I. Rozyýew, H. Soltanow

DIFFERENSIAL GEOMETRIÝA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2015

UOK 514.7+378
R 80

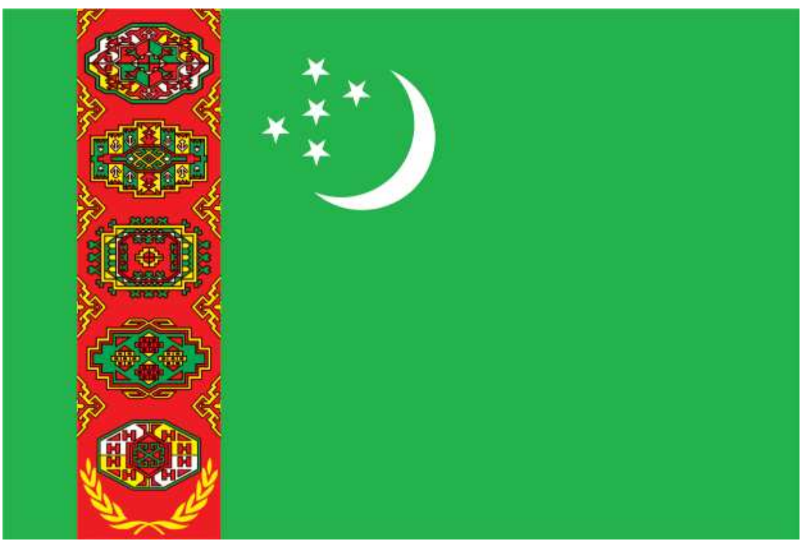
Rozyýew I., Soltanow H.
R 80 **Differensial geometriýa.** Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2015.

Okuw kitaby Türkmen döwlet uniwersitetiniň matematika hünäriniň okuw maksatnamasyna laýyklykda taýýarlanyldy, şeýle hem bu kitap uniwersitetleriň, mugallymçylyk institutynyň matematika, fizika hünärleri boýunça hem-de inžener-tehniki ugurlar boýunça okaýan talyplara we aspirantlara gollanma hökmünde niýetlenendir.

TDKP № 92, 2015 KBK 22.151 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GIRIŞ

Häzirki zaman ylmynyň we tehnikasynyň ösüşi hünärmenlerden dünýä ülňülerine laýyk gelýän bilimleri almaklygy talap edýär. Bu talap bolsa, ylmyň dürli ugurlaryny özara sazlaşykly, düýpli, hemmetaraplaýyn öwrenmeklik bilen amal edilýär. Matematika ylmynyň şu ugurdaky dersleriniň biri-de matematiki derňewiň we analitik geometriýanyň çatrygynda, matematiki fizikanyň we topologiýanyň başlangyçlarynda dörän differensial geometriýa dersidir.

Differensial geometriýa – bu analitik geometriýa esaslanýan, matematiki derňewiň, ilki bilen differensial hasaplamalaryň usullaryny, başgaça aýdylanda, tükeniksiz kiçiler usullaryny giň ulanýan matematikanyň bir bölegi bolup geometriki şekilleri: egri çyzyklary (indiden beýläk egrileri) we üstleri öwrenýän ylymdyr. Differensial geometriýa mahsus bolan aýratynlyk bu egrileri we üstleri «ujypsyz kiçi» ýagdaýda, başgaça aýdylanda, egrileriň we üstleriň ýeterlik derejedäki kiçi bölekleriniň häsiýetlerini öwrenmeklikdir.

Material nokadyň wagta baglylykda geçen ýoluny $S = S(t)$ düzgün boýunça kesgitleýän gönüçyzykly, deňölçegsiz hereketine seredeliň. Bu hereketi t-den $t + \Delta t$ aralygynda öwreneliň. Bu ýerde Δt – örän kiçi ululyk. Matematiki derňewden belli bolşy ýaly, Δt – wagtda geçilen ýol

$$\Delta S = S'(t)\Delta t + \varepsilon \cdot \Delta t$$

düzgün boýunça aňladylýar. Bu ýerde $S'(t)$ önüm, $\varepsilon \to 0$, $\Delta t \to 0$ we $\varepsilon \cdot \Delta t$ ululyk Δt ululyga görä ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululyk, şonuň üçin hem $\Delta t \to 0$ bolanda

$$\Delta S \approx S'(t)\Delta t.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, ΔS ululygyň Δt ululyga gatnaşygy çyzykly bolar, başgaça aýdylanda, hereket hemişelik $S'(t)$ tizlikli deňölçegli hereket bolar.

Bu mysalda görkezilen usul differensial hasaplamalaryň esasyny düzýär, ýagny ýokary tertipli tükeniksiz kiçi ululyklar taşlansa, onda çylşyrymly prossesler ýönekeýleşýär, deňölçegsiz hereketler bolsa deňölçegli bolarlar. Şunlukda, tükenikiz kiçiler usulynda prossesleri öwrenmeklik ýönekeýleşýär. Bu ýagdaý bolsa wajypdyr, sebäbi seredilen mysalda geçilen ýoly wagta görä differensirläp, biz pursatlaýyn tizligi aldyk. Bu ýerden bolsa, gerek ýagdaýynda, integralyň kömegi bilen prossese bitewilikde seretmäge mümkinçilik alýarys.

Differensial geometriýa bolsa, şu görkezilen usuly geometriýada amala aşyrýar, başgaça aýdylanda, egriler we üstler özleriniň gurluşy boýunça tükeniksiz kiçi böleklerde öwrenilýär.

Differensial geometriýa analitik geometriýanyň meselelerinde ýüze çykýan hem bolsa, matematiki derňew bilen berk baglylykda emele geldi we ösdi. Köp geometriki düşünjeler matematiki derňewiň käbir düşünjeleriniň emele gelmegine itergi berdi. Mysal üçin, galtaşýan göni çyzyk (indiden beýläk galtaşýan) – önüm, meýdan, göwrüm – integral ýaly düşünjeleri bilelikde ösdürilýär.

Differensial geometriýanyň emele gelmegi XVII asyryň ahyry, XVIII asyryň birinji ýarymyna degişli bolup, L. Eýleriň, G. Monjyň we beýleki görnükli alymlaryň atlary bilen berk baglydyr.

Differensial geometriýanyň emele gelmeginde we tutuş matematika ylmynyň güýçli ösmeginde Peterburg (Sankt-Peterburg şäheri, Russiýa) Akademiýasynyň agzasy, belli matematik L. Eýleriň (1707–1783) işleri örän uly itergi berdi. Ol üstleriň berlen nokatdaky normal kesikleriniň egriligni derňedi, üstlerdäki baş ugurlary girizdi. Olar üçin Eýler funksiýasyny açdy, egrileriň natural deňlemelerini girizdi.

Differensial geometriýanyň L. Eýlerden soňky ösüşi fransuz matematigi, inženeri G. Monjyň (1746–1818) mekdebine degişlidir.

Üstleriň içki geometriýasy K. Gaussa (1777–1855) degişlidir, ol bu netijelere geodeziýadaky amaly işleriniň kömegi bilen gelýär. 1827-nji ýylda Gauss «Üstlerdäki egrileriň umumy derňewi» atly işinde häzirki zaman görnüşinde üstler nazaryýetiniň esaslaryny berýär. Şu döwürden başlap hem differensial geometriýa matematiki derňewiň bir bölegi bolmakdan aýrylyp, özbaşdak ylym hökmünde ösüp başlaýar.

N.I. Lobaçewskiý tarapyndan ýewklid däl geometriýanyň açylmagy ähli geometriýanyň, şol sanda, differensial geometriýanyň hem ösmegine uly täsir edýär.

1854-nji ýylda B. Riman özüniň «Geometriýanyň esaslaryny düzýän gipotezalar hakynda» diýen işinde Riman geometriýasy atly düşünjäni ylma girizýär.

Kleýniň 1872-nji ýylda «Erlangen maksatnamasy» atly işinde beýan eden ideýasynyň differensial geometriýanyň ulanyşyna degişli işleri E.Kartan tarapyndan ösdürilip proýektiw we affin geometriýalary düşünjelerine gelinýär.

Russiýada F. Minding (1806–1886), K.M. Peterson (1828–1881) tarapyndan differensial geometriýa ösdürildi we olaryň esasy işleri üstler nazarýetine bagyşlanandyr. K.M. Peterson Moskwanyň matematikler jemgyýetini (1867) esaslandyryjylaryň biridir. Onuň käbir işleri beýleki alymlaryň atlaryna ýazylypdyr. Ýogsam ol Maýnardiden 4 ýyl öň, Kodassiden 15 ýyl öň özüniň çap edilmedik dissertasiýasynda birinji we ikinji kwadrat formalaryň koeffisiýentleriniň özara baglanyşygyny görkezýän Maýnardi-Kodassi formulasyny açypdyr. Şol işinde birinji we ikinji kwadrat formalar berlende üsti kesgitläp bolýan Bonne atly teoremany hem subut edipdir. K.M. Peterson «Üstler we egriler hakynda» diýen işinde Şwarsyň – minimal üstleriň epilmesi, Biankiniň – göçürme üstlerine degişli teoremalarynyň subutlaryny beripdir. Differensial geometriýanyň ösmegine D.F. Ýegorow (1869–1930), B.K. Mlodzeýewskiý (1858–1923) yzy bilen bolsa S.P. Finikow uly goşant goşupdyrlar.

1920-nji ýyldan başlap öňki SSSR-de tenzor diffrensiýal geometriýasy has çalt ösüp başlapdy. W.R. Kaganyň (1869–1953) Beýik Watançylyk urşundan soňraky differensial geometriýadaky ylmy işleri şekilleri «bitewilikde» öwrenmeklige bagyşlanandyr. Bu işler özüniň soňky güýçli ösüşlerini A.D. Aleksandrowyň we N.W. Ýefimowyň hem-de olaryň okuwçylarynyň işlerinde öz beýanyny tapdy.

Differensial geometriýadan türkmen dilindäki ilkinji okuw gollanmalary G. Gylyjowa degişlidir. A. Çaryýew we N. Gurbanow türkmen alymlarynyň işlerini öz içine alýan, mysallar bilen üsti ýetirilen çaklaňja okuw gollanmasynyň awtorlarydyr.

Bu okuw kitaby Hormatly Prezidentimiziň ýolbaşçylygynda ýurdumyzyň her bir gününiň üstünliklere we ösüşlere beslenýän Berkarar döwletimiziň bagtyýarlyk döwründe ýaşlaryň durnukly we döwrebap bilim almaklaryna ýardam berer.

Bu okuw kitaby skalýar argumentli wektor funksiýalar (§2–§5), dekart we egri çyzykly koordinatalar (§1, §6–§8), dürli geometriýalar (§9–§11), egriler (§12–§15), üstler (§16–§23) we tenzorlar (§24) ýaly bölümleri özünde jemleýär.

§1. Dekart we egri çyzykly koordinatalar. Koordinatalary özgertmek. Ýakobian

Çyzykly algebra kursunda R^n ýewklid giňişligi girizilýär we e_1, e_2, ..., e_n wektorlaryň toplumy bu giňişlikde ortanormirlenen bazisi kesgitleýär. Bu bazise görä R^n ýewklid giňişliginiň islendik elementi $x^1, x^2, ..., x^n$ üýtgeýänleriň toplumy bilen bir bahaly kesgitlener. $x^1, x^2, ..., x^n$ üýtgeýänleriň toplumyna berlen bazise görä dekart koordinatalary diýilýär.

Dekart koordinatalary belli bolan $P \in R^n$, $Q \in R^n$ nokatlary koordinatlar başlangyjy bilen birikdirip $\overline{OP}(x^1, x^2, ..., x^n)$, $\overline{OQ}(y^1, y^2, ..., y^n)$ radius wektorlary kesgitleýäris. Bu wektorlaryň jemi $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, ..., x^n + y^n)$ we wektoryň skalýara köpeltmek hasyly $(\lambda x^1, \lambda x^2, ..., \lambda x^n)$ ýaly amallar kesgitlenýär.

Goý, $\xi = \overline{OP}$, $\eta = \overline{OQ}$ bolsun. Eger-de islendik R^n giňişlikde $\xi, \eta \in R^n$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ görnüşde kesgitlenip, bu köpeltmek hasyl üçin:

1. $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$;
2. $(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta) = \lambda_1 (\xi_1, \eta) + \lambda_2 (\xi_2, \eta)$;
3. $(\xi, \xi) > 0$, $\xi \neq 0$

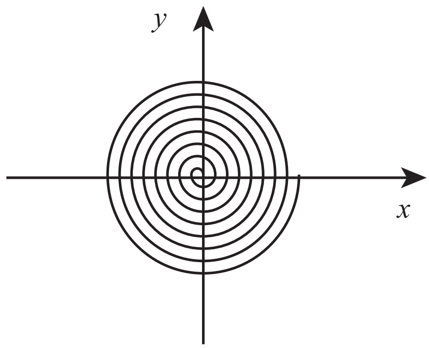
häsiýetler kanagatlandyrylsa, onda bu giňişlik ýewklid giňişligine öwrüler.

Çyzyklaryň deňlemelerini düzmek meselelerine seredilende, köp mysallarda, bolup geçýän hadysalaryň analitik ýazgysyny almak üçin dekart koordinatalary ýeterlik bolmaýar. Eger-de göni çyzyk, töwerek, ellips ýaly ýönekeý tebigatly mysallara seredilse, onda olaryň dekart koordinatlardaky aşakdaky deňlemelerini alarys:

$$Ax + By + C = 0, \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Belli mehaniki we fiziki meselelere seredilende endigan egriler alynýar, ýöne olaryň deňlemelerini dekart koordinatalarda aňlatmak oňaýly bolup durmaýar. Egri çyzykly koordinatalarda bolsa bu deňlemeleri örän ýönekeý görnüşe getirip bileris.



1-nji çyzgy

Mysal hökmünde, spiralyň (*1-nji çyzgy*) dekart koordinatalardaky $\sqrt{x^2+y^2} - e^{\lambda(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})} = 0$ deňlemesine seredeliň.

Polýar $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ koordinatalarda bu deňleme örän ýönekeýleşer we $r = e^{\lambda\varphi}$ görnüşe geler. Bu deňleme material nokadyň hereketini öwrenmekde uly rol oýnaýar.

R^n-ýewklid giňişliginde islendik açyk C ýaýla seredeliň. Açyk C ýaýlada $x \in C$, $U(x) \subset C$ şertler ýerine ýetýär. Ýene bir R_1^n giňişlige seredeliň.

$P \in C \subset R^n$ degişlilik özara bir bahaly (P nokat) $\leftrightarrow$ $(x^1, x^2, ..., x^n)$ degişliligi kesgitleýär. C ýaýlanyň islendik P nokadyna n hakyky sanlaryň degişli edilmegi bize kesgitleniş ýaýlasy C bolan n sany $x^1(P)$, $x^2(P)$, ..., $x^n(P)$ funksiýalary kesgitlemäge mümkinçilik berýär. Bu ýerde $x^1, x^2, ..., x^n \in R_1^n$. Köplenç görkezilen funksiýalar endigan we üznüksiz diýlip hasap edilýär, ýagny P nokadyň islendik kiçi üýtgemeginde onuň koordinatalary hem örän kiçi üýtgeýärler. Şeýlelikde, $R^n(x^1, x^2, ..., x^n)$, $R_1^n(x^1, x^2, ..., x^n)$ giňişlikleriň özara baglanyşygy ýola goýuldy. Goý, $C \subset R^n$ bolsun.

1-nji kesgitleme. Eger-de funksiýalaryň $x^1(y^1, ..., y^n)$, ..., $x^n(y^1, ..., y^n)$ ulgamy $C \subset R^n$ ýaýlany $A \subset R_1^n$ ýaýla geçirýän özara bir bahaly üznüksiz şekillendirmäni kesgitleýän bolsa, onda bu ulgama C ýaýladaky koordinatalaryň üznüksiz ulgamy diýilýär.

Başgaça aýdylanda, $x^1(y^1, ..., y^n)$, ..., $x^n(y^1, ..., y^n) : C \to A$ – gomoemorf şekillendirme C ýaýlany A ýaýla geçirýär. Kesgitlemeden görnüşi ýaly, C ýaýlanyň P nokatlarynyň üznüksiz üýtgemesine onuň koordinatasynyň üznüksiz üýtgemesi degişli bolup durýar. $x^1(P)$, $x^2(P)$, ..., $x^n(P)$ funksiýalara $f : C \to A$ koordinata şekillendirmesine görä P nokadyň koordinatalary diýilýär.

Mysal üçin, koordinata şekillendirmesi hökmünde toždestwolaýyn $x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n$ şekillendirmäni alyp bolar. Egerde berlen $f: C \to A$ şekillendirme üçin $P(x^1(P), \ldots, x^n(P)) = P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bolsa, onda f we f^{-1} endigan şekillendirmeler hökmünde alynýar.

Goý, $f: C \to A$-endigan şekillendirme $x^i(y^1 \ldots y^n)(i = \overline{1, n})$ funksiýalaryň kömegi bilen berlen bolsun.

2-nji kesgitleme.

$$df = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

funksional matrissa f şekillendirmäniň Ýakobi matrissasy diýilýär. $I(f) = ||df||$ – ululyga bolsa onuň ýakobiany diýilýär.

Bu ýerde matrissanyň elementleri $x^1(P), \ldots, x^n(P)$ koordinatalardan alnan hususy önümler, df we $I(f)$ ululyklar bolsa $P \in C$ nokada bagly ululyklardyr.

3-nji kesgitleme. Eger-de endigan funksiýalaryň $x^1(y^1, \ldots, y^n), \ldots, x^n(y^1, \ldots, y^n)$ ulgamy özara bir bahaly $f: C \to A \subset R_1^n$ şekillendirmäni kesgitleýän bolsa we $I(f)|_{P \in C} \neq 0$ bolsa, onda bu ulgama R^n ýewklid giňişliginiň C ýaýlasynda kesgitlenen koordinatalaryň regulýar ulgamy diýilýär. C ýaýlada kesgitlenen koordinatalaryň regulýar ulgamyna başgaça C ýaýladaky koordinatalaryň egri çyzykly ulgamy hem diýilýär.

Indi, C ýaýlada iki dürli egri çyzykly koordinatalara seredeliň:

$$x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P), \qquad z^1(P), z^2(P), \ldots, z^n(P).$$

Bular iki sany regulýar

$f: C \to A \subset R_1^n(x^1, \ldots, x^n)$, $g: C \to B \subset R_2^n(z^1, \ldots, z^n)$ şekillendirmäniň berlendigini tassyklaýar. Başgaça, her bir $P \in C$ nokat üçin iki sany egri çyzykly $\{x^i(P)\}$, $\{z^i(P)\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ koordinatalaryň alnandygyny tassyklaýar. Şekillendirmeleriň özara bir bahalydygyny hasaba alyp, P nokadyň $\{x^i(P)\}$ koordinatalaryny $\{z^i(P)\}$ koordinatalara degişli edip bolar. Ol

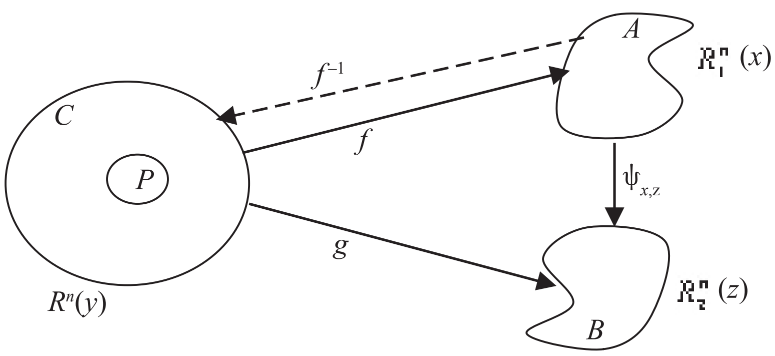
$$\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$$

görnüşli şekillendirme hökmünde gurulýar. Bu şekillendirmä bolsa C ýaýladaky koordinatalaryň özgertmesi (koordinatalaryň çalşyrmasy) diýilýär. Ýagny P nokadyň $x^i(P)$ koordinatalary $z^i(P)$ koordinatalara çalşyrylýar.

Lemma: $\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$ şekillendirme özara bir bahaly, endigan şekillendirmäni kesgitleýär we onuň ýakobiany noldan tapawutlydyr.

Subudy: Şekillendirmäniň özara bir bahalylygy koordinatlar ulgamlarynyň regulýarlygyndan, endiganlygy bolsa iki sany endigan şekillendirmeleriň kompozisiýasynyň ýene-de endigan bolýanlygyndan gelip çykýar. Biz şekillendirmäniň ýakobianynyň noldan tapawutlydygyny, ýagny $I(\psi_{x,z}) \neq 0$ deňsizligi subut ederis. Berlen $\psi_{x,z} : x^i(P) \to z^i(P)$ şekillendirme iki sany g we f^{-1} şekillendirmeleriň kompozisiýasyna $\psi_{x,z} = g \circ f^{-1} : A \to B$ dargaýar (*2-nji çyzgy*).

$\psi_{x,z}$ şekillendirmäniň ýakobi matrissasy f^{-1} we g şekillendirmeleriň matrissalarynyň köpeltmek hasylyna dargaýar. Hakykatdan hem, $\Delta\psi_{x,z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial z^i}{\partial x^j}$ önümleri hasaplaýarys, bu ýerde $z^i = z^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. y^k $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $1 \leq k \leq n$ funksiýalar endigan



2-nji çyzgy

$f^{-1}: A \to C$ şekillendirmäni kesgitleýär. Onda çylşyrymly funksiýanyň önümini hasaplamagyň formulasyna görä $\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$. Bu bolsa $d\psi_{x,z} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ matrissanyň df^{-1} we dg matrissalary köpeltmek hasylyna deňdigini görkezýär. Indi df^{-1} we df ýakoby matrissalarynyň özara baglanyşygyny alalyň.

Seredilýän ulgamyň regulýar bolýandygy üçin $f^{-1} \circ f$ kompozisiýa C ýaýlanyň öz-özüne bolan toždestwolaýyn şekillendirmesidir, şonuň üçin hem $d(f^{-1} \circ f) = df^{-1} \circ df = E,$ nirede E – n ölçegli birlik matrissa. Bu ýerden alarys: $df^{-1} = (df)^{-1}$. Bu bolsa $d\psi_{x,z} = (dg) \cdot (df)^{-1}$ deňligi subut edýär, soňky deňlik bolsa öz gezeginde $I(\psi_{x,z}) = \frac{I(g)}{I(f)}$ deňlige getirer; $I(g)$, $I(f)$ ýakobianlaryň noldan tapawutlydygy üçin bolsa $I(\psi_{x,z}) \neq 0$. Lemma subut edildi.

Netije. C ýaýlany A ýaýla geçirýän f şekillendirme C ýaýlada egri çyzykly koordinatalary kesgitleýän bolsa, onda A ýaýlany C ýaýla geçirýän f şekillendirmä ters bolan f^{-1} şekillendirme hem A ýaýlada egri çyzykly koordinatalary kesgitlär.

C ýaýlada egri çyzykly koordinatalary kesgitleýän ulgam käbir deňlemeleriň kömegi bilen koordinat çyzyklarynyň maşgalasyny kesgitleýär, meselem, i-nji koordinat çyzygy

$$x^1(P) = C_1,\ x^2(P) = C_2,\ \ldots,\ x^{i-1}(P) = C_{i-1},$$

$$x^i(P) = t,\ x^{i+1}(P) = C_{i+1},\ \ldots,\ x^n(P) = C_n$$

deňlemeleriň kömegi bilen alynýar, bu ýerde C_i – ululyklar hemişeliklerdir, t – üznüksiz parametrdir. t parametriň alýan bahasyna görä P nokat C ýaýlada käbir endigan traýektoriýany geçýär. Şeýlelikde, C ýaýlanyň her bir P nokadyndan n sany koordinat çyzyklary çykýar. Başga bir nokat üçin başga koordinat çyzyklary çykar. Eger-de ulgam dekart koordinatalary kesgitleýän bolsa, onda onuň koordinat çyzyklary P nokatdan geçýän koordinata oklaryna parallel bolan göni çyzyklardyrlar.

Egri çyzykly koordinatalar ulgamlarynyň mysallary:

1. Polýar koordinatalar ulgamy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$r > 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2. Silindriki koordinatalar ulgamy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

3. Sferiki koordinatalar ulgamy:

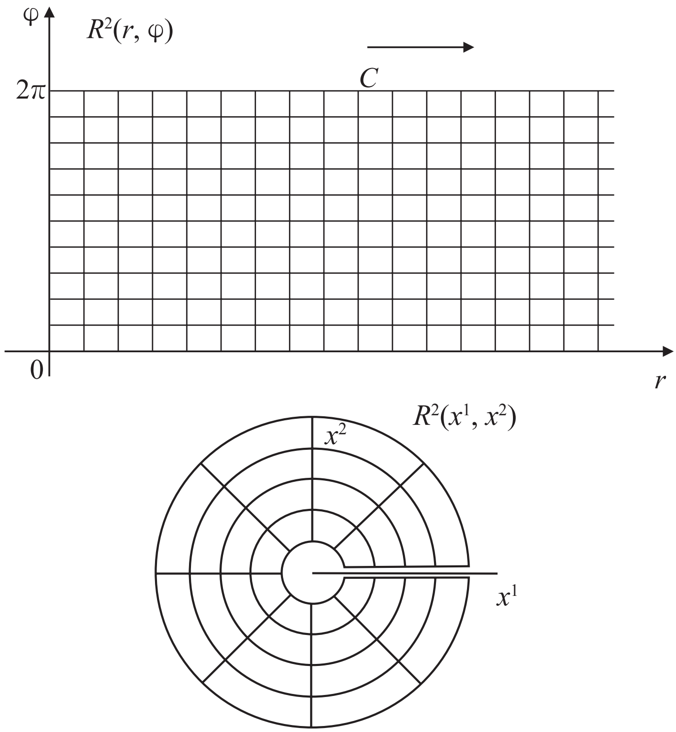
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 < \theta < \pi.$$

Ýokarda getirilen egri çyzykly koordinatlar ulgamlarynyň käbir derňewlerini geçireliň. Ýewklid tekizliginde berlen (r, φ) polýar koordinatlar ulgamy R^2 tekizligiň ähli ýerinde egri çyzykly koordinatlaryň regulýar ulgamyny emele getirmeýär. Hakykatdan hem, polýar koordinatlardan dekart koordinatlara geçmegiň $x = x^1 = r\cos\varphi$, $y = x^2 = r\sin\varphi$ funksiýalaryny alýarys. Bu ulgam üçin ýakoby matrissasy $D\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, ýakobiany bolsa $I(\psi) = r$ bolar. Ýakobian koordinatlar başlangyjynda $I(\psi) = 0$. Şeýle hem, bu ulgam ýewkid tekizliginiň öz-özüne bolan özara bir bahaly degişliligini emele getirmeýär, sebäbi (r, φ) we $(r, \varphi + 2\pi)$ nokatlar şol bir nokada geçerler.

Indi, polýar koordinatalar ulgamynyň regulýar C ýaýlasyny kesgitläliň. Ýewklid $R^2(y^1 = r, y^2 = \varphi)$ tekizliginde $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$ deňsizlikler bilen emele getirilen tükeniksiz C ýaýlany



3-nji çyzgy

alalyň. Onda A ýaýla hökmünde iki ölçegli $R^2(x^1, x^2)$ tekizligiň $x^1 \geq 0$, $x^2 = 0$ şöhleden başga hemme ýerini alyp bolar (*3-nji çyzgy*).

Bu şertlerde $f : C \to A$ şekillendirme $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$, deňlemeler bilen berler we özara birbahaly, regulýar ulgamy emele getirer. 3-nji çyzgydan görnüşi ýaly, $f : C \to A$ şekillendirmede dekart koordinatlaryň göni burçly tory polýar toruna geçýär.

Üçölçegli $R^3(y^1, y^2, y^3)$ giňişligiň silindriki $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$ koordinatalary üçin egri çyzykly koordinatalar $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\cos\varphi$, $x^3 = r$ funklsiýalar bilen berilýär *(4-nji a çyzgy)*. Bu çalşyrma $R^3(x^1$, x^2, $x^3)$ giňişlikden ($\varphi = 0$, $r \leq 0$) bilen kesgitlenen ýarymtekizligiň kesilip aýrylan böleginiň A ýaýla hökmünde alynmagyndaky endigan $f: C \to A \subset R^3(x^1, x^2, x^3)$ şekillendirmesini kesgitleýär. ($\varphi = 0$, $r \leq 0$) ýarymtekizligiň kesilip aýrylmagy özara birbahaly degişliligi üpjün edýär. Bu çalşyrmanyň ýakoby matrissasy

2. Sargyt №64.

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

we ýakobiany $I(\psi) = r$. Ýakobian diňe $r = 0$ bahada (z okda) nola deň bolup biler.

Diýmek, silindriki koordinatalar $r > 0$ bolanda A ýaýlada regulýar ulgamy emele getirer.

Indi, $R^3(y^1, y^2, y^3)$, $y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$, sferiki koordinatalara seredeliň *(4-nji b çyzgy)*.

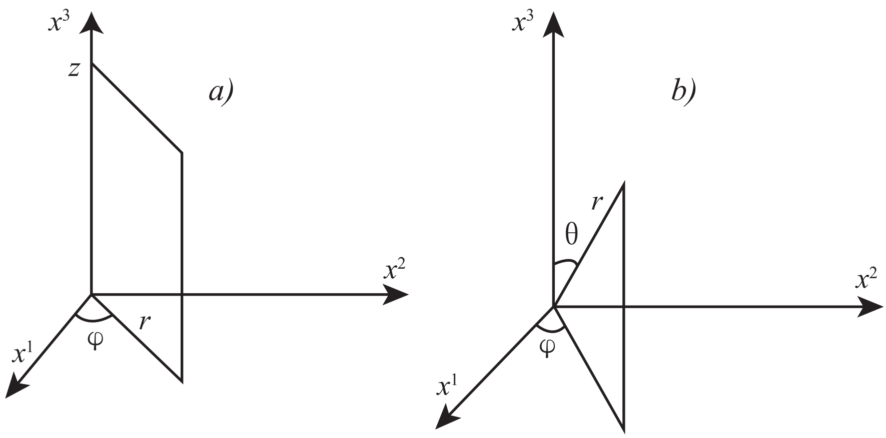
Bu ulgam üçin egri çyzykly koordinatalar $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ şertler ýerine ýetende $x^1 = r\cos\varphi\sin\theta$, $x^2 = r\sin\varphi\sin\theta$, $x^3 = r\cos\theta$ funksiýalar bilen berilýär.

Onda

$$d\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\varphi & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\varphi & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$I(\psi) = r^2\sin\theta.$$

Ýakobianyň bahasy diňe x^3 okda nola deň bolar. Özara bir bahaly degişliligi üpjün etmek üçin giňişlikden ($x^2 = 0, x^1 \geq 0$) ýarymtekizligiň nokatlaryny hem aýyrmaly.



4-nji çyzgy

§2. Skalýar argumentli wektor funksiýalar. Predel we üznüksizlik hakyndaky teoremalar

Goý, käbir R^n giňişlik we onuň C ýaýlasy berlen bolsun. Käbir $[a, b] \in R^1$ kesimiň C ýaýla bolan şekillendirmesine seredeliň.

1-nji kesgitleme: [a, b] kesimiň C ýaýla bolan özara birbahaly üznüksiz şekillendirmesiniň netijesinde alynýan obrazyna – şekiline elementar (ýönekeý) egri diýilýär.

Goý, $P \in C$, $t \in [a, b]$ bolsun. Onda P nokadyň bu giňişlige görä koordinatalary bardyr. Eger-de $t \to F(t)$ ýa-da $F : [a, b] \to C$ özara birbahaly üznüksiz şekillendirme bolsa, onda her bir t üçin C ýaýlanyň dürli P nokatlaryny alarys. Netijede, P nokadyň koordinatalary t parametre görä üýtgeýärler. Başgaça aýdylanda, t argumentli funksiýalar bolarlar: $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$.

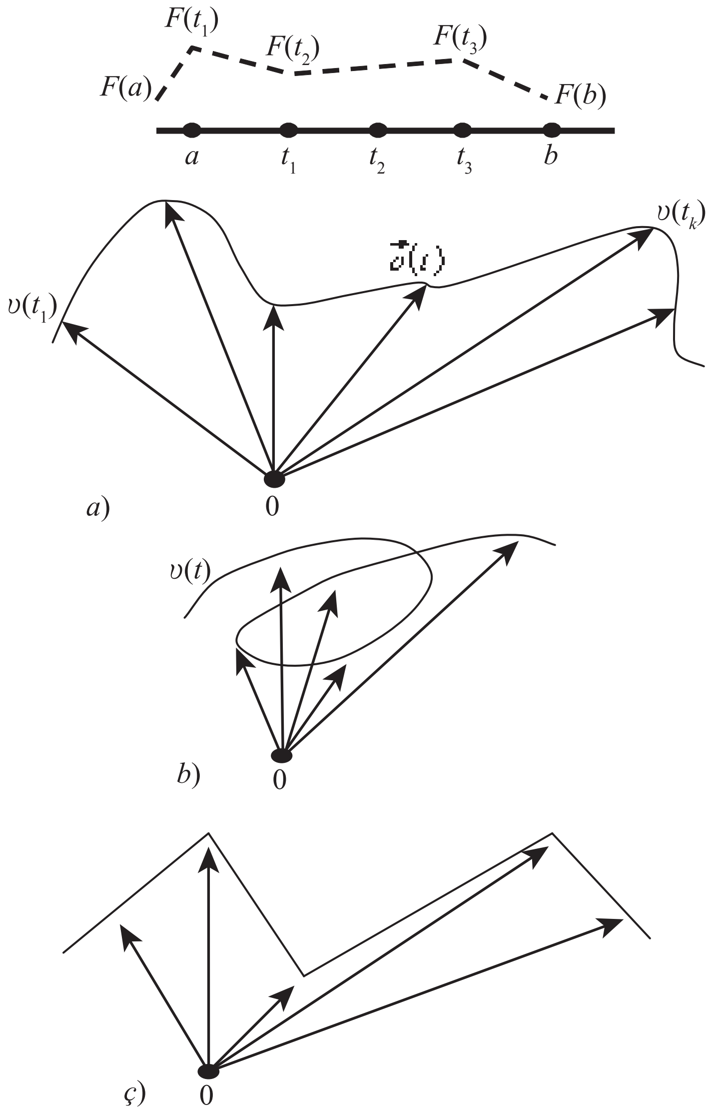
Bu funksiýalaryň ulgamy her bir t parametr üçin giňişlikde dürli P nokatlary kesgitleýär. Şonuň üçin, $[a, b]$ kesimiň ähli nokatlary üçin P nokatlaryň geometrik orny käbir egrini kesgitlär. Şeýlelikde, bu ulgama egriniň deňlemeleri hökmünde seredip bolar. Bu ulgama egriniň *parametrlenmesi* hem diýilýär.

Bellik: *Parametrleriň saýlanyp alnyşyna görä egrileriň dürli parametrlenmelerini alyp bolýar.*

2-nji kesgitleme: Eger egriniň parametrlenmesine girýän funksiýalar üçin $x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + ... + x_n'^2(t) \neq 0$ *deňsizlik ýerine ýetirilse, onda bu ýönekeý egrä endigan egri diýilýär.*

Indi, egriniň wektor deňlemesiniň alnyşyna seredeliň. Goý, $t \to F(t)$ berlen bolsun. t_1, t_2 dürli bahalar üçin giňişligiň dürli $F(t_1)$, $F(t_2)$ nokatlary alnar. Ol nokatlary koordinatalar başlangyjy bilen birikdirsek, onda t parametriň dürli bahalary üçin dürli bolan t parametre bagly $\overline{OF}(t_1)$, $\overline{OF}(t_2)$ radius wektorlary alarys. Netijede, t parametriň üýtgeýän ýaýlasyna laýyklykda *skalýar argumentli* $v(t) = \overline{OF}(t)$ *wektor funksiýa* düşünjesine gelinýär. Bu funksiýanyň grafigi t parametriň üýtgemeginde alynýan radius wektorlaryň uçlarynyň emele getirýän nokatlarynyň geometrik orny bolar *(5-nji çyzgy)*. Oňa wektor funksiýanyň *godografy* diýilýär. Ol aşakdaky ýaly alnar.

Goý, bize käbir $f : C \to R^n$ şekillendirme berlen bolsun. Anyklyk üçin goý, $C = [a, b] \subset R'$ bolsun. Onda bu şekillendirme $f : [a, b] \to R^3(R^n)$ görnüşde ýa-da $F : [a, b] \to R^3$ ýaly bolar. Bu şekillendirmäniň netijesinde her bir berkidilen $t \in [a, b]$ san käbir $D \in R^3$ nokada geçiriler. Şunlukda, şekillendirme özara birbahaly bolar.



5-nji çyzgy

Skalýar argumentli wektor funksiýanyň predeli, üznüksizligi hakyndaky teoremalara geçýäris.

Goý, käbir skalýar argumentli $\boldsymbol{v(t)} = \{v_1(t), v_1(t), ..., v_n(t)\}$ wektor funksiýa we hemişelik $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_1, ..., a_n\}$ wektor berilsin.

3-nji kesgitleme: Eger-de $t \to t_0$ bolanda

$$\lim_{t \to t_0} |v(t) - a| - 0$$

*deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda **v(t)** wektor funksiýa t_0 nokatda **a** predele eýe diýilýär.*

Bu ýerde

$$|v(t) - a| = \sqrt{(v_1(t) - a_1)^2 + (v_2(t) - a_2)^2 + ... + (v_n(t) - a_n)^2}$$

we $|v(t) - a| \to 0$ bolanda

$$\begin{cases} v_1(t) - a_1 \\ v_2(t) - a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n(t) - a_n. \end{cases}$$

*4-nji kesgitleme: Goý, [a, b] kesimde **v(t)** wektor funksiýa kesgitlenen bolsun we bu kesimiň käbir t_0 nokadynda $\boldsymbol{v(t_0)}$ wektor funksiýa eýe bolsun. Eger-de $t \to t_0$ bolanda*

$$\lim_{t \to t_0} |v(t) - v(t_0)| - 0$$

*deňlik ýerine ýetýän bolsa, onda **v(t)** wektor funksiýa t_0 nokatda üznüksizdir diýilýär. Eger wektor funksiýa kesimiň ähli nokatlary üçin üznüksiz bolsa, onda bu funksiýa seredilýän kesimde üznüksizdir diýilýär.*

Mysal üçin, $\boldsymbol{v}(t) = \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \frac{1}{t}\right\}$ wektor funksiýanyň R^1 giňişlikde üznüksiz bolýan aralyklary $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ bolar.

Skalýar argumentli $\boldsymbol{v(t)} = \{v_1(t), v_1(t), ..., v_n(t)\}$ wektor funksiýa üçin şekillendirme, predel, üznüksizlik hakyndaky aşakdaky tassyklamalary subutsyz getirýäris.

Şekillendirmeler üçin:

$$(u + v)(t) = u(t) + v(t);$$

$$(f \cdot v)(t) = f(t) \cdot u(t);$$

$$(u, v)(t) = (u(t), v(t));$$

$$[u, v](t) = [u(t), v(t)].$$

Bu ýerde $f(t)$ skalýar argumentli funksiýa, $\boldsymbol{(u(t), v(t))}$ iki wektoryň skalýar köpeltmek hasylyny, $\boldsymbol{[u(t), v(t)]}$ iki wektoryň wektor köpeltmek hasylyny kesgitleýär.

Predeller üçin: Goý, $t \to t_0$ bolanda wektor funksiýalar üçin $\boldsymbol{v(t) \to a}$, $\boldsymbol{u(t) \to b}$ we skalýar argumentli funksiýa üçin $f(t) \to d$ predeller bar bolsun. Onda

$$\lim_{t \to t_0}(u(t) \pm v(t)) = \lim_{t \to t_0} u(t) \pm \lim_{t \to t_0} v(t) = a \pm b$$

$$\lim_{t \to t_0}(u(t)/v(t)) = \lim_{t \to t_0} u(t)/\lim_{t \to t_0} v(t) = a/b$$

$$\lim_{t \to t_0}(f(t) \cdot v(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot \lim_{t \to t_0} v(t) = d \cdot a$$

$$\lim_{t \to t_0}(u(t), v(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} u(t), \lim_{t \to t_0} v(t)\right) = (a, b).$$

Üznüksizlik üçin: eger-de $\boldsymbol{v(t), u(t)}$ wektor funksiýalar we skalýar argumentli $f(t)$ funksiýa $t \to t_0$ bolanda üznüksiz bolsalar, onda predeller hakyndaky teoremalarda degişli çalşyrmalar geçirip, üznüksizlik hakyndaky teoremalary alarys:

$$\lim_{t \to t_0}(u(t) \pm v(t)) = u(t_0) \pm v(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0}(u(t)/v(t)) = u(t_0)/v(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0}(f(t) \cdot v(t)) = f(t_0) \cdot v(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0}(u(t), v(t)) = u(t_0), v(t_0)).$$

Bellik: *Bu teoremalaryň her biri aýratyn subut edilip bilner. Onuň üçin skalýar argumentli funksiýalarda geçirilen subutlary ulanyp bolar.*

§3. Skalýar argumentli wektor funksiýanyň önümi we integraly

Goý, $[a, b]$ kesimde $\boldsymbol{v(t)}$ wektor funksiýa berlen we käbir $t_0 \in [a, b]$ nokatda $\boldsymbol{v(t_0)}$ kesgitlenen bolsun. Skalýar argumentli wektor funksiýalar üçin hem önüm düşünjesi matematiki derňewde kesgitlenişi ýaly, käbir

$$\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

gatnaşygyň predeli hökmünde kesgitlenýär.

1-nji kesgitleme: Eger-de $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ *gatnaşygyň* $t \to t_0$ *bolanda tükenikli predeli bar bolsa, onda ol predele wektor funksiýanyň önümi diýilýär we ol önüm*

$$\lim_{t \to t_0}\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = v'(t_0)$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

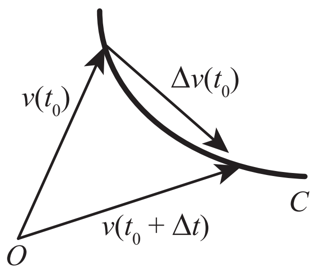
Goý, $\boldsymbol{v(t)}$ wektor funksiýa käbir C egrini kesgitleýän bolsun. C egri üçin wektor funksiýanyň artdyrmasyny alalyň (*6-njy çyzgy*):

$$\Delta v(t_0) = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0) = v(t) - v(t_0).$$

Bu artdyrmanyň üsti bilen, önümiň kesgitlemesini

$$\lim_{t \to t_0}\frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0)$$

deňlik bilen hem alyp bolar.



6-njy çyzgy

Bu deňlemelerden görnüşi ýaly, $t + \Delta t \to t_0 (\Delta t \to 0)$ bolanda, C egriniň üsti bilen $\boldsymbol{v(t_0)}$ wektora ýakynlaşma bolup geçýär. Predel ýagdaýda biz seredilýän C egriniň t_0 nokadynda oňa geçirilen galtaşma $\boldsymbol{v'(t_0)}$ wektory alarys.

Matematiki derňewde görkezilişi ýaly, wektor funksiýalar üçin hem önüm hakynda aşakdaky teoremalar dogrudyr:

1. $(u(t) + v(\mathrm{t}))' = u'(t) + v'(t)$;

2. $(f(t)v(t))' = f'(t)v(t) + f(t)v'(t)$;
3. $(u(t), v(t))' = (u'(t), v(t)) + (u(t), v'(t))$;
4. $[u(t), v(t)]' = [u'(t), v(t)] + [u(t), v'(t)]$;
5. $(u(t), v(t), \omega(t))' = (u'(t), v(t), \omega(t)) + (u(t), v'(t), \omega(t)) +$ $+ (u(t), v(t), \omega'(t))$.

Bu teoremalaryň hemmesi matematiki derňewde görkezilen şol bir usul bilen subut edilýär. Bularyň üçünjisiniň subudy aşakdaky ýaly alynýar:

Subudy:

$$(u(t), v(t))' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(u(t_0 + \Delta t), v(t_0 + \Delta t)) - (u(t_0), v(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \begin{bmatrix} \dfrac{(u(t_0 + \Delta t), v(t_0 + \Delta t)) - (u(t_0), v(t_0 + \Delta t))}{\Delta t} + \\ + \dfrac{(u(t_0), v(t_0 + \Delta t)) - (u(t_0), v(t_0))}{\Delta t} - \end{bmatrix}$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t} \lim_{\Delta t \to 0} v(t_0 + \Delta t) \right) +$$

$$\left(u(t_0), \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \right) = (u'(t_0), v(t_0)) + (u(t_0), v'(t_0)).$$

Indi wektor funksiýanyň differensialyny kesgitläliň. Onuň üçin $\boldsymbol{v(t_0)}$ wektor funksiýanyň t_0 nokatdaky Δt artdyrmasyna seredeliň. Eger şol artdyrmanyň baş bahasy Δt ululyga çyzykly bagly bolsa, başgaça aýdylanda, wektor funksiýanyň artdyrmasy

$$\Delta v(t) = v'(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

görnüşde alynýan bolsa, onda wektor funksiýa t nokatda differensirlenýär diýilýär we wektor funksiýanyň differensialy şol artdyrmanyň baş bahasy hökmünde alynýar:

$$dv(t) = v'(t)\Delta t = (dv(t)/dt)\Delta t.$$

Soňky deňlikden görnüşi ýaly, $\Delta t > 0$ bolanda wektor funksiýanyň $\boldsymbol{dv(t)}$ differensialynyň ugry onuň $\boldsymbol{dv(t)/dt}$ önüminiň ugry bilen gabat gelýär, eger $\Delta t < 0$ bolsa, onda olaryň ugurlary gapma-garşydyrlar.

Wektor funksiýanyň modulyndan differensialyň alnyşyna seredeliň. Goý, wektor funksiýa R^3 giňişlikde berlen bolsun:

$$v(t) = \{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} = v_1(t)i + v_2(t)j + v_3(t)k.$$

Wektor funksiýanyň modulynyň kwadratynyň

$$|v(t)|^2 = v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t),$$

we onuň öz-özüne skalýar köpeltmek hasylynyň

$$(v(t), v(t)) = v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)$$

deňlikler bilen hasaplanýandyklaryna görä, olaryň sag böleklerini deňeşdirip,

$$(v(t), v(t)) = |v(t)|^2$$

deňlige geleris.

Bu deňligiň iki bölegini hem differensirläris:

$$2|v(t)| \cdot d|v(t)| = 2(v(t), dv(t)).$$

Bu ýerden

$$d|v(t)| = (v(t)/|v(t)|, dv(t)) = (v_e(t), dv(t)).$$

Bu deňlik wektoryň modulynyň differensialy bilen onuň özüniň differensialyny baglanyşdyrýan deňlikdir.

1-nji mysal: $v(t) = \left\{\sin^2\frac{t}{2}, e^{t-t^3}\right\}$ wektor funksiýadan önüm almaly bolsun. Önümiň kesgitlemesine görä bu wektoryň her bir koordinatasyndan skalýar funksiýanyň önümi ýaly önümleri kesgitlemeli we ol koordinatalary wektor funksiýanyň önüminiň koordinatalary hökmünde almaly, ýagny

$$v'(t) = \left\{2\sin\frac{t}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)', (t - t^3)' \cdot e^{t-t^3}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\sin t, (1 - 3t^2)e^{t-t^3}\right\}.$$

Wektorlaryň skalýar we wektor köpeltmek hasyllarynyň häsiýetlerini ulanyp, wektor funksiýadan ýokary tertipli önümlerini kesgitlemegiň mysallaryna seredeliň.

2-nji mysal.

a) $(v^2)' = (v, v)' = (v', v) + (v, v') = 2(v', v) = 2vv'$.

b) $[v', v'']' = [v'', v''] + [v', v'''] = [v', v''']$.

ç) $(v', v'', v''')' = (v'', v'', v''') + (v', v''', v''') + (v', v'', v^{(4)}) = (v', v'', v^{(4)})$.

Wektor funksiýanyň integralyny kesgitlemäge girişeliň.

Wektor funksiýalaryň integrallary hem skalýar funksiýalaryň integrallarynyň kesgitlenişi ýaly kesgitlenýär. Hakykatdan hem, goý, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ wektor funksiýa $[a, b]$ kesimde berlen bolsun. Bu kesimi n bölege böleliň:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad [t_{i-1}, t_i] \subset [a, b].$$

Bu bölek kesimleriň her birinden $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ nokatlary alyp, olarda wektor funksiýanyň $\boldsymbol{v}(\tau_i)$ bahalaryny we ol bahalar üçin integral jemi kesgitleýäris:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

2-nji kesgitleme: Eger $[a, b]$ kesimiň ähli mümkin bolan bölek-lemeleri üçin τ_i sanlaryň saýlanyp alnyşyna bagly bolmazdan σ_n integral jemiň $n \to \infty$ ymtylanda predeli bar bolsa, onda ol predele $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ *wektor funksiýadan alnan integral diýilýär we ol aşakdaky ýaly kesgitlenýär:*

$$\int_a^b \boldsymbol{v}(t)dt = i \cdot \int_a^b v_1(t)dt + j \cdot \int_a^b v_2(t)dt + k \cdot \int_a^b v_3(t)dt.$$

Bu deňligiň sag böleginiň integrallarynyň skalýar funksiýalara görä kesgitli integrallardygy üçin wektor funksiýalaryň integrallarynyň aşakdaky häsiýetleri dogrudyr:

1. $\left|\int_a^b v(t)dt\right| \le \int_a^b |v(t)|dt;$

2. $\int_a^b [C, v(t)]dt = \left[C, \int_a^b v(t)dt\right];$

3. $\int_a^b v'(t)dt = v(b) - v(a).$

3-nji mysal: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \{\sin t, \cos t\}$ wektor funksiýany $[0, \pi]$ aralykda integrirlemeli.

Integrirlemegiň kesgitlemesine görä alarys:

$$\int_0^{\pi} \boldsymbol{v}(t)dt = \int_0^{\pi} \{\sin t, \cos t\}dt = \boldsymbol{i} \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt + \boldsymbol{j} \cdot \int_0^{\pi} \cos t dt =$$

$$= \boldsymbol{i} \cdot (-\cos\pi + \cos 0) + \boldsymbol{j} \cdot (\sin\pi - \sin 0) = 2\boldsymbol{i}$$

§4. Teýlor formulasy

Wektor funksiýalaryň önümi we differensialy kesgitlenenden soňra matematiki derňewde görkezilişi ýaly, bu funksiýalar üçin hem matematiki derňewiň esasy düşünjeleriň biri bolan Teýlor formulasy diýen düşünje girizilýär. Sebäbi egrileriň galtaşmasy, üstlerdäki egriler we olar bilen bagly beýleki düşünjeler öwrenilende skalýar argumentli wektor funksiýalaryň käbir nokadyň etrabynda hatara dargamasy ulanylýar.

Ilki bilen skalýar $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokadyň etrabynda Teýlor formulasyna dargadylyşyna seredeliň. Matematiki derňewde görkezilişi ýaly, bu dargama n – tertipli üznüksiz önüme eýe bolan $f(x)$ funksiýa üçin aşakdaky ýaly alynýar:

$$f(x) = f(x_0) + \left[\frac{f'(x_0)}{1!}\right] \cdot (x - x_0) + \left[\frac{f''(x_0)}{2!}\right] \cdot (x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right] \cdot (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Bu dargamanyň $\boldsymbol{v(t)} = \{x(t), y(t), z(t)\}$ wektor funksiýa üçin berkidilen $t_0 \in [a, b]$ nokatda alnyşyna seredeliň. Elbetde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiýalar t_0 nokadyň etrabynda n – tertipli üznüksiz önümlere eýe bolsunlar. Onda bu funksiýalar üçin Teýlor formulalaryny alarys:

$$x(t) = x(t_0) + \left[\frac{x'(t_0)}{1!}\right] \cdot (t - t_0) + \left[\frac{x''(t_0)}{2!}\right] \cdot (t - t_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}\right] \cdot (t - t_0)^n + o((t - t_0)^n)$$

$$y(t) = y(t_0) + \left[\frac{y'(t_0)}{1!}\right] \cdot (t - t_0) + \left[\frac{y''(t_0)}{2!}\right] \cdot (t - t_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}\right] \cdot (t - t_0)^n + o((t - t_0)^n)$$

$$z(t) = z(t_0) + \left[\frac{z'(t_0)}{1!}\right] \cdot (t - t_0) + \left[\frac{z''(t_0)}{2!}\right] \cdot (t - t_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{z^{(n)}(t_0)}{n!}\right] \cdot (t - t_0)^n + o((t - t_0)^n).$$

Bu formulalary degişlilikde ***i***, ***j***, ***k*** birlik wektorlara köpeldip, soňra degişli elementlerini hasaba almak bilen goşsak, onda ***v*(*t*)** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargamasyny alarys:

$$v(t) = \vartheta(t_0) + \left[\frac{v'(t_0)}{1!}\right] \cdot (t - t_0) + \left[\frac{v''(t_0)}{2!}\right] \cdot (t - t_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{v^{(n)}(t_0)}{n!}\right] \cdot (t - t_0)^n + o((t - t_0)^n).$$

1-nji mysal. *v*(*t*) = $\{e^t, \sin t, \cos t\}$ wektor funksiýanyň $t_0 = 0$ nokadyň etrabynda Teýlor formulasyna dargamasyny almak üçin e^t, $\sin t$, $\cos t$ funksiýalaryň Teýlor formulalaryny

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(t^n)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(t^n)$$

alýarys we bu formulalary degişlilikde ***i, j, k*** wektorlara köpeldip, soňra degişli elementlerini hasaba almak bilen goşsak, onda ***v*(*t*)** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargamasyny alarys.

Indi ***v*(*t*)** wektor funksiýanyň onuň differensiallary boýunça Teýlor formulasyna dargadylyşyna seredeliň.

Onuň üçin $\Delta v(t) = v(t) - v(t_0) \approx dv$ deňligi ulanyp, ***v*(*t*)** wektor funksiýanyň Teýlor formulasyna dargamasyndan wektor differensialyň dargamasyny alarys:

$$\Delta v \approx \Delta v(t) - dv(t_0) + \frac{1}{2!} \cdot d^2 v(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot d^n v(t_0) + o(t^n).$$

§5. Egriniň natural deňlemesi

Köp amaly meselelerde egrileriň deňlemelerini ol egrileriň dugalarynyň uzynlyklaryna bagly görnüşini almak, ýagny egrileriň tebigy (natural) deňlemelerini almak amatly bolýar.

Goý, **$v(t)$** funksiýa **$[a, b]$** kesimde berlen bolsun. Bu funksiýanyň godografy giňişlikde C egrini kesgitleýär. Wektor funksiýanyň dürli parametrlenmelerinde şol bir godograf alnyp, parametrleriň dürli bahalary üçin godografyň dugalary alynýar. Egriniň dugasynyň uzynlygynyň üsti bilen alynýan parametrlenmesine egriniň *natural deňlemesi* diýilýär. Berlen egriniň üstünde nokatlary berkidip onuň birnäçe dugalaryny alarys. Goý, ol dugalaryň biriniň uzynlygy

$$s = |M_i M_{i+1}|$$

bolsun. Duganyň uzynlygynyň

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

formulasyndan deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp, duganyň differensialy üçin aşakdaky formulany alarys:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Bu deňligiň egriniň natural deňlemesini getirip çykarmakda ulanylyşyna mysallarda seredeliň.

1-nji mysal. **$v(t)$** $= \{a\cos t, a\sin t, bt\} = \boldsymbol{i} \cdot a\cos t + \boldsymbol{j} \cdot a\sin t + \boldsymbol{k} \cdot bt$ wint çyzygy üçin natural deňlemelere geçmeli.

Onuň üçin

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{(a\cos t)'^2 + (a\sin t)'^2 + (bt)'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

we

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\, dt$$

deňlikleri ulanyp, dürli parametrleriň arasyndaky

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

baglanyşygy alarys we ony wektor funksiýanyň deňlemesinde t parametriň ornuna goýsak, wektor funksiýanyň tebigy (natural) deňlemesine geleris:

$$v(t) = \left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

2-nji mysal. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \{e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\}$ wektor funksiýanyň natural deňlemesini düzmeli.

1-nji mysalda görkezilişi ýaly duganyň differensialynyň formulasyndan peýdalanýarys:

$$(e^t\cos t)'^2 = e^{2t}(1-\sin 2t)$$

$$(e^t\sin t)'^2 = e^{2t}(1+\sin 2t)$$

$$(e^t)'^2 = e^{2t}$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = e^t\sqrt{3}.$$

Onda duganyň differensialy

$$ds = e^t\sqrt{3}\,dt$$

bolar. Bu ýerden bolsa dürli parametrleriň arasyndaky baglanyşyklaryň birini

$$t = \ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

görnüşde alyp, berlen wektor funksiýanyň natural deňlemesini aşakdaky ýaly ýazarys:

$$v(t) = \left\{\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right\}.$$

§6. Galtaşýanlar, normallar, galtaşmalar

Egriler we üstler öwrenilende olara geçirilen galtaşýanlaryň, normallaryň özara ýerleşişlerini we egri bilen egriniň, üst bilen egriniň özara galtaşmalaryny öwrenmegiň zerurlygy ýüze çykýar.

Goý, R^3 giňişligiň adaty nokatlarynda, $((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{i}\ x(t) + \boldsymbol{j}\cdot y(t) + \boldsymbol{k}\cdot z(t)$ wektor funksiýa

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ulgamyň kömegi bilen C egrini kesgitleýän bolsun.

1-nji kesgitleme. $v'(t)=\left\{\frac{dx(t)}{dt},\frac{dy(t)}{dt},\frac{dz(t)}{dt}\right\}$ *wektora C egriniň t nokatdaky galtaşýan wektory ýa-da tizlik wektory diýilýär.*

Galtaşýan $\boldsymbol{v'(t)}$ wektor C egrä onuň $M(t)$ galtaşma nokadynda geçirilen galtaşýanyň ugry boýunça ýatar. Onda analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, $\boldsymbol{M(t)}$ nokatdan geçýän galtaşýan bilen ugurdaş bolan göni çyzygyň – $\boldsymbol{v'(t)}$ galtaşýanyň deňlemesini

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)}$$

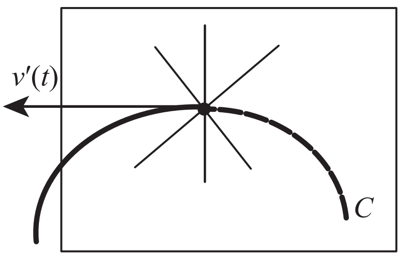
görnüşde alarys.

2-nji kesgitleme. Galtaşma nokadynda galtaşýana geçirilen perpendikulýara egriniň normaly diýilýär. Bu normallar bütün tekizligi dolduryarlar. Galtaşma nokadynda galtaşýana perpendikulýar bolan tekizlige bolsa normal tekizlik diýilýär.

Kesgitlemä görä, galtaşýan $\boldsymbol{v'(t)}$ wektor normal tekizlige perpendikulýar, şonuň üçin hem analitik geometriýadan normal tekizligiň deňlemesini *(7-nji çyzgy)*.

$$x'(t)\cdot(X-x(t))+y'(t)\cdot(Y-y(t))+$$
$$+z'(t)\cdot(Z-z(t))=0$$

görnüşde alarys.



7-nji çyzgy

Indi, bu düşünjeleri üstler üçin hem girizeliň. Goý, käbir üst $F(x, y, z) = 0$ deňleme bilen berilsin. Bu üstde

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ulgamyň kömegi bilen käbir egrini geçireliň. Onda t parametriň islendik bahasy üçin $M(x(t), y(t), y(t))$ nokadyň koordinatalary

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$$

toždestwony kanagatlandyrar. Bu toždestwony t görä differensirläp

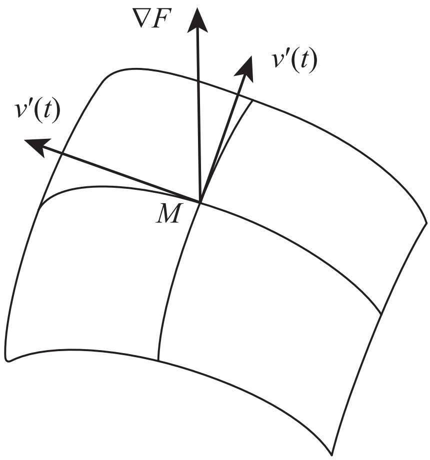
$$F_x(x, y, z)\cdot x'(t)+F_y(x, y, z)\cdot y'(t)+F_z(x, y, z)\cdot z'(t)\equiv 0$$

toždestwony alýarys. Käbir

$$\nabla \boldsymbol{F} = F_x(x, y, z) \cdot \boldsymbol{i} + F_y(x, y, z) \cdot \boldsymbol{j} + F_z(x, y, z) \cdot \boldsymbol{k}$$

wektory girizeliň. Onda ýokarky toždestwony adaty nokatlar ($F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $F_z \neq 0$) üçin aşakdaky görnüşde alarys:

$$(\nabla \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v'(t)}) = 0.$$



8-nji çyzgy

Şuňa meňzeşlikde, $M(x(t), y(t), y(t))$ nokatdan seredilýän üstde tükeniksiz köp egrileri we ol egriler üçin galtaşýanlary geçirip bolar. Şol galtaşýanlaryň hemmesi hem $\nabla \boldsymbol{F}$ wektora perpendikulýar bolarlar we şol bir tekizlikde ýatarlar (*8-nji çyzgy*):

Bu tekizlige hem üstüň $M(x(t), y(t), y(t))$ nokadyndaky *galtaşýan tekizligi* diýilýär.

Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, galtaşýan tekizligiň deňlemesi

$$F_x(x, y, z) \cdot [X - x(t)] + F_y(x, y, z) \cdot [Y - y(t)] + F_z(x, y, z) \cdot [Z - z(t)] = 0$$

görnüşde bolar.

Egri çyzyklarda kesgitlenişi ýaly, üstüň $M(x(t), y(t), y(t))$ nokadynda üste galtaşýan tekizlige galdyrylan perpendikulýara *üstüň normaly* diýilýär. Elbetde, bu normal ýeke-täkdir we $\nabla \boldsymbol{F}$ wektor bilen ugurdaşdyr. Analitik geometriýadan üstüň normalynyň deňlemesini

$$\frac{X - x(t)}{F_x(x, y, z)} - \frac{Y - y(t)}{F_y(x, y, z)} - \frac{Z - z(t)}{F_z(x, y, z)}$$

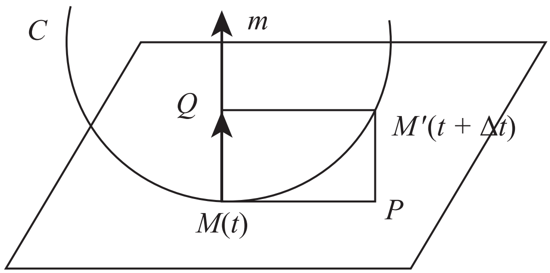
görnüşde alarys.

Bellikler: *1. Eger-de üstüň M(x(t), y(t), y(t)) nokadynda oňa geçirilen galtaşýan egrini alsak we bu nokatda egrä galtaşýan wektor geçirsek, onda (*$\nabla \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v'(t)}$*) = 0 bolar, we ol galtaşýan wektor galtaşma tekizliginde ýatar. Şunlukda, egri bilen üstüň arasynda 1-nji tertipli galtaşma emele gelýär.*

*2. Şundan başlap, ähli ýerde üstüň adaty nokatlaryna serediler. Eger-de aýratyn aýdylmasa **v'(t)** we **v"(t)** wektorlar kollinear däl hasap ediler.*

Goý, indi käbir egri çyzyk $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{i} \cdot x(t) + \boldsymbol{j} \cdot y(t) + \boldsymbol{k} \cdot z(t)$ wektor bilen berilsin. Bu egriniň $M(t)$ nokadynyň üsti bilen geçýän we bu egrä «tükeniksiz golaýlaşdyrylan» tekizligi, başgaça aýdylanda, $M(t)$ nokatda mümkin bolan uly tertipdäki galtaşmany emele getirýän tekizligi tapmak meselesine seredeliň.

Goý, $M(t)$ nokatdan egriniň $\boldsymbol{m}$ normaly galdyrylan, $M'(t)$ nokat $M(t)$ nokada tükeniksiz golaýlaşýan bolsun (*9-njy çyzgy*):



9-njy çyzgy

Onda $PM'(t) \to 0$ bolar, ýagny $PM'(\Delta t)$ uzaklyk Δt ululyga görä $(n + 1)$ tertipli tükeniksiz kiçi ululyga öwrüler. Bu ýagdaýda $\overline{MM'}$ wektoryň Teýlor formulasyna we Teýlor hataryna dargamasyna seredeliň:

$$\overline{MM'} = v(t+\Delta t) - v(t) = v'(t)\Delta t + v''(t) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} + \frac{1}{6} Q[(\Delta t)^3].$$

$$\overline{MM'} = v(t+\Delta t) - v(t) = v'(t)\Delta t + v''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

we

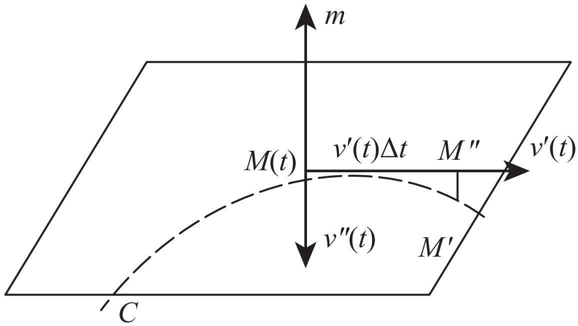
$$\overline{PM'} = m\overline{MM'}$$

bolýandygy üçin alarys:

$$\overline{PM'} = m\overline{MM'} = mv'(t)\Delta t + mv''(t) \cdot \frac{\Delta t^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$

Şeýlelikde, 1. Eger-de $\boldsymbol{mv}'(t) \neq 0$ bolsa, onda $\overline{PM'}$ ululyk 1-nji tertipli tükeniksiz kiçidir, başgaça aýdylanda, nol tertipli galtaşma bolýar, ýagny egri tekizligi deşip geçýär.

3. Sargyt №64.



10-njy çyzgy

2. Eger-de $\boldsymbol{mv'(t)} = 0$ bolsa, onda $\overline{PM'}$ ululyk 2-nji tertipli tükeniksiz kiçidir, başgaça aýdylanda 1-nji tertipli galtaşma bolýar, egrä geçirilen galtaşýan $\boldsymbol{m}$ normala perpendikulýar bolup, gözlenýän tekizlikde ýatar.

3. Eger-de $\boldsymbol{mv'(t)} = 0$, $\boldsymbol{mv''(t)} = 0$ bolsalar, egri bilen gözlenýän tekizligiň arasynda 2-nji tertipli galtaşma emele geler. Bu ýagdaýda gözlenýän tekizlige *galtaşyjy tekizlik* diýilýär.

Goý indi, käbir egri iki sany $F(x, y, z) = 0$ we $\Phi(x, y, z) = 0$ üstleriň kesişmesi hökmünde berlen bolsun. Onda bu egri çyzyk üçin galtaşýan göni çyzygyň we normal tekizligiň deňlemelerini düzeliň. Belli bolşy ýaly, galtaşýan göni çyzygyň deňlemesi

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} - \frac{Y - y(t)}{y'(t)} - \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

deňlik bilen berilýär. Üstleriň deňlemelerini differensirläp alarys:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \cdot x' + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot z' = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \cdot x' + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \cdot y' + \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \cdot z' = 0. \end{cases}$$

Bu ulgamdan

$$x' : y' : z' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Onda üstleriň kesişmesi bolan egrä geçirilen galtaşýanyň deňlemesi aşakdaky görnüşe geler:

$$\frac{X-x(t)}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y(t)}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z(t)}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{vmatrix}}.$$

Şuňa meňzeşlikde, normal tekizligiň deňlemesinde degişli ornuna goýmalary ulansak, onda normal tekizligiň deňlemesini alarys:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}\cdot(X-x(t))+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial x}\end{vmatrix}\cdot(Y-y(t))+$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{vmatrix}\cdot(Z-z(t))=0.$$

Bu deňligi göz öňünde tutup, normal tekizligiň deňlemesini 3-nji tertipli kesgitleýjiniň kömegi bilen

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

görnüşde hem alyp bolar.

§7. Ýewklid giňişliginde egriniň uzynlygy. Egrileriň arasyndaky burç

Ýewklid giňişliginde käbir wektor funksiýa bilen kesgitlenen egriniň dugasynyň uzynlygynyň alnyşyna seredeliň. Goý, käbir R^n ýewklid giňişliginde $[a, b]$ kesimde kesgitlenen, bahalary bu giňişlikde bolan $\boldsymbol{v(t)}$ wektor funksiýa berlen bolsun.

$$v(t)=\{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}, \quad v[a, b]; \quad x_1, x_2, ..., x_n \in R^n.$$

Belli bolşy ýaly, ýewklid giňişliginde $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu} \in R^n$ wektorlaryň kömegi bilen olaryň skalýar köpeltmek hasylyny kesgitleýäris:

$$(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mu^i.$$

Ilki bilen seredilýän giňişlige degişli bolan her bir wektoryň uzynlygynyň, iki wektoryň arasyndaky uzaklygyň, wektorlaryň arasyndaky burçuň skalýar köpeltmek hasyly bilen alynýan formulalaryny getireliň:

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}; \quad \mu = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$$

$$|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2} = \sqrt{\xi_1 \xi_1 + ... + \xi_n \xi_n} = \sqrt{(\xi, \xi)}$$

$$|\xi - \mu| = \sqrt{(\xi - \mu, \xi - \mu)};$$

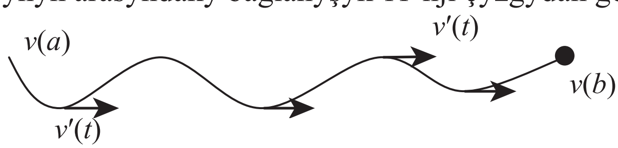
$$\cos\varphi = \frac{(\xi, \mu)}{\sqrt{(\xi, \xi)}\sqrt{(\mu, \mu)}}.$$

Şulara meňzeşlikde, skalýar köpeltmek hasylynyň kömegi bilen egrileriň uzynlygyny kesgitläp bolýar. Belli bolşy ýaly, $\boldsymbol{v(t)} = \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}$ wektor üçin tizlik wektor

$$\boldsymbol{v}'(t) = \left\{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}, ..., \frac{\Delta x_n}{\Delta t}\right\}$$

deňlik bilen kesgitlenýär.

Wektor funksiýanyň koordinatalary $[a, b]$ kesimde endigan funksiýalardyr; kesgitlemeden görnüşi ýaly, berlen wektor bilen onuň tizlik wektorynyň arasyndaky baglanyşyk 11-nji çyzgydan görünýär.



11-nji çyzgy

Lemma: Koordinatalary [a, b] kesimde endigan bolan $\boldsymbol{v(t)}$ *wektor funksiýanyň modulynyň hemişelik bolmagy üçin,*

$$(\boldsymbol{v(t)}, \boldsymbol{v'(t)}) = 0$$

deňligiň ýerine ýetmegi zerurdyr.

Subudy: Hakykatdan hem, goý, $|\boldsymbol{v}(t)| = C$ – hemişelik ululyk bolsun. Onda $|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_n^2(t)} = C$ deňligiň iki böleginden hem t parametre görä önüm alyp, drobuň nola deň bolmak şertinden alarys:

$$2x_1(t) \cdot x_1'(t) + 2x_2(t) \cdot x_2'(t) + \ldots + 2x_n(t) \cdot x_n'(t) = 0.$$

Bu deňlik hem lemmany subut edýär.

2-nji kesgitleme: Goý, $\boldsymbol{v(t)}$ *wektor funksiýa [a, b] kesimde kesgitlenen bolsun we onuň koordinatalary bu kesimde endigan bolsunlar. Goý,* $\boldsymbol{v(a)}$, $\boldsymbol{v(b)}$ *wektorlar kesgitlenen bolsunlar. Onda*

$$l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{(v'(t), v'(t))}\,dt = \int_a^b |v'(t)|\,dt$$

ululyga $\boldsymbol{v(t)}$ *wektor funksiýanyň* $\boldsymbol{v(a)}$ *nokatdan* $\boldsymbol{v(b)}$ *nokada çenli emele getiren dugasynyň uzynlygy diýilýär. Bu formula koordinatalar görnüşinde:*

$$l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}\,dt$$

deňlik bilen kesgitlener.

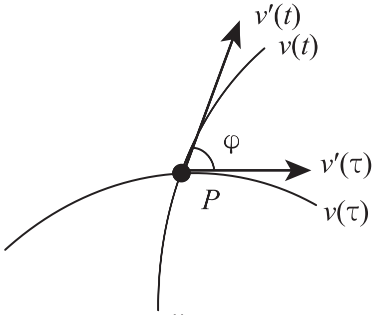
Goý, $\tau \in [\alpha, \beta]$. Koordinatalary endigan bolan $\boldsymbol{v(t)}$ wektor funksiýa t we τ parametrlere görä iki dürli parametrlemelere eýe bolsun. Bu parametrleriň özara baglanyşygy $\boldsymbol{t = t(\tau)}$ deňlik bilen berilsin we $\frac{dt}{d\tau} > 0$ bolsun, onda dürli parametrlemeler üçin hem egriniň dugasynyň uzynlygy hemişelikdir, ýagny

$$l(v(t))\Big|_a^b = l(v(\tau))\Big|_\alpha^\beta, \qquad v(a) = v(\alpha), \qquad v(b) = v(\beta).$$

Hakykatdan hem,

$$l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{v_t'(t), v_t'(t)}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{v_\tau'(\tau), v_\tau'(\tau) \cdot \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2} \cdot dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(v_\tau'(\tau), v_\tau'(\tau))}\,d\tau = l(v(\tau))\Big|_\alpha^\beta.$$



12-nji çyzgy

Indi $\boldsymbol{v(t)}$ we $\boldsymbol{v(\tau)}$ wektor funksiýalaryň arasyndaky burçy kesgitläliň. Goý, bu wektorlar käbir $P = v(a) = v(b)$, $t = a$, $\tau = b$ nokatda kesişsinler:

12-nji çyzgydan görnüşi ýaly, $\boldsymbol{v(t)}$ we $\boldsymbol{v(\tau)}$ wektor funksiýalaryň arasyndaky burç olaryň kesişme nokadyndaky tizlik wektorlaryň arasyndaky burça deňdir:

$$\cos\varphi = \frac{(v_t'(a), v_\tau'(b))}{|v_t'(a)| \cdot |\tau'(b)|}.$$

Egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasynyň kömegi bilen öňden belli bolan formulalaryň alnylyşyna seredeliň:

a) <u>kesimiň uzynlygy.</u> Goý, $\boldsymbol{v(t)}$ wektor funksiýa

$$x^i(t) = \alpha^i \cdot t \; (\alpha^i = const,\ t \in [a,b],\ i = \overline{1,n})$$

çyzykly funksiýalar bilen berilsin. Onda bu egriniň $t = a$ nokatdan $t = b$ nokada çenli uzynlygy

$$l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt = (b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2}$$

bolar. Başgaça, bu egri üçin başlangyç nokadyň $\{\alpha^i \cdot a\}$, ahyrky nokadyň $\{\alpha^i \cdot b\}$ bolýandyklary üçin adaty kesimiň uzynlygy hem

$$(b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha^i)^2}$$ bolar

b) <u>töweregiň uzynlygy.</u> Goý, $v(t)$ wektor

$$x^1(t) = R\cos t, x^2(t) = R\cos t, t \in [0,2\pi]$$

funksiýalar bilen berilsin. Onda bu egriniň $t = 0$ nokatdan $t = 2\pi$ nokada çenli uzynlygy

$$l(v(t))\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi R.$$

Bu formula öňden mälim bolan formula bilen doly gabat gelýär.

§8. Egri çyzykly koordinatalar ulgamynda egriniň uzynlygy

Goý, R^n giňişligiň käbir C ýaýlasynda kesgitlenen $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \{x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\}$ wektor funksiýa berlen bolsun. Belli bolşy ýaly, käbir $[a,b]$ aralykda ýewklid koordinatalar ulgamynda egrileriň uzynlygy

$$l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{(v'(t), v'(t))}\,dt = \int_a^b |v'(t)|\,dt$$

formula bilen kesgitlenendir.

Egri çyzykly koordinatalar ulgamynda

$$z(t) = \{z^j(t)\} = \{z^1(t), z^2(t),..., z^n(t)\}$$

egri çyzykly koordinatalar ulgamy berlip, $x^i = x^i(z(t))$, $(1 \leq i \leq n)$ deňlikler ýerine ýetsin.

Bu ýagdaýda

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \{x^i(z(t));\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Bu wektor funksiýa üçin tizlik wektorynyň özgerişine seredeliň. Onuň üçin çylşyrymly funksiýanyň önüminiň kesgitlenişine görä alarys:

$$v'(t) = \left\{\frac{dx^i}{dt}, 1 \leq i \leq n\right\},$$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i(z(t))}{dt} = \frac{dx^i(z^1(t),...,z^n(t))}{dt} =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial z^1}\cdot\frac{\partial z^1}{\partial t} + \frac{dx^i}{\partial z^2}\cdot\frac{dz^2}{dt} + ... + \frac{\partial x^i}{\partial z^n}\cdot\frac{dz^n}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial z^k}\cdot\frac{dz^k}{dt}, \quad (1 \leq i \leq n).$$

Onda duganyň uzynlygynyň formulasyndan

$$l = l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{(v'(t), v'(t))}\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}\left(\frac{dx^i(z(t))}{dt}\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}\left(\sum_m \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\cdot\frac{dz^m}{dt}\cdot\sum_p \frac{\partial x^i}{\partial z^p}\cdot\frac{dz^p}{dt}\right)}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p}\frac{dz^m}{dt}\sum_{i=1}\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\cdot\frac{dz^p}{dt}}\,dt$$

$$g_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$$

$$l = l(v(t))\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{mp} \frac{dz^m}{dt} g_{mp} \frac{dz^p}{dt}}\, dt.$$

Bu formula egri çyzykly koordinatalar ulgamynda *duganyň uzynlygynyň formulasy* diýilýär. g_{mp} ulgam z üýtgeýän ululyklara baglydyr we käbir $g_{mp} = G(z)$ matrissany kesgitleýär. Sebäbi x ýewklid koordinatalardan z egri çyzykly koordinatalara geçirilende bu özgertmäniň *ýakobi matrissasy*

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = d\psi_{zx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} & \frac{\partial x^1}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial z^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial z^1} & \frac{\partial x^2}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial z^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial z^1} & \frac{\partial x^n}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

bolar.

Bu matrissany transponirläp alarys:

$$(d\psi_{zx})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial z^1} & \frac{\partial x^2}{\partial z^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial z^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial z^2} & \frac{\partial x^2}{\partial z^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial z^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial z^n} & \frac{\partial x^2}{\partial z^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

Onda $g_{mp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$ üçin

$$G(z) = g_{mp} = (d\psi_{zx})^{\mathrm{T}}(d\psi_{zx})$$

özgertmäni alarys.

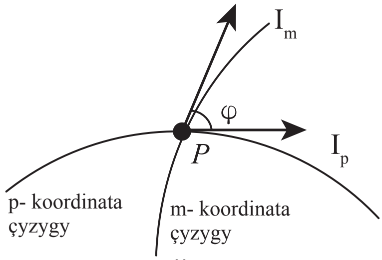
Indi bu matrissanyň geometrik manysyna seredeliň. Onuň üçin seredilýän wektor funksiýanyň koordinata çyzyklaryny alalyň. Goý, olar käbir nokatda kesişsinler *(13-nji çyzgy).*

$$v_m(t) = \{c^1, c^2, \ldots, c^m = t, \ldots, c^n\}$$

$$v_p(t) = \{c^1, c^2, \ldots, c^p = t, \ldots, c^n\}$$

$$I_m = v'_m(t).$$

$$I_p = v'_p(t).$$



13-nji çyzgy

Şeýlelikde, $g_{mp} = \mathrm{G}(z) = (I_m, I_p)$ matrissanyň geometrik manysy m we p koordinata çyzyklarynyň tizlik wektorlarynyň skalýar köpeltmek hasylydyr.

Eger-de z egri çyzykly koordinatalardan y egri çyzykly koordinatalara geçmek zerurlygy ýüze çyksa, onda seredilýän matrissanyň özgertme düzgüni aşakdaky ýaly bolar:

$$G(y) = (d\psi_{yz})^{\mathrm{T}} \cdot G(z) \cdot (d\psi_{yz}).$$

Eger-de x - dekart koordinatalardan z egri çyzykly koordinatalara geçmek ýüze çyksa, onda ýokarky formuladaky

$$G(z) = (d\psi_{zx})^{\mathrm{T}} \cdot G(x) \cdot (d\psi_{zx}).$$

G(x) matrissa birlik matrissa öwrüler. Bu ýagdaýda geçiş düzgüni aşakdaky ýaly bolar:

$$G(z) = (d\psi_{zx})^{\mathrm{T}} \cdot E \cdot (d\psi_{zx}).$$

Belli bolşy ýaly, egri çyzykly koordinatalar ulgamynyň polýar, slindriki we sferiki görnüşlerine seretdik. Bu ulgamlar üçin egrileriniň dugalarynyň uzynlyklarynyň formulalarynyň alnyşyna seredeliň:

Polýar koordinatalar üçin:

1) $R^2(r, \varphi)$; $r = z^1$, $\varphi = z^2$,

$x^1 = r\cos\varphi$, $\qquad x^2 = r\sin\varphi$,

$$d\psi_{zx} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix};$$

$$(d\psi_{zx})^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$g_{mp} = G(z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Onda polýar koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy

$$l|_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

bolar.

Silindriki koordinatalar üçin:

2) $R^3(r, \varphi, z)$, $z^1 = r$, $z^2 = \varphi$, $z^3 = z$;
$x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$, $x^3 = z$.

$$G(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot E \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Silindriki koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy:

$$G(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Sferiki koordinatalar üçin:

3) $R^3(r, \varphi, z)$, $z^1 = r$, $z^2 = \varphi$, $z^3 = z$,
$x^1 = r\cos\varphi\sin\theta$ $x^2 = r\sin\varphi\sin\theta$,
$x^3 = r\cos\theta$.

Sferiki koordinatalarda egriniň dugasynyň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy:

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt$$

sebäbi

$$G(z)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

Şeýlelikde, duganyň uzynlyklarynyň dürli formulalaryny aldyk. Köplenç, amaly hasaplamalarda duganyň uzynlygynyň formulasy däl-de duganyň differensialynyň fomulasyny ulanmak amatly bolýar. R^3 giňişlikde duganyň differensialynyň kwadratlary üçin aşakdaky formulalar dogrudyr:

1) sferiki koordinatalarda

$$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2;$$

2) silindiriki koordinatalarda

$$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2+(dz)^2;$$

3) polýar koordinatalarda

$$(dl)^2=(dr)^2+r^2(d\varphi)^2;$$

4) ýewklid koordinatalarda

$$(dl)^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots+(dx^n)^2.$$

§9. Riman giňişligi we metrikasy. Indefinit metrikalar

Mälim bolşy ýaly (§8), her bir giňişlik üçin onuň metrikasy kesgitlenýär. Şeýle hem, C ýaýlada berlen her bir z egri çyzykly koordinatalar ulgamyna koordinatalaryň çalyşmasynda kwadrat forma ýaly özgerýän, endigan funksiýalardan düzülen $G(z)$ matrissa degişli edilýär.

Mysal üçin, ýewklid giňişliginde metrika hökmünde iki wektoryň skalýar köpeltmek hasyly alynýar. Şol skalýar köpeltmek hasylyň kömegi bilen bolsa wektoryň uzynlygyny, olaryň arasyndaky burçy, egriniň dugasynyň uzynlygyny we beýleki hasaplamalary geçirip bolýar.

1-nji kesgitleme: Goý, ýewklid giňişliginiň islendik C ýaýlasynda egri çyzykly $z^1, z^2, \ldots, z^n$ koordinatalaryň regulýar ulgamy *üçin endigan funksiýalaryň $g_{mp} = G(z)$ toplumy kesgitlenen bolsun. Eger-de*

1. $G(z) = (g_{mp}(z))$ matrissa simmetrik bolsa, ýagny onuň elementleri üçin $g_{pm}(z) = g_{mp}(z)$ deňlik ýerine ýetse;

2. $G(z)$ matrissa položitel kesgitlenen bolsa we $|G(z)| \neq 0$ şert ýerine ýetse;

3. Egri çyzykly koordinatalaryň $z \to y$ çalşyrmasynda $G(y)$ geçiş matrissasy $G(y) = (d\psi_{yz})^{T} \cdot G(z) \cdot (d\psi_{yz})$ düzgün boýunça kesgitlenýän bolsa, onda bu giňişlikde Riman metrikasy girizilen diýilýär, giňişligiň özüne bolsa Riman giňişligi diýilýär.

2-nji kesgitleme. *Eger-de C ýaýlada $G(y)$ matrissany birlik matrissa öwürýän koordinatalaryň y ulgamy tapdyrsa, onda C ýaýlada kesgitlenen Riman metrikasyna ýewkild metrikasy diýilýär.*

Bu kesgitlemelerden, «ýewklid däl» giňişlikleriň bar bolmaklygy hiç bir egri çyzykly koordinatalarda metrikany $\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ görnüşde ýazyp bolmaýanlygyna bagly däldigi gelip çykmaýar. Hasaplamalarda, kesgitlemedäki $G(z) = (g_{mp}(z))$ matrissany almakdan egriniň dugasynyň differensialynyň kwadratyny almak amatly bolup durýar (§8).

Diýmek, giňişlik kesgitlenende onuň elementleri üçin skalýar köpeltmek hasylyny kesgitlemeli. Ýewkid giňişliginde $\xi = \{\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n\}$, $\mu = \{\mu^1, \mu^2, ..., \mu^n\}$ wektorlar üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly $(\xi, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \mu^i$ deňlik bilen hasaplanan bolsa, onda ýokarky kesgitlemä laýyklykda Riman giňişlikleri üçin elementleriň skalýar köpeltmek hasyly

$$(\xi, \mu) = \sum_{m,p} g_{mp}(z) \xi^m \mu^p$$

deňlik bilen kesgitlener.

Bir nokatdan çykýan iki wektor üçin olaryň skalýar köpeltmek hasyly koordinatalar ulgamynyň saýlanyp alnyşyna bagly däldir. Emma dürli nokatlardan çykýan wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly üçin inwariantlyk ýokdur. Riman metrikasy boýunça egri çyzykly koordinatlarda egriniň dugasynyň uzynlygy

$$l(\gamma(t))|_a^b - \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} \frac{dz^m}{dt} g_{mp} \frac{dz^p}{dt}}\,dt$$

formula bilen hasaplanar.

Girizilen Riman giňişliginde ýokarda kesgitlenen Riman metirkasyny ulanyp, wektoryň uzynlygynyň, iki wektoryň arasyndaky burçuň, duganyň uzynlygynyň formulalaryny aşakdaky görnüşlerde alýarys: Ýewklid we Riman giňişlikleri üçin wektoryň uzynlygy:

$$|\xi| = \sqrt{(\xi,\xi)} \quad \text{we} \quad |\xi| - \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp}(z)\xi^m \xi^p}$$

wektorlaryň arasyndaky burç

$$\cos\varphi = \frac{(\xi,\mu)}{|\xi|\cdot|\mu|} \quad \text{we}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_1^m}{dt}\frac{dz_2^p}{dt}.}{\sqrt{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_2^m}{dt}\frac{dz_2^p}{dt}} \cdot \sqrt{\sum_{mp} g_{mp} \frac{dz_1^m}{dt}\frac{dz_1^p}{dt}}}$$

formulalar bilen hasaplanar.

Ýokardaky kesgitlemelerde girizilen Riman metrikasy položitel kesgitlenen metrikadyr. Hususy halda, §8-de kesgitlenen metrikalar hem položitel kesgitlenen metrikalardyr. Emma köp ýagdaýda položitel kesgitlenmedik metrikalar – *indefinit metrikalar* bilen işlemeli bolýar.

3-nji kesgitleme. Goý, ýewklid giňişliginiň islendik C ýaýlasynda egri çyzykly koordinatalaryň $z^1, z^2, ..., z^n$ *regulýar ulgamy üçin endigan funksiýalaryň* g_{mp} *toplumy kesgitlenen bolsun. Eger-de:*

1. $G(z) = (g_{mp}(z))$ matrissa *simmetrik bolsa, ýagny* $g_{pm}(z) = g_{mp}(z)$ *deňlik ýerine ýetse;*

2. $|G(z) \neq 0|$ bolsa;

3. egri çyzykly koordinatalaryň $z \rightarrow y$ *geçiş matrissasy* *düzgün boýunça kesgitlenýän bolsa, onda seredilýän giňişlikde indefinit metrikasy girizilen diýilýär. Giňişlige bolsa indefinit giňişligi diýilýär.*

Indefinit giňişlikleriň mysaly hökmünde s indeksli R_s^n psewdoýewklid giňişliklerine seredýäris. Bu giňişliklerde metrikany gurmak üçin dekart koordinatalary berlen adaty ýewklid giňişliginde elementleriň skalýar köpeltmek hasyly hökmünde

$$(\xi,\mu)_s = -\sum_{i=1}^{s} \xi^i \mu^i + \sum_{j=s+1}^{n} \xi^j \mu^j$$

görnüşli biçyzykly formany almak ýeterlikdir. Bu metrika görä, metrikanyň otrisatel bahasy alnar, şunlukda, bu giňişliklerde wektoryň

$$|\xi|_s = \sqrt{(\xi,\xi)_s}$$

uzynlygy hyýaly hem bolup biler. Bu metrikada endigan egriniň dugasynyň uzynlygy

$$l(\gamma(t))|_a^b = \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{j=s+1}^{n}\left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2}\, dt$$

formula bilen hasaplanar.

Bellikler: *Psewdoýewklid giňişliklerinden*

1) n=4,s=1 bolanda Minkowskiniň R_1^4 giňişligini alarys. 2) S=0 bolanda $R_0^n = R^n$ ýewklid giňişligi alynýar.

Minkowskiý R_1^4 giňişligi ähtimallyk nazaryýetiniň käbir formulalaryny oňaýly ýagdaýda ýazmak üçin ýörite girizildi we ylmyň ösmegine uly täsir etdi. Bu giňişlikde $R_1^4 : x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y , x^3 = z$ koordinatalary ulanyp, duganyň differensialynyň kwadraty üçin

$$dl^2 = -c^2\, dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

formula alynýar. Bu ýerde t wagty, c ýagtylygyň tizligini görkezýär.

R_1^4 giňişlikde ýewklid metrikasyna görä e_1, e_2, e_3, e_4 ortonormirlenen bazis alyp, bu giňişligi hem ortonormirleýärler. Bu giňişlikde haýsy bolsa-da bir material nokadyň $\boldsymbol{\nu(\tau)}$ wektor bilen alynýan hereketiniň «dünýä çyzygy» diýip atlandyrylýan endigan traýektoriýasyna seredeliň. Eger-de x,y,z koordinatalary giňişlik koordinatalary hökmünde alsak, onda material nokadyň bu traýektoriýa boýunça hereketine *giňişligiň ewolýusiýasy* hökmünde seredip bolar.

§10. Sferadaky, tekizlikdäki geometriýalar

Iki ölçegli R^2 ýewklid giňişligine seredeliň. Bu giňişlikde x, y dekart koordinatalary, $dl^2=ds^2=dx^2+dy^2$ bolsa ýewklid metrikasyny kesgitleýän bolsun. Riman metrikasy $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\xi^1 \cdot \eta^1 + \xi^2 \cdot \eta^2$ skalýar köpeltmek hasyly bilen berilsin. Berlen nokatdan uzynlygy R bolan wektorlaryň uçlary-ahyrlary töweregi kesgitleýär. Eger-de tekizlikde polýar koordinatalary girizsek, onda merkezi $0(o,o)$ bolan töwerek $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$ = const görnüşli koordinata çyzyklaryny berer:

$$x^2+y^2=R^2; \quad x=r(t)\cos\varphi(t)$$

$$y=r(t)\sin\varphi(t); \quad r^2(t)=R^2 \Rightarrow$$

$$(r(t)=R=conts)$$

Polýar koordinatalar ulgamynda töweregiň dugasynyň uzynlygynyň tükeniksiz kiçi elmenti $dl=rd\varphi$ bolar. Sebäbi

$$dr=0; \; dl^2=dr^2+r^2d\varphi^2.$$

Indi, iki ölçegli sferanyň dekart koordinatalary x, y, z bolan üç ölçegli giňişlige girizilişine seredeliň. Bu dekart koordinatalary O nokatdan çykýan uzynlyklary R bolan wektorlaryň ahyrlary hökmünde alalyň.

Iki ölçegli sferanyň geometriýasyny öwrenmezden öň käbir umumy meselä seredeliň. Goý, S^2 sferada endigan $\boldsymbol{v}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ egri berlip, onuň $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{v})$ uzynlygyny kesgitlemek gerek bolsun.

Ýewklid giňişliginde dekart koordinatalary üçin $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ deňlik ýerine ýetýär. Bu giňişlikde iki sany $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{t})$ egrileri alyp, olaryň arasyndaky burçy hasaplamak üçin $\boldsymbol{v}'_1(t), \boldsymbol{v}'_2(t)$ önümleri kesgitläliň.

S^3 sfera R^3 giňişlikde $x^2+y^2+z^2=R^2$ deňleme bilen berilýär. Sferadaky nokatlaryň ýagdaýyny kesgitleýän parametrleriň sany ikä, R^3giňişlikde bolsa üçe deň. Goý, sferiki koordinatalar R^3 giňişlikde

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

deňlemeler bilen berilsin. Onda sferanyň deňlemesi egri çyzykly sferiki koordinatalarda $\boldsymbol{r}=R=const$ bilen berler.

Goý, S^2 sferada ýatýan, (θ(t), φ (t)) nokatda kesişýän $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{t})$ egrileriň koordinatalary $\mathbf{v}_1(t) = \{R, \theta_1(t), \varphi_1(t)\}$, $\mathbf{v}_2(t) = \{R, \theta_2(t), \varphi_2(t)\}$ berlip, we olaryň $\mathbf{v}'_1(t)$, $\mathbf{v}'_2(t)$ önümleri hasaplanan bolsun. Bu önümleriň skalýar köpeltmek hasyly

$$(v'_1, v'_2) = R^2(\theta'_1 \cdot \theta'_2 + \sin^2\theta \cdot \varphi'_1 \cdot \varphi'_2)$$

bolar. Sebäbi Riman metrikasynda skalýar köpeltmek hasyl aşakdaky ýaly alynýar:

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j} g_{ij}\xi^i\eta^j;$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^j};$$

$$dl^2 = dr^2 + R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

1-nji kesgitleme. Biçyzykly

$$(v'_1, v'_2) = R^2(\theta'_1 \cdot \theta'_2 + \sin^2\theta \cdot \varphi'_1 \cdot \varphi'_2)$$

forma $\boldsymbol{r}=R=Const$, $\theta=\theta$, $\varphi=\varphi$ *ornuna goýmanyň kömegi bilen*

$$dr^2 = R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

formuladan alynýan $R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ *kwadrat formany kesgitleýär.* S^2 *sferada alnan bu metrika üçölçegli giňişligiň ýewklid metrikasyndan indusirlenip alnan metrika diýilýär.*

S^2 sferada islendik nokadyň ýagdaýy giňlik (şirota) we dowamlylyk (dolgota) (θ,φ) bilen kesgitlenýär, onda s^2 sferada radius wektoryň koordinatalarynyň

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = R\cos\theta$$

görnüşde berip bolar, olary

$$(dx(\theta,\varphi))^2 + (dy(\theta,\varphi))^2 + (dz(\theta,\varphi))^2$$

formada goýup,

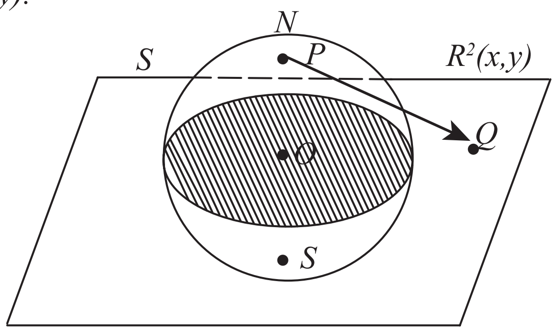
$$R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

aňlatmany alarys (hususy ýagdaý).

Bellik: *S^2 sferada beýleki egri çyzykly koordinatlary hem girizip bolýar.*

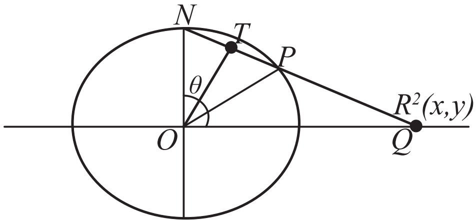
Üç ölçegli giňişlige girizilen iki ölçegli S^2 sfera käbir üsti kesgitleýär. Goý, S^2 sfera R^3 giňişlikde indusirlenen $R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$ Riman metrikasy bilen berlen bolsun, (θ,φ)– –sferik koordinatlar.

S^2 sferanyň R^2 tekizlige stereografiki proýeksiýasyna seredeliň. S^2 sferanyň merkezini koordinatalar başlangyjy bilen gabat getirýäris *(14-nji çyzgy)*.



14-nji çyzgy

Çyzgy boýunça R – sferanyň radiusy, $P\neq N$; $P\in S^2$; $Q\in R^2$. NP– çyzygy Q çenli dowam edýäris. $P\to Q$ geçýär, ýagny $\{S^2\backslash N\}$ köplügiň ähli elementleri üçin stereografiki $\varphi_0 : S^2\to R^2$ şekillendirmäni alýarys. N nokat tükeniksiz daşlaşan nokada geçýär diýen şerti goýýarys. φ_0 – şekillendirmäni analitik görnüşde ýazmak üçin sferada we tekizlikde koordinatalary girizýäris. R^3-den (r,θ,φ) koordinatalary alýarys. Onda bu koordinatalar sferada we tekizlikde indusirlenen koordinatalary kesgitleýär: $S^2(\theta,\varphi)$; $R^2(r,\varphi)$ polýar koordinatalar. Bu ýerden görnüşi ýaly φ_0 şekillendirme φ koordinatany üýtgetmeýär. Onda φ_0 şekillendirmäni tapmak üçin **r** ululygy θ burçuň üsti bilen aňlatmaly. Onuň üçin S^2 sferanyň N,Q,P nokatlardan geçýän tekiz kesigine seredeliň *(15-nji çyzgy)*.



15-nji çyzgy

15-nji çyzgydan $\angle ONT = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ we ΔONQ – gönüburçly üçburçluk bolsa, onda

$$r = OQ = R\,tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = R\,ctg\frac{\theta}{2}.$$

Şeýlelikde, üýtgeýän ululyklary çalşyrmagyň formulalary $\varphi=\varphi$; $r = R\,ctg\frac{\theta}{2}$ bolar.

Üýtgeýän ululyklary çalşyrmaklygyň Ýakobi

matrisasy $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}.$

Ýakobiany bolsa $I = -\dfrac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

bolar.

Sferanyň N nokatdan başga nokatlarynyň ählisinde regulýar orun çalşyrmak ýerine ýetýär. Şeýlelikde , S^2 –sferada ýewklid tekizlikleriň polýar koordinatalaryna meňzeşlikde, koordinatalaryny alyp bolýar. Onda bu koordinatalarda S^2 sferanyň Riman metrikasynyň ahyrky görnüşi nähili bolar? – diýen sorag ýüze çykar we ol sorag aşakdaky ýaly çözüler: $dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ Riman metrikasy üçin $r = R\,ctg\frac{\theta}{2}$ deňlikden

$dr = -\dfrac{R}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$ differensialy hasaplap,

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{R^2}{R^2+r^2}$; $\cos^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{r^2}{R^2+r^2}$ aňlatmalary we

$$\sin\theta = \sin 2\cdot\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

formulany göz öňünde tutup, sferada Riman metrikasyny

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$

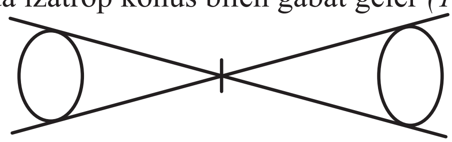
görnüşde alarys. Metrikanyň sferadaky bu görnüşi egri çyzykly polýar koordinatalarda alnan tekizlikdäki ýewklid metrikasyndan köpeldiji boýunça tapawutlanýar. Bu metrika *konform metrikasy* diýilýär.

§11. Psewdosfera. Lobaçewskiniň geometriýasy

R^n_s psewdoýewklid giňişligine seredeliň. R^n ýewklid giňişliginde S^{n-1} sfera (gipersfera) koordinatalar başlangyjyndan ρ uzaklykda ýatan nokatlaryň köplügi hökmünde seredip bolar. R^n_s giňişlikde hem koordinatalar başlangyjyndan ρ uzaklykda ýatan nokatlaryň köplügine seredeliň. Bu ýerde *ρ* – hakyky, nol, hyýaly bahalary alýar. Bu nokatlaryň $S^{n-1}_s = S^{n-1}_0 = S^{n-1}$ köplügine *psewdosfera* diýilýär. Nol radiusly psewdosfera ikinji tertipli

$$-\sum_{i=1}^{s}(x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^{n}(x^j)^2 = 0$$

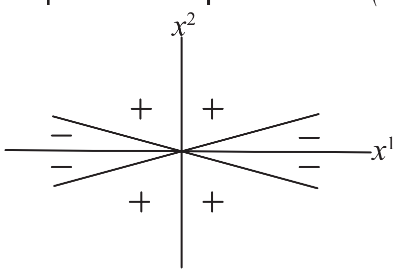
deňleme bilen berler. Bu ýerde $x^1, x^2, \dots, x^n \in R^n$ dekart koordinatalary. Bu nol ýa-da izatrop konus bilen gabat geler *(16-njy çyzgy)*.



16-njy çyzgy

1. Goý, n=2; s=1. x^2, $x^2 \in R^2$ bolsun. Onda $(\xi,\xi)<0$ bolanda $|x^2|<|x^1|$, $(\xi,\xi)>0$ bolanda $|x^2|>|x^1|$, sebäbi

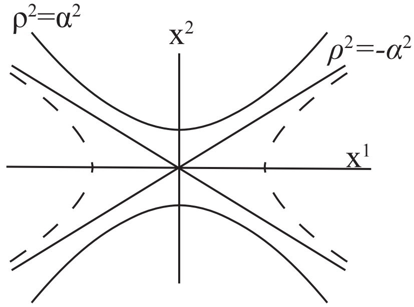
$$-x^{1^2} + x^{2^2} = 0; \quad x^{2^2} = x^{1^2}; \quad x^2 = \pm x^1$$ *(17-nji çyzgy).*



17-nji çyzgy

2. Hakyky radiusly psewdosfera – bu giperboladyr *(18-nji çyzgy)*.

$$-x^{1^2}+x^{2^2}=\alpha^2; \quad -x^{1^2}+x^{2^2}=-\alpha^2;$$

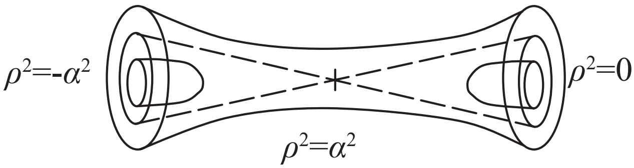


18-nji çyzgy

3. R_1^3 giňişlikde nol, hakyky, hyýaly radiusly psewdosferalar:

$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=0;$$
$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=\alpha^2;$$
$$-x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}=-\alpha^2.$$

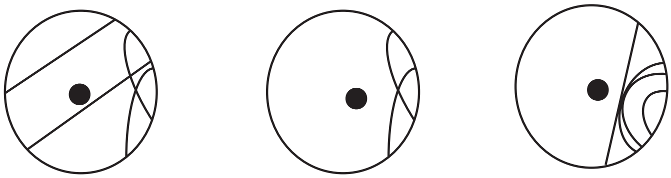
Ox okly iki we bir gowakly giperboloidler *(19-njy çyzgy)*.



19-njy çyzgy

R_1^3 giňişlikde hyýaly radiusly psewdosfera üçin alnan geometriýa R^2 – tekizlikdäki α radiusly tegelekdäki geometriýa bilen gabat gelýär. Bu ýagdaýda «nokatlar» hökmünde – çäkde ýerleşmeýän tegelegiň nokatlary; «gönüler» hökmünde – tegelegiň çägini göni burç boýunça kesýän töweregiň dugalaryny alsaň, onda *Lobaçewskiniň geometriýasy* diýen düşünjä gelinýär.

Bu aýdylanlary aşakdaky çyzgylarda göz öňüne getirip bolar *(20-nji çyzgy)*.



20-nji çyzgy

Lobaçewskiniň geometriýasynyň ýewklid giňişligindäki α radiusly tegelekdäki modeline Puankare modeli diýilýär. Bu modelde ýewklid geometriýasynyň V postulatyndan başga ähli aksiomalary ýerine ýetýärler.

§12. Tekiz egriniň aýratyn nokatlary. Galtaşyjy töwerek. Orama

Gönüburçly koordinatalar ulgamynda F(x,y)=0 deňleme bilen berlen γ tekiz egrä seredeliň. Goý γ egriniň islendik nokadynyň käbir etrabynda F(x,y) funksiýa ähli argumentleri boýunça üznüksiz birinji tertipli önümlere eýe bolsun.

1-nji kesgitleme: γ egriniň F(x,y) funksiýanyň ähli birinji tertipli hususy önümlerini nola öwürýän nokatlaryna onuň aýratyn nokatlary diýilýär. γ egriniň beýleki nokatlary adaty nokatlardyr.

Diýmek, egriniň aýratyn nokatlaryny

$$\left\{ M \in \gamma : \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \right\}$$

köplük görnüşinde alyp bolar.

Aýratyn nokatlaryň etrabynda F(x,y)=0 deňleme üçin anyk däl funksiýanyň barlygy hakyndaky teoremany ulanyp bolmaýar, beýle diýildigi bu deňleme oňa girýän üýtgeýän ululyklaryň hiç birine görä-de bir bahaly çözülmeýär ýa-da aýratyn nokadyň etrabynda koordinata oklarynyň hiç birine-de birbahaly şekillendirilmeýär diýildigidir.

1-nji mysal. $x^2-y^2+x^3=0$ egriniň aýratyn nokatlaryny kesgitlemeli.

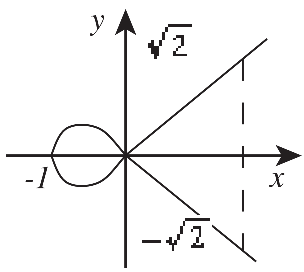
Çözülişi. Egriniň grafigini guralyň *(21-nji çyzgy)* we üýtgeýän ululyklara görä hususy önümleri kesgitläliň:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3x^2; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2y. \end{cases}$$

Bu önümler diňe (0;0) we (-2/3;0) nokatlarda nola deňdirler, ýöne diňe (0;0) nokat egrä degişli we aýratyn nokatdyr. Grafikden görnüşi ýaly, (0;0) nokat hiç bir koordinata okuna proýektirlenip bilinmeýär.

Goý indi, γ egri parametriki görnüşde

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$



21-nji çyzgy

deňlemeler ulgamy bilen berlen bolsun we *φ, ψ* funksiýalar $t=t_0$ nokatda üznüksiz önümlere eýe bolsun. Bu ýagdaýda t_0 nokatda

$$\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) \neq 0$$

deňsizlik ýerine ýetse, onda $M_0(x_0,y_0)$ nokat egriniň adaty nokady bolar. Eger-de

$$\varphi'^2(t_0) + \psi'^2(t_0) = 0$$

bolsa, onda $M_0(x_0,y_0)$ aýratyn nokatdyr.

Eger-de γ_1, γ_2 egriler kesişme M_0 nokadynda galtaşýanlara eýe bolsalar we ol galtaşýanlar hem gabat gelseler, onda γ_1 we γ_2 egrilere M_0 nokatda *galtaşýan egriler* diýilýär.

γ_1 we γ_2 egrileriň galtaşma şertlerine seredeliň.

Goý, γ_1 egri (1) ulgamyň, γ_2 egri bolsa

$$F(x,y) = 0 \qquad (2)$$

deňlemäniň kömegi bilen berlen bolsun. $M_0(x_0,y_0)$ nokat bu egrileriň umumy nokady bolsun ($x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ we $F(x_0,y_0)=0$).

Goý, M_0 nokat γ_1 we γ_2 egrileriň adaty nokady we olar bu nokatda galtaşýan bolsunlar. Onda bu egriler M_0 nokadyň etrabynda differensirlenýän funksiýalaryň grafiklerini kesgitlärler. Goý, (1) ulgamdan kesgitlenen $y=f_1(x)$ funksiýa γ_1 egriniň, (2) deňlemeden kesgitlenen $y=f_2(x)$ funksiýa γ_2 egriniň grafiklerini kesgitleýän funksiýalar bolsun.

Funksiýalar M_0 nokatda şert boýunça galtaşýarlar, onda olaryň burç koeffisiýentleri özara deňdirler:

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0).$$

Bu ýerden parametrik görnüşde berlen funksiýalaryň we anyk däl funksiýalaryň önümleriniň kesgitlemelerine görä alarys:

$$\psi'(t_0)/\varphi'(t_0) = -F'_x(M_0)/F'_y(M_0)$$

$$\psi'(t_0)F'_y(M_0)+ \varphi'(t_0) F'_x(M_0)=0 \qquad (3)$$

(3) formula deňlemeleri (1) we (2) bilen berlen γ_1 we γ_2 egrileriň M_0 nokatda galtaşma şertini kesgitleýär. Bu şerti başgaça

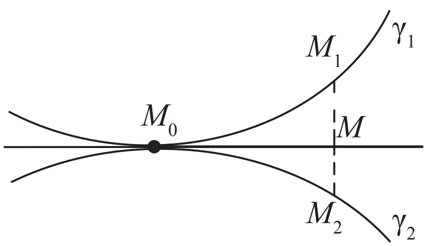
$$F'_x \cdot \frac{dx}{dt} + F'_y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \qquad (4)$$

görnüşde hem alyp bolar.

Bellik: *Eger-de M_0 nokat γ_1, γ_2 egrileriň iň bolmanda biriniň aýratyn nokady bolsa hem (4) formulanyň manysy bardyr.*

Indi ***galtaşyjy töwerek*** düşünjesine seredeliň.

Goý, γ_1, γ_2 egriler M_0 nokatda galtaşýan bolsunlar. Galtaşýandan käbir *M* nokady alalyň we ondan perpendikulýar galdyralyň. Ol perpendikulýar γ_1 egrini M_1 nokatda, γ_2 egrini M_2 nokatda keser. Eger-de M nokat M_0 nokada has ýakyn bolsa, onda bu perpendikulýar egrileri diňe bir nokatda keser *(22-nji çyzgy)*.



22-nji çyzgy

2-nji kesgitleme. *Eger-de* $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{|M_1 M_2|}{|MM_0|^{n+1}}$ *predeliň noldan tapawutly bahasy bar bolsa, onda γ_1 we γ_2 egriler M_0 nokatda n – tertip-*

li galtaşma eýe diýilýär. Eger-de bu predel nol bahany alsa, onda bu egriler tükeniksiz tertipli galtaşma eýe diýilýär.

Goý, γ_1, γ_2 egriler grafikleri $f_1(x), f_2(x)$ bolan funksiýalar bilen berilsin we ol egriler adaty $M_0(x_0,y_0)$ nokatda galtaşýan bolsunlar. Eger-de Δx x_0 nokada berlen artdyrma bolsa ($x=x_0+\Delta x$), onda γ_1, γ_2 egrileriň n – tertipli galtaşma şertini

$$\lim_{M\to M_0}\frac{|f_1(x_0+\Delta x)-f_2(x_0+\Delta x)|}{|\Delta x|^{n+1}} = \lim_{M\to M_0}\frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{|x-x_0|^{n+1}} \quad (5)$$

predeliň üsti bilen alyp hem bolar.

Bellik. *Eger-de $f_1(x), f_2(x)$ funksiýalar x_0 nokadyň käbir etrabynda n gezek differensirlenip, $(n+1)$ tertipli önüm x_0 nokatda üznüksiz bolsa we*

$$f_1^{(k)}(x_0)=f_2^{(k)}(x_0),\ k=1,2,\dots,n$$
$$f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_1^{(n+1)}(x_0)$$

deňlikler ýerine ýetse, onda (5) şert bu egrileriň n – tertipli galtaşmasyny kesgitleýär.

Goý, γ egri $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bolsun we M_0 bu egriniň käbir nokady bolsun. M_0 nokatdan geçýän töwerek bilen γ egriniň galtaşmasyna seredeliň (beýle töwerekleriň sany tükeniksizdir).

3-nji kesgitleme: γ egri bilen tertibi 2-den kiçi bolmadyk galtaşma emele getirýän töwerege γ egriniň M_0 nokatdaky galtaşyjy töweregi diýilýär.

γ egriniň M_0 nokatda galtaşyjy töwerege eýe bolmagynyň şertini aşakdaky teorema berýär.

Teorema: Goý, γ egri $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bolsun. Eger $f(x)$ funksiýa x_0 nokatda nola deň bolmadyk ikinji tertipli önüme we üznüksiz üçünji tertipli önüme eýe bolsa, onda γ egri üçin $M_0(x_0;y_0)$ nokatda galtaşyjy töwerek bardyr.

Subudy: Galtaşyjy töweregiň deňlemesini

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$$

(a, b, ρ – kesgitlenmäge degişli hemişelikler) görnüşde gözläliň. Bu deňlemäni $y_0=f(x_0)$, $y'_0=f'(x_0)$, $y_0''=f''(x_0)$ deňlikleri hasaba alyp, iki gezek differensirläp a, b, ρ üýtgeýänlere görä şu ulgamy alarys:

$$\begin{cases} (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=\rho^2 \\ (x_0-a)+(y_0-b)\cdot y_0'=0 \\ 1+(y^0{}')^2+(y_0-b)\cdot y_0''=0. \end{cases}$$

$y_0''=f''(x_0)\neq 0$ şertde bu ulgam ýeke-täk çözüwe eýedir:

$$\begin{cases} a=x_0-[(1+y_0'^2)y_0']/y_0'' \\ b=y_0+(1+y_0'^2)/y_0'' \\ \rho=(1+y_0'^2)^{3/2}/|y_0''| \end{cases}$$

bu bolsa gözlenýän töweregiň barlygyny subut edýär.

Tekiz egriler maşgalasynyň oramasy hakynda durup geçeliň. Üç argumentli $F(x,y,C)$ funksiýa seredeliň. C parametriň her bir bahasy üçin

$$F(x,y,C)=0 \tag{6}$$

deňlemäniň kömegi bilen *egriler maşgalasy* kesgitlenýär, ýagny egrileriň bir parametrli maşgalasy kesgitlenýär. Mysal üçin, $y=(x-C)^2$ görnüşli funksiýa Ox oky boýunça süýşýän parabolalaryň maşgalasyny kesgitleýär.

Goý, $F(x,y,C)$ funksiýa özüniň berlen ýaýlasynda ähli argumentler boýunça differensirlenýän bolsun.

4-nji kesgitleme: Eger-de M(x,y) *nokadyň koordinatalary*

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0 \\ F_C(x,y,C)=0 \end{cases} \tag{7}$$

ulgamy kanagatlandyrýan bolsa, onda ol nokada C parametre görä alynýan egriler maşgalasynyň häsiýetlendiriji nokady diýilýär.

5-nji kesgitleme: Eger-de käbir egri özüniň her bir nokadynda egriler maşgalasynyň diňe bir egrisine, dürli nokatlarynda dürli egrilerine galtaşýan bolsa, onda bu egrä bir parametrli egriler maşgalasynyň oramasy diýilýär.

Görnüşi ýaly orama maşgalanyň egrilerine diňe häsiýetlendiriji nokatlarda galtaşýar. Şonuň üçin hem oramany häsiýetlendiriji nokatlaryň geometrik orny hökmünde alyp bolar. Şeýlelikde, oramanyň deňlemesi hökmünde (7) ulgamdan *C* parametri gysgaldyp alynýan deňlemäni alyp bolar.

2-nji mysal. Käbir göni çyzyk tekizligiň birinji çärýeginde süýşüp, şol bir S hemişelik meýdanly üçburçlugy emele getirýär. Bu gönileriň ýerleşişleriniň dürli ýagdaýlarynda ýüze çykýan göni çyzyklar maşgalasynyň oramasyny tapmaly.

Çözülişi: Göni çyzygyň birinji çärýekde süýşüp, üçburçluk emele getirmegi üçin onuň koordinata oklaryny kesmegi zerurdyr, diýmek, göni çyzygyň kesimlerdäki deňlemesini, ähli ýagdaý üçin bolsa bu deňlemeleriň maşgalasyny $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ deňleme bilen kesgitläris. Gönüburçly üçburçlugyň meýdanynyň fomulasyndan $b=\frac{2S}{a}$ parametri kesgitläp, berlen deňlemede ornuna goýsak, bir parametrli deňlemeleriň

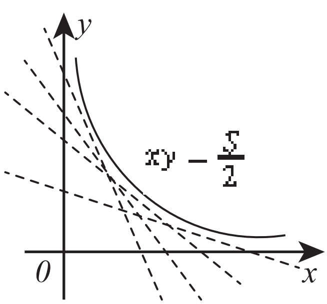
$$f(x,y,a)=\frac{x}{a}+\frac{ay}{2S}-1=0 \qquad (*)$$

maşgalasyny alarys we onuň üçin oramanyň deňlemesini taparys. Differensirlemeden soňra

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\frac{x}{a^2}+\frac{y}{2S}=0$$

deňlemä geleris we ondan $a=\sqrt{\frac{2xS}{y}}$ taparys.

a parametriň bahasyny (*) deňlemede ornuna goýup, egriler maşgalasynyň oramasynyň deňlemesini $xy=\frac{S}{2}$ görnüşde alarys *(23-nji çyzgy)*.



23-nji çyzgy

3-nji mysal. Dekart koordinatalarda üstüň $x^3 + y^3 = 3axy$ deňlemesi parametrik görnüşde $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ deňlemeler bilen berlen. Dekart listiň aýratyn nokatlaryny, galtaşýanlaryny kesgitlemeli.

Çözülişi. Dekart listiň dekart koordinatalaryndaky $x^3 + y^3 = 3axy$ deňlemesinden alarys:

$$F(x,y,a) = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Onda

$$\begin{cases} F'_x(x,y,a) = 3x^2 - 3ay = 0 \\ F'_y(x,y,a) = 3y^2 - 3ax = 0. \end{cases}$$

Bu deňlemeleriň birinjisini *x-a,* ikinjisini *y-e* köpeldip, biri-birinden aýyrsak, onda

$$3x^3 + 3y^3 = 0 \text{ ýa-da}$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

deňlemäni alarys. Bu deňlemeden $x = y$ ýa-da $x = \frac{-y(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$ çözüwlere geleris. Şeýle hem $x + y + a = 0$ – asimptotanyň deňlemesini tapýarys. Aýratyn nokat O (0,0) bolar. Bu nokat üçin

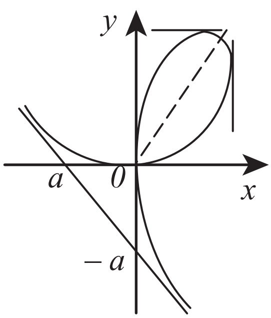
$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 6x\Big|_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 6y\Big|_{y=0} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{y=0,x=0} = -3a\Big|_{(0,0)} = -3a$$

we $H = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 9a^2 > 0.$

Diýmek, aýratyn $O(0,0)$ nokat öz-özüni kesýän uzel nokadydyr.



24-nji çyzgy

Galtaşýanyň

$$Y - y_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\Bigg|_{(0,0)}(X - x_0)$$

deňlemesinde degişli ornuna goýmalardan soňra $y = -\frac{0}{0}x$ ýaly kesgitsizlige geleris. Galtaşýanlar $x=0,$ $y=0$ koordinata oklary bolar *(24-nji çyzgy)*.

§13. Ugradyjy üçgranlyk

Goý, bize käbir üznüksiz $\boldsymbol{v}(\mathbf{t})$ wektor funksiýa berlen bolsun. Onuň godografyny gurup, käbir γ egrini alarys. Goý, bu γ egri aşakdaky ýaly parametrlenen bolsun

$$\boldsymbol{v}(\mathbf{t}) = x(\mathrm{t})\boldsymbol{i} + y(\mathrm{t})\boldsymbol{j} + z(\mathrm{t})\boldsymbol{k}(a \leq t \leq b).$$

Belli bolşy ýaly, γ egriniň $[\mathrm{t}_0,\mathrm{t}]$ aralyk üçin dugasynyň uzynlygy

$$l(t) = \int_{t_0}^{t} |v'(t)|dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

görnüşde kesgitlenýär. Formuladan görnüşi ýaly $l = l(\mathrm{t})$ birbahaly üznüksiz funksiýa; soňky deňligi t görä çözüp, $t = \mathbf{t}(l)$ alyp bolýar. Bu ýagdaýda $\boldsymbol{v}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{v}(\mathbf{t}(l)) = \boldsymbol{v}(l) = \boldsymbol{v}$ tebigy parametrlemä gelýäris.

Indi $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(l)$ deňleme bilen berlen egrä seredeliň. Onuň her bir nokadynda (l – üçin) tizlik $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{v}'(l)$ wektory kesgitläris. Bu $\boldsymbol{t}$ wektor bu egrä geçirilen galtaşýanyň ugruny görkezer.

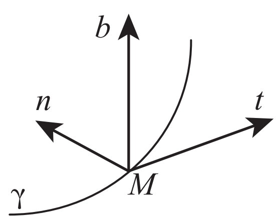
Belli bolşy ýaly, hemişelik uzynlykly wektoryň önümi onuň özüne ortogonaldyr, ýagny:

$$|v(\mathrm{t})|^2 = \rho^2 \qquad 2(v(\mathrm{t})), v'(\mathrm{t})) = 0.$$

Şonuň ýaly hem $\mathbf{t}' = \boldsymbol{v}''(l)$ we $\mathbf{t} = \boldsymbol{v}'(l)$ wektorlar hem özara ortogonal bolarlar. Indi, $\mathbf{t}'$ wektoryň ugruna birlik wektor bolan

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}''(l)/|\mathbf{v}''(l)|$$

wektory kesgitläris. Onda $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ üçin $\bar{\boldsymbol{n}} \perp \bar{\boldsymbol{t}}$. Bu wektorlaryň $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}]$ wektor köpeltmek hasylynyň kömegi bilen özara perpendikulýar bolan birlik wektorlaryň $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ üçlügini alarys. Bu üçlük her bir nokat üçin kesgitlener, ol üçlüge *esasy reper* ýa-da *esasy üçgranlyk (ugradyjy üçgranlyk)* diýilýär *(25-nji çyzgy)*.



25-nji çyzgy

Kesgitlenen

$\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}]$, $\boldsymbol{t}=[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}]$

birlik wektorlaryň başlangyçlarynyň (üçlüginiň depesiniň) egri boýunça hereketiniň kömegi bilen egrini doly häsiýetlendirip bolýar.

Bu birlik wektorlara ***t*** – galtaşýanyň, ***b*** – binormalyň, ***n*** – normalyň birlik wektorlary diýilýär. Bu wektorlaryň kömegi bilen ***v(l)*** egriniň her bir nokady üçin koordinatalar ulgamyny kesgitleýäris. Onda bu ulgamyň koordinata oklary: galtaşýan, baş normal we binormal (***t, n, b*** – boýunça) wektorlaryň ugry boýunça ýatarlar. Koordinata tekizlikleri (esasy üçgranlygyň granlary) bolsa aşakdaky ýaly kesgitlenýär *(26-njy çyzgy).*

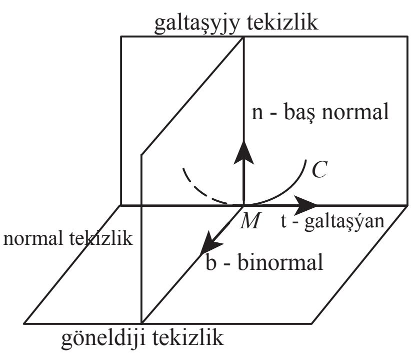
1) M nokatdan geçýän we ***t*** wektora perpendikulýar bolan (ýagny ***n*** we ***b*** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige *normal tekizlik* diýilýär;

2) M nokatdan geçýän we ***n*** wektora perpendikulýar bolan (ýagny ***t*** we ***b*** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige *göneldiji tekizlik* diýilýär;

3) M nokatdan geçýän we ***b*** wektora perpendikulýar bolan (ýagny ***n*** we ***t*** wektorlary özünde saklaýan) tekizlige *galtaşyjy tekizlik* diýilýär.

Şunlukda, girizilen **(*t*, *n*, *b*)** – ugradyjy koordinatalar ulgamy üçin koordinata oklarynyň we tekizlikleriniň deňlemelerini kesgitlemek zerurdyr.

Mesele: ***v*=*v*(*l*)** *deňleme bilen berlen egri üçin M nokatda galtaşýanyň, baş normalyň, binormalyň deňlemelerini hem-de normal, göneldiji, galtaşyjy tekizlikleriň deňlemelerini düzmeli (26-njy çyzgy).*



26-njy çyzgy

Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, v_0 – radius wektorly nokatdan geçýän we käbir ***a*** wektoryň ugruna alnan göni çyzygyň wektor deňlemesi

$$\frac{\bar{\rho} - \bar{\upsilon}_0}{\bar{a}} = \lambda, \ (-\infty < \lambda < \infty)$$

ýa-da $\bar{\rho} = \bar{\upsilon}_0 + \bar{a}\lambda$ ýaly bolar. Şeýle-de, v_0 – radius wektorly nokatdan geçýän we käbir ***a*** wektora perpendikulýar bolan tekizligiň wektor deňlemesi

$$(\overline{\rho} - \overline{\upsilon}_0, \ \overline{a}) = 0$$

görnüşde berilýär. Bu formulalary ulansak, ***v = v(l)*** wektor funksiýaly γ egri üçin

galtaşýanyň

$$\overline{\rho} = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\upsilon}_0{}' \lambda,$$

baş normalyň

$$\overline{\rho} = \overline{\upsilon}_0 + \overline{\upsilon}_0{}'' \lambda,$$

binormalyň

$$\overline{\rho} = \overline{\upsilon}_0 + [\overline{\upsilon}_0{}' \ \overline{\upsilon}_0{}'']\lambda,$$

deňlemelerini, şeýle hem normal tekizligiň

$$(\overline{\rho} - \overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_0{}') = 0,$$

göneldiji tekizligiň

$$(\overline{\rho} - \overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_0{}'') = 0,$$

galtaşyjy tekizligiň

$$(\overline{\rho} - \overline{\upsilon}_0, [\overline{\upsilon}_0{}', \overline{\upsilon}_0{}'']) = 0$$

deňlemelerini alarys.

Emma hasaplamalarda köp ýagdaýda egri ***v=v***(t*)* görnüşde berilýär. Şonuň üçin hem bu deňlemeleri *t* parametre görä almak zerurlygy ýüze çykýar.

Goý, bize giňişlik egrisi ***v***=***v***$(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ wektor funksiýanyň kömegi bilen berlen bolsun we $\boldsymbol{v}'(t)\neq 0$, $(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(\mathrm{t})\neq 0)$ bolsun, ýagny egrä adaty nokatlarda seredýäris. ***v=v***(*t*) bilen kesgitlenen γ egriniň *M* nokadynda galtaşýanyň ugry ***v'***(*t*) wektoryň ugry bilen gabat gelýär. Şonuň üçin hem *M* nokatda galtaşýanyň deňlemesini alarys:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}.$$

Bu ýerde *X,Y,Z* – egriniň gözlenýän nokatlary we ***v'***(t)=$\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

Giňişlik egrisine geçirilen *normal* diýlip, onuň galtaşýan geçirilen M nokadynda galdyrylan perpendikulýara aýdylýar. Onda analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, *normal tekizligiň* deňlemesini

$$x'(t)(X-x(t))+y'(t)(Y-y(t))+z'(t)(Z-z(\mathrm{t}))=0$$

görnüşde alarys.

Bu meseläniň üstler üçin çözlüşine seredýäris.

Goý, käbir üst $F(x, y, z)=0$ deňleme bilen berilsin. Onuň käbir $M(x(t), y(t), z(t))$ nokadynda oňa geçirilen galtaşyjy tekizligiň we normalyň deňlemeleriniň alnyşyna seredeliň. M nokat F üstde ýatýar. Şonuň üçin

$$F(M)=F(x(t), y(t), z(t))=0.$$

Bu deňlemeden aşakdaky önümi alalyň:

$$F_x'x'(t)+F_y'y'(t)+F_z'z'(t)=0 \longrightarrow$$

$$(\nabla\overline{F}, \overline{\upsilon}(t))=0 \begin{cases} F_x' \neq 0 \\ F_y' \neq 0 \\ F_z' \neq 0 \end{cases}$$

$\nabla\overline{F}=\{F_x, F_y, F_z\}$ - gradiýent , ∇ – nable belgisi.

Galtaşýanlaryň hemmesi bir galtaşyjy tekizlikde ýatýarlar. Şeýlelikde, galtaşýanyň

$$\frac{X-x(t)}{F_x}=\frac{Y-y(t)}{F_y}=\frac{Z-z(t)}{F_z}$$

normal tekizligiň

$$F_x(X-x(t))+F_y(Y-y(t))+F_z(Z-z(t))=0$$

deňlemeleri alyndy.

Bellik: $\boldsymbol{v}'(\mathrm{t})\neq 0$

Galtaşýanyň we normal tekizlikleriň deňlemesini aldyk. Indi galtaşyjy tekizligiň deňlemesini düzeliň.

Bu tekizlik $\boldsymbol{v}'$ we $\boldsymbol{v}''$ wektorlaryň üstünde ýatýar. Şonuň üçin olaryň wektor köpeltmek hasylyny tapýarys:

$$[\overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}'']=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=(y'z''-y''z')i+(z'x''-x'z'')j+(x'y''-y'x'')k$$

we

$$[\overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}''] \neq 0.$$

Bu wektor galtaşyjy tekizlige perpendikulýar, şonuň üçin hem ol normal wektor bolup biler. Şeýlelik bilen, egriniň M(x,y,z) nokadyndan geçýän we bu wektora perpendikulýar bolan galtaşyjy tekizligiň parametriki deňlemesi:

$$(X-x(t))(y'z''-y''z')+(Y-y(t))(z'x''-x'z'')+(Z-z(t))(x'y''-y'x'')=0$$

we wektor deňlemesi bolsa

$$(\overline{\rho}-\overline{\upsilon}_0, [\overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}'']) = 0$$

görnüşde bolar.

Bu ýerde **ρ** – galtaşyjy tekizligiň radius wektory, X, Y, Z – gözlenýän koordinatalar. Bu deňlemäni kesgitleýjiniň kömegi bilen aşakdaky ýaly ýazmak hem bolar:

$$\begin{vmatrix} X-x(t) & Y-y(t) & Z-z(t) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Şeýle-de, galtaşyjy tekizligiň wektor deňlemesini

$$(\overline{\rho}-\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_0', \overline{\upsilon}_0'') = 0$$

görnüşde hem alyp bolar.

Binormal galtaşyjy tekizlige perpendikulýar bolsa, onda [$\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$] wektor hem oňa perpendikulýar bolar. Şonuň üçin ilki bilen binormalyň deňlemesini düzeliň. Ol M(x,y,z) nokatdan geçýär we [$\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$] wektor bilen özara paralleldir. Onda binormalyň deňlemesi

$$\frac{X-x(t)}{y'z''-z'y''} - \frac{Y-y(t)}{-x'z''+z'y''} - \frac{Z-z(t)}{-y'x''+x'y''}$$

bolar.

Indi, baş normalyň deňlemesini düzeliň. Onuň üçin oňa perpendikulýar bolan $\boldsymbol{v}'$ we [$\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$] wektorlaryň wektor köpeltmek hasylyny tapalyň. Alnan wektor baş normala parellel bolar. Ony üç wektoryň wektor köpeltmek hasyly görnüşinde alarys:

$$[\overline{\upsilon}',[\overline{\upsilon}'\epsilon,\overline{\upsilon}'']] - \overline{\upsilon}'(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'') - \overline{\upsilon}''(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}') - k\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$$[\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}''] = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases} a = x'(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'') - x''(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}') \\ b = y'(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'') - y''(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}') \\ c = z'(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'') - z''(\overline{\upsilon}',\overline{\upsilon}'). \end{cases}$$

Bu belgilemelerden soňra baş normalyň deňlemesi

$$\frac{X - x(t)}{a} = \frac{Y - y(t)}{b} = \frac{Z - z(t)}{c},$$

göneldiji tekizligiň deňlemesi bolsa

$$a(X - x(t)) + b(Y - y(t)) + c(Z - z(\mathrm{t})) = 0$$

görnüşde bolar.

Şeýlelikde, seredilýän mesele doly çözüldi, ýagny islendik berlen egriniň adaty nokadynda oňa geçirilen galtaşýanyň, baş normalyň, binormalyň we galtaşyjy, göneldiji, normal tekizlikleriň deňlemeleri egriniň dürli parametrlenmeleri üçin alyndy.

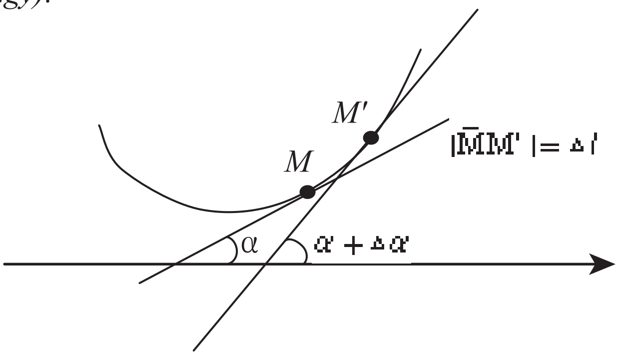
§14. Egrilik we towlulyk. Frene formulalary

Ugradyjy üçgranlyk düşünjesi, ýagny galtaşýan, başnormal, binormal we galtaşyjy, göneldiji, normal tekizlikler öwrenilenden we **t,n,b** wektorlaryň özara ýerleşişleri alnandan soňra olaryň özgertmelerini öwrenmek zerurlygy ýüze çykýar. Ýagny tekiz egriler öwrenilende olaryň her bir nokady üçin **t** we **n** wektorlary gurýarys. Şol wektorlaryň ugruna ugrukdyrylan göni çyzyklary alsak, onda şol göni çyzyklar seredilýän nokatda koordinatalar ulgamyny çalşyryp biler. Başgaça aýdylanda, **t** we **n** wektorlaryň kömegi bilen täze koordinatalar ulgamy girizilýär. Egri boýunça hereket edilende, ýagny bir nokatdan beýleki nokada geçilende, koordinatalar ulgamy özgerer. Şol özgerme **t** we **n** wektorlaryň kömegi bilen alnar. Şeýlelikde,

t we **n** wektorlar bilen olaryň önümleriniň arasyndaky baglanyşygy görkezýän formulalary tapmak zerurlygy ýüze çykýar. Ol formulalar fransuz matematigi Žan Frene (1801-1880) tarapyndan açylypdyr.

Ilki bilen tekiz egriniň egriligi hakynda durup geçeliň.

Goý, bu egri özüniň ähli nokatlarynda galtaşýanlara eýe bolsun *(27-nji çyzgy).*



27-nji çyzgy

Çyzgydan görnüşi ýaly seredilýän egriniň egriligi oňa geçirilen galtaşýanlaryň emele getirýän burçlaryna we duganyň örän kiçi özgertmesine bagly bolýar. Şonuň üçin hem $\Delta\alpha/\Delta l$ ululygy seredilýän duganyň orta egriligi (k_0) hökmünde alyp bolar.

1-nji kesgitleme: Eger-de $\lim\limits_{\Delta l \to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|$ *predeliň tükenikli bahasy bar bolsa, onda ol predele egriniň egriligi diýilýär we*

$$\lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right| = k.$$

Şeýlelikde, egriniň egriliginiň geometrik manysy egriniň nokatlarynda geçirilýän galtaşýanlaryň *ox* oky bilen emele getirýän burçlarynyň özgertmesini kesgitleýär.

t $= \bar{t}$ we **n** $= \bar{n}$ wektorlaryň özgertmesine seredeliň. Goý, egri özüniň $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(l) = \bar{\vartheta}(l)$ natural deňlemesi bilen berlen bolsun we l_0 nokatda $OM = \boldsymbol{v}_0 = \bar{\vartheta}_0$ radius wektor kesgitlenen bolsun. Goý, $M \in \gamma$, M nokatdaky galtaşýana perpendikulýar bolan normal hem geçirilen bolsun. Belli bolşy ýaly, $\bar{t} = \bar{\vartheta}'(l)$, birlik wektor, şeýle hem hemişelik wektoryň onuň önüminiň özüne ortogonaldygyny peýdalansak, $\bar{t}'$ wektoryň $\bar{n}$ wektoryň ugry boýunça ýatjakdygyna göz ýetireris, ýagny

$$\bar{t}' = k\bar{n} \qquad (1)$$

Indi, $\bar{n}$ wektoryň özgertmesine seredeliň, bu wektor hem hemişelik, şonuň üçin-de $\bar{n}' \perp \bar{n}$. Şeýlede $\bar{t} \perp \bar{n}$, onda $\bar{n}'$ wektor $\bar{t}$ wektora kolleniardyr. Olar biri-birinden käbir α san boýunça tapawutlanýarlar, ýagny $\bar{n}' = \alpha \cdot \bar{t}$.

(1) formulany ulanyp we $(\bar{t},\bar{n}) = 0$ deňligi differensirläp, α koeffisiýenti kesgitleýäris:

$(\bar{t}',\bar{n}) + (\bar{t},\bar{n}') = (k\bar{n},\bar{n}) + (\bar{t}, \alpha\bar{t}) = k + \alpha = 0,$

$-k = \alpha$, *onda*

$$\bar{n}' = -k\bar{t}. \qquad (2)$$

(1) we (2) formulalara tekiz egri üçin *Frene formulalary* diýilýär.

Bu deňlikleriň iki bölegini-de *dl* köpeldip we özgertmeleri geçirip, tekiz egri üçin differensiallardaky Frene formulalaryny alarys:

$$\begin{cases} \bar{t}'dl = k\bar{n}dl \\ \bar{n}'dl = -k\bar{t}dl \end{cases} \text{ýa-da} \begin{cases} d\bar{t} = k\bar{n}dl \\ d\bar{n} = -k\bar{t}dl. \end{cases}$$

Teorema: Tekiz egriniň göni çyzyk bolmagy üçin onuň ähli nokatlarynda bu egriniň egriliginiň nola deň bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy: Zerurlygy. Goý, berlen egri göni bolsun, onda bu çyzygyň ähli nokatlarynda galtaşýan $\bar{t}$ wektoryň kesgitlenişine görä, hemişelik wektor bolar, ýagny $\bar{t} = c$ hemişelik ululyk bolar. Onda egriniň egriligi k=$|\bar{t}'|$=0 bolar.

Ýeterligi. Goý, berlen tekiz egriniň egriligi *k=0* bolsun. Onda

$$|\bar{t}'|=0, \ \bar{t}'=0.$$

Bu ýerden $\bar{t}$ galtaşýan wektoryň hemişelikdigini göreris, onda $\bar{t}$ wektor üçin alarys:

$$\bar{t} = \bar{\vartheta}'(l) = \frac{d\bar{\vartheta}}{dl}, \ d\bar{\vartheta} = \bar{t}dl$$

bu deňligi $[l_0; l]$ aralykda integrirleýäris:

$$\bar{\vartheta}(l) - \bar{\vartheta}(l_0) = \bar{t}(l - l_0), \ \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}_0 + \bar{t} \cdot \Delta l$$

bu formula $\boldsymbol{t}$ wektor boýunça ugrukdyrylan $\bar{r}_0$ radius wektorly göni çyzygyň deňlemesidir. Teorema doly subut edildi.

Frene formulalarynyň giňişlik üçin alnyşyna seredeliň. Giňişlikde Frene formulalary $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ we $\bar{t}', \bar{b}', \bar{n}'$ wektorlaryň özara baglanyşygyny kesgitleýär hem-de giňişlikde *egriniň towlanmasyny* häsiýetlendirýär.

Giňişlik egrisi natural parametrlenen görnüşde

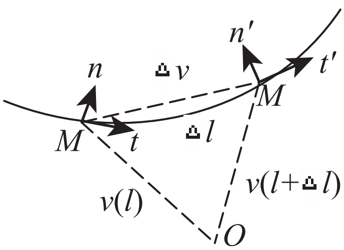
$$\bar{r} = \bar{r}(l) = x(l)i + y(l)j + z(l)k$$

deňlik bilen berildi.

$\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ wektorlaryň kesgitlemesine görä:

$\bar{t} = \bar{t}(l), \bar{n} = \bar{n}(l), \bar{b} = \bar{b}(l)$ we

$\bar{t} = [\bar{n},\bar{b}], \bar{n} = [\bar{b},\bar{t}], \bar{b} = [\bar{t},\bar{n}]$.



28-nji çyzgy

Tekiz egri üçin Frene formulasyny ulanýarys. $\bar{t} \perp \bar{n}$ we olar öz önümlerine ortogonaldyr $\bar{t} \perp \bar{t}'$; Şeýlelik - de, $\bar{t}' = (\bar{t})' = \bar{r}''(l)$ wektor $\bar{n}$ wektoryň ugruna ýatar.

Şunlukda, duganyň uzynlygynyň alnyşyna baglylykda $\bar{t}'$ wektor üýtgär, emma $\bar{t}$ wektor üýtgewsiz galar. Şunlukda, egri $\bar{n}$ wektora görä gyşaryp $\bar{t}$ wektordan daşlaşýar, sebäbi $\bar{r}(l)$ wektoryň M nokatdaky Teýlor hataryna dargamasynda oňa täsir etjek goşulyjylar ikinji goşulyjydan başlap iki we ondan ýokary tertipli önümlerdir *(28-nji çyzgy)*.

$$\bar{r}(\Delta l + l) - \bar{r}(l) = \bar{r}'(l)\Delta l + \frac{\bar{r}''(l)}{2!}\Delta l^2 + \ldots = \overline{MM'}.$$

Şeýlelikde, $\bar{t}'$ we $\bar{n}$ wektorlar kollinear bolarlar, ýagny olar biri--birinden käbir hemişelik bilen tapawutlanarlar:

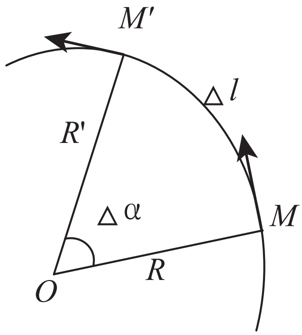
$$\bar{t}' = k\bar{n} \qquad (1)$$

Bellik: *Giňişlik egrisi üçin hem egrilik*

$$\lim_{\Delta l \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right| = k = \left|\bar{t}'\right|$$

predel hökmünde alynýar.

Seredilýän egri üçin M we M' nokatlardan egrilik tegelegini geçirýäris *(29-njy çyzgy)*.



29-njy çyzgy

M nokatdan bu tegelegiň merkezine çenli ululyk R bolsa, onda

$$|\overline{MM'}| = \Delta l, \quad \Delta l = R\Delta\alpha,$$

bu ýerden

$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \approx k$ ýa-da $R = \frac{1}{k}$ – egrilik radiusy.

$\bar{b}=[\bar{t},\bar{n}]$ wektoryň özgertmesine seredeliň.

$$\bar{b}'=[\bar{t}',\bar{n}]+[\bar{t},\bar{n}']=[k\bar{n},\bar{n}]+[\bar{t},\bar{n}']=[\bar{t},\bar{n}']$$

sebäbi $[\bar{n},\bar{n}]=0$, bu ýerden iki sany $\bar{t},\bar{n}'$ wektorlaryň $\bar{b}'$ wektora perpendikulýarlygyndan we $\bar{n}',\bar{n}$ wektorlaryň özara perpendikulýardyklaryndan $\bar{b}'$ wektoryň $\bar{n}$ wektoryň ugruna görä ýatjakdygyny göreris. Diýmek, $\bar{b}'$ wektor $\bar{n}$ wektor bilen käbir hemişelik ululyk boýunça tapawutlanar. Şol hemişelik ululygy χ *(kappa)* bilen belgileýärler we wektorlaryň arasyndaky baglanyşygy

$$b' = -\chi\bar{n} \qquad (2)$$

bilen alarys. χ - kappa ululyga *egriniň towlulygy* diýilýär. Indi $\bar{n}$ wektoryň özgertmesini kesgitläris. Onuň üçin (1), (2) formulalary peýdalanyp:

$$\bar{n}' = [\bar{b}',\bar{t}]+[\bar{b},\bar{t}']=[\chi\bar{n},\bar{t}]+[b,kn]=-\chi[\bar{n},\bar{t}]+[\bar{b},\bar{n}]=\chi\bar{b}-k\bar{t} \qquad (3)$$

deňlige geleris.

Şeýlelikde, giňişlik üçin Frene formulalary aşakdaky ýaly bolar:

$$\begin{cases} \bar{t}'=k\bar{n} \\ \bar{n}'=\chi\bar{b}-k\bar{t} \\ \bar{b}'=-\chi\bar{n}. \end{cases}$$

Bu ýerde k – egriniň egriligini, χ – egriniň towlylygyny aňladýar.

Frene formulalary egri boýunça hereket edilende ugradyjy üçgranlygyň özgertmesini häsiýetlendirýär.

Goý, $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(t)$ wektor 1-nji, 2-nji, 3-nji tertipli üznüksiz önümlere eýe bolsun. $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ wektorlar we χ, k ululyklar bilen $\bar{\vartheta}', \bar{\vartheta}'', \bar{\vartheta}'''$ önümleriň arasyndaky baglanyşygy kesgitleýän deňlikleriň alnyşyna seredeliň. Bu deňlikler egriligi we towlulygy hasaplamagyň formulalaryny berýär. Belli bolşy ýaly,

$$\bar{v}' = \bar{t},\ \ k = |\bar{v}''|,\ \ \bar{n} = \frac{\bar{v}''}{|\bar{v}''|},\ \ \ \bar{v}'' = k\bar{n}$$

formulalary peýdalanyp,

$$[\bar{v}, \bar{v}''] = [\bar{t}, k\bar{n}] = k\bar{b},$$

$$\bar{b} = \frac{[\bar{v}', \bar{v}'']}{|\bar{v}''|}$$

fomulalary, soňra bolsa üçünji tertipli önümi kesgitleýäris:

$$(\bar{v}'')' = k'\bar{n} + k\bar{n}' = k'\bar{n} + k(\chi\bar{b} - k\bar{t}) = k'\bar{n} + k\chi\bar{b} - k^2\bar{t}.$$

Onda wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly

$$((\bar{v}'')', \bar{v}'', \bar{v}') = ((\bar{v}'')', [\bar{v}'', \bar{v}']) = (k'\bar{n} + k\chi\bar{b} - k^2\bar{t},\ k\bar{b}) = k'k(\bar{n}, \bar{b}) + k^2\chi(\bar{b}, \bar{b}) -$$
$$- k^3(\bar{t}, \bar{b}) = k^2\chi$$

aňlatma deň bolar. Bu ýerde skalýar köpeltmek hasylyň

$$(\bar{n}, \bar{b}) = 0,\ (\bar{b}, \bar{b}) = 1,\ (\bar{t}, \bar{b}) = 0$$

häsiýetleri ulanyldy. Şeýlelikde, egriniň
towlulygy üçin

$$\chi = \frac{((\bar{v}'')', \bar{v}'', \bar{v}')}{|\bar{v}''|^2}$$

formulany alýarys.

Egriniň egriligini we towlulygyny hasaplamak üçin galtaşýan, baş normal, binormal birlik wektorlary we olaryň özgertmeleriniň (tizlikleriniň) arabaglanyşygyny kesgitleýän hasaplamaga degişli formulalaryň alnyşlaryna seretdik.

Goý, egri käbir

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}(l) = x(l)i + y(l)j + z(l)k$$

wektor funksiýa bilen berlen bolsun. Bu wektor üçin hasaplamalarda peýdaly boljak aşakdaky formulalary getirýäris:

$$\overline{v}' = \overline{t} = \{x'(l), y'(l), z'(l)\}$$

$$\overline{n} = \frac{x'' \cdot i + y'' \cdot j + z'' \cdot k}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}};$$

$$k = |\overline{v''}| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2};$$

$$[\overline{v''}, \overline{v'}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

$$\overline{b} = \frac{[\overline{v''}, \overline{v'}]}{|\overline{v''}|}.$$

§15. Ewolýuta we ewolwenta

Belli bolşy ýaly, tekizlikde egriniň hereketini oňa geçirilen galtaşýan bilen häsiýetlendirip bolar, ýagny egrä birinji tertipli galtaşma geçirilýär. Bu ýagdaýda iki we ondan hem köp tertipli tükeniksiz kiçiler taşlanýar. Şeýle hem galtaşyjy töwerek düşünjesi girizilende 2-nji tertipli galtaşma seredilipdi. Bu ýagdaýda bolsa üç hem we ondan ýokary tükeniksiz kiçi ululyklar taşlanýar. Egriniň berlen nokadynda oňa galtaşyjy töweregi geçirip, bu egriniň islendik nokadyny ulanmak bilen onuň galtaşyjy töwerekden daşlaşmasyny kesgitläp bolar. Onuň üçin aşakdaky mesele çözülmelidir.

Mesele. Egriniň berlen nokadynda egri bilen 2-nji tertipli galtaşmany emele getirýän galtaşyjy töweregi kesgitlemeli.

Çözülişi. Goý, seredilýän egri

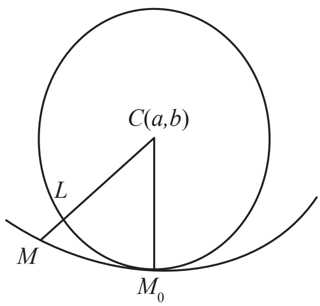
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

ulgamyň kömegi bilen berlen bolsun. t – parametriň käbir berkidilen t_0 bahasy üçin egriniň $M(t_0)=M_0(x_0,y_0)$ nokadyny berkideliň. Goý, egrä $C(a,b)$ merkezli, R radiusly galtaşyjy töwerek geçirilen bolsun. a,b,R

– kesgitlenmedik hemişelik ululyklar. Analitik geometriýadan belli bolşy ýaly, töweregiň deňlemesi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

görnüşde alynýar. Egriniň üstünde t_0 nokatdan tükeniksiz kiçi aralykda ýerleşen t nokat üçin M nokady alalyň we egriniň üsti bilen M nokatdan M_0 nokada tükeniksiz kiçi ýakynlaşmada M nokadyň galtaşyjy töwerekden daşlaşmasyny kesgitlemäge girişeliň *(30-njy çyzgy)*.



30-njy çyzgy

Goý, $LM=CM-CL$, $t \longrightarrow t_0$ bolanda $|L\,M|$ aralygy kesgitlemek gerek bolsun.

LM – daşlaşma t nokadyň saýlanyp alnyşyna bagly bolýar. Şonuň üçin hem bu ululyk $(t-t_0)$ aňlatmanyň islendik derejesine, ýagny tükeniksiz kiçilere bagly bolar, beýleki tarapdan bolsa bu daşlaşma

CM^2-CL^2 ululygyň $t-t_0$ tükeniksiz kiçilere baglylyk tertibi boýunça deňdir. Hakykatdan hem,

$$\frac{CM^2-CL^2}{CM-CL}=CM+CL\xrightarrow[t\to t_0]{}2R.$$

Şonuň üçin aşakdaky funksiýa serederis:

$$\varphi(t)=CM^2-CL^2=(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2-R^2.$$

Bu funksiýany t_0 nokadyň etrabynda Teýlor hataryna dargadalyň:

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\frac{\varphi(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\varphi''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\frac{\varphi'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3+\ldots$$

Meseläniň şertine görä seredilýän daşlaşmanyň 3-nji we ondan ýokary tertipli tükeniksiz kiçilere bagly bolmagy üçin Teýlor hataryna görä:

$$\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=0$$

ýerine ýetirilmelidir. Bu deňlikleri $\varphi(t)$ funksiýa üçin ulanalyň, ýagny

$$\begin{cases}\varphi(t_0)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=0\\ \varphi'(t_0)=2(x_0-a)x_0'+2(y_0-b)y_0'=0\\ \varphi''(t_0)=x_0'^2+(x_0-a)x_0''+y_0'^2+(y_0-b)y_0''=0.\end{cases}$$

Bu ulgamyň soňky iki deňlemesinden alarys:

$$x_0 - a = -\frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'};$$

$$x_0'^2 - \frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'} \cdot x_0'' + y_0'^2 + (y_0 - b)y_0'' = 0.$$

Bu ýerden bolsa

$$x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{(y_0 - b)y_0'}{x_0'} \cdot x_0'' - (y_0 - b)y_0'';$$

$$x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{y_0' x_0'' - x_0' y_0''}{x_0'} \cdot (y_0 - b);$$

$$y_0 - b = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$x_0 - a = -\frac{y_0'}{x_0'} \cdot \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$b = y_0 - \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)x_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''};$$

$$a = x_0 + \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)y_0'}{y_0' x_0'' - x_0' y_0''}.$$

Şeýlelikde, galtaşyjy töweregiň *C (a,b)* merkezi kesgitlendi. Ýokarky ulgamyň 1-nji deňlemesini ulanyp, bu töweregiň *R* radiusyny kesgitläris:

$$R = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0' x_0'' - x_0' y_0''|}.$$

Şeýlelikde, *a,b,R* ululyklar kesgitlenildi. Başgaça aýdylanda galtaşyjy töwerek tapyldy. Mesele çözüldi.

Bellikler. 1. *Galtaşjy töweregiň R radiusyna egrilik radiusy we C (a,b) nokada egrilik merkezi diýilýär.*

2. *Egriniň* $\boldsymbol{t_0}$ *nokadyndaky* ***k*** *egriligi bilen* ***R*** *egrilik radiusy* ***kR=1*** *deňligi ýerine ýetirýär.*

Şonuň üçin hem, egri

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$

deňlemeler bilen berlende, onuň egriligi

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|y_0' x_0'' - x_0' y_0''|}{(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

formula bilen hasaplanýar.

3. *Berkidilen* $\boldsymbol{t_0}$ *nokat seredilýän egriniň islendik nokady bolup biler:*

$$a = x(t) - y'(t) \cdot \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)};$$

$$b = y(t) + x'(t) \cdot \frac{x'^2 + y'^2(t)}{y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)};$$

$$R = \frac{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}{|y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)|}.$$

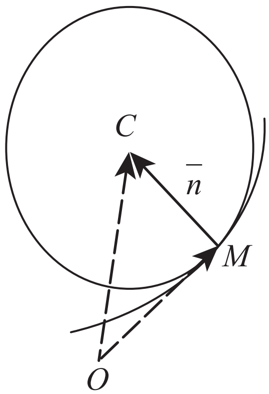
4. *Eger-de wektor funksiýanyň godografy y=f(x) funksiýanyň grafigi bolsa, onda egrilik radiusy we egrilik merkezi aşakdaky ýaly alnar:*

$$a = x - y' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''}; \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Şeýlelikde, berlen egri üçin onuň ewolýutasyny egrilik tegeleleriniň merkezleriniň geometrik orny hökmünde alyp bolýar. Diýmek, ewolýuta egriniň ähli mümkin bolan nokatlarynda geçirilen egrilik tegelekleriniň merkezleriniň üsti bilen geçýär. Şol merkezlerden geçende her bir egride bolşy ýaly ewolýuta hem özüniň galtaşýanlary bilen häsiýetlendirip bilner. Diýmek, ewolýutanyň galtaşýanlaryny kesgitlemek zerurlygy ýüze çykýar. Onuň üçin ewolýutanyň wektor deňlemesini düzýäris.

Goý, egri özüniň wektor $\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}(t)$ deňlemesi bilen berlen bolsun, onuň godografynda käbir M nokady berkideliň. Bu nokatda galtaşyjy töweregi geçirip, onuň $C(a,b)$ merkezini we M nokat üçin radius wektoryny geçireliň. Wektorlary goşmagyň düzgünini ulanyp, ewolýutanyň wektor deňlemesini alarys *(31-nji çyzgy):*



31-nji çyzgy

Bu çyzgydan

$\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC}$

$\overline{OM} = \overline{\vartheta}(l)$, $\overline{MC} = \overline{n}R$

$\overline{OC} = \overline{\rho}(l)$.

Onda ewolýutanyň wektor deňlemesi:

$\overline{\rho}(l) = \overline{\vartheta}(l) + \overline{n}R.$

Bu deňlemäniň iki bölegini hem differensirläp, Frene formulalaryny ulansak:

$d\overline{\rho} = d\overline{\vartheta} + d\overline{n}\cdot R + \overline{n}dR = \overline{\vartheta}'dl + \overline{n}'Rdl + \overline{n}dR =$

$= \overline{t}dl + (-k\overline{t})\cdot Rdl + \overline{n}dR;$

$d\overline{\rho} = \overline{n}dR.$

Bu deňlikden görnüşi ýaly ewolýutanyň $d\overline{\rho}$ galtaşýany berlen egriniň $\overline{n}$ normaly bilen ugurdaşdyr. Şeýlelikde, ewolýutanyň godografy berlen egriniň ähli mümkin bolan nokatlarynda geçirilen galtaşyjy töwerekleriň merkezleri bilen geçýär we berlen egriniň şol nokatda geçirilen normallary bilen galtaşýandyr. Bu ýagdaýda bolsa ewolýutany berlen egriniň normallarynyň oramasy hökmünde hem alyp bolar. Hakykatdan hem, normalyň

$$(x-x(t))x'(t)+(y-y(t))y'(t)=0$$

deňlemesini ulanyp, oramanyň deňlemesini alarys:

$$\begin{cases} (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0 \\ x''(t)\cdot(x - x(t)) + y''(t)(y - y(t)) - x'^2(t) - y'^2(t) = 0. \end{cases}$$

Bu ulgamyň çözüwi:

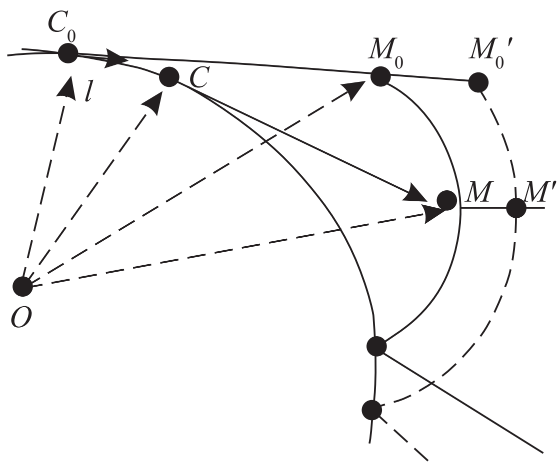
$$x = a = x(t) - y'(t)\cdot\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)\cdot y'(t)};$$

$$y = b = y(t) + x'(t)\cdot\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y''(t)\cdot x'(t) - x''(t)\cdot y'(t)}.$$

Bellik: *Ewolýutanyň bu deňlemesinden, eger de egri polýar koordinatalarda berlen bolsa hem peýdalanyp bolar. Emma bu aňlatmalar degişli hasaplamalardan soňra özgerer.*

Indi tekiz *egriniň ewolwentasy* düşünjesini kesgitlemäge girişeliň. Goý, wektor funksiýa $\vartheta - \bar{\vartheta}(t)$ deňleme bilen berlen bolsun. Egriniň godografyny onuň radius wektorlarynyň kömegi bilen gurup, käbir nokatlarda galtaşýanlaryny geçireliň. Bu galtaşýanlaryň položitel ugurlaryna göni çyzyklary dowam edip, C_0 nokatda geçirilen galtaşýanyň dowamyndaky çyzykda uzynlygy $\boldsymbol{l_0}$ deň bolar ýaly edip M_0 nokady belläliň. $|\boldsymbol{C_0 M_0}| = \boldsymbol{l_0}$**.** Görnüşi ýaly M_0 nokat erkin saýlanyp alynýar. Şonda bu egriniň üstünde C_0 nokatdan $\boldsymbol{l}$ uzaklykda ýerleşen C nokady belläliň, ýagny $|\overset{\frown}{C_0 C}| = l$.

C nokatdaky geçirilen galtaşýanyň dowamyndaky göni çyzykda (şöhlede) $C_0M_0 - \overset{\frown}{C_0 C} + CM$ deňlik ýerine ýeter ýaly M nokady belgiläliň *(32-nji çyzgy)*.



32-nji çyzgy

Çyzgydan görnüşi ýaly, egride M_0 nokadyň saýlanyp alnyşyna görä birnäçe ewolwentalar kesgitlenýär:

$$C_0M_0 - \overset{\frown}{C_0 C} + CM;$$

$$CM - C_0M_0 - \overset{\frown}{C_0 C_0} - l_0 - l.$$

Ýagny saýlanyp alnan M nokatlaryň geometrik orny berlen *egriniň ewolwentasy* hökmünde kesgitlenýär. 32-nji çyzga görä ewolwentanyň wektor deňlemesini aşakdaky görnüşde alyp bolar:

$$\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM};$$

$$\bar{\rho}(l) = \vartheta(t) + (l_0 - l)\bar{t}.$$

Bu deňlemäni differensirleýäris we Frene formulasyny ulanýarys:

$$d\bar{\rho} = d\bar{\vartheta} + d\bar{t}(l_0 - l) = \bar{t}dl + (l_0 - l)k\bar{n}dl - \bar{t}dl = k(l_0 - l)\bar{n}dl.$$

Netije: Ewolwentanyň galtaşýany berlen egriniň normaly bilen ugurdaşdyr.

§16. Üstdäki egriler we egri çyzykly koordinatalar

Tekiz egriler we olar üçin egri çyzykly koordinatlar ulgamy girizilenden soňra, giňişlikdäki egriler üçin ugradyjy üçgranlyk we olaryň egriligi, towlulygy öwrenilenden soňra üstdäki egrileriň häsiýetlerini hem öwrenmäge girişýäris. Goý, käbir üst

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

deňleme bilen berlen bolsun. Bu deňlemäniň çözüwlerinden üýtgeýän ululyklaryň haýsy hem bolsa birine görä çözülmegini üpjün edýän adaty nokatlaryna seredýäris:

$$z=f(x,y). \tag{2}$$

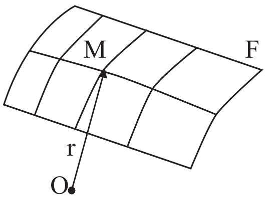
Üstler öwrenilende olar parametrik deňlemeleri bilen berilse amatly bolýar. Şonuň üçin, goý, üst iki u, υ skalýar argumentlere bagly bolan

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)i+y(u,v)j+z(u,v)k \tag{3}$$

wektor funksiýa bilen berlen bolsun. M nokat F üstüň adaty nokady, $\bar{r}=\overline{OM}$ bolsa radius wektory bolsun, şonda $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ bolar. $M(x,y,z) \in F$. Onda F üstüň u, v parametrlere görä deňlemesini alarys:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v). \end{cases} \tag{4}$$

Hakykatdan hem *u, υ* argumentler özgeriş ýaýlasyna degişli ähli bahalaryny alsalar, onda *M* nokat özüniň (4) koordinatalary bilen ýa-da koordinatalary (4) bolan $\boldsymbol{r}(u,\upsilon)$ wektor funksiýanyň godografy käbir üsti kesgitlär *(33-nji çyzgy)*.



33-nji çyzgy

Şeýlelikde, (4) ulgam şol üstüň parametrik aňladylyşy bolar. Şunlukda, her bir (u,υ) jübüte *F* üstüň bir *M* nokady degişli bolar.

Hususy önümleri kesgitläliň:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_u(u,\upsilon) = x_u(u,\upsilon)i + y_u(u,\upsilon)j + z_u(u,\upsilon)k \\ \bar{r}_\upsilon(u,\upsilon) = x_\upsilon(u,\upsilon)i + y_\upsilon(u,\upsilon)j + z_\upsilon(u,\upsilon)k \end{array}\right].$$

Bellik: Üstüň $\boldsymbol{r}_u$ we $\boldsymbol{r}_\upsilon$ wektorlaryň kollinearlygyny üpjün etmeýän ($\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_\upsilon$ wektorlar özara parallel däl) nokatlaryna seredilýär.

Bu wektorlaryň koordinatlaryndan düzülen

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon & z_\upsilon \end{pmatrix}$$

matrissany we ondan 2-nji tertipli noldan tapawutly kesgitleýjileriň birini alalyň.

Goý, $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_\upsilon & y_\upsilon \end{vmatrix} \neq 0$ bolsun. Onda matematiki derňewden belli bolşy ýaly, (u,υ) nokadyň käbir etrabynda

$$\begin{cases} x = x(u,\upsilon) \\ y = y(u,\upsilon) \end{cases}$$

deňlemeler ulgamy *u, υ* üýtgeýänlere görä bir bahaly çözülýän bolsun:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ \upsilon = \upsilon(x,y). \end{cases}$$

Bu bahalary (2) deňlemede ornuna goýup alarys:

$$Z = z(u,\upsilon) = z(u(x,y),\ \upsilon(x,y)) = \mathrm{z}(x,y)$$

$$\text{ýa-da } z = f(x,y).$$

Şeýlelikde, esasy kesgitleýji şert $\boldsymbol{r}_u$ we $\boldsymbol{r}_\upsilon$ wektorlaryň kollinear bolmazlyk şertidir we bu şert adaty nokadyň etrabynda üstüň nokatlary bilen parametrleriň (u,υ) jübütleriniň arasynda özara bir bahaly degişliligi almaga mümkinçilik döredýär. Şunuň esasynda hem **(***u,υ***)** parametrlere *üstdäki egri çyzykly koordinatlar* diýilýär.

Indi, *üstdäki egrileriň* kesgitlenişine seredeliň. Egri çyzykly koordinatlary

$$\left.\begin{array}{l} u = u(t) \\ \upsilon = \upsilon(t) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

(t – bagly däl üýtgeýän ululyk), deňlemeler bilen kesgitlenen üstdäki nokatlaryň geometrik ornuna seredeliň. Onda üstüň parametriki deňlemesini ulanyp,

$$\bar{r} = \bar{r}(u,\upsilon) = \bar{r}(u(t),\upsilon(t)) = \bar{r}(t) \qquad (6)$$

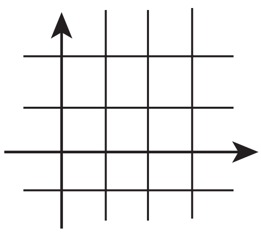
alarys. Bu deňlikden görnüşi ýaly eger-de t üýtgese, onda ***r*** wektor özüniň ahyry bilen käbir egrini kesgitleýär. Şeýlelikde, (5) deňlemeler *üstdäki egrini* kesgitlär.

Hususy ýagdaý: Goý, ***u=t*; υ=υ(*t*)=υ(u); υ=υ(u)** bolsun.

Şeýle baglanyşykda bolýan üstdäki egri çyzykly koordinatlar ulgamy bilen *koordinata çyzyklary* diýilýän düşünje kesgitlenilýär. Bu çyzyklarda egriniň ähli ugruna parametrleriň haýsy hem bolsa biri hemişelik bolup galýar:

$\{u,\upsilon=const\}$ ýa-da $\{u=const, \upsilon\}$.

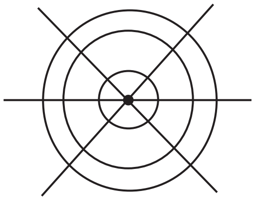
Bu ýerden koordinata gözenegi ýa-da koordinata tory düşünjesine gelinýär. Koordinata torunyň dürli koordinatalar ulgamy üçin mysallaryna seredeliň.



(x,y)

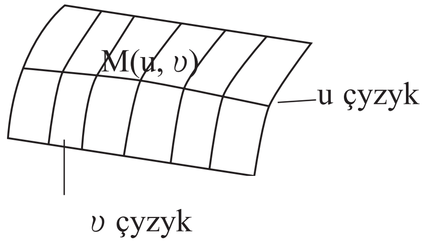
1. Dekart koordinatalar ulgamy (Parallel gönüler).

2. Polýar koordinatalar ulgamy (konsentrik töwerekler).



(r,φ)

3. Egri çyzykly koordinatalar ulgamy (koordinata çyzyklary).



Üstde egriler düşünjesini girizenimizden soňra bu egrilere galtaşýanlaryň geçirilişine seredeliň. Goý, üstde egri

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t) \\ \upsilon &= \upsilon(t) \end{aligned}\right\}$$

deňlemeler bilen berilsin. Onuň parametriki deňlemesi

$$\bar{r}=\bar{r}[u(t),\upsilon(t)]$$

bolar. Egriniň parametriki deňlemesi üýtgeýän iki ululyga baglydyr, şonuň üçin hem matematiki derňewde görkezilişi ýaly, onuň differensialy

$$d\bar{r}=\bar{r}_u du+\bar{r}_\upsilon d\upsilon,$$

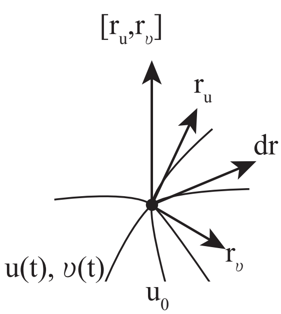
hususy önümleri we differensiallary

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_u &= \bar{r}_u(u,\upsilon) \\ \bar{r}_\upsilon &= \bar{r}_\upsilon(u,\upsilon) \end{aligned}\right\}$$

we

$$du = u'dt$$

$$d\upsilon = \upsilon'dt.$$



34-nji çyzgy

Şol bir wagtda $du, d\upsilon \neq 0$. Onda

$$d\bar{r} = \bar{r}_u \cdot u'dt+\bar{r}_\upsilon \cdot \upsilon'dt = \bar{r}'dt \neq 0.$$

$\bar{r}_u$, $\bar{r}_\upsilon$ (u,υ) parametrlere bagly, özleri hem şol bir tekizlikde ýatýarlar; $d\bar{r}$, $\bar{r}_u$, $\bar{r}_\upsilon$ wektorlar bolsa özara komplanar bolarlar.

Netije: Eger-de üstüň M nokadynyň üstünden mümkin bolan ähli egrileri alyp, *olaryň ählisine galtaşýan çyzyklaryny geçirsek, onda olaryň hemmesi-de $\bar{r}_v$, $\bar{r}_v$ wektorlaryň ýatýan tekizliginde ýatarlar; hemmesi üçin $[\bar{r}_u,\bar{r}_v]$ wektor normal wektor bolar. Şonuň üçin normalyň we galtaşýan tekizligiň deňlemelerini alyp bolar.*

Hakykatdan hem, M(u,υ) nokatdan geçýän galtaşýan tekizlik $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ wektorlaryň üsti bilen geçýär. Şonuň üçin olaryň deňlemeleri wektor köpeltmek hasylynyň kömegi bilen alnyp bilner.

$$[\bar{r}_u,\bar{r}_v]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Özara parallel däl $\bar{r}_u$, r_v wektorlar üçin $[\bar{r}_u,\bar{r}_v] \neq 0$ bolsa, onda galtaşýan tekizligiň deňlemesini

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}=0$$

ýa-da

$$(X-x)\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}=0$$

görnüşde alyp bolar.

Bu ýerde $\{X-x,\ Y-y,\ Z-z\}$ – tapawutlaryň koeffisiýentleri $[\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ wektoryň koordinatalary bilen gabat gelýär. Şeýle hem, normalyň deňlemesi

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}$$

bolar we ol $[\bar{r}_u , \bar{r}_v]$ wektoryň ugry boýunça geçýär.

§17. Birinji kwadrat forma

Üsti onuň käbir $M(u,v)$ nokadynyň golaýynda tükeniksiz kiçiler manysynda öwrenmäge girişýäris. Üstdäki

$$u = u(t),\ v = v(t) \qquad (1)$$

6. Sargyt №64.

deňlemeler bilen berlen egriniň M nokadyndan käbir M' nokadyna süýşýäris. Goý, dt ululyk t parametriň artdyrmasy bolsun. Onda egri çyzykly koordinatalaryň üstdäki differensiallary

$$du = u'(t)dt, \; dv = v'(t)dt$$

bolar. Şunlukda, $dv:du$ gatnaşyk galtaşýanyň süýşme düzgünini kesgitlär. Bu süýşmä degişli radius-wektoryň differensialyny kesgitläliň:

$$d\bar{r} = r_u du + r_v dv.$$

Bu wektoryň uzynlygy bilen onuň godografynyň dugasynyň uzynlygynyň arasynda $|dl| = |d\bar{r}|$ deňlik bar, sebäbi $dl = l'(t)dt = |r'(t)|dt$.

Onda MM' duganyň differensialy üçin

$$|dl| = |d\bar{r}| = |r_u du + r_v dv| \quad \text{ýa-da}$$

$$dl^2 = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2.$$

Soňky deňlikden

$$dl^2 = r_u^2 du^2 + 2r_u r_v dudv + r_v^2 dv^2. \tag{2}$$

(2) deňligiň skalýar köpeltmek hasyllary üçin (olar M-e bagly) gysgaça belgilemeleri girizeliň:

$$r_u^2 = (r_u, r_u) = E(u,v), \quad (r_u, r_v) = F(u,v),$$

$$r_v^2 = (r_v, r_v) = G(u,v),$$

Onda (2) formula

$$dl = \sqrt{E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2} \tag{3}$$

görnüşe geler.

Bu formula *1-nji kwadrat forma* diýilýär.

Bu köpagzanyň üstde kwadrat formany kesgitlemegi üçin onuň birjynsly, 2-derejeli köpagza bolmagy zerurdyr. Diýmek, (3) görnüş du, dυ differensiallara görä kwadrat formadyr. E, F, G – koeffisiýentler ol differensiallara bagly däldirler. Bu koeffisiýentler üstüň M(u,υ) nokadynyň saýlanyp alnyşyna baglydyr, ýagny $M(u,v)$ nokatda hasaplanýar.

(3) kwadrat formanyň ýene bir ähmiýeti ol üstdäki tükeniksiz kiçi süýşmedäki duganyň differensialynyň kwadratyny (dl^2) kesgitleýär.

Şunlukda, E,F,G – koeffisiýentler kwadrat formanyň kömegi bilen üstdäki tükeniksiz kiçi dugany ölçemäge mümkinçilik döredýär.

(3) deňlik bilen berlen birinji kwadrat formadan integrirlemäniň kömegi bilen duganyň uzynlygyny hem kesgitläp bolar. Goý, 1-nji kwadrat forma belli, ýagny E,F,G koeffisiýentler kesgitlenen bolsunlar. Goý, duganyň käbir bölegi u=u(t) , υ=υ(t), $(T_0 \leq t \leq T)$ deňlemeler bilen berlen bolsun. (3) formuladan

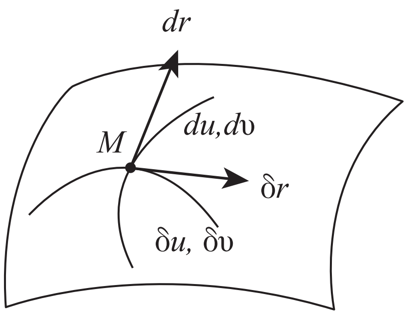
$$dl = \sqrt{E(u,\upsilon)du^2 + 2F(u,\upsilon)dud\upsilon + G(u,\upsilon)d\upsilon^2}$$

formulany alyp, ondan integrirlemäniň kömegi bilen $M(T_0)$ nokatdan $M(T)$ çenli duganyň takyk uzynlygyny alyp bileris:

$$l = \int_{T_0}^{T} \sqrt{\frac{Edu^2}{dt^2} + \frac{2Fdu}{dt}\cdot\frac{d\upsilon}{dt} + \frac{Gd\upsilon^2}{dt^2}}\,dt,$$

$$E(u,v)=E,\ F(u,v)=F,\ G(u,v)=G.$$

Birinji kwadrat forma belli bolanyndan soňra üstde egrileriň arasyndaky burçlary hem kesgitläp bolýar. Hakykatdan hem goý, üstüň şol bir M nokadyndan iki sany egriler geçýän bolsunlar *(35-nji çyzgy)*.



35-nji çyzgy

Bir egri boýunça tükeniksiz kiçi süýşmäniň egri çyzykly koordinatalarynda birinji egri üçin differensiallary *du, dv*; ikinjisi üçin *δu, δv* belläliň. Degişli radius wektorlar $d\bar{r}$, $\delta\bar{r}$ bolsunlar. Onda

$$d\bar{r}=r_u du+r_v dv,\ \delta\bar{r}=r_u\delta u+ r_v\delta v \qquad (4)$$

differensiallar galtaşýanlaryň ugurlary boýunça ýatýarlar. Onda egrileriň arasyndaky burçy bu wektorlaryň arasyndaky burç diýip hasaplap bolar:

$$\cos(\overline{dr},\overline{\delta r}) \quad \frac{\overline{dr}\,\overline{\delta r}}{|\overline{dr}|\,|\overline{\delta r}|} \quad \frac{r_u r_u du\delta u + r_u r_v(du\delta v + dv\delta u) + r_v r_v dv\delta v}{|\overline{dr}|\,|\overline{\delta r}|} \qquad (5)$$

Öňki belgilemelere salgylansak, onda iki dürli wektorlaryň arasyndaky burç aşakdaky deňlik bilen berler:

$$\cos(\overline{dr},\overline{\delta r}) = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (6)$$

Hususy halda, eger-de koordinata çyzyklarynyň arasyndaky φ burçy kesgitlemeli bolsa, onda

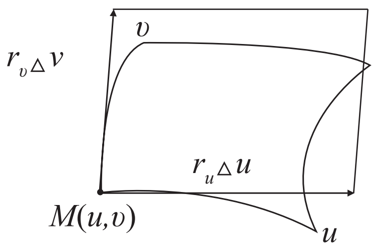
$du>0$, $dv=0$ (u çyzyk boýunça onuň artýan ugruna süýşme)

$\delta u=0$, $\delta v>0$ (υ çyzyk boýunça onuň artýan ugruna süýşme)

Onda (6) formuladan $\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$.

Eger-de $F=0$ bolsa, onda koordinata çyzyklary perpendikulýardyrlar.

Birinji kwadrat forma üstleriň meýdanlaryny hasaplamakda hem uly rol oýnaýar. Egri çyzykly paralellogram bilen göniçyzykly paralellogramlaryň meýdanlary örän ýakyn *(36-njy çyzgy)*.



36-njy çyzgy

Onda egri çyzykly paralellogramyň meýdanyny

$$\Delta\sigma = |[r_u\Delta u, r_v\Delta v]| = |[r_u, r_v]|\,\Delta u\Delta v$$

deňlik bilen alyp bolar. Meýdanyň bu formulasyny birinji kwadrat formanyň koeffisiýentleriniň üsti bilen aňlatmak üçin wektor we skalýar köpeltmek hasyllaryny ulanyp alarys:

$$(a,b)=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha,$$

$$[a,b]=|a|\cdot|b|\cdot\sin\alpha,$$

$$[a,b]^2+(a,b)^2=a^2\cdot b^2,$$

$$a^2=(a,b),\ \ b^2=(b,b).$$

Bu deňlikleri r_u, r_v wektorlar üçin ulanýarys:

$$[r_u,\ r_v]^2+(r_u,r_v)^2=(r_u,r_u)(r_v,r_v)=r_u^{\,2}r_v^{\,2}$$

$$[r_u,\ r_v]^2=r_u^{\,2}r_v^{\,2}-(r_u,r_v)^2.$$

Soňky formuladan degişli belgilemeleri ulanyp alarys:

$$|[r_u,r_v]|=\sqrt{EG-F^2}.$$

Onda meýdanyň formulasynda degişli çalşyrmalary geçirip alarys:

$$\Delta\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u\Delta v,$$

$$\sum\Delta\sigma=\sum\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u\Delta v,$$

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,du dv=\lim\sum_D\sqrt{EG-F^2}\,\Delta u\Delta v.$$

Bellikler : 1. $|[r_u,\ r_v]|^2=EG-F^2>0$.

*2. Duganyň differensialyny **u** koordinata çyzygynyň ugruna hasaplasak, onda $dv=0$, ýagny*

$$dl^2=Edu^2,\ E>0,\ dl=\sqrt{E}\,du.$$

v *koordinata çyzygynyň ugruna hasaplasak, onda $du=0$, ýagny* $dl^2=Gdv^2$, $G>0$, $dl=\sqrt{G}\,dv$.

§18. Ikinji kwadrat forma

Üstüň islendik M nokadyndan bu nokatdan üstüň islendik egrisi boýunça örän kiçi aralyga süýşülende üstüň bu nokatdaky galtaşýan tekizlikden daşlaşmasyna seredeliň. Goý, MM' egri üstdäki M nokatdan geçýän egrileriň haýsy hem bolsa biri bolsun. Berlen egriniň MM' dugasynyň l uzynlygyny parametr hökmünde alnyp, egriniň parametrlenen görnüşde

$$u=u(l),v=v(l)$$

deňlemelerini alarys. Onda

$$\bar{r} = \bar{r}(u(l), v(l)) \qquad (1)$$

deňlik üstüň wektor deňlemesini kesgitlär.

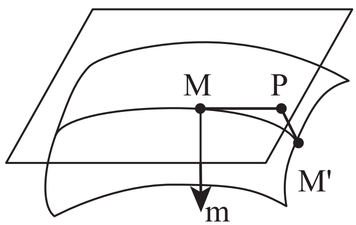
M nokatdan *M′* nokada şol egriniň ugry boýunça süýşme geçireliň we ol tükeniksiz kiçi ululygy $MM' = \Delta l$ diýip alalyň. Bu Δl artdyrma degişli $\bar{r}$ wektoryň artdyrmasyny $\Delta\bar{r} = \bar{r}(l + \Delta l) - \bar{r}(l)$ deňlik bilen alarys.

Şeýle hem, Teýlor formulasyny ulansak, alarys:

$$\overline{MM'} = \Delta\bar{r} = \bar{r}'\Delta l + \frac{1}{2}\bar{r}''(\Delta l)^2 + \ldots \qquad (2)$$

Bu ýerde r', r'' wektorlar *M* nokatda hasaplanýar.

Goý, $\Delta l \to 0$. Eger-de süýşme 1-nji tertipli süýşme bolsa, onda süýşme galtaşýan boýunça gider, sebäbi $\bar{r}'\Delta l = dr$. Emma bu paragrafda 2-nji tertipli takyklykda süýşmäni amala aşyrarys. Bu ýagdaýda süýşmäni galtaşýan tekizlik boýunça alyp bolmaz. Şonuň üçin şol süýşmäniň galtaşýan tekizlikden daşlaşmasyny bahalandyrýarys *(37-nji çyzgy).*



37-nji çyzgy

Çyzgyda görkezilişi ýaly, ol daşlaşma *PM′* kesimi emele getirýär.

Goý, *M′* nokatdan galtaşýan tekizlige geçirilen perpendikulýaryň esasy *P* nokat bolsun. *M* nokatdan üstüň normalynyň ugruna birlik **m** wektory guralyň. Onda

$\overline{PM'} = l \cdot \bar{m}$, $\quad$ ($l > 0$, $l < 0$ bolup biler).

Bu ýerden modula geçsek, alarys:

$$|\overline{PM'}| = |l| \cdot |\bar{m}| = |l|.$$

Çyzgydan görnüşi ýaly,

$$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l \cdot \bar{m}. \qquad (3)$$

$$\overline{MP} + l \cdot \bar{m} = \bar{r}'\Delta l + \frac{1}{2}\bar{r}''(\Delta l)^2 + \ldots \qquad (4)$$

Bu deňligiň iki bölegini hem **m** wektora skalýar köpeldip alarys:

$$l=\overline{r'}\cdot\overline{m}\Delta l+\frac{1}{2}\overline{r''}\cdot\overline{m}(\Delta l)^2+\ldots$$

Sebäbi:

$(\overline{MP},\overline{m})=0$, $(\overline{m},\overline{m})=1$, $(\overline{r}',\overline{m})=0$. we $\overline{r}'$ wektor egrä geçirilen galtaşýan wektor. Soňky deňlikden görnüşi ýaly, ***l*** daşlaşma 2-nji tertipli tükeniksiz kiçi ululyklara we ondan ýokarky tertipli tükeniksiz kiçilere hem baglydyr.

Indi $(\overline{r}'',\overline{m})$ skalýar köpeltmek hasylyny tapmaga girişeliň. $\overline{r}',\overline{r}''$ wektorlary hasaplaýarys:

$$\overline{r}'=\overline{r}_u u'+\overline{r}_\upsilon \upsilon',$$

$$\overline{r}_u=\overline{r}_u(u(l),\upsilon(l)),\ \overline{r}_\upsilon=\overline{r}_u(u(l),\upsilon(l))$$

$$\overline{r}''=\overline{r}_{uu}u'^2+\overline{r}_{u\upsilon}u'\upsilon'+\overline{r}_u\cdot u''+\overline{r}_{\upsilon\upsilon}\upsilon'^2+\overline{r}_{\upsilon u}u'\upsilon'+\overline{r}_\upsilon\cdot\upsilon''.$$

$\overline{r}_{uu},\overline{r}_{u\upsilon},\overline{r}_{\upsilon u},\overline{r}_{\upsilon\upsilon}$ – ikinji tertipli hususy önümler. $\overline{r}_u$, $\overline{r}_\upsilon$ galtaşýan çyzyklaryň galtaşma tekizliginde ýatýanlygyny hasaba alyp, $\overline{r}''$önümi **m** wektora skalýar köpeldeliň:

$$(\overline{r}'',\overline{m})=(\overline{r_{uu}},\overline{m})u'^2+2(\overline{r_{u\upsilon}},\overline{m})u'\upsilon'+(\overline{r_{\upsilon\upsilon}},\overline{m})\upsilon'^2 \qquad (5)$$

bu ýerde $(\overline{m},\overline{r}_u)=(\overline{m},\overline{r}_\upsilon)=0$.

Skalýar köpeltmek hasyllar üçin aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

$$\left.\begin{aligned}(\overline{r_{uu}},\overline{m})&=L(u,\upsilon)\\(\overline{r_{u\upsilon}},\overline{m})&=M(u,\upsilon)\\(\overline{r_{\upsilon\upsilon}},\overline{m})&=N(u,\upsilon)\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

L, M, N ululyklar (u, υ) jübütiň üstde saýlanyp alnyşyna bagly bolarlar, sebäbi **m** wektoryň ugry nokadyň saýlanyşyna görä üýtgäp biler. Şeýlelikde, bu ululyklar alamatlary boýunça doly kesgitlenmedik bolar. Bu näsazlygy aýyrmak üçin **m** wektory normirläliň:

$$\overline{m}=\frac{[\overline{r}_u,\overline{r}_\upsilon]}{|[\overline{r}_u,\overline{r}_\upsilon]|}=\frac{[\overline{r}_u,\overline{r}_\upsilon]}{\sqrt{EG-F^2}};\ |\overline{m}|=1. \qquad (7)$$

Bu şertde **m** wektor üstüň normalynyň ugruna ýatar. Şeýlelikde, **m**(u,υ), ***L***(u,υ), ***M***(u,υ), ***N***(u,υ) kesgitli bolar. (6), (7) deňlemelerden

$$\left.\begin{aligned} L(u,v) &= \frac{(\bar r_{uu}, \bar r_u, \bar r_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \\ M(u,v) &= \frac{(\bar r_{uv}, \bar r_u, \bar r_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \\ N(u,v) &= \frac{(\bar r_{vv}, \bar r_u, \bar r_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

(6) belgilemeleri (5) deňlikde ulanyp:

$$\bar r''\bar m = L(u,v)u'^2 + 2M(u,v)\,u',v' + N(u,v)\,u'^2 \qquad (9)$$

deňlige geleris. Bu deňligiň iki bölegini-de $\frac{1}{2}(\Delta l)^2$ köpeldip, $(u'dl) = du$, $(v'dl) = dv$ deňlikleri hasaba alsak, onda:

$$l \approx \frac{1}{2}\bar r''\bar m(\Delta l)^2 - \frac{1}{2}(L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2)$$

ýa-da

$$l = \frac{1}{2}(L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2).$$

Netije: *Üst boýunça M nokatdan oňa tükeniksiz kiçi aralykda bolan M' nokada süýşmede galtaşýan tekizlikden üstüň daşlaşmasynyň baş bölegi* ***du, dv*** *ululyklara görä*

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \qquad (10)$$

görnüşli kwadrat formanyň ýarysy bilen kesgitlenilýär. Bu forma 2-nji kwadrat forma diýilýär.

(8) deňlikler 1-nji we 2-nji kwadrat formalaryň koeffisiýentleriniň arasyndaky baglanyşygy görkezýär.

Indi ***L, M, N*** koeffisiýentleriň (8) belgilemelerden başgaça aňladylyşyny görkezeliň: Belli bolşy ýaly, $(\bar m, \bar r_u) = (\bar m, \bar r_v) = 0$. Bu deňlikleri argumentlerine görä differensirläp alarys:

$$\left.\begin{aligned} \bar m_u \bar r_u + \bar m \bar r_{uu} &= 0 \\ \bar m_v \bar r_u + \bar m \bar r_{uv} &= 0 \end{aligned} \quad \text{we} \quad \begin{aligned} \bar m_v \bar r_v + \bar m \bar r_{vv} &= 0 \\ \bar m_u \bar r_v + \bar m \bar r_{vu} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

(6) deňlikleri ulansak:

$$\left.\begin{aligned} L(u,v) &= -\bar m_u \bar r_u \\ M(u,v) &= -\bar m_v \bar r_u = -\bar m_u \bar r_v \\ N(u,v) &= -\bar m_v \bar r_v \end{aligned}\right\}. \qquad (11)$$

Beýleki tarapdan, degişli wektorlaryň differensiallary üçin:

$$d\overline{r}=\overline{r}_u du+\overline{r}_\upsilon d\upsilon$$

$$d\overline{m}= \overline{m}_u du+\overline{m}_\upsilon d\upsilon$$

we deňlikleri (11) formulada ulansak:

$$(d\overline{r},d\overline{m})=-Ldu^2 - 2Mdud\upsilon - Nd\upsilon^2$$

ýa-da

$$Ldu^2 + 2Mdu\, d\upsilon + Nd\upsilon^2=-(d\overline{r}, d\overline{m}) \qquad (12)$$

deňligi alarys. Degişli differensiallaryň hemmesi M(u,υ) nokat da hasaplanýar.

$\overline{r}'=\overline{t}$; $\overline{t}'=k\overline{n}=\overline{r}''$ formulalary we skalýar köpeltmek hasylyň $\overline{r}''\overline{m}=(\overline{r}'',\overline{m})$ görnüşli aňlatmalaryny ulanyp, has wajyp netijelere hem gelinýär. Onda

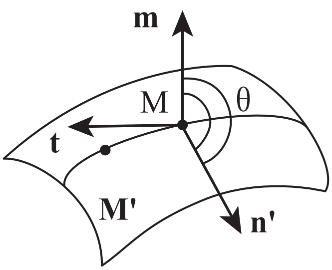
$(\overline{r}'',\overline{m})=(k\overline{n},\overline{m})=k(\overline{n},\overline{m})$,

$$\cos\theta = \frac{(\overline{r}',\overline{m})}{|\overline{r}'||\overline{m}|};$$

$$(\overline{r}'',\overline{m})=|\overline{r}''||\overline{m}|\cos\theta=|k|\cdot|\overline{m}|\cos\theta,$$

$$k=|\overline{r}''|,\ |\overline{m}|=1$$

Netije-de, $(\overline{r}'',\overline{m})=k\cos\theta$ bolar *(38-nji çyzgy)*.



38-nji çyzgy

Soňky deňlikde ***k*** – egrilik koeffisiýenti, ***n*** – baş normal boýunça birlik wektor, θ=(**n^m**), ýagny *MM´* egrä baş normalyň položitel ugry bilen M nokatda üste geçirilen normalyň arasyndaky burç.

(9) deňlikden alarys:

$$k\cos\theta = (\overline{r}'',\overline{m}) = Lu'^2 + 2Mu'\upsilon' + N\upsilon'^2 =$$

$$= L\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + 2M\frac{du}{dl}\cdot\frac{d\upsilon}{dl} + N\left(\frac{d\upsilon}{dl}\right)^2 \qquad (13)$$

$$du = u'dl, \qquad d\upsilon = \upsilon'dl$$

Belli bolşy ýaly,

$$dl^2 = Edu^2 + 2Fdud\upsilon + Gd\upsilon^2. \qquad (14)$$

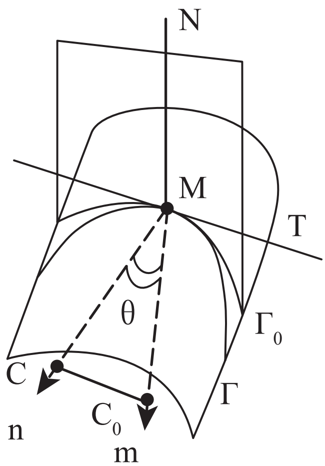
(13), (14) deňliklerden alarys:

$$k\cos\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Bu formula *differensial geometriýanyň esasy formulasy* diýilýär. Bu formulanyň esasy ähmiýeti üstüň **M** nokadyndan geçýän ähli egriler üçin galtaşýanyň ugry, galtaşyjy tekizligiň ýagdaýy we **M** nokatdaky egrilik arasynda belli bir baglylygyň alynmagynda ýüze çykýar.

§19. Menýe teoremasy

Egrä geçirilen galtaşýanyň berlen ýagdaýynda egriniň egriliginiň galtaşyjy tekizligiň ýagdaýyna baglylygyny öwrenmäge girişeliň *(39-njy çyzgy)*.



39-njy çyzgy

MT çyzyk Γ we Γ_0 egrilere geçirilen umumy galtaşýan. $\overline{MN}$ wektor üste geçirilen normal. C, C_0 – degişlilikde Γ we Γ_0 egrileriň egrilik merkezleri. ***n*** we ***m*** bu egrilere geçirilen baş normallar. Umumy *MT* galtaşýanly egrileriň içinden üst bilen has köp baglysyny tapalyň. Üsti oňa geçirilen normal boýunça kessek, netijede kesikde egri emele geler, oňa *normal kesik* (Γ_0) diýip at berýäris.

Bellik: *Eger-de 2-nji kwadrat formanyň koeffisiýentleri üçin $L=M=N=0$ bolsalar, onda islendik galtaşýan ugur asimptotik bolar.*

Goý, Γ_0 egriniň egriligi k_0 ($k_0>0$), egrilik merkezi C_0 we egrilik radiusy $R_0=1/k_0$ bolsun. *TMN* tekizlik Γ_0 normal kesik üçin galtaşýan tekizlik bolar.

$\overline{MN}$ wektor Γ_0 üçin baş normal bolar. *MN* çyzygyň dowamynda C_0 nokady ýerleşdirýäris we şol ugurda $\bar{m}=\bar{n}_0$ wektory hem alarys, $\bar{n}_0$ – Γ_0 egriniň baş normalynyň ugruna alnan birlik wektor.

Üstdäki Γ we Γ_0 egriler üçin differensial geometriýanyň esasy formulalaryny alarys:

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \text{ üçin: } k\cos\theta = \dfrac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \\ \Gamma_0 \text{ üçin: } k_0 = \dfrac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} \end{array}\right\}.$$

Γ_0 egri üçin $\mathbf{m}=\mathbf{n}_0$ we $\theta=(\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}_0)=0$. $\cos\theta=1$ deňlikleriň ýerine ýetýändikleri üçin bu ulgamdan

$$k\cos\theta=k_0$$

deňlige geleris. θ – burçuň ýitiligi üçin $\cos\theta>0$ hem-de $k_0>0$ bolsa, onda $k>0$ bolar.

Soňky deňlikde egrilik radiuslaryny ulansak

$$\frac{1}{R}\cos\theta=\frac{1}{R_0} \quad \text{ýa-da} \quad R=R_0\cos\theta$$

deňlige geleris. Çyzgydan görnüşi ýaly,

$$\bar{m}\perp\overline{MT}, \bar{n}\perp\overline{MT} \quad \text{we} \quad \theta=(\bar{m}\wedge\bar{n})$$

burç *MTC* we MTC_0 tekizlikleriň arasyndaky ikigranly burçy kesgitleýär.

Şeýlelikde, *Menýe teoremasy* dogrudyr:

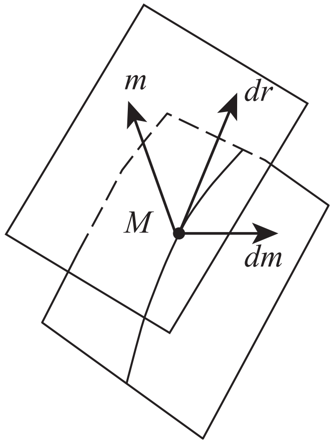
Üstdäki berlen nokatdan geçýän we şol bir galtaşýanly Γ_0 normal kesik we erkin Γ egri üçin erkin Γ egriniň egrilik radiusy Γ_0 normal kesigiň egrilik radiusynyň bu egrileriň galtaşyjy tekizlikleriniň arasyndaky ikigranly burçunyň kosinusyna köpeldilmegine deňdir.

§20. Baş ugurlar we baş egrilikler. Eýler formulasy

Üstlerdäki baş ugurlar we baş egrilikler üstleri öwrenmekde möhüm ähmiýete eýedir.

Ilki bilen üstleriň baş ugurlarynyň kesgitlenişine seredeliň.

Goý, $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$ wektor funksiýa käbir üsti kesgitlesin *(40-njy çyzgy)*. Üsti $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$ wektorlaryň özara parallel däl ýagdaýyndaky şerti ýerine ýetirýän M nokadynyň etrabynda öwrenmäge geçýäris. Goý, $\overline{m} = \overline{m}(u,v)$ wektor üste geçirilen birlik normal wektor bolsun.



40-njy çyzgy

Eger-de M nokatdan üst boýunça tükeniksiz kiçi süýşme geçirilse, onda iki wektor hem artdyrma alar, olaryň baş bahalary bolsa

$$\left.\begin{array}{l} d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv \\ d\overline{m} = \overline{m}_u du + \overline{m}_v dv \end{array}\right\}$$

differensiallaryň kömegi bilen galtaşýan wektorlar hökmünde berler.

Hemişelik wektorlar üçin

$$(d\overline{m}, \overline{m}) = 0 \qquad d\overline{m} \perp \overline{m}.$$

M nokatdan dürli ugur boýunça süýşme geçirip bolýanlygy üçin d**r**, d**m** wektorlar süýşme ugruna we ululygyna bagly bolarlar. Bu süýşmeleriň islendigi üçin d**m** wektor d**r** wektora baglylykda elmydama belli bir çyzykly wektor funksiýa bilen kesgitlenip bilner, olaryň özara baglanyşygy bolsa

$$A(d\bar{r}) = d\bar{m} \qquad (1)$$

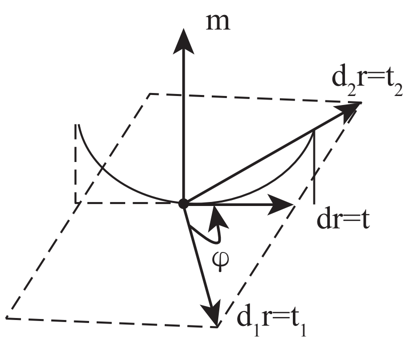
deňlik bilen alynýar.

Şeýle hem, tekizlikde kollinear däl wektorlar üçin olary kollinear däl wektorlara geçirýän çyzykly wektor funksiýasyny gurup bolýar:

$$A(\bar{r}_u) = \bar{m}_u,\ A(\bar{r}_v) = \bar{m}_v.\ (\mathbf{r_u \nparallel r_v}), (\mathbf{m_v \nparallel m_u})$$

Belli bolşy ýaly, hususy ugurlar hususy wektorlaryň kollinearlygyndan alynýar we *M* nokatdan galtaşýan tekizlikde özara ortogonal bolan A(***u***) wektoryň ugurlaryny kesgitläp bolýar (degişli hususy bahalary bilen).

*1-nji kesgitleme: Üstüň her bir berlen nokadynda A(**u**) wektor funksiýanyň hususy ugurlaryna üstdäki baş ugurlar diýilýär. Hususy halda, A**a** = λ**a**, λ – hususy baha, **a** – hususy wektor).*



41-nji çyzgy

41-nji çyzgydaky wektorlar üçin

$$A(\bar{t}_1) = \lambda_1 \bar{t}_1;$$

$$A(\bar{t}_2) = \lambda_2 \bar{t}_2.$$

Menýe teoremasy boýunça

$$k \cos \theta = k_0$$

ýa-da erkin Γ egriniň egriligi Γ_0 normal kesigiň egriligi bilen aňladylýar (şol bir nokatda, şol bir galtaşýan bilen).

Bu ýagdaýda «Süýşmäniň ugruna baglylykda normal kesigiň k_0 egriligi nähili üýtgeýär?» diýlen soragyň ýüze çykmagy tebigydyr. Bu sorag aşakdaky ýaly çözülýär. Normal kesigiň baş normaly üstüň normaly bilen gabat gelýär: $\bar{n}_0 = \pm\bar{m}$ bolany üçin θ=0 ýa-da θ=π ➡ ➡ cos θ=±1. Bu ýerden

$\bar{n}_0 = \bar{m} \Rightarrow k_0>0,\ \bar{n}_0 = -\bar{m} \Rightarrow k_0 < 0.$

Onda Menýe teoremasy boýunça

$$\bar{k} = k_0 \cos\theta = \begin{cases} k_0, & (k_0 \geq 0) \\ -k_0, & \end{cases}$$

Şeýlelikde, $\bar{k} > 0$ bolanda Γ_0 egri öz galtaşýanyndan **m** wektora we $\bar{k} < 0$ bolanda bolsa Γ_0 egri öz galtaşýanyndan **m** wektora gyşarar. Başgaça aýdylanda, bu formula Γ_0 normal kesigiň egriliginiň üstdäki nokadyň alnyşyna we onuň galtaşýanyna baglylygyny aňladýar. Diýmek, üsdäki baş ugurlar ondaky egrileriň galtaşýanlary boýunça ýatýarlar.

Indi üstdäki *baş egrilikleri* kesgitläliň. Goý, ***t*** normal kesigiň berlen nokatdaky birlik galtaşýan wektory bolsun. Goý, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ $(\bar{t}_1 \perp \bar{t}_2)$. Onda her bir φ($\bar{t}_1$ we $\bar{t}_2$ wektorlaryň arasyndaky burç) üçin kesgitli ***t*** galtaşýan wektor, kesgitli normal kesik bolar, ýagny $\bar{k} = \bar{k}(\varphi)$ baglanyşyk bardyr. Differensial geometriýanyň esasy

$$k_0 \cos\theta - \frac{II \text{ kwadrat forma}}{I \text{ kwadrat forma}}$$

deňlemesinden hem-de 1-nji we 2-nji kwadrat formalaryň kesgitlemelerinden

$$II = -(d\bar{r}, d\bar{m}),\ I = dl^2$$

we

$$\bar{k} = k_0 \cos\theta$$

deňlikden alarys:

$$\bar{k} = -\frac{(d\bar{r}, d\bar{m})}{dl^2} = -\left(\frac{d\bar{r}}{dl}, \frac{d\bar{m}}{dl}\right), \quad A(d\bar{r}) = d\bar{m}$$

ýa-da

$$A\left(\frac{d\bar{r}}{dl}\right) = \frac{d\bar{m}}{dl} \text{ we } \frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{t}$$

deňliklerden alarys:

$$\frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{t} = \bar{t}_1 \cos\varphi + \bar{t}_2 \sin\varphi$$

$$\frac{d\overline{m}}{dl} = A\left(\frac{d\overline{r}}{dl}\right) = A(\overline{t_1}\cos\varphi + \overline{t_2}\sin\varphi) =$$

$$= \cos\varphi \cdot A(\overline{t_1}) + \sin\varphi \cdot A(\overline{t_2})$$

$$\frac{d\overline{m}}{dl} = \lambda_1\overline{t_1}\cos\varphi + \lambda_2\overline{t_2}\sin\varphi.$$

Onda

$$\bar{k} = -\left(\frac{d\overline{r}}{dl}, \frac{d\overline{m}}{dl}\right) = -(\overline{t_1}\cos\varphi + \overline{t_2}\sin\varphi, \lambda_1\overline{t_1}\cos\varphi + \lambda_2\overline{t_2}\sin\varphi).$$

Bu deňlikde skalýar köpeltmek hasyly ýerine ýetirip we degişli aňlatmalary ulanyp alarys:

$$\bar{k} = -\lambda_1\cos^2\varphi - \lambda_2\sin^2\varphi.$$

Bu deňlik normal kesigiň egriliginiň onuň galtaşýanynyň birinji baş ugurdan daşlaşma burçuna baglylygyny görkezýär.

Bu deňligiň geometrik manysyna seredeliň. Goý, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bolsun. Bu deňlik eger-de $\varphi=0$ bolsa, onda $\bar{t}=\bar{t}_1$ galtaşýan normal kesikde birinji ugry we birinji normal kesigiň $k_1=-\lambda_1$ egriligini kesgitlär; eger-de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bolsa, onda $\bar{t}=\bar{t}_2$ galtaşýan normal kesikde ikinji ugry we ikinji normal kesigiň $k_1=-\lambda_2$ egriligini kesgitlär ($k_1 \neq k_2$).

2-nji kesgitleme: Üstüň berlen nokadyndaky galtaşýanlary üçin baş ugurlar boýunça ýerleşen normal kesiklerine üstüň baş kesikleri, olaryň egriliklerine (k_1, k_2) bolsa üstüň baş egrilikleri diýilýär.

Soňky deňlikde degişli belgilemelerden soňra Eýler formulasyna gelinýär:

$$\bar{k} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi.$$

Baş egrilikler üçin

1) $k_2>k_1$ deňsizlik ýerliklidir.

Hakykatdan hem

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi, \quad \bar{k} = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\varphi.$$

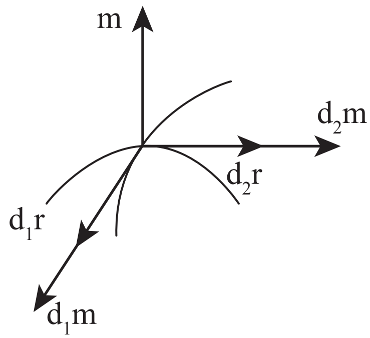
$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}(\max), \quad \bar{k} = k_2$$

$$\varphi = 0(\min), \quad \bar{k} = k_1.$$

2) $\varphi=-\varphi$ bolsa, onda $\bar{k}$ üýtgewsiz galar.

3) galtaşýan birinji baş ugurdan ikinji baş ugra öwrülende normal kesigiň egriligi üçin $k_1 \leq \bar{k} \leq k_2$ deňsizlik dogry bolar we $\bar{k}$ monoton artýar.

4) baş ugurlar we baş egrilikler aşakdaky ýaly gysgaça hem berlip bilner. Tükeniksiz kiçi süýşme üçin alarys (d_1m, d_2m - baş ugurlar) *(42-nji çyzgy)*:



42-nji çyzgy

Husussy baha we hususy wektorlar üçin:

$$d\bar{m}=A(d\bar{r}) \text{ we}$$

$$A(d\bar{r})=\lambda_1 d\bar{r} \qquad\qquad A(d\bar{r})=\lambda_2 d\bar{r}$$

$$\lambda_1=-k_1 \qquad \text{ýa-da} \qquad \lambda_2=-k_2$$

$$d\bar{m}=-k_1 d\bar{r} \qquad\qquad d\bar{m}=-k_1 d\bar{r}$$

Bu ýerden $d\bar{m}=-kd\bar{r}$.

Hususy halda: $\lambda_1=\lambda_2=a$, $\bar{k}=-a$ bolanda $d\bar{m}=ad\bar{r}$ deňlik ýerine ýetýär. Bu ýagdaý sferanyň *togalanma* nokadyny kesgitleýär.

§21. Baş egrilikleri we baş ugurlary hasaplamak

20-nji paragrafda üstüň baş egrilikleriniň we baş ugurlarynyň formulalary getirilip çykaryldy. Bu paragrafda şol formulalary hasaplamakda ulanmaga oňaýly bolar ýaly görnüşe getirýäris. Goý, üst **r=r**(u,υ) deňleme bilen berilsin we bu üst üçin 1-nji we 2-nji kwadrat formalaryň koeffisiýentleri kesgitlenen bolsun.

1-nji kwadrat forma üçin:

$$dl^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

$$E=(\bar{r}_u,\bar{r}_u),\ F=(\bar{r}_u,\bar{r}_v),\ G=(\bar{r}_v,\bar{r}_v).$$

2-nji kwadrat forma üçin:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=-(d\bar{m},d\bar{r})$$

$$L=(\bar{r}_{uu},\bar{m})=-(\bar{m}_u,\bar{r}_u),$$

$$M=(r_{uv},\bar{m})=-(\bar{m}_v,\bar{r}_u)=-(\bar{m}_u,\bar{r}_v),$$

$$N=(\bar{r}_{vv},\bar{m})=-(\bar{m}_v,\bar{r}_v).$$

$$\bar{m}=\frac{[\bar{r}_u,\bar{r}_v]}{|[\bar{r}_u,\bar{r}_v]|},\ \text{bu ýerde}\ |[\bar{r}_u,\bar{r}_v]|=\sqrt{EG-F^2}.$$

Belli bolşy ýaly, **dv/du** gatnaşyk tükeniksiz kiçi süýşmede baş ugry kesgitleýär. Baş ugruň we baş egriligiň

$$d\bar{m}=-kd\bar{r} \qquad (1)$$

deňlik bilen kesgitlenişini görkezýäris. Bu deňlikden differensiallary ulanyp alarys:

$$m_u du+m_v dv=-k(\bar{r}_u du+\bar{r}_v dv). \qquad (2)$$

Bu deňligi r_u, r_v wektorlara skalýar köpeldeliň:

$$\begin{cases}(\bar{r}_u,\bar{m}_u)du+(\bar{m}_v,\bar{r}_u)dv=-k[((\bar{r}_u,\bar{r}_u)du+(\bar{r}_u,\bar{r}_v)dv)]\\(\bar{r}_v,\bar{m}_u)du+(\bar{m}_v,\bar{r}_v)dv=-k[((\bar{r}_u,\bar{r}_v)du+(\bar{r}_v,\bar{r}_v)dv)]\end{cases}$$

1-nji we 2-nji kwadrat formalaryň koeffisiýentlerini ulanýarys:

$$\begin{cases}-Ldu-Mdv=-k(Edu+Fdv)\\-Mdu-Ndv=-k(Fdu+Gdv)\end{cases}$$

$$\begin{cases}Ldu+Mdv=k(Edu+Fdv)\\Mdu+Ndv=k(Fdu+Gdv)\end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases}(L-kE)du+(M-kF)dv=0\\(M-kF)du+(N-kG)dv=0\end{cases} \qquad (4)$$

Bu ulgam *du,dv* ululyklara görä çözülýär. Onda

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$(EG-F^2)k^2 + (2MF-NE-LG)k + (LN-M^2) = 0. \qquad (5)$$

Bu deňleme k görä kwadrat deňlemedir, onuň k_1, k_2 köklerini Wiýetiň teoremasy boýunça alarys:

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}; \\ k_1 + k_2 = -\dfrac{2MF-LG-NE}{EG-F^2} = \dfrac{EN+LG-2MF}{EG-F^2}. \end{cases}$$

$K=k_1+k_2$ - ululyga üstüň doly ýa-da Gauss egriligi, $H = \dfrac{k_1+k_2}{2}$ – ululyga üstüň *orta egriligi* diýilýär. Olara baş egrilikler diýilýär. Diýmek, 1-nji we 2-nji kwadrat formalaryň üsti bilen baş egrilikleri hasaplamagyň formulalary alyndy.

Baş ugry kesgitlemegiň formulalaryny almak üçin (3) ulgamdan k ululygy aýryp, dv/du gatnaşygy kesgitläris:

$$\begin{vmatrix} Ldu+Mdv & Edu+Fdv \\ Mdu+Ndv & Fdu+Gdv \end{vmatrix} = 0$$

ýa-da

$$du^2(LF-ME)+(MF+LG-NE-MF)\,dudv + dv^2(MG-NF)=0$$

ýa-da

$$(LF-ME)+(LG-EN)\left(\frac{dv}{du}\right)+(MG-NF)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0.$$

Bu deňlikden

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dv}{du}\right)_1 \cdot \left(\dfrac{dv}{du}\right)_2 = \dfrac{LF-ME}{MG-NF} \\ \left(\dfrac{dv}{du}\right)_1 + \left(\dfrac{dv}{du}\right)_2 = -\dfrac{LG-NE}{MG-NF} = \dfrac{EN-LG}{MG-NF}. \end{cases}$$

Bu formulalar baş ugurlary hasaplamagyň formulalarydyr.

Bellik: *Eger-de üstdäki egriniň galtaşýany baş ugurlaryň haýsy bolsa-da biri boýunça ugrukdyrylsa, onda ol egrä egrilik çyzygy diýilýär.*

§22. Üstüň nokatlarynyň üç görnüşi

Matematiki fizikanyň deňlemeleri dersinde elliptik, parabolik we giperbolik üstler öwrenilýär. Şu paragrafda giňişlik nokatlarynyň üstleriniň üç görnüşini – elliptik, parabolik we giperbolik üstleri emele getirmeginiň şertlerini öwreneris.

Goý, elementar F üst $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ deňleme bilen berlen bolsun. Üstüň M nokadyndan geçýän egri çyzyklaryň egrilikleriniň arasyndaky baglanyşyga seredeliň. Bu nokatda geçirilen galtaşýanlar -gönüler dessesini emele getirer we olaryň hemmesi M nokatda geçirilen galtaşýan tekizlige degişlidir. Bu dessäniň her bir görnüşinde M nokatdan uzynlygy $|\overline{MP}|=\frac{1}{\sqrt{|k_m|}}$ bolan kesimi iki tarapa hem alyp goýalyň. Bu kesimleriň uçlary ikinji tertipli çyzygy emele getirer. Ol çyzyga-da F üstüň M nokatdaky *Dýupeniň (egrilik) indikatrisasy* diýilýär. Onuň deňlemesini düzeliň:

Goý, F üstüň M nokadyndan geçýän käbir çyzygyň deňlemesi

$$u=u(l), \quad v=v(l) \tag{1}$$

görnüşde berilsin, özem $P(x,y)$ indikatrisanyň islendik nokady bolsun. Indikatrisanyň gurluşy boýunça alarys:

$$\overline{MP}=\pm\frac{1}{\sqrt{|k_m|}}\cdot\bar{t}. \tag{2}$$

Bu ýerde $\bar{t}$ – galtaşýan birlik wektor. Bu deňligi başgaça

$$\bar{t}=\frac{d\bar{r}}{dl}=\bar{r}_u\frac{du}{dl}+\bar{r}_v\frac{dv}{dl}, \quad \overline{MP}=x\bar{r}_u+y\bar{r}_v$$

deňlikleriň kömegi bilen:

$$x\bar{r}_u+y\bar{r}_v=\pm\frac{1}{\sqrt{|k_m|}}\left(\bar{r}_u\frac{du}{dl}+\bar{r}_v\frac{dv}{dl}\right) \tag{3}$$

görnüşe getireris. Bu ýerde (x,y) koordinatalar P nokadyň $(M, \bar{r}_u, \bar{r}_v)$ affin koordinatalardaky koordinatalarydyr.

(3) deňlikden alarys:

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{|k_m|}}\frac{du}{dl}, \qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{|k_m|}}\frac{dv}{dl}$$

ýa-da

$$\frac{du}{dl}=\pm x\sqrt{|k_n|}, \qquad \frac{dv}{dl}=\pm y\sqrt{|k_n|}.$$

Onda

$$k_n=k\cdot\cos\theta=\frac{II(du,dv)}{I(du,dv)}=\frac{II(du,dv)}{dl^2}$$

deňleme aşakdaky ýaly özgerer:

$$k_n=L(u,v)\left(\frac{du}{dl}\right)^2+2M(u,v)\frac{du}{dl}\cdot\frac{dv}{dl}+N(u,v)\frac{dv}{dl}=$$
$$=L(u,v)(\pm x\sqrt{|k_n|})^2+2M(u,v)(\pm x\sqrt{|k_n|})(\pm y\sqrt{|k_n|})+$$
$$+N(u,v)(\pm y\sqrt{|k_n|})^2.$$

Bu ýerde deňligiň iki bölegini hem k_m ululyga gysgaldyp alarys:

$$L(u,v)x^2+2M(u,v)xy+N(u,v)y^2=\pm 1 \qquad (4)$$

Bu deňlemä *Dýupeniň deňlemesi* ýa-da *egrilik indikatrisasy* diýilýär.

Üç ýagdaýyň emele gelmegi mümkin:

1. $LN\text{-}M^2>0$ bolanda (4) *deňlik ellipsi* kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna elliptik nokat diýilýär. Üstüň *elliptik nokatlarynyň* köplügi elliptik üsti emele getirýär.

2. $LN\text{-}M^2<0$ bolanda (4) deňlik *giperbolany* kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna *giperbolik* nokat diýilýär. Üstüň giperbolik nokatlarynyň köplügi giperbolik üsti emele getirýär.

3. $LN\text{-}M^2=0$ bolanda (4) deňlik *parabolany* kesgitleýär. Üstüň beýle nokadyna parabolik nokat diýilýär. Üstüň *parabolik* nokatlarynyň köplügi parabolik üsti emele getirýär.

Mysal üçin, Ellipsoidiň ähli nokatlary – elliptik; giperbolik paraboloidiň ähli nokatlary – giperbolik; silindriň ähli nokatlary – parabolik nokatlary emele getirýärler.

Bu üç ýagdaýyň Gauss ýa-da $K=k_1\cdot k_2$ doly egrilik bilen alnyşyna seredeliň.

1. Goý, $K(M)>0$ bolsun. Bu ýagdaýda elmydama $EG\text{-}F^2>0$. Onda

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}>0$$

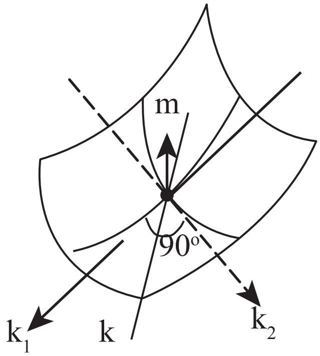
bu deňsizlikden

$$LN-M^2>0$$

deňsizlige geleris. Diýmek, *M* nokat elliptik nokatdyr. $K=k_1 \cdot k_2>0$ bolanda $k_1>0$, $k_2>0$ bolarlar. Bu ýagdaýda iki sany baş ugur hem **m** normala tarap epilýär, ýagny Eýler formulasy boýunça

$$\overline{K} = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi > 0$$

ähli normal kesikler **m** tarapa epilýär, sebäbi ählisiniň egrilikleri $K>0$. Şeýlelikde, üst ähli ugur boýunça bir tarapa epiler *(43-nji çyzgy)*.



43-nji çyzgy

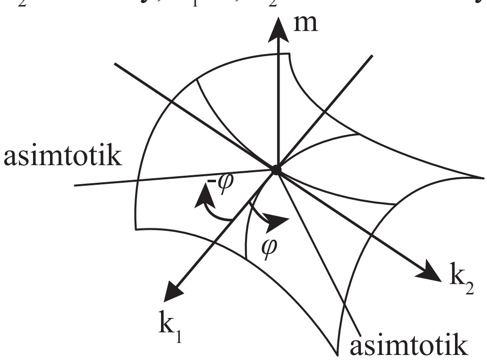
Belli bolşy ýaly, $k_1 < \mathbf{k} < k_2$, ýagny k egrilik monoton ösýär.

Eger-de $k_1<0$, $k_2<0$ bolsalar, onda hemme ýagdaýlar **m** wektora görä üýtgär.

2. Goý, $K(M) < 0$ bolsun. Bu ýagdaýda

$$LN\text{-}M^2<0.$$

deňsizlige geleris. Diýmek, M nokat giperbolik nokatdyr. Onda $K=k_1 \cdot k_2 < 0$. Goý, $k_1<0$, $k_2>0$ bolsun. Bu ýagdaýda bir baş kesik-**m** wektora, beýlekisi **m** wektora tarap epilýär. Haçanda M nokatdaky galtaşýan bir baş ugurdan beýleki baş ugra aýlananda (90^0 öwrülende) onuň k egriligi $k_1<0$-dan $k_2>0$-a çenli monoton artýar we arasynda $k=0$ bahany hem alýar *(44-nji çyzgy)*:



44-nji çyzgy

Eýler formulasy boýunça alarys:

$$\bar{k} = 0 = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi \rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}.$$

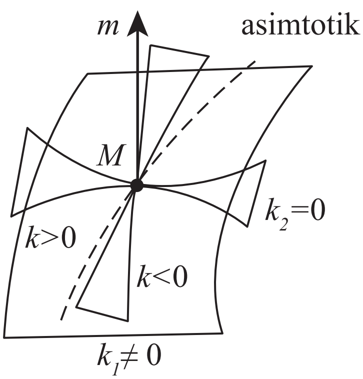
Bu deňlikden birinji ugruň $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ burç boýunça, beýleki ugruň bolsa $\varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$ burç boýunça alynjakdygyna göz ýetireris.

M nokatda iki sany normal kesik bar. Şol kesikde $\bar{k} = 0$, ol ýerde asimptotik çyzyklar bar. Giperboliki nokadyň etrabynda üst eýer görnüşdedir.

3. Goý, **K**(M)=0 bolsun. Onda

$$LN\text{-}M^2=0.$$

Bu ýagdaýda M nokat parabolik nokatdyr. $k_1 \cdot k_2=0$ bolanda $k_2=0$, $k_1 \neq 0$ bolýar. $k_1<0$ diýip **m** wektoryň tersine bir baş ugry alalyň. Ikinjisi üçin ($k_2=0$) egriniň gönelmesi ýüze çykýar. Netijede üst tersine gyşarýar. Bu ýagdaýda asimptotik çyzyk k_2 baş ugur bilen gabat gelýär. Başgasy ýokdur. Parabolik nokatlar giperbolik we elliptik nokatlary bir-birinden aýyrýar *(45-nji çyzgy)*.



45-nji çyzgy

§23. Üstleriň içki geometriýasy. Geodeziýa egrileri

Üstleriň içki geometriýasy – üstleriň we olaryň üstündäki şekilleriň epilme netijesinde üýtgemeýän häsiýetlerini öwrenýär. Ähli planimetriýa tekizlikdäki içki geometriýany kesgitleýär.

Goý, Φ we $\bar{\Phi}$ üstler berlip, olar üçin üznüksiz f: $\Phi \to \bar{\Phi}$ biýektiw şekillendirme bar bolsun. Bu şekillendirme üstleriň nokatlarynyň arasynda özara birbahaly degişliligi berýär. Şunlukda, Φ üstdäki her bir C egrä $\bar{\Phi}$ üstdäki $\bar{C}$ egrä degişli edilýär we tersine:

$$\bar{C} = f(C),\ C = f^{-1}(\bar{C}).$$

Eger-de C we $\bar{C}$ egrileriň uzynlyklary gabat gelseler, onda $\bar{\Phi}$ üst Φ üstden epilmäniň kömegi bilen alnan diýilýär. Şekillendirmä bolsa *izometriýa* ýa-da *epilme* diýilýär.

Epilmäniň aşakdaky mysalyna seredeliň:

Goý, Φ we $\bar{\Phi}$ üstler $\boldsymbol{r}(u,v)$, $\bar{r}(u,v)$ wektor funksiýalar bilen parametrlensin we ikisi-de şol bir V ýaýlada kesgitlenen bolsun.

Goý, f: $P \to \bar{P}$, $P \in \Phi$, $\bar{P} \in \bar{\Phi}$ bolsun. Onda alarys:

$$f(r(u,v)) = \bar{r}(u,v).$$

Φ we $\bar{\Phi}$ üstler üçin birinji kwadrat formanyň koeffisiýentleriniň özara deň ýagdaýyna seredeliň:

$$E(u,v) \equiv \bar{E}(u,v),\quad F(u,v) \equiv \bar{F}(u,v),\quad G(u,v) \equiv \bar{G}(u,v).$$

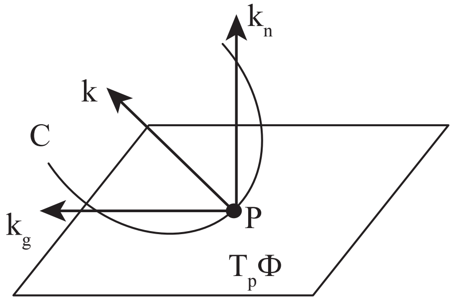
Bu ýagdaýda f epilme bolar, we tersine hem ýerine ýetýär. Şeýlelikde, üstleriň içki geometriýasyna birinji kwadrat formanyň kömegi bilen alynýan häsiýetler hem girýär (egrileriň uzynlyklary, olaryň arasyndaky burç, üstüň meýdany).

Girişde bellenilip geçilişi ýaly, nemes matematigi K.Gauss üstleriň içki geometriýasynyň döremeginiň we ösmeginiň ynamly tarapdary bolupdyr. Ol özüniň Gauss teoremasy ady bilen belli bolan teoremasyny subut edipdir:

Teorema. *Üstleriň Gauss egrilikleri epilme netijesinde üýtgemeýär.*

Şeýlelikde, Gauss egriligi düşünjesi-de üstleriň içki geometriýasyna degişli bolýar.

Indi, geodezıýa egrileri (geodezikler) we geodeziýa egriligi düşünjelerini kesgitläliň. Goý, *C* egri *Φ* endigan üstde berlen bolsun. **k** bolsa bu egriniň *P* nokatdaky egrilik wektory bolsun. Geodeziýada alnyşy ýaly, **k** wektor iki sany $\mathbf{k_g}$ we $\mathbf{k_n}$ wektorlara dargaýar. Olar özara perpendikulýardyr *(46-njy çyzgy)*.



46-njy çyzgy

Bize belli bolşy ýaly $\mathbf{k_n}$ wektoryň uzynlygy *C* egriniň *P* nokatdaky normal egriliginiň absolýut ululygyna deňdir:

$$|\mathbf{k_n}|=|k_n|$$

$k_g=|\mathbf{k_g}|$ ululyga *C* egriniň *P* nokatdaky *geodeziýa egriligi* diýilýär. $\mathbf{k}_g$, $\mathbf{k}_n$ perpendikulýar wektorlar. Mundan bolsa

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2, \ k = |\bar{k}|$$

deňlige gelinýär. **k** – *C* egriniň *P* nokatdaky egriligi.

Eger-de *C* egri $\boldsymbol{\upsilon}(t)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen we $P=\boldsymbol{\upsilon}(t_0)$ bolsa, onda *P* nokatdaky geodeziýa egriligi

$$k_g = \frac{|(\bar{\upsilon}''(t_0), \bar{\upsilon}'(t_0), \bar{n})|}{|\bar{\upsilon}'(t_0)|^3}$$

deňlik bilen hasaplanar (nirede ***n*** wektor *P* nokatda üste geçirilen normal bolsa).

Mysal. $z=x^2+y^2$ deňleme bilen berlen üstüň käbir nokadyndaky geodeziýa egriligini hasaplamaly.

Çözülişi: Bu üstüň parametriki

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a}\cos t \\ y &= \sqrt{a}\sin t \\ z &= a \end{aligned}\right\}$$

deňlemesini alalyň we $t_0 = \frac{\pi}{2}$ bolanda geodeziýa egriligini hasaplalyň. Onda üstüň *P* nokadynyň koordinatalary $P = P(0; \sqrt{a}; a)$ bolar. Degişli hasaplamalardan soňra

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\sqrt{a}\sin t \\ y' &= \sqrt{a}\cos t \\ z' &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x'' &= -\sqrt{a}\cos t \\ y'' &= -\sqrt{a}\sin t \\ z'' &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$|\overline{v'}(t)| = |\overline{v''}(t)| = \sqrt{a}$ we

$$\overline{n} = -\cos t \cdot i - \sin t \cdot j + 0 \cdot k,$$

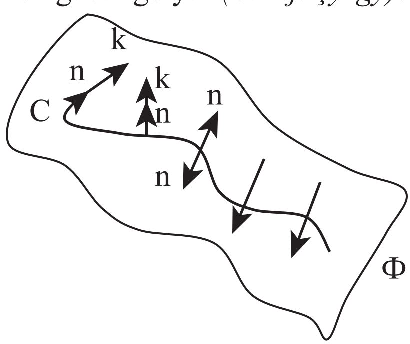
$$(\overline{\nu}''(t), \overline{\nu}'(t), \overline{n}) = 0.\ \text{Onda } k_g = 0.$$

Üstleriň her bir nokadynda geodeziýa egrilikleri nola deň bolan egriler has aýratyn gyzyklanma döredýär. Beýle egrilere *geodeziýa egrileri* diýilýär. Mysal üçin, tekizlikdäki göni çyzyklaryň kesimleri (olaryň egrilikleri her bir nokatda nola deňdir) geodeziýa egrilerdir.

Içki geometriýa üçin geodeziýa egrileriniň aýratyn möhümligini görkezýän aşakdaky häsiýetleri sanap bolar:

Eger-de *C* geodeziýa egrisi bolsa, onda:

1. *C* egriniň her bir nokadynda onuň baş normal wektory üstüň normal wektory bilen gabat gelýär *(47-nji çyzgy)*.



47-nji çyzgy

2. C egriniň her bir nokadynda galtaşyjy tekizlik üste geçirilen normalyň üstünden geçýär.

3. C egriniň her bir nokadynda göneldiji tekizlik üste geçirilen galtaşýan tekizlige gabat gelýär.

4. Berlen nokat we berlen ugur boýunça geçirilen egrileriň içinde C egri özüniň her bir nokadynda iň kiçi egrilige eýedir, ýagny ol C egri bu egrileriň içinde has *«gönürägidir»*.

5. Eger-de C egri $\mathbf{\upsilon}(t)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen bolsa, onda wektorlaryň garyşyk köpeltmek hasyly nola deňdir:

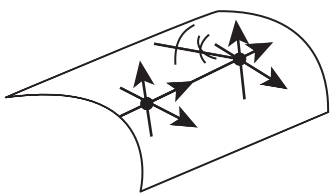
$$(\mathbf{\upsilon}''(t),\mathbf{\upsilon}'(t),\mathbf{n})\equiv 0$$

Bellik: *Bu häsiýetleriň her birini kesgitleme hökmünde kabul etmek bolar.*

Belli bolşy ýaly, tekizlikde iki nokadyň üsti bilen bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar. Geodeziýa egrileri üçin bu tassyklama aşakdaky teorema ýaly alynýar.

Teorema: *Her bir nokatda görkezilen ugur boýunça ýeke-täk geodeziýa egrisi geçýär.*

Geodeziýa egrisiniň islendik dugasy ýene-de geodeziýa egrisidir. Gysgaça, şol bir nokatdan, şol bir ugur boýunça geçýän geodeziýa egrileri uly geodeziýa egrisiniň dugalary hökmünde hasap edilýär *(48-nji çyzgy)*.



48-nji çyzgy

Subudy: Teoremany subut etmek üçin geodeziýa egrisiniň differensial deňlemesini düzeliň. Goý, Φ üst $\mathbf{r}(u,\upsilon)$ wektor funksiýa bilen parametrlenen bolsun.

$u=t$, $\upsilon=\psi(t)$ deňlikleriň kömegi bilen geodeziýa egrisiniň içki deňlemesini girizeliň. Onda geodeziýa egrisiniň parametrlenmesi

$$\bar{r} = \vartheta(t) = \bar{g}(t,\psi(t))$$

görnüşli bolar. Alarys:

$$\overline{\upsilon}'(t) = \overline{g_u}(t,\psi(t)) + \overline{g_\upsilon}(t,\psi(t))\cdot\psi'(t)$$

$$\overline{\upsilon}(t) = \overline{g_{uu}}(t,\psi(t)) + 2\overline{g_{u\upsilon}}(t,\psi(t))\cdot\psi'(t) +$$

$$+\overline{g}_{\nu\upsilon}(t,\psi(t))\cdot\psi'^2(t) + \overline{g}_\nu(t,\psi(t))\psi''(t).$$

Onda ($\mathbf{\upsilon}''$,$\mathbf{\upsilon}'$, $\mathbf{n}$) köpeltmek hasyly kesgitläliň:

$$(\overline{\upsilon}'',\overline{\upsilon}',\overline{n}) = \begin{pmatrix}\overline{g}_{uu} + 2\overline{g}_{u\upsilon}\cdot\psi' + \overline{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2 + \\ +\overline{g}_\upsilon\cdot\psi'',\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}\end{pmatrix} =$$

$$= (\overline{g}_{uu} + 2\overline{g}_{u\nu}\cdot\psi' + \overline{g}_{\nu\nu}\cdot\psi'^2,\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}) +$$

$$+(\overline{g}_\upsilon\cdot\psi'',\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}).$$

Soňky goşulyjyny hasaplalyň:

$$(\overline{g}_\upsilon\cdot\psi'',\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}) = (\overline{g}_\upsilon\cdot\psi'',\overline{g}_u,\overline{n}) + (\overline{g}_\upsilon\cdot\psi'',\overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}) =$$

$$= \psi''(\overline{g}_\upsilon,\overline{g}_u,\overline{n}) + \psi''\psi'(\overline{g}_\upsilon,\overline{g}_\upsilon,\overline{n}) = -\psi''(\overline{g}_\upsilon,\overline{g}_u,\overline{n}).$$

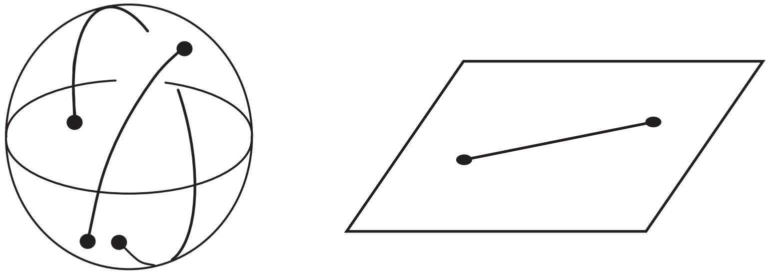
Şeýle hem $(\upsilon'',\upsilon',n)=0$. Onda alarys:

$$(\overline{g}_{uu} + 2\overline{g}_{u\nu}\cdot\psi' + \overline{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2,\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n}) + = \psi''(\overline{g}_u,\overline{g}_\upsilon,\overline{n})$$

$$\psi'' = \frac{(\overline{g}_{uu} + 2\overline{g}_{u\upsilon}\cdot\psi' + \overline{g}_{\upsilon\upsilon}\cdot\psi'^2,\overline{g}_u + \overline{g}_\upsilon\cdot\psi',\overline{n})}{(\overline{g}_u,\overline{g}_\upsilon,\overline{n})}.$$

Bu deňlige ψ(t) funksiýa görä ikinji tertipli ady differensial deňleme hökmünde seredip bolar. Ady differensial deňlemeleriň çözüwiniň barlygy we ýeke-täkligi hakyndaky teorema görä her bir nokatda islendik ugur boýunça ýeke-täk geodeziýa egrisi geçer. Teorema subut edildi.

Tekizlikdäki – gönüler; silindrdäki – töwerekler, buraw çyzyklary, gönüler; sferadaky – uly tegelekleriň töwerekleri geodeziýa egrileridir *(49-njy çyzgy)*.



49-njy çyzgy

Şeýlelikde, bu üstleriň her bir nokadynda islendik ugur boýunça diňe ýokardaky sanalan çyzyklar geçýär. Tekizlikde, silindrde, sferada bu geodeziýa egrilerinden başgalary ýokdur. Hakykatdan hem,

$$\bar{v}(t)=\bar{g}(t,\psi(t)),\ \bar{v}'(t)=\bar{g}_u(t,\psi(t))+\bar{g}_v(t,\psi(t))\cdot\psi'(t)$$

$$\overline{v''}(t)=\bar{g}_{uu}(t,\psi(t))+\bar{g}_{uv}(t,\psi(t))\cdot\psi'(t)+\bar{g}_{uv}(t,\psi(t))\cdot\psi'(t)+\bar{g}_{vv}(t,\psi(t))\cdot\psi'^2(t)+\bar{g}_v(t,\psi(t))\cdot\psi''(t).$$

Onda

$$(\bar{g}_v\cdot\psi'',\ \bar{g}_u+\bar{g}_v\cdot\psi',\bar{n})=(\bar{g}_v\cdot\psi'',\ \bar{g}_u,\bar{n})+(\bar{g}_v\cdot\psi'',\ \bar{g}_v\cdot\psi',\bar{n})=-\psi''(\bar{g}_v,\bar{g}_v,\bar{n})=0.$$

§24. Tenzorlar

Häzirki döwürde görälilik nazaryýetinde, mehanikada, elektrodinamikada, giňden ulanylýan esasy matematiki düşünjeleriň biri-de tenzor düşünjesidir. *Tenzor – tendo* diýen italýan sözi bolup, ol işjeňligi artdyrmak ýa-da göwrümine (uzynlygyna ýa-da boýuna) giňelmek diýen manyny berýär. Bu düşünje ilki XIX asyrda italýan alymlarynyň çeýelik nazaryýetine degişli işlerinde, soňra A.Eýnşteýniň görälilik prinsipinde ýüze çykdy we ösdürildi.

Şu paragrafda tenzorlara degişli gysgaça maglumatlar getirilýär.

Tenzor algebrasy

Ýewklid giňişliginde wektorlary sanlar bilen aňlatmak hakyndaky meselä seredeliň. Belli bolşy ýaly, giňişligiň bazisini saýlap, olaryň üsti bilen islendik wektory

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \qquad (1)$$

görnüşde aňladyp bolar. Bu bolsa wektorlaryň (olaryň a_x, a_y, a_z– proýeksiýalarynyň) üstünde arifmetiki amallary geçirmeklige has amatly bolup durýar. Bu amallarda *i, j, k* wektorlaryň nähili saýlanyp alnyşyna aýratyn bir üns berilmeýär. Käbir ýagdaýlarda bu wektorlar meselä laýyklykda anyk kesgitlener, köp ýagdaýlarda bolsa, bu wektorlaryň emeli usulda saýlanyp alynmagy mümkindir ýa-da olary asla hasaplamak hem mümkin däldir. Diýmek, saýlanyp alnan bazislere görä wektorlara seredip, ol bazisleriň özleriniň saýlanyp alnyşyny ünsden düşürýäris. Eger-de ilki belli bir bazisi saýlap almakdan saklanyp we hemme bazisleri özara deňgüýçli hasaplap, her bir saýlanan *i, j, k* bazislere a_x, a_y, a_z– proýeksiýalary (1) deňligiň kömegi bilen degişli etsek, onda bu kynçylyk aradan aýrylar.

Käbir bazis saýlanandan soňra, a_x, a_y, a_z-proýeksiýalaryň belli bir bahalara eýe bolýan, bazisleriň üýtgemesine laýyklykda bolsa bu bahalaryň (1) formula görä üýtgemegi bolup geçýän a_x, a_y, a_z sanlaryň saýlanyp alnyş usulyna *tenzor* ýa-da *tenzor ululyk* diýilýär. Bu sanlara bolsa tenzoryň komponentleri diýilýär. Wektor algebrasynda bolsa $a_x i$, $a_y j$, $a_z k$ wektorlara wektoryň komponentleri diýilýär. Şeýlelikde, *i, j, k* birlik wektorlaryň we a_x, a_y, a_z ululyklaryň ýerine e_1, e_2, e_3 birlik wektorlary we a_1, a_2, a_3 ululyklary almak amatly bolýar:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i .$$

Tenzor hasaplamalarda gaýtalanýan jemlemede Σ belgi goýulmaýar:

$$a = a_i e_i (= a_j e_j = a_k e_k = ...) \tag{2}$$

Bu ýerde jemleme ýazylmaýar, aýdylmaýar, emma jemlemäniň indeksini seredilýän giňişligiň ölçegi bilen gabat getirýärler.

Çyzykly şekillendirmeler nazaryýetinde görkezilişi ýaly, bazis çalşyrylanda, wektoryň koordinatalarynyň özgerme düzgünini getirip çykaralyň. Ýewklid e_1, e_2, e_3 (gysgaça e_i) bazislerinden beýleki bir e_1, e_2, e_3 (gysgaça e_i) bazislere geçmek

$$e_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} e_j \text{ (gysgaça } e_i = \alpha_{ij} e_j) \tag{3}$$

deňlik bilen amala aşyrylýar. Bu ýerde i indekse aýdylmaýan j indeksden tapawutlylykda azat indeks diýilýär.

(2) formulany täze bazislerde ýazyp, onda (3) formulany ulansak, alarys:

$$a=a'_i e'_i= a'_i \alpha_{ij} e_i$$

beýleki tarapdan $a=a_j e_j$, onda $a_j=\alpha_{ij} a_i$ başgaça

$$a_i=\alpha_{ij} a'_j \qquad (4)$$

Bir bazisden beýleki bazise geçmekligiň (α_{ij}) matrissasy ortogonal matrissadyr we ol özüniň transponirlenen matrissasyna tersdir, şonuň üçin hem (4) deňlikden

$$a'_i=\alpha_{ij} a_j \qquad (5)$$

deňlige geleris. Şu deňlik hem wektorlaryň koordinatalarynyň bir bazisden beýleki bazise geçilendäki özgerme düzgünidir.

Indi, tenzor düşünjesini umumylaşdyralyň.

Goý, $a_{ij...s}$ aňlatmada p sany indeks bolup, olaryň her biri 1,2,...,n sanlary alýan bolsunlar.

Kesgitleme: Eger-de n-ölçegli ýewklid giňişliginiň her bir e_i *bazisine* $a_{ij...s}$ *hakyky sanlaryň* n^p *toplumy degişli bolsalar we täze* $e'_i = \alpha_{ij} e_j$ *bazislere geçmekligiň formulasy*

$$a'_{ij...s} = \alpha_{ii_1}\alpha_{jj_1}...\alpha_{ss_1} a_{i_1 j_1 ... s_1} \qquad (6)$$

bolsa, onda berlen giňişlikde n ölçegli, p rangly (walentli), $a_{ij...s}$ *komponentli ýewklid (ýewklid giňişligini ulanýanlygy üçin) tenzory berlen diýilýär.*

(6) deňligiň sag bölegi $i_1, j_1, ..., s_1$ indeksler boýunça p kratny bolan jemlemäni göz öňünde tutýar.

Şeýlelikde, kesgitlemä görä, skalýar ululyk 0 rangly, wektor ululyk 1 rangly, wektoryň özgermesi üçin alnan matrissanyň elementleri bolsa 3 rangly tenzorlary emele getirerler.

Anyk tenzor almak üçin erkin saýlanan bazisde onuň komponentlerini görkezmek ýeterlik bolar, sebäbi islendik bazisde bu komponentleriň bahasy (6) deňlik bilen hasaplanar.

Tenzor düşünjesine başgaça, ýagny islendik wektora giňişlikde berlen sanlaryň üçlügi däl-de, eýsem (2) görnüşli aňlatma hökmünde çemeleşeliň. Onuň üçin, anyk saýlanan bazisde koeffisiýentleri tenzor emele getirýän, bazisleri üýtgände koeffisiýentleri (6) formula bilen üýtgeýän formal

$$T=a_{ij...s}e_ie_j...e_s \tag{7}$$

jeme seredeliň. Bu deňligiň sag böleginde

$$e_i=\alpha_{i_1i}e'_{i_1},\ \ e_j=\alpha_{j_1j}e'_{j_1},...$$

aňlatmalary ornuna goýup we meňzeş agzalary toparlanymyzdan soňra

$$T=a_{ij...s}\alpha_{i_1i}\alpha_{j_1j}...\alpha_{s_1s}e'_{i_1}e'_{j_1}...e'_{s_1}$$

jeme ýa-da aýdylmaýan indeksleri özgerdip we (6) formulany ulanyp,

$$T=a_{i_1j_1...s_1}\alpha_{ii_1}\alpha_{jj_1}...\alpha_{ss_1})e'_ie'_j...e'_s=a_{ij...s}e'_ie'_j...e'_s=T'$$

jeme geleris, bu ýerde T' täze bazislerde hasaplanýar.

Şeýlelikde, indiden beýläk, islendik bazisde hem inwariantlygyny saklaýan (7) görnüşli jemi tenzor diýip hasaplarys. Başgaça aýdylanda, her gezek (6) formulany ulanman, bir bazisden beýleki bazise geçilende köne bazisleri täze bazisler bilen çalşyrarys. Bu çalşyrmanyň netijesinde bolsa, koeffisiýentlerdäki özgermeler bolup geçer. Mysal üçin, goý käbir e_1,e_2 bazisde 2 rangly tenzoryň komponentleri $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ bolsun, onda $2e_1e_1+5e_1e_2-3e_2e_1$ aňlatma tenzor bolar; bu ýerde tenzor aňlatmasy $e_1e_2=0$ skalýar köpeltmek hasylyndan tapawutlydyr.

Tenzorlar üstünde geçirilýän amallar

Goý, berlen giňişligiň we ondaky tenzorlaryň ölçegleri belli bolsun. Onda

a) ranglary özara deň bolan tenzorlar üçin *çyzyklylyk häsiýetleri* aşakdaky

$$a_{ij}e_ie_j+b_{ij}e_ie_j=(a_{ij}+b_{ij})e_ie_j$$

$$\lambda(a_{ij}e_{ij}e_j)=(\lambda a_{ij})e_ie_j$$

deňlikler bilen kesgitlener.

b) tenzor köpeltmek hasyly

$$(a_{ij}e_ie_j)(b_{ijk}e_ie_je_k)=(a_{ij}e_ie_j)(b_{rsk}e_re_se_k)=a_{ij}b_{rsk}e_ie_je_re_se_k$$

ýaly hasaplanýar. Şunlukda, p we q rangly tenzorlar köpeldilende köpeltmek hasyl $p+q$ rangly tenzor bolar. Hususy halda, wektorlaryň wektor köpeltmek hasyly

$$[a,b]=(a_ie_i)\,(b_je_j)=a_ib_je_ie_j$$

görnüşde 2 rangly tenzory kesgitleýär. Bu tenzora *diada* diýilýär. $2e_1e_1+5e_1e_2-3e_2e_1$ aňlatmanyň her bir goşulyjysy aýratynlykda diadanyň hususy hallaryny emele getirýär.

ç) *tenzorlaryň swýortkasy* (gysgaltmasy, gysylmasy) – onuň komponentleriniň iki indeksleriniň biri-birlerine deňleşdirilmegi arkaly alynýar, şunlukda, deňleşdirilýän indeksler iki gezek gaýtalanýar (şu indeks boýunça jemleme geçirilýär) we tenzoryň rangy 2 birlik kemelýär. Mysal hökmünde 3 rangly (a_{ijk}) tenzoryň birinji we üçünji indeksleri boýunça swýortka geçirilişine seredeliň:

$$b'_j=a'_{iik}=\alpha_{ii_1}\alpha_{jj_1}\alpha_{kk_1}a_{i_1j_1k_1}=(\alpha_{ii_1}\alpha_{ik_1})\alpha_{jj_1}a_{i_1j_1k_1}=\delta_{i_1k_1}\alpha_{jj_1}a_{i_1j_1k_1}=$$
$$=\alpha_{jj_1}a_{i_1j_1i_1}=\alpha_{jj_1}b_{j_1},\ (\delta_{ik}=\alpha_{ji}\alpha_{jk})$$

bu ýerde δ_{ik} – Kroneker belgisi:

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0, & \text{eger-de } i\neq k\\ 1, & \text{eger-de } i=k.\end{cases}$$

d) *indeksleriň orun çalşyrmasy.* $a_{ijk}e_ie_je_k$ tenzordan $a_{kji}e_ie_je_k$ tenzory alyp bolar. Üç elementden orun çalşyrmanyň sanynyň $P_3=3!=6$ boljakdygy üçin üç indeksli tenzorlaryň ýene-de dört sanysyny alyp bolar. Indeksleriň orun çalşyrmalaryndan alnan tenzorlar adatça dürlüdirler. Eger-de orun çalşyrmada tenzor üýtgewsiz galsa, onda beýle tenzorlara simmetrik; eger-de diňe minus alamata üýtgese, onda olara *kesesimmetrik tenzorlar* diýilýär.

Bellik. *$g_{ij}x^ix^j$ görnüşli indefinit formalar hem tenzorlaryň mysallarydyr.*

Tenzor meýdanlary

1. Ýewklid tenzorlarynyň meýdany. Üç ölçegli ýewklid giňişligine seredeliň. Goý, bu giňişligiň käbir etrabynda ýa-da her bir M nokadynda

$$T=T(M)=a_{ij\ldots r}(M)e_ie_j\ldots e_r \tag{8}$$

ýewklid tenzory berilsin. Bu ýagdaýda T ýewklid tenzorlarynyň meýdany berlen hasap edilýär. Eger-de tenzorlaryň ranglary 0 we 1 bolsa, onda degişlilikde ýewklid tenzorlarynyň meýdanlarynyň hususy hallary bolan skalýar we wektor meýdanlary alynýar.

Tenzor meýdanlaryň hem üstünde algebraik amallar bilen bilelikde differensirleme we integrirleme geçirilýär. (8) meýdanyň önümi 2 rangly tenzory emele getirer we ol önüm

$$\nabla T = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial a_{ij...s}}{\partial x_t} e_i e_j ... e_s e_t \tag{9}$$

deňlik bilen; differensialy bolsa

$$d\overline{T} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{r}} \cdot d\overline{r} = a_{ij...s,t} dx_t e_i e_j ... e_s$$

deňlik bilen hasaplanar, bu ýerde

$$a_{ij...s,t} = \frac{\partial a_{ij...s}}{\partial x_t}$$

bu koeffisiýentler bir bazisden beýleki bazise geçilende tenzor düzgüni bilen özgererler.

Önümiň kömegi bilen wektor meýdanynyň esasy formulalary gökezilýär:

$$\mathrm{grad}\,\overline{u} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{r}} = u_{,j} e_j; \quad \mathrm{div}\overline{A} = \overline{A}_{i,i};$$

$$(\overline{a},\nabla)\overline{u} = a_i \cdot u_{,i}; \qquad (\overline{a},\nabla)\overline{b} = a_i b_{j,i} e_j.$$

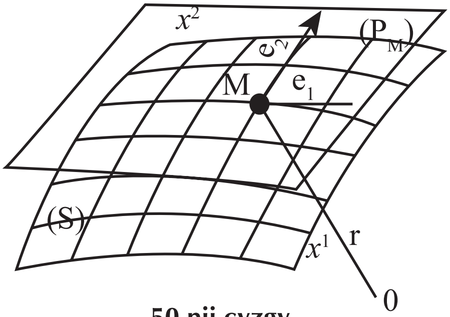
Wektor meýdanynyň diwergensiýasyna meňzeşlikde 2 rangly meýdanlar üçin tenzor meýdanynyň diwergensiýasy aşakdaky ýaly bolar:

$$\mathrm{div}_I(a_{ij} e_i e_j) = a_{ij,i} e_i \ \textit{we}\ \mathrm{div}_{II}(a_{ij} e_i e_j) = a_{ij,j} e_i.$$

Bellikler. 1. Simmetrik bolmadyk tenzorlar üçin diwergensiýany onuň görkezilen indeksi boýunça hasaplamaly.

2. Tenzor meýdanynyň çyzyk, üst we göwrüm boýunça integrallary hem kesgitlenýär.

2. Ýewklid giňişliginiň köpgörnüşlilikdäki meýdany. R_3 giňişlikde käbir S üste seredeliň. Eger-de bu üstde x^1, x^2 koordinatalar ulgamy berlen bolsa, onda bu üstüň islendik M nokady



50-nji çyzgy

üçin $e_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^1},\ e_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2}$ wektorlar S üstüň M nokadynda geçirilen galtaşýan *P(M)* tekizliginde ýatarlar *(50-nji çyzgy)*. S üstde koordinatalar ulgamynyň çalşyrylmagy

$$e'_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'^i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} e_j$$

deňlik bilen amala aşyrylar. Şonuň üçin hem bu ýagdaý ýewklid giňişliginde S üstde skalýar, wektor we umumy ýagdaýda bolsa tenzor meýdanlaryny girizmäge mümkinçilik berýär.

Koordinatalaryň kiçi özgermesinde

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^2} dx^2 = (dx^i) e_i$$

we S üstüň 1-nji kwadrat formasy

$$ds^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = (dx' e_i)(dx^j e_j) = (e_j e_j) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

görnüşde bolar. Onda *S* üstüň özara kesişýän çyzyklarynyň arasyndaky burç

$$\cos(d\bar{r} \,\hat{}\, d\bar{r}_1) = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{r}_1}{ds_1} = \frac{g_{ij} dx^i dx_1^j}{\sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \sqrt{g_{ij} dx_1^i dx_1^j}},$$

S üstde ýatan islendik L egri çyzygynyň uzynlygy

$$L = \int_{(L)} ds = \int_{(L)} \sqrt{g_{ij}(x^1, x^2) dx^i dx^j},$$

S üstüň islendik σ böleginiň meýdany

$$\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \left|\partial_{x^1}\bar{r} \times \partial_{x^2}\bar{r}\right| = \int\limits_{(\sigma)} \sqrt{|e_1 \times e_2|^2}\, dx^1 dx^2 =$$

$$= \int\limits_{(\sigma)} \sqrt{\left(|e_1|^2 |e_2|^2 - (e_1 \cdot e_2)^2\right)^2}\, dx^1 dx^2 = \int\limits_{(\sigma)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 dx^2$$

deňlikler bilen hasaplanýar.

Peýdalanylan edebiýatlar

1. *Gurbanguly Berdimuhamedow*. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. I-II kitaplar. Aşgabat, 2009.

2. *Gurbanguly Berdimuhamedow.* Türkmenistanyň durmuş-ykdysady ösüşiniň döwlet kadalaşdyrylyşy. I-II tomlar. Türkmen döwlet neşirýat gullugy. Aşgabat, 2010.

3.*Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия: Учебник. М., Наука, 1974, 176 с.

4. *Мышкис А.Д.* Математика. М., Наука, 1971, 632 с.

5. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука, 1967, 608 с.

6. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии: Учебник. М., Изд-во Моск. Ун-та, 1980, 440 с.

7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Учеб. пособие. М., Наука, 1979, 759 с.

8. *Шилов Г.Е.* Математический анализ: Функции нескольких вещественных переменных: Учеб. пособие. В 2-х ч. Москва, Наука, 1972, 622 с.

9. *Рашевский П.К.,* Риманова А. Геометрия и тензорный анализ. 3-е изд.Москва,1958, 244 с.

10. *Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т.* Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие. М., Изд-во Моск. Ун-та, 1981, 183с.

11. Çyzyklar teoriýasy. I we II bölümler. Aşgabat: TGU. 1983. 85 sah.

12. Differensial geometriýa (Üstler teoriýasy – I bölüm). Aşgabat: TGU. 1985, 90 s.

13. Differensial geometriýa. Okuw gollanmasy. Türkmenabat. TDMI. 2008, 120 s.

14. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под редакции А.С.Феденко. Москва: Наука, 1979, 272 с.

15. *Розендерн Е.Р.* Задачи по дифференциальной геометрии. Москва: Наука, 1971, 64 с.

AT GÖRKEZIJILER

Mazmuny

Işanguly Rozyýew, Hajymämmet Soltanow

DIFFERENSIAL GEOMETRIÝA

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Redaktor	*H. Sapargulyýew*
Teh. redaktor	*O. Nurýagdyýewa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Korrektorlar	*M. Atanyýazowa,*
	M. Agageldiýewa
Neşir üçin jogapkär	*A. Çaryýew*

Çap etmäge rugsat edildi 01.05.2015. Möçberi 60x90 $^1/_{16}$.
Şertli çap listi 7,5. Çap listi 7,5. Hasap-neşir listi 6,48.
Şertli-reňkli listi 10,6. Sargyt №64. Sany 500.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744000. Aşgabat, Garaşsyzlyk şaýoly, 100.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.