epilme bolar, we tersine hem ýerine ýetýär. Şeýlelikde, üstleriň içki geometriýasyna birinji kwadratik formanyň kömegi bilen alynýan häsiýetler hem girýär (egrileriň uzynlyklary, olaryň arasyndaky burç, üstüň meýdany).

Girişde bellenilip geçilişi ýaly, nemes matematigi K.Gauss üstleriň içki geometriýasynyň döremeginiň we ösmeginiň gözbaşynda durýar. Ol özüniň Gauss teoremasy ady bilen belli bolan teoremasyny subut edipdir: **Üstleriň Gauss egrilikleri epilme netijesinde üýtgemeýär.**

Şeýlelikde, Gauss egriligi düşünjesi-de üstleriň içki geometriýasyna degişli bolýar.

Indi, geodezıýa egrileri we geodeziki egrilik düşünjelerini kesgitläliň. Goý, C egri Φ endigan üstde berlen bolsun. $\boldsymbol{k}$ bolsa egriniň P nokatdaky egrilik wektory bolsun. Geodeziýada alnyşy ýaly, $\boldsymbol{k}$ wektor iki sany $\boldsymbol{k}_g$ we $\boldsymbol{k}_n$ wektorlara dargaýar. Olar özara perpendikulýardyr(46-njy çyzgy).



46-njy çyzgy

Bize belli bolşy ýaly $\boldsymbol{k}_n$ wektoryň uzynlygy C egriniň P nokatdaky normal egriliginiň absolýut ululygyna deňdir:

$$|\boldsymbol{k}_n|=|k_n|$$

$k_g=|\boldsymbol{k}_g|$ ululyga C egriniň P nokatdaky **geodeziki egriligi** diýilýär. $\boldsymbol{k}_g$,$\boldsymbol{k}_n$ perpendikulýar wektorlar. Mundan bolsa

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2, \quad k = \left|\bar{k}\right|$$

deňlige gelinýär. $\boldsymbol{k}$ - C egriniň P nokatdaky egriligi.

Eger-de C egri $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen we $P=\boldsymbol{\upsilon}(t_0)$ bolsa, onda P nokatdaky geodezik egrilik

$$k_g = \frac{\left|\left(\overline{\upsilon}''(t_0), \overline{\upsilon}'(t_0), \overline{n}\right)\right|}{\left|\overline{\upsilon}'(t_0)\right|^3},$$

nirede **n** – P nokatda üste geçirilen normal.

Mysal. $z = x^2 + y^2$ deňleme bilen berlen üstüň käbir nokadyndaky geodezik egriligini hasaplamaly.

Çözülişi: Bu üstüň parametrik

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\cos t \\ y &= \sqrt{a}\sin t \\ z &= a \end{aligned}\right\}$$

deňlemesini alalyň we $t_0 = \frac{\pi}{2}$ bolanda geodeziki egriligini hasaplalyň. Onda üstüň P nokadynyň koordinatalary $P = P\left(o; \sqrt{a}; a\right)$ bolar. Degişli hasaplamalardan soňra

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\sqrt{a}\sin t \\ y' &= \sqrt{a}\cos t \\ z' &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x'' &= -\sqrt{a}\cos t \\ y'' &= -\sqrt{a}\sin t \\ z'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left|\overline{v}'(t)\right| = \left|\overline{v}''(t)\right| = \sqrt{a} \quad \text{we}$$

$$\overline{n} = -\cos t \cdot i - \sin t \cdot j + 0 \cdot k\,,$$

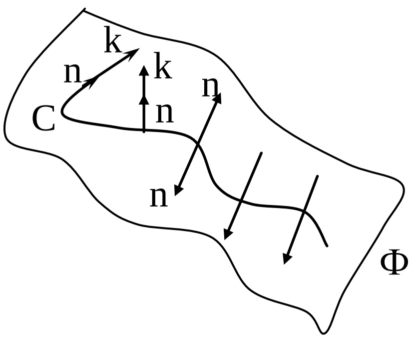
$$(\overline{v}''(t), \overline{v}'(t), \overline{n}) = 0. \quad \text{Onda} \quad k_g = 0\,.$$

Üstleriň her bir nokadynda geodeziki egrilikleri nola deň bolan egriler has aýratyn gyzyklanma döredýär. Beýle egrilere **geodeziki egriler** diýilýär. Mysal üçin, tekizlikdäki göni çyzyklaryň kesimleri(olaryň egrilikleri her bir nokatda nola deňdir) geodeziki egrilerdir.

Içki geometriýa üçin geodeziki egrileriň aýratyn möhümligini gökezýän aşakdaky häsiýetleri sanap bolar:

Eger-de C geodeziki egri bolsa, onda

1. C egriniň her bir nokadynda onuň baş normal wektory üstüň normal wektory bilen gabat gelýär.



47-nji çyzgy

2. C egriniň her bir nokadynda galtaşyjy tekizlik üste geçirilen normalyň üstünden geçýär.
3. C egriniň her bir nokadynda göneldiji tekizlik üste geçirilen galtaşýan tekizlige gabat gelýär.
4. Berlen nokat we berlen ugur boýunça geçirilen egrileriň içinde C egri özüniň her bir nokadynda iň kiçi egrilige eýedir, ýagny ol C egri bu egrileriň içinde has "**gönürägidir**".
5. Eger-de C egri $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen bolsa, onda garyşyk köpeltmek hasyl nola deüdir:

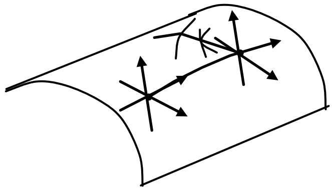
$$(\boldsymbol{\upsilon}''(t),\boldsymbol{\upsilon}'(t),\mathbf{n})\equiv 0$$

Bellik: Bu häsıýetleriň her birini kesgitleme hökmünde käbul etmek bolar.

Belli bolşy ýaly, tekizlikde iki nokadyň üsti bilen bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar. Geodeziki egriler üçin bu dogry däldir.

Teorema: Her bir nokatda görkezilen ugur boýunça ýeke-täk geodeziki egri geçýär

(Geodeziki egriniň islendik dugasy ýene-de geodezikidir. Örän gysga şol bir nokatdan, şol bir ugur boýunça geçýän geodeziki egrileri uly geodeziki egriniň dugasy hökmünde hasap edýarler).



48-nji çyzgy

Subudy: Teoremany subut etmek üçin geodeziki egriniň differensial deňlemesini düzeliň. Goý, Φ üst $\mathbf{r}(u,\upsilon)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen bolsun.
u=t , υ=ψ(t) deňlikleriň kömegi bilen geodeziki egriniň içki deňlemesini girizeliň. Onda geodeziki egriniň parametrlemesi

$$\bar{r} = \bar{\upsilon}(t) = \bar{g}(t, \psi(t))$$

görnüşli bolar. Alarys:

$$\bar{\upsilon}'(t) = \bar{g}_u(t, \psi(t)) + \bar{g}_\upsilon(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

$$\bar{\upsilon}''(t) = \bar{g}_{uu}(t, \psi(t)) + 2\bar{g}_{u\upsilon}(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t) +$$

$$+ \bar{g}_{\upsilon\upsilon}(t, \psi(t)) \cdot \psi'^2(t) + \bar{g}_\upsilon(t, \psi(t))\psi''(t)$$

Onda (**υ´´**,**υ´**,**n**) köpeltmek hasyly kesgitläliň:

$$\left(\bar{\upsilon}'',\bar{\upsilon}',\bar{n}\right)=\begin{pmatrix}\bar{g}_{uu}+2\bar{g}_{u\upsilon}\cdot\psi'+\bar{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2+\\ +\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi'',\ \bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\ \bar{n}\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\bar{g}_{uu}+2\bar{g}_{u\upsilon}\cdot\psi'+\bar{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2,\ \bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\ \bar{n}\right)+$$

$$+\left(\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi'',\ \bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\ \bar{n}\right)$$

Soňky goşulyjyny hasaplalyň:

$$\left(\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi'',\bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\bar{n}\right)=$$

$$=\left(\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi'',\bar{g}_u,\bar{n}\right)+\left(\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi'',\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\bar{n}\right)=$$

$$=\psi''\left(\bar{g}_{\upsilon},\bar{g}_u,\bar{n}\right)+\psi''\psi'\left(\bar{g}_{\upsilon},\bar{g}_{\upsilon},\bar{n}\right)=$$

$$=-\psi''\left(\bar{g}_u,\bar{g}_{\upsilon},\bar{n}\right)$$

Şeýle hem (**υ´´**,**υ´**,**n**)=0. Onda alarys:

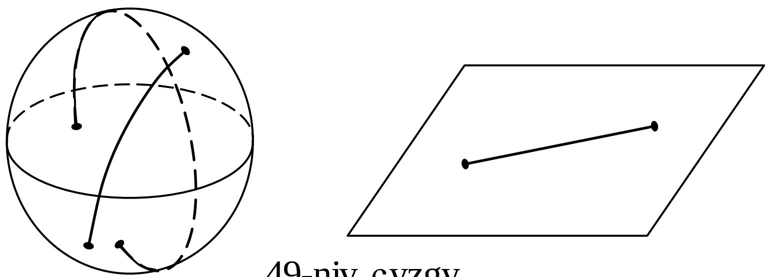
$$\left(\bar{g}_{uu}+2\bar{g}_{u\upsilon}\cdot\psi'+\bar{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2,\ \bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\ \bar{n}\right)=$$

$$=\psi''\left(\bar{g}_u,\bar{g}_{\upsilon},\bar{n}\right)$$

$$\psi''=\frac{\left(\bar{g}_{uu}+2\bar{g}_{u\upsilon}\cdot\psi'+\bar{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2,\ \bar{g}_u+\bar{g}_{\upsilon}\cdot\psi',\ \bar{n}\right)}{\left(\bar{g}_u,\bar{g}_{\upsilon},\bar{n}\right)}$$

Bu deňlige ψ(t) funksiýa görä ikinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde seredip bolar. Ady differensial deňlemeleriň çözüwiniň barlygy we ýeke-täkligi hakyndaky teorema görä her bir nokatda islendik ugur boýunça ýeke-täk geodeziki egri geçer. Teorema subut edildi.

Tekizlikdäki – gönüler; silindrde – töwerekler, buraw çyzyklary, göniler; sferada – uly tegelekleriň töwerekleri geodeziki egrilerdir. Şeýlelikde, bu üstleriň her bir nokadynda islendik ugur boýunça görkezilen çyzyklar geçilýärler. Tekizlikde, silindrde, sferada bu geodeziklerden başgalary ýokdur.



49-njy çyzgy

Hakykatdan hem,

$$\bar{\upsilon}(t) = \bar{g}(t, \psi(t)), \bar{\upsilon}'(t) = \bar{g}_u(t, \psi(t)) + \bar{g}_\upsilon(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t)$$

$$\bar{\upsilon}''(t) = \bar{g}_{uu}(t, \psi(t)) + \bar{g}_{u\upsilon}(t, \psi(t)) \cdot \psi'(t) +$$

$$+ \bar{g}_{u\upsilon}(t, \psi(t))\psi'(t) + \bar{g}_{\upsilon\upsilon}(t, \psi(t)) \cdot \psi'^2(t) +$$

$$+ \bar{g}_\upsilon(t, \psi(t)) \cdot \psi''(t);$$

Onda

$$\left(\bar{g}_\upsilon \cdot \psi'', \ \bar{g}_u + \bar{g}_\upsilon \cdot \psi', \ \bar{n}\right) =$$

$$= \left(\bar{g}_\upsilon \cdot \psi'', g_u, \bar{n}\right) + \left(\bar{g}_\upsilon \cdot \psi'', \ \bar{g}_\upsilon \cdot \psi', \ \bar{n}\right) =$$

$$= -\psi''\left(\bar{g}_u, \bar{g}_\upsilon, \bar{n}\right) = 0.$$

Edebiýat

1. G. Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. I-II kitaplar. Aşgabat, 2009.
2. А.В.Погорелов. Дифференциальная геометрия: Учебник. М., Наука, 1974, 176с.
3. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. Курс дифференциальной геометрии и топологии: Учебник. М., Изд-во Моск. Ун-та, 1980.440с.
4. Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. Современная геометрия: Учеб. пособие. М., Наука, 1979.759 с.
5. Г.Е.Шилов. Математический анализ: Функции нескольких вещественных переменных: Учеб. пособие. В 2-х ч.Москва, Наука, 1972. 622 с.
6. П.К.Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. 3-е изд.Москва,1958. 244 с.
7.П.Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии. М., Физматгиз, 1958. 244 с.
8. А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т. Фоменко. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие. М., Изд-во Моск. Ун-та, 1981.183с.
9. Çyzyklar teoriýasy. I we II bölümler. Aşgabat: TGU. 1983. 85 sah. Taýýarlan G.Gylyjow.
10. Differensial geometriýa (Üstler teoriýasy – I bölüm). Aşgabat: TGU. 1985. 90s. Taýýarlan G.Gylyjow.

11. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под редаксии А.С.Феденко. Москва: Наука, 1979. 272 с.
12. Е.Р. Розендерн. Задачи по дифференциальной геометрии. Москва: Наука, 1971. 64 с.

Mazmuny

At görkeziji

Rozyýew Işanguly, Soltanow Hajymämmet

Differensial geometriýa

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby