G. Şadurdyýew, A. Arazmedow,
S. Kurbanowa, B. Arazmedowa

GEOMETRIÝA BOÝUNÇA BAŞLANGYÇ OKUW

Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat
“Ylym” neşirýaty
2011

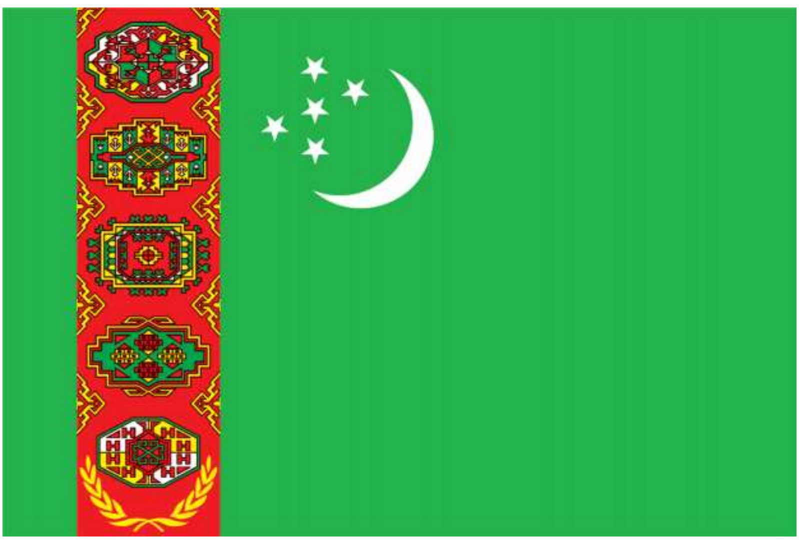
UOK 514
Ş 14

Şadurdyýew G. we başg.
Ş 14 **Geometriýa boýunça başlangyç okuw.** Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby. – A.: “Ylym” neşirýaty, 2011. – 152 sah.

TDKP № 279 KBK 22.151 ýa 73

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

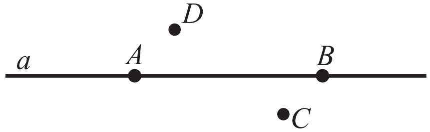
Gaýtalama:
Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

GEOMETRIÝANYŇ BAŞLANGYÇ MAGLUMATLARY

§ 1. Geometriýa kursunyň logiki gurluşy. Nokat. Göni çyzyk

Geometriýa kursy guralanda kesgitlemesiz girizilýän esasy düşünjeler sanalyp geçilýär. Bu geometriýa kursunda esasy geometrik düşünjeler hökmünde şu düşünjeler kabul edilýär: **nokat, göni çyzyk, tekizlik, uzaklyk**. Bu esasy geometrik düşünjelerden başga-da **köplük, ululyk, san** ýaly umumy matematiki düşünjeler hem ulanylýar. Esasy düşünjeleriň kömegi bilen beýleki geometrik düşünjelere kesgitleme berilýär. Esasy düşünjeleriň häsiýetleri aksiomalarda görkezilýär. Subut edilmezden kabul edilýän tassyklamalara **aksiomalar** diýilýär. Ondan soňra täze düşünjeler kesgitlenilýär. Kesgitlenen düşünjeleriň esasynda ýene-de täze düşünjeler girizilýär. Olaryň häsiýetleri teoremalar diýlip atlandyrylýan we subut edilýän tassyklamalarda görkezilýär. Teoremalar kabul edilen kesgitlemeleriň, aksiomalaryň üsti bilen subut edilýär.

Esasy düşünjeler bolan göni çyzyk we nokat degişlilikde latyn elipbiýiniň setir we baş harplary bilen belgilenýär. 1-nji suratda a göni çyzyk we A, B, C, D nokatlar şekillendirilendir. Suratdan görnüşi ýaly, A we B nokatlar a göni çyzyga degişlidir, C we D nokatlar bolsa, a göni çyzyga degişli däldir.



1-nji surat

Nokat we göni çyzyk bilen baglanyşykly käbir aksiomalary getireliň.

Nähili göni çyzyk bolsa-da, şol göni çyzyga degişli nokatlar we oňa degişli däl nokatlar bardyr.

Islendik iki nokadyň üstünden bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar.

Soňky aksiomadan şeýle netije gelip çykýar: dürli iki göni çyzyk ýa-ha kesişmeýärler ýa-da diňe bir nokatda kesişýärler.

§ 2. Kesim, şöhle we burç

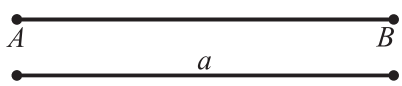
Kesim, şöhle we burç geometriýa kursunda kesgitleme berilýän ilkinji düşünjelerdir.

Göni çyzygyň berlen iki nokadyndan we olaryň arasynda ýatýan ähli nokatlardan ybarat bolan bölegine **kesim** diýilýär. Şol iki nokada kesimiň uçlary diýilýär.

Göni çyzygyň berlen nokadyndan we ondan bir tarapda ýatýan ähli nokatlardan ybarat bolan bölegine **şöhle** ýa-da ýarym **göni çyzyk** diýilýär.

Bir nokatdan çykýan iki şöhläniň emele getirýän figurasyna **burç** diýilýär. Ol nokada burçuň depesi, şöhlelere burçuň taraplary diýilýär. Eger şöhleler biri-birini doldurýan ýarym göni çyzyklar bolsa, onda ol burça **ýazgyn burç** diýilýär.

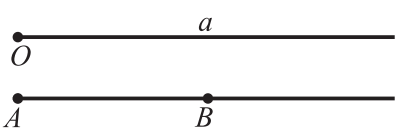
Kesimleriň bellenilişi:



AB - kesim

a - kesim

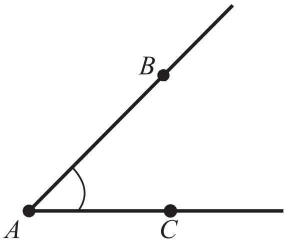
Şöhleleriň bellenilişi:



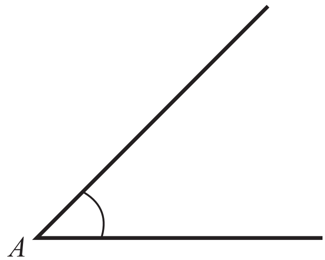
a - şöhle

AB - şöhle

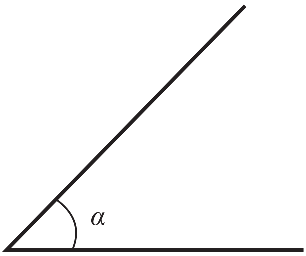
Burçlaryň bellenilişi:



$\angle BAC$ – BAC burç



$\angle A$ – A burç



$\angle \alpha$ – α burç

§ 3. Kesimleri we burçlary deňeşdirmek, ölçemek, ölçeg birlikleri

Kesimleri deňeşdirmegiň käbir usullaryny ýatlalyň: bir kesimi beýlekisiniň üstüne goýmak bilen deňeşdirmek; üçünji kesimi ulanyp deňeşdirmek, ýagny kesimleri biri-biriniň üstüne alyp goýup bolmasa, deňeşdirilýänleriň birine deň bolan üçünji bir kesimi beýlekisiniň üstüne goýup deňeşdirmek. Bu iki usul bilen diňe kesimleriň deňdigi ýa-da deň däldigi anyklanylýar. Eger kesimleriň biriniň beýlekisinden näçe uludygyny ýa-da kiçidigini biljek bolsak, onda biz olary ölçemeli bolýarys. Ölçemek – bu berlen kesimi başga bir kesim bilen, ýagny birlik kesim bilen deňeşdirmekdir. Başgaça aýdylanda, berlen kesimde birlik kesimiň näçe gezek ýerleşýändigini bilmekdir. Ölçemegiň netijesinde san alynýar. Deňeşdirilýän iki kesimi şol bir birlik kesim bilen ölçäp alnan sanlary deňeşdirmek ýeterlikdir.

Mysal üçin, $a = 5$ *sm*, bu ýazga şeýle düşünilýär: a – kesimde 1 santimetrlik kesim 5 gezek ýerleşýär.

Ölçemek netijesinde $a = 5$ *sm*, $b = 8$ *sm* bolýandygy kesgitlenipdir diýeliň. Indi biz b kesimiň a kesimden diňe bir uzyndygyny bilmän, eýsem b kesimiň a kesimden 3 *sm* ($8 - 5 = 3$ *sm*) ýa-da 1,6 ($8 : 5 = 1,6$) esse uzyndygyny hem bilýäris.

Kesimleri we burçlary ölçemegiň esasy häsiýetlerini getireliň:

1) her bir kesimiň noldan uly, belli bir uzynlygy bardyr;

2) kesimiň uzynlygy onuň islendik nokady tarapyndan bölünen bölekleriniň uzynlyklarynyň jemine deňdir;

3) her bir burçuň noldan uly belli bir gradus ölçegi bardyr;

4) burçuň gradus ölçegi onuň taraplarynyň arasyndan geçýän islendik şöhle tarapyndan bölünýän burçlaryň gradus ölçegleriniň jemine deňdir;

5) ýazgyn burçuň ululygy 180°-a deňdir.

Biz kesimleri ölçemek üçin, esasan, çyzgyçlary, burçlary ölçemek üçin bolsa transportiri ulanýarys. Uzynlygyň birligi metrdir. Uzynlygyň desimetr, santimetr, millimetr, mikron, kilometr ýaly birlikleri hem ulanylýar.

Şeýlelikde, $1\,m = 10\,dm$ ýa-da $1\,dm = 0{,}1m$,
$1\,m = 100\,sm$ ýa-da $1\,sm = 0{,}01\,m$,
$1\,m = 1000\,mm$ ýa-da $1\,mm = 0{,}001\,m$,
$1\,m = 0{,}001\,km$ ýa-da $1\,km = 1000\,m$.

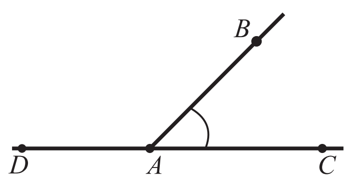
Burçuň ölçeg birlikleri gradus we radiandyr.

$$1\ radian = \frac{180^\circ}{\pi};\ 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\ radian.$$

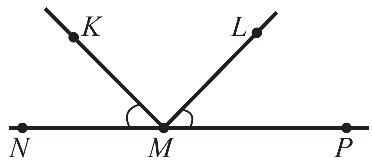
§ 4. Çatyk we wertikal burçlar, olar baradaky teoremalar

K e s g i t l e m e. Eger iki burçuň bir tarapy umumy bolup, beýleki taraplary dolduryjy ýarym göni çyzyklar bolsa, onda olara **çatyk burçlar** diýilýär.

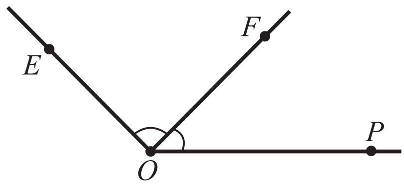
$\angle DAB$ we $\angle CAB$ – çatyk burçlar.



$\angle NMK$ we $\angle LMP$ burçlar çatyk burçlar däldir.

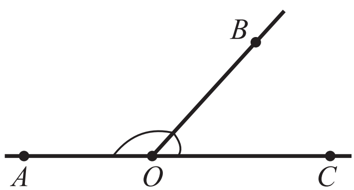


$\angle EOF$ we $\angle FOP$ burçlar çatyk burçlar däldir.



TEOREMA. Çatyk burçlaryň jemi 180^o-a deňdir.

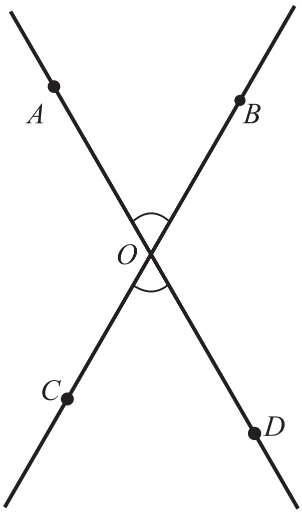
Subudy. Bize $\angle AOB$ we $\angle BOC$ (*2-nji surat*) çatyk burçlar berlen bolsun. Bu iki burçuň jeminiň 180^o-a deňdigini subut edeliň.



2-nji surat

$\angle AOB$ we $\angle BOC$ burçlaryň çatyklygyndan OA we OC şöhleleriň biri-birini dolduryan ýarym göni çyzyklardygy gelip çykýar. OA we OC biri-birini dolduryan ýarym göni çyzyklar bolsa, onda $\angle AOC$ ýazgyn burçdur. Ýazgyn burç bolsa 5-nji häsiýet esasynda 180^o-a deň, $\angle AOC$ ýazgyn burç bolsa $\angle AOB$ we $\angle BOC$ burçlaryň jemine deň *(4-nji häsiýet)*. Şeýlelikde $\angle AOB + \angle BOC = 180^o$.Teorema subut edildi.

Kesgitleme. Eger bir burçuň taraplary beýleki burçuň taraplarynyň dolduryjy ýarym göni çyzyklary bolsa, onda olara **wertikal burçlar** diýilýär.



$\angle AOB$ we $\angle COD$ – wertikal burçlar.
$\angle AOC$ we $\angle BOD$ – wertikal burçlar.

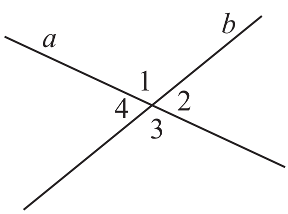
3-nji surat

TEOREMA. Wertikal burçlar deňdirler.

Subudy. $\angle AOB$ we $\angle COD$ – wertikal burçlar (*3-nji surat*) berlen. $\angle AOB = \angle COD$ deňligi subut etmeli. $\angle COA$ we $\angle AOB$ burçlar çatyk burçlardyr. Diýmek, $\angle AOB = 180^{o} - \angle COA$. $\angle COA$ we $\angle COD$ burçlar hem çatyk burçlardyr. Diýmek, $\angle COD = 180^{o} - \angle COA$. Şeýlelikde, $180^{o} - \angle COA = =\angle COD$ we $180^{o} - \angle COA = \angle AOB$. Bu ýerden $\angle COD = \angle AOB$ gelip çykýar.

Teorema subut edildi.

§ 5. Perpendikulýar göni çyzyklar

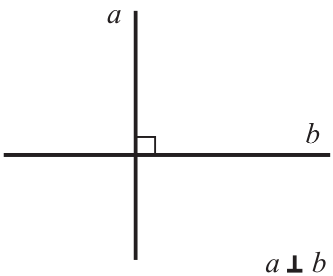


4-nji surat

Iki göni çyzyk kesişende 4 sany burç alynýar *(4-nji surat)*. Şol dört burç deň hem bolup biler. Eger şeýle bolsa, onda biz göni çyzyklar **göni burç astynda kesişýärler** diýýäris.

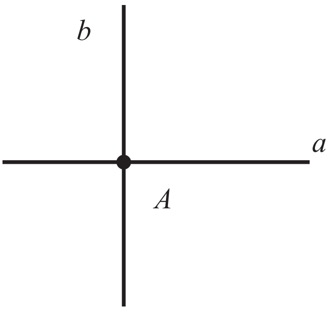
Eger iki göni çyzyk kesişende emele gelýän burçlaryň biri ýazgyn burçuň ýarysyna deň bolsa, onda ol göni çyzyklara **perpendikulýar göni çyzyklar** diýilýär. Ýazgyn burçuň ýarysyna deň bolan burça **göni burç** diýilýär. Ýagny 90°-a deň bolan burç göni burçdur. Göni burçdan kiçi bolan burça **ýiti burç** diýilýär. Göni burçdan uly, ýazgyn burçdan bolsa kiçi bolan burça **kütek burç** diýilýär.

Perpendikulýarlyk gatnaşygy $\perp$ belgi bilen aňladylýar (*5-nji surat*): $a \perp b$.



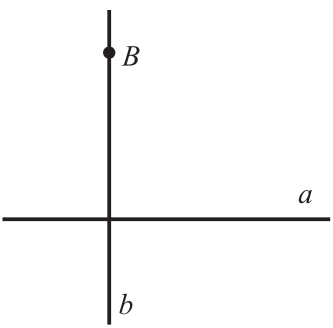
5-nji surat

Göni çyzyga oňa degişli bolan *A* nokatdan *(6-njy surat)* hem, degişli däl *B* nokatdan hem diňe bir perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolar (*7-nji surat*). Bu tassyklamanyň subudyny özbaşdak ýerine ýetirmäge synanyşyň.



6-njy surat

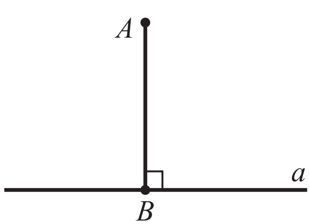
Berlen göni çyzyga geçirilen perpendikulýar diýip, berlen göni çyzyga perpendikulýar we ujy olaryň kesişme nokadynda bolan göni çyzygyň kesimine aýdylýar. Kesimiň şol ujuna **perpendikulýaryň esasy** diýilýär. *AB* kesim *a* göni çyzyga geçirilen perpendikulýardyr, *B* nokat bolsa onuň esasy (*8-nji surat*).



7-nji surat

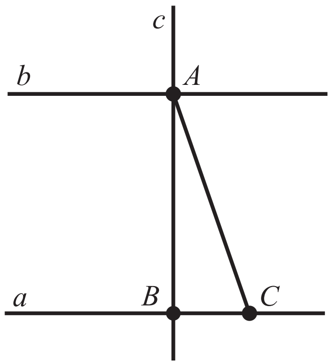
§ 6. Nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk

TEOREMA. Berlen göni çyzygyň üstünde ýatmaýan islendik nokatdan şol göni çyzyga bir we diňe bir perpendikulýar indermek bolar.



8-nji surat

Subudy. Goý, *a* – berlen göni çyzyk we *A* – onuň üstünde ýatmaýan nokat bolsun (*9-njy surat*). *A* nokadyň üstünden *a* göni çyzyga parallel *b* göni çyzyk geçireliň. Soňra *A* nokadyň üstünden *b*



9-njy surat

göni çyzyga perpendikulýar bolan c göni çyzyk geçireliň. Ol a göni çyzyga hem perpendikulýar bolar we ony käbir B nokatda keser. AB kesim – A nokatdan a göni çyzyga inderilen perpendikulýardyr.

Goý, A nokadyň üstünden a göni çyzyga AB we AC iki perpendikulýar inderilen bolsun, şonda ABC üçburçlukda iki sany göni burç bolardy, ol bolsa mümkin däl.

Teorema subut edildi.

Berlen nokatdan göni çyzyga inderilen perpendikulýaryň uzynlygyna **nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk** diýilýär.

I baba degişli gönükmeler

1. Göni çyzyk we şol göni çyzygyň üstünde ýatmaýan *A, B, C* üç nokat berlipdir. *AB* kesimiň göni çyzygy kesýändigi we *AC* kesimiň bolsa ony kesmeýändigi mälim. *BC* kesim göni çyzygy kesýärmi? Jogabyny düşündiriň.

2. Bäş nokat we şol nokatlaryň hiç biriniň üstünden geçmeýän göni çyzyk berlipdir. Üç nokadyň şol göni çyzyga görä ýarymtekizlikde, beýleki iki nokadyň bolsa beýleki ýarymtekizlikde ýerleşendikleri mälim. Nokatlaryň her bir jübüti kesimler bilen birleşdirilipdir. Näçe kesim göni çyzygy kesýär? Jogabyny düşündiriň.

3. 30^o, 45^o, 60^o, 90^o burçlary göz çeni bilen guruň. Gurluşyň takyklygyny transportir bilen barlaň.

4. Kesişýän iki göni çyzyk berlipdir. Berlen iki göni çyzygyň her birine parallel bolan üçünji göni çyzygy geçirip bolarmy?

5. Dört nokat berlipdir: *A, B, C* we *D. A, B, C* nokatlaryň bir göni çyzygyň üstünde ýatandyklary we *B, C, D* nokatlaryň hem bir göni çyzygyň üstünde ýatandyklary mälim. Hemme dört nokadyň bir göni çyzygyň üstünde ýatandyklaryny subut ediň.

6. Dört sany göni çyzyk berlipdir: *a, b, c* we *d. a, b, c* göni çyzyklaryň bir nokatda kesişýändikleri we *b, c, d* göni çyzyklaryň hem bir nokatda kesişýändikleri mälim. Berlen ähli dört göni çyzygyň bir nokadyň üstünden geçýändigini subut ediň.

7. AB ýarym göni çyzykdan dürli ýarymtekizliklerde $\angle BAC = 60^{o}$ we $\angle BAD = 70^{o}$ burçlar alnyp goýlupdyr. CAD burçy tapyň.

8. Çatyk burçlaryň bissektrisalarynyň arasyndaky burçy tapyň.

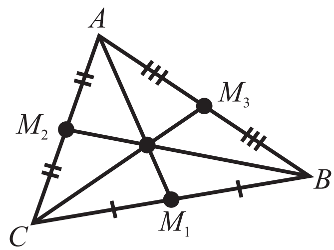
II BAP

ÜÇBURÇLUKLAR

§ 1. Üçburçlugyň medianasy, bissektrisasy we beýikligi

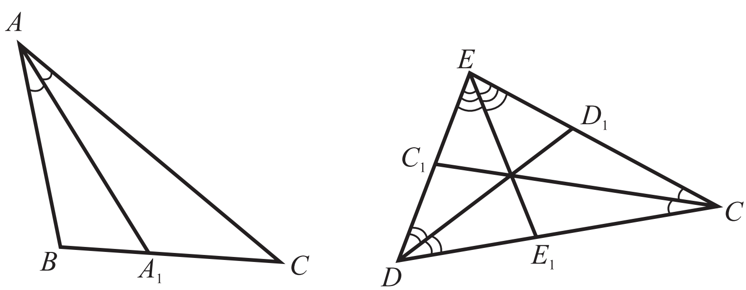
K e s g i t l e m e. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokatdan we şol nokatlary jübüt-jübütden birleşdirýän üç kesimden ybarat figura **üçburçluk** diýilýär.

Üçburçlugyň haýsy-da bolsa bir depesini onuň garşysyndaky ýatan tarapyň ortasy bilen birikdirmek netijesinde alnan kesime üçburçlugyň medianasy diýilýär.



10-njy surat

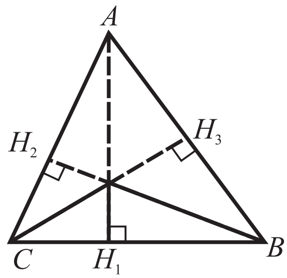
Islendik üçburçlugyň üç medianasy bolýar. 10-njy suratda AM_1, BM_2, CM_3 kesimler ABC üçburçlugyň medianalarydyr.



11-nji surat

Üçburçlugyň haýsy-da bolsa bir depesini onuň garşysyndaky tarapy bilen birikdirýän we şol depedäki burçy deň ikä bölýän kesime bissektrisa diýilýär. Islendik üçburçlugyň üç bissektrisasy bolyar.

11-nji suratdaky CC_1, DD_1, EE_1 kesimler CDE üçburçlugyň bissektrisalarydyr, AA_1 kesim ABC üçburçlugyň bissektrisasydyr.



12-nji surat

Üçburçlugyň berlen depesinden onuň garşysyndaky tarapy saklaýan göni çyzyga geçirilen perpendikulýara üçburçlugyň berlen depesinden inderilen beýikligi diýilýär. Islendik üçburçlugyň üç beýikligi bolýar. 12-nji suratda AH_1, BH_2, CH_3 kesimler ABC üçburçlugyň beýiklikleridir.

Üçburçlugyň medianalary, bissektrisalary we beýiklikleri şu ajaýyp häsiýetlere eýedirler:

a) üçburçlugyň medianalary bir nokatda kesişýärler;

b) üçburçlugyň bissektrisalary bir nokatda kesişýärler;

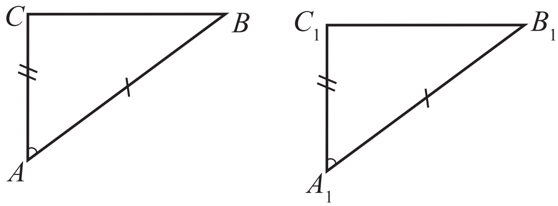
ç) üçburçlugyň beýiklikleri ýa-da olaryň dowamlary bir nokatda kesişýärler.

§ 2. Üçburçluklaryň deňlik nyşanlary

Eger üçburçluklaryň degişli taraplary we degişli burçlary deň bolsa, onda olar deňdirler. Üçburçluklaryň deňligini bu kesgitleme bilen däl-de ýörite deňlik nyşanlary boýunça anyklaýarlar. Ol nyşanlar teoremalar görnüşinde berilýär.

Matematikada dogrulygy pikir ýöretmeleriň üsti bilen ýüze çykarylýan her bir tassyklama teorema diyilyär. Şonda ulanylýan pikir ýöretmelere bolsa teoremanyň subudy diýilýär. Eýýäm biz teoremalara we olaryň subutlaryna duş geldik. Wertikal burçlaryň deňdigi hakyndaky tassyklama teoremady, wertikal burçlaryň deňdigini ýüze çykarmak üçin geçiren pikir ýöretmämiz bolsa bu teoremanyň subudydy.

TEOREMA. Eger bir üçburçlugyň iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy degişlilikde başga bir üçburçlugyň iki tarapyna we olaryň arasyndaky burça deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler.



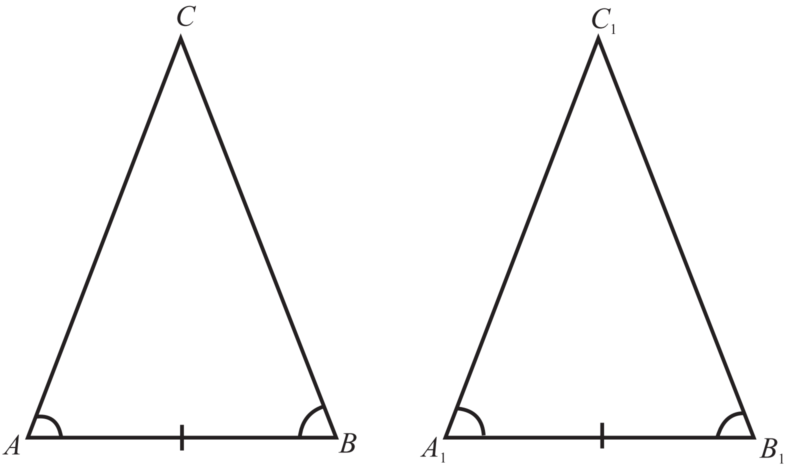
13-nji surat

Subudy. $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A_1B_1}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{A_1C_1}$ bolan ***ABC*** we $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ üçburçluklar berlen bolsun. Bu üçburçluklaryň deňdiklerini subut edeliň (*13-nji surat*). $\angle \boldsymbol{A} = \angle \boldsymbol{A_1}$ bolany üçin ***A*** depe bilen $\boldsymbol{A_1}$ depe gabat geler ýaly, ***AB*** we ***AC*** taraplar bolsa degişlilikde $\boldsymbol{A_1B_1}$ we $\boldsymbol{A_1C_1}$ şöhleleriň üstüne düşer ýaly edip ***ABC*** üçburçlugy $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ üçburçlugyň üstüne goýup bolar. $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A_1B_1}$ we $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{A_1C_1}$ bolany üçin ***AB*** tarap $\boldsymbol{A_1B_1}$ tarap bilen, ***AC*** tarap $\boldsymbol{A_1C_1}$ tarap bilen, ýagny ***B*** nokat $\boldsymbol{B_1}$ nokat bilen, *C* nokat $\boldsymbol{C_1}$ nokat bilen gabat geler. Bu bolsa ***BC*** tarapyň $\boldsymbol{B_1C_1}$ tarap bilen gabat gelýändigini görkezýär. ***ABC*** we $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ üçburçluklar doly gabat gelýärler. Diýmek, ***ABC*** we $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ üçburçluklar deňdirler. Teorema subut edildi.

Subut edilen teorema üçburçluklaryň deňliginiň nyşanyny (iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça üçburçluklaryň deňligini) görkezýär. Bu nyşan boýunça üçburçluklaryň deňligi hakynda netije çykaryp bolýar. Bu nyşana üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany diýilýär.

TEOREMA. Eger bir üçburçlugyň bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy degişlilikde başga bir üçburçlugyň bir tarapyna we oňa sepleşýän iki burçuna deň bolsa, onda seýle üçburçluklar deňdirler.

Subudy. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ bolan ABC we $A_1B_1C_1$ iki üçburçlugyň deňdigini subut edeliň. A depe A_1 depe bilen, AB tarap oňa deň bolan A_1B_1 tarap bilen gabat geler ýaly, C we C_1 depeler A_1B_1 göni çyzykdan bir tarapda ýatar ýaly edip ABC üçburçlugy $A_1B_1C_1$ üçburçlugyň üstünde goýýarys (*14-nji surat*). $\angle A = \angle A_1$ we $\angle B = \angle B_1$ bolany üçin AC tarap A_1C_1 şöhle bilen, BC tarap B_1C_1 şöhle bilen gabat gelýär. C nokat AC we BC taraplaryň umumy nokady bolany üçin ol A_1C_1 şöhläniň, şeýle hem B_1C_1 şöhläniň üstüne düşer. Diýmek, bu nokat bu şöhleleriň umumy nokady bolan C_1 nokat bilen gabat geler. AC tarap A_1C_1 tarapyň, BC tarap B_1C_1 tarapyň üstüne düşer. Şoňa görä-de ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar doly gabat gelerler. Onda $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Teorema subut edildi.



14-nji surat

Subut edilen teorema üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşanyny (bir tarapy we oňa sepleşýän iki burçy boýunça) aňladýar.

TEOREMA. Eger bir üçburçlugyň üç tarapy degişlilikde başga bir üçburçlugyň üç tarapyna deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler.

Subudy. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ bolan ABC we $A_1B_1C_1$ iki üçburçlugyň deňdiklerini *(15-nji surat)* subut edeliň. A depe A_1 depe bilen, B depe B_1 depe bilen gabat geler ýaly C we C_1 depeler A_1B_1 göni çyzykdan dürli taraplarda ýatar ýaly edip ABC üçburçlugy $A_1B_1C_1$ üçburçluga ýanaşdyryp goýalyň (*16-njy surat*).

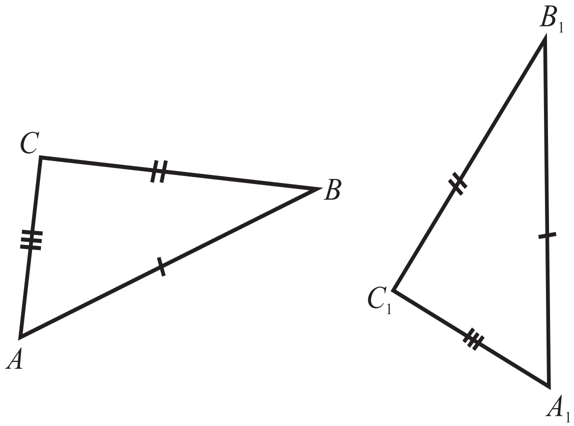
Üç ýagdaýyň bolmagy mümkin:

a) C_1C şöhle $A_1C_1B_1$ burçuň içinden geçýär;

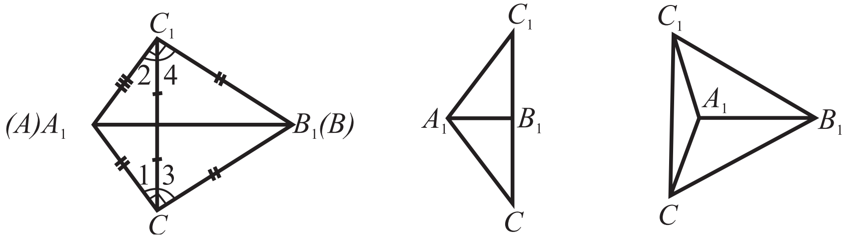
b) C_1C şöhle $A_1C_1B_1$ burçuň bir tarapy bilen gabat gelýär;

ç) C_1C şöhle $A_1C_1B_1$ burçuň daşyndan geçýär.

Birinji ýagdaýa seredeliň. Şert boýunça $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ bolany üçin A_1C_1C we B_1C_1C deňýanly üçburçluklardyr. Deňýanly üçburçlugyň burçlarynyň häsiýetine görä $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, onda $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Diýmek, $A_1C_1 = AC$, $C_1B_1 = CB$ we $\angle C = \angle C_1$ bolany üçin üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany boýunça $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Beýleki iki ýagdaý hem şuňa meňzeş subut edilýär. Teorema subut edildi.



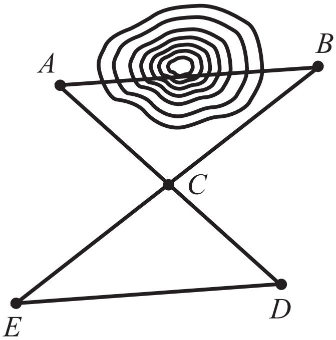
15-nji surat



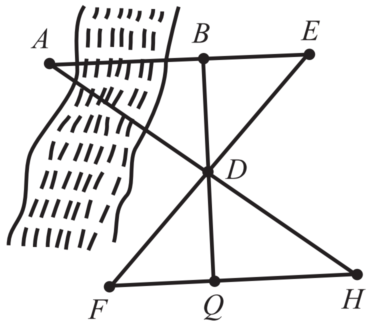
16-njy surat

Mesele. Ýer üstünde *A* we *B* iki nokadyň arasyndaky uzaklygy ölçemek üçin (olaryň ýanyna göni çyzyk boýunça baryp bolmaýar) *C* nokady saýlap alýarlar, ol nokatdan hem *A* nokadyň ýanyna hem-de *B* nokadyň ýanyna baryp bolýar we ondan şol nokatlaryň ikisi-de görünýär. *AC* we *BC* uzaklyklary çyzýarlar, olary *C* nokatdan aňryk dowam etdirýärler we $CD = AC$ we $EC = CB$ kesimleri ölçäp alýarlar. Şonda *ED* kesim gözlenilýän uzaklyga deňdir (*17-nji surat*). Munuň näme üçin şeýledigini düşündiriň.

Mesele. Ýer üstünde biriniň ýanyna (*A* nokat) baryp bolmaýan iki nokadyň arasyndaky uzaklygy ölçemek üçin *AB* kesimiň ugruny belleýärler we onuň dowamynyň üstünde erkin *BE* kesimi ölçäp alýarlar. Ýeriň üstünde *D* nokady saýlap alýarlar, ondan *A* nokat görünýär hem-de *B* we *E* nokatlaryň ýanyna baryp bolýar. *BQ* we *EF* göni çyzyklary çyzýarlar hem-de $FD = DE$ we $DQ = BD$ kesimleri ölçäp alýarlar. Soňra tä *H* nokat tapylýança *A* nokada seredip, *FQ* göni çyzyk boýunça gidýärler, ol *H* nokat *AD* göni çyzygyň üstünde ýatýar. Şonda *HQ* gözlenilýän uzaklyga deňdir (*18-nji surat*). Subut ediň.



17-nji surat



18-nji surat

§ 3. Deňýanly üçburçluklar we olaryň häsiýetleri

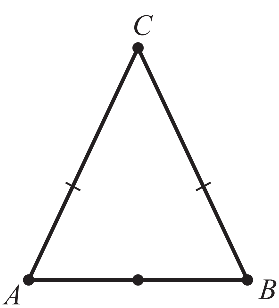
Üçburçluklara syn etsek, olaryň arasynda iki tarapynyň deňleriniň, üç tarapy deňleriniň bardygyna göz ýetireris. Iki tarapy deň üçburçluga **deňýanly üçburçluk,** üç tarapy deň üçburçluga **deňtaraply üçburçluk** diýilýär. Deňýanly üçburçlugyň deň taraplaryna **gapdal taraplary,** üçünji tarapyna bolsa, **esasy** diýilýär.

Deňýanly üçburçlugyň şeýle häsiýetleri bar:

a) deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burçlary deňdir;

b) esasyna geçirilen mediana onuň hem beýikligidir, hem bissektrisasydyr.

Bu häsiýetleri subut edeliň:



19-njy surat

ΔABC – deňýanly üçburçluk (*19-njy surat*), *AC* we *BC* onuň deň taraplary. $\angle A=\angle B$ bolýandygyny subut etmeli. *BAC* üçburçlugyň *BA* we *BC* taraplary we B burçy degişlilikde *BCA* üçburçlugyň *BC* we *BA* taraplaryna we *B* burçuna deň. Diýmek, üçburçluklaryň deňliginiň 1-nji nyşanyna laýyklykda *BAC* üçburçluk *BCA* üçburçluga deň. Diýmek, olaryň degişli burçlary hem deň, ýagny $\angle A=\angle B$.

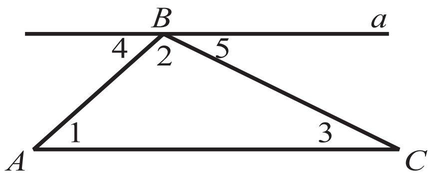
2-nji häsiýeti üçburçluklaryň deňlik nyşanlaryny ulanyp subut ediň.

§ 4. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi hakynda teorema

TEOREMA. Üçburçlugyň içki burçlarynyň jemi 180°-a deňdir.

Subudy. Erkin ABC üçburçluga seredeliň we $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ bolýandygyny subut edeliň.

B nokadyň üsti bilen AC tarapa parallel bolan a göni çyzygy geçireliň (*20-nji surat*). 1 we 4 burçlar a we AC göni çyzyklary AB kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatýan, 3 we 5 burçlar bolsa a we AC göni çyzyklary BC kesiji göni çyzyk kesip geçende alnan atanak ýatýan burçlar bolany üçin $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 3$. (1)

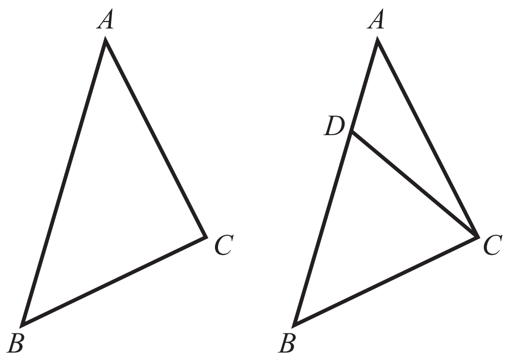


20-nji surat

4, 2 we 5 burçlaryň jeminiň bolsa B depeli ýazgyn burça deňligi, ýagny $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$ boljakdygy aýdyňdyr. Bu ýerden (1) deňlikleri göz öňünde tutup alarys: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ýa-da $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Teorema subut edildi.

§ 5. Üçburçlugyň taraplarynyň we burçlarynyň arasyndaky gatnaşyklar hakyndaky teorema

TEOREMA. Üçburçlukda uly tarapyň garşysynda uly burç ýatýar we tersine, uly burçuň garşysynda uly tarap ýatýar.



21-nji surat

Subudy. Teoremanyň birinji bölegini subut edeliň. Goý, ABC üçburçlukda AB tarap BC tarapdan uly bolsun. Uly AB tarapyň garşysynda ýatan C burçuň kiçi BC tarapyň garşysynda ýatan A burçdan uludygyny subut etmeli *(21-nji surat)*.

AB tarapyň üstünde, B nokatdan başlap, BC tarapa deň bolan BD kesimi alyp goýalyň. D we C nokatlary birikdireliň. $BD = BC$ bolany üçin DBC deňyanly üçburçlukdyr. Üçburçlugyň deň taraplarynyň garşysynda ýatandyklary üçin BDC burç BCD burça deňdir. $\angle BDC$ ADC üçburçlugyň daşky burçy bolany üçin ol A burçdan uludyr. $\angle BDC = \angle BCD$ bolany üçin BCD burç hem A burçdan uludyr. $AD < AB$ bolany üçin D nokat A we B nokatlaryň arasynda ýatýar. Şoňa görä-de BCD burç C burçuň bölegidir. Diýmek, $\angle C > \angle BCD > \angle A$, ýagny C burç A burçdan uludyr. Subut etmelimiz hem şudy.

Indi teoremanyň ikinji bölegini subut edeliň. Goý, ABC üçburçlukda $\angle C > \angle B$ bolsun. $AB > AC$ bolýandygyny subut edeliň.

Bu ýerde şu üç baglanyşygyň biri bolup biler: a) $AB = AC$; b) $AB < AC$; ç) $AB > AC$.

Eger $AB = AC$ bolsa, onda $\angle C = \angle B$ bolardy. Emma munuň özi teoremanyň şertine garşy gelýär. Diýmek, $AB = AC$ bolup bilmez.

Edil şunuň ýaly, $AB < AC$ hem bolup bilmez, sebäbi bu ýagdaýda $\angle C < \angle B$ bolardy. Bu hem şerte garşy gelýär.

Diýmek, bu ýagdaýda ($\angle C > \angle B$ bolanda) diňe $AB > AC$ bolup biler. Teorema subut edildi.

Netije. Gönüburçly üçburçlukda gipotenuza katetden uludyr. Dogrudan-da gipotenuza göni burçuň, katet bolsa yiti burçuň garşysynda ýatýar. Göni burç ýiti burçdan uly bolany üçin gipotenuza katetden uludyr.

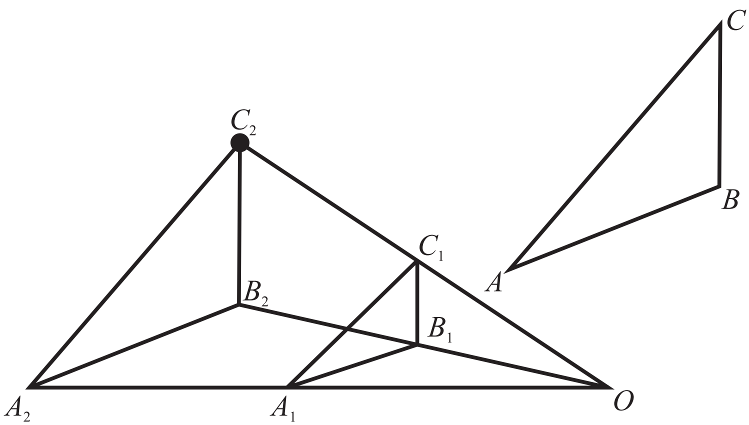
§ 6. Üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary

Eger berlen figuranyň her bir nokadyny haýsy bolsa-da bir usul bilen süýşürip bolsa, onda biz täze figura alarys. Bu figura berlen figurany özgertmek bilen alnypdyr diýýärler. F figuranyň F' figura özgertmesinde nokatlaryň arasyndaky uzaklyk şol bir san gezek üýtgeýän (ulalýan ýa-da kiçelýän) bolsa, onda bu özgermä **meňzeşlik özgertmesi** diýilýär.

Eger F we F' iki figura meňzeşlik özgertmesi bilen bir-birine geçýän bolsa, onda olara **meňzeş figuralar** diýilýär. Figuralaryň meňzeşligini belgilemek üçin ~ belgi ulanylýar. $F \sim F'$ ýazgy şeýle okalýar: "*F* figura *F'* figura meňzeşdir". Üçburçluklaryň meňzeşlik ýazgysynda: $\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$ – meňzeşlik özgertmesi bilen gabat gelýän depeler degişli orunlarynda durýarlar diýip, ýagny A nokat A_1 nokada, B nokat B_1 nokada we C nokat C_1 nokada geçýär diýip güman edilýär.

Meňzeşlik özgertmesiniň häsiýetlerinden **meňzeş figuralarda degişli burçlaryň deňdikleri, degişli kesimleriň bolsa proporsionaldygy** gelip çykýar. Husussan-da, ABC we $A_1 B_1 C_1$ meňzeş üçburçluklarda (*22-nji surat*):

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.



22-nji surat

TEOREMALAR:

1. eger bir üçburçlugyň iki burçy degişlilikde beýleki üçburçlugyň iki burçuna deň bolsa,

2. eger bir üçburçlugyň iki tarapy degişlilikde beýleki üçburçlugyň iki tarapyna proporsional bolsa we şol taraplar bilen emele gelen burçlar deň bolsa,

3. eger bir üçburçlugyň taraplary beýleki üçburçlugyň taraplaryna proporsional bolsa, onda bu iki üçburçluk meňzeşdir.

Subudy. Goý, ABC we $A_1B_1C_1$ iki üçburçluk üçin aşakdaky şertleriň biri ýerine ýetýän bolsun:

1) $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$;

2) $\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Üçburçluklaryň meňzeşdiklerini subut edeliň. Goý, $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ bolsun. $A_1B_1C_1$ üçburçlugy k meňzeşlik koeffisiýentli haýsy bolsa-da bir meňzeşlik özgertmesine, meselem gomotetiýa özgertmesine duçar edeliň, şonda ABC üçburçluga deň bolan käbir $A_2B_2C_2$ üçburçlugy alarys.

$$\angle A_2 = \angle A_1, \angle B_2 = \angle B_1, \angle A = \angle A_2, \angle B = \angle B_2.$$
$$A_2B_2 = k\,A_1B_1 = AB.$$

ABC we $A_2B_2C_2$ üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça deňdirler.

Bu üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça deňdirler. $A_2B_2C_2$ üçburçlugyň ABC üçburçluga deňdigi sebäpli, ol hereket bilen oňa geçýär. Diýmek, $A_1B_1C_1$ üçburçluk meňzeşlik özgertmesiniň we hereketiniň yzygiderli ýerine ýetmegi bilen ABC üçburçluga geçýär, ol bolsa meňzeşlik özgertmesidir. Üçburçluklaryň meňzeşlik nyşanlary subut edildi.

§ 7. Meňzeş üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy

Goý, ABC üçburçluk $A_1B_1C_1$ üçburçluga meňzeş bolsun. Onda $AB:A_1B_1 = AC:A_1C_1 = BC:B_1C_1 = k$. Bu ýerde k – proporsionallyk (ýa-da meňzeşlik) koeffisiýenti.

Üçburçluklaryň meýdany:

$$S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin \angle A,$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1} = A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin \angle A_1.$$

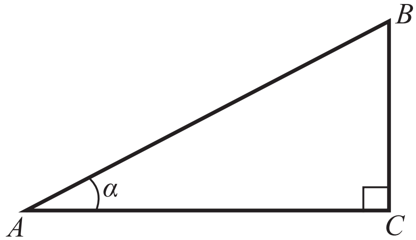
$$AB = kA_1B_1$$
$$AC = kA_1C_1$$

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\angle A}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\angle A_1} = \frac{kA_1B_1 \cdot kA_1C_1 \cdot \sin\angle A_1}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin\angle A_1} = k^2.$$

Diýmek, meňzeş üçburçluklaryň meýdanlarynyň gatnaşygy meňzeşlik koeffisiýentiniň kwadratyna deňdir.

§ 8. Gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň sinusy, kosinusy we tangensi

C burçy göni bolan *ABC* gönüburçly üçburçluga seredeliň (*23-nji surat*). *BC* katet *A* ýiti burçuň garşysynda ýatýan, *AC* katet şol burça sepleşýän katetlerdir.



23-nji surat

A burçuň garşysynda ýatýan BC katetiň AB gipotenuza bolan gatnaşygyna A burçuň sinusy diýilýär (sin *A* bilen belgilenýär we “sinus *A*” diýlip okalýar):

$$\sin A = \frac{BC}{AB}. \qquad (1)$$

A burça sepleşýän *AC* katetiň *AB* gipotenuza bolan gatnaşygyna *A* burçuň kosinusy diýilýär (cos *A* bilen belgilenýär we “kosinus *A*” diýlip okalýar):

$$\cos A = \frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

A burçuň garşysynda ýatýan *BC* katetiň bu burça sepleşýän *AC* katete bolan gatnaşygyna *A* burçuň tangensi diýilýär (tg *A* bilen belgilenýär we “tangens *A*” diýlip okalýar):

$$\text{tg}A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

(1) we (2) formulalary ulanyp alarys:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}.$$

Bu deňligi (3) deňlik bilen deňeşdirsek,

$$\mathrm{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad (4)$$

formulany alarys.

Burçuň tangensi şol burçuň sinusynyň şol burçuň kosinusyna bolan gatnaşygyna deňdir. Eger bir gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçy beýleki gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçuna deň bolsa, onda bu burçlaryň sinuslary deňdir, bu burçlaryň kosinuslary deňdir we bu burçlaryň tangensleri deňdir.

Bu tassyklamany subut edeliň. Goý, ΔABC – C burçy göni bolan, $\Delta A_1B_1C_1$ – D_1 burçy göni bolan gönüburçly üçburçluklar hem-de olaryň A we A_1 ýiti burçlary deň bolsunlar. $\angle A = \angle A_1$ bolany üçin ABC we $A_1B_1C_1$ gönüburçly üçburçluklar meňzeşdirler. Şoňa görä-de $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Bu deňliklerden $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, ýagny $\sin A = \sin A_1$ deňligi alarys. Şuňa meňzeşlikde $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, ýagny $\cos A = \cos A_1$ we $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, ýagny $\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} A_1$ deňlikleri alarys.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad (5)$$

deňligiň dogrulugyny subut edeliň, (1) we (2) formulalary ulanyp alarys:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

Pifagoryň teoremasy boýunça $BC^2 + AC^2 = AB^2$, şoňa görä-de

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

(5) deňlige esasy trigonometrik („*trigonometriya*” grek sözi bolup, türkmençä terjime edilende „*üçburçlugy ölçemegi*” aňladýar) toždestwo diýilýär.

§ 9. 30°, 45° we 60° burçlar üçin sinusyň, kosinusyň we tangensiň bahalary

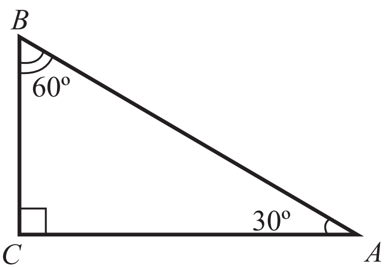
Ilki bilen 30° we 60° burçlar üçin sinusyň, kosinusyň we tangensiň bahalaryny tapalyň. Munuň üçin $\angle A=30°$ we $\angle B=60°$ bolan C gönüburçly ABC üçburçluga seredeliň (*24-nji surat*).

30° burçuň garşysynda ýatan katet gipotenuzanyň ýarysyna deňdir, ýagny $BC{:}AB = 0{,}5$. Emma $BC{:}AB = \sin A = \sin 30°$. Şeýle hem $BC{:}AB = \cos B = \cos 60°$.

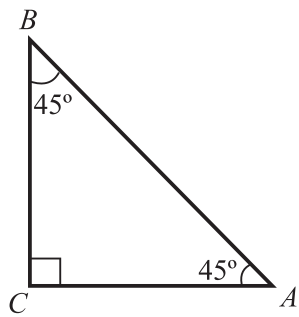
Diýmek, $\sin 30° = 0{,}5$, $\cos 60° = 0.5$. Esasy trigonometrik toždestwony ulanyp alarys:

$$\cos 30° = \sqrt{1-\sin^2 30°} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 60° = \sqrt{1-\cos^2 60°} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



24-nji surat



25-nji surat

(4) formulany ulanyp alarys:

$$\operatorname{tg}30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \operatorname{tg}60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

Indi $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg}45°$ tapalyň. Onuň üçin C burçy göni bolan ABC deňýanly gönüburçluga seredeliň (*25-nji surat*). Bu üçburçlukda $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. Pifagoryň teoremasyny ulanyp $AB^2 = AC^2+BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$ alarys.

Soňky deňlikde $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ gelip çykýar.

$$\sin 45^\circ = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Diýmek, $$\cos 45^\circ = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg} 45^\circ = \mathrm{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1.$$

30°, 45°, 60° bolan α burçlar üçin $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ bahalarynyň tablisasyny düzeliň.

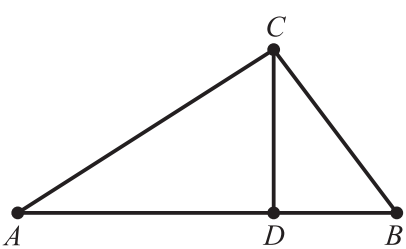
α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$

§ 10. Üçburçlugyň deňsizligi

Eger A we B nokatlar dürli bolsa, onda olaryň arasyndaky uzaklyga AB **kesimiň uzynlygy** diýilýär. Eger A we B nokatlar gabat gelse, onda olaryň arasyndaky uzaklyk nola deňdir diýip kabul edilýär.

Üçburçlugyň deňsizligi diýip, aşakdaky teorema bilen aňladylýan üç nokadyň arasyndaky uzaklygyň häsiýetine aýdylýar.

TEOREMA. Üç nokat nähili bolsa-da, şol nokatlaryň islendik ikisiniň arasyndaky uzaklyk olardan üçünji nokada çenli uzaklyklaryň jeminden uly däldir.



26-njy surat

Subudy. Goý, A, B, C – berlen üç nokat bolsun (*26-njy surat*). Eger üç nokadyň ikisi ýa-da üç nokadyň hemmesi gabat gelse, onda teoremanyň tassyklamasy aýdyňdyr. Eger hemme nokat dürli we bir göni çyzygyň üstünde ýatýan bolsa, onda olaryň biri meselem *B*, beýleki ikisiniň arasynda ýatýar. Şol halda $AB + BC = AC$. Bu ýerden üç uzaklygyň her biriniň beýleki ikisiniň jeminden uly däldigi görünýär.

Goý, indi nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatmasynlar. $AB < AC+BC$ bolýandygyny subut edeliň. *AB* göni çyzyga *CD* perpendikulýar indereliň. Gönüburçly üçburçlukda katetiň gipotenuzadan kiçidigi sebäpli, $AD < AC$, $BD < BC$.

Subut edilişi boýunça $AB = AD+DB$. Diýmek, $AB < AC + BC$. Teorema subut edildi.

Nokatlar bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan halynda üçburçlugyň deňsizliginiň berk deňsizlikdigini belläliň. Ol bolsa islendik üçburçlukda her bir tarap beýleki iki tarapyň jeminden kiçidir diýildigidir.

§ 11. Gönüburçly üçburçluk

Bilşimiz ýaly, eger üçburçlugyň göni burçy bar bolsa, onda oňa **gönüburçly üçburçluk** diýilýär. Üçburçlugyň burçlarynyň jeminiň 180^{o}-a deňdigi üçin gönüburçly üçburçlukda diňe bir burç gönüdir. Gönüburçly üçburçlugyň beýleki iki burçy ýitidir. Ýiti burçlar bir-birini 90^{o}-a çenli dolduryarlar. Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň garşysynda ýatan tarapyna **gipotenuza** diýilýär, beýleki iki tarapyna **katetler** diýilýär.

Gönüburçly üçburçluklar üçin bize mälim bolan üçburçluklaryň deňlikleriniň üç nyşanyndan başga, ýene-de nyşanlar bardyr. Ine, ol nyşanlar:

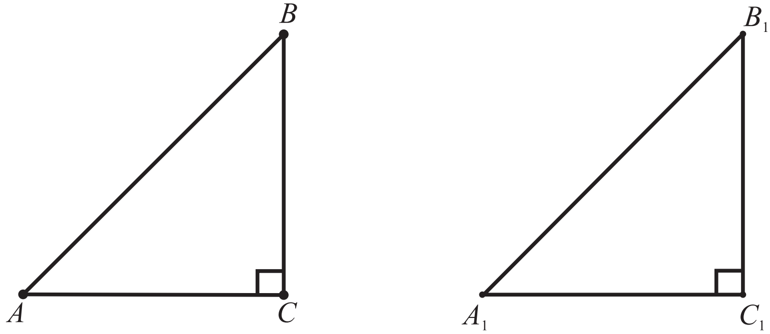
1. eger bir gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy we ýiti burçy degişlilikde beýleki gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna we ýiti burçuna deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler (gipotenuzasy we ýiti burçy boýunça deňlik nyşany);

2. eger bir gönüburçly üçburçlugyň kateti we onuň garşysynda ýatan burçy degişlilikde beýleki gönüburçly üçburçlugyň katetine we onuň garşysynda ýatan burçuna deň bolsa, onda şeýle üçburçluklar deňdirler (kateti we garşysynda ýatan burçy boýunça deňlik nyşany);

3. eger bir gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasy we kateti degişlilikde beýleki gönüburçly üçburçlugyň gipotenuzasyna we katetine deň bolsa, onda şonuň ýaly üçburçluklar deňdirler (gipotenuzasy we kateti boýunça deňlik nyşany).

Subudy. Goý, ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar – C we C_1 burçlary göni bolan gönüburçly üçburçluklar bolsun (*27-nji surat*), olar üçin aşakdaky şertleriň biri ýerine ýetýär:

1) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;
2) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;
3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.



27-nji surat

Üçburçluklaryň deňdigini subut edeliň.

Ilkinji iki nyşanyň subudy üçin eger $\angle A = \angle A_1$ bolsa, onda $\angle B = \angle B_1$ bolýandygyny bellemek ýeterlikdir. Şonda üçburçluklar iki halda hem üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça deňdirler.

Üçünji nyşany özbaşdak subut etmäge synanyşyň.

§ 12. Pifagoryň teoremasy

TEOREMA. Gönüburçly üçburçlukda gipotenuzanyň kwadraty katetleriň kwadratlarynyň jemine deňdir.

Subudy. Goý ABC – C burçy göni bolan gönüburçly üçburçluk bolsun (*28-nji surat*). C göni burçuň depesinden CD beýiklik geçireliň.

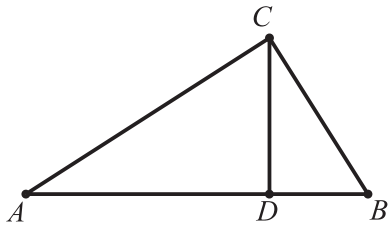
Burçuň kosinusynyň kesgitlemesi boýunça

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Bu ýerden $AB \cdot AD = AC^2$.

Şoňa meňzeşlikde

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$



28-nji surat

Bu ýerden $AB \cdot BD = BC^2$.

Alnan deňlikleri agzama-agza goşup we $AD + DB = AB$ bolýandygyny bilip, alarys:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD+DB) = AB^2, \; AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Teorema subut edildi.

Gönüburçly üçburçlukda katetleriň islendigininiň gipotenuzadan kiçidigi Pifagoryň teoremasyndan gelip çykýar. Bu ýerde, öz nobatynda, islendik α ýiti burç üçin $\cos \alpha < 1$ bolýandygy gelip çykýar.

Pifagoryň teoremasyndan aşakdaky gelip çykýar:

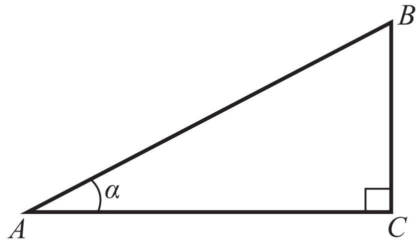
Eger göni çyzyga bir nokatdan perpendikulýar we ýapgyt çyzyklar geçirilen bolsa, onda ýapgyt çyzyklar perpendikulýardan uludyr, deň ýapgyt çyzyklaryň deň proýeksiýalary bardyr, iki ýapgyt çyzygyň haýsynyň proýeksiýasy uly bolsa, şol hem uludyr.

§ 13. Gönüburçly üçburçlukda taraplaryň we burçlaryň arasyndaky baglanyşyk

Goý, ABC – C gönüburçly we A depesindäki burçy α bolan gönüburçly üçburçluk bolsun (*29-njy surat*). α burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň kesgitlemelerini ýatlalyň.

α burçuň sinusy diýip, garşysynda ýatýan BC katetiň AB gipotenuza bolan gatnaşygyna aýdylýar:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$



29-njy surat

α burçuň kosinusy diýip, sepleşýän AC katetiň AB gipotenuza bolan gatnaşygyna aýdylýar:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

α burçuň tangensi diýip, garşysynda ýatýan BC katetiň sepleşýän AC katete bolan gatnaşygyna aýdylýar:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Bu üç sany deňlikden alarys:

$BC = AB \cdot \sin\alpha$; $AC = AB \cdot \cos\alpha$; $BC = AC \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Bu deňlikleri şeýle okamak bolar:

α burçuň garşysynda ýatýan katet gipotenuzanyň sinα köpeltmek hasylyna deňdir.

α burça sepleşýän katet gipotenuzanyň cosα köpeltmek hasylyna deňdir.

α burçuň garşysynda ýatýan katet ikinji katetiň tgα köpeltmek hasylyna deňdir.

Bu düzgünler gönüburçly üçburçlugyň taraplaryndan birini we ýiti burçuny bilip, beýleki iki tarapy tapmaga; iki tarapyny bilip, ýiti burçuny tapmaga mümkinçilik berýär.

§ 14. Gönüburçly üçburçlukda proporsional kesimler

Kesgitleme. Eger $a : x = x : b$ deňlik ýerine ýetýän bolsa, x kesime a we b kesimleriň arasyndaky orta proporsional (ýa-da orta geometrik) diýilýär.

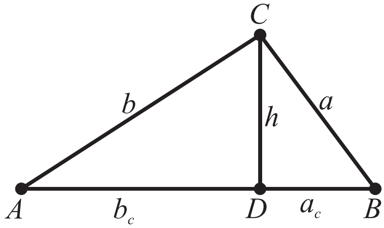
“Orta proporsional” ady $x = \sqrt{ab}$ sanyň $a : x = x : b$ proporsiýanyň orta agzasy bolýandygy bilen düşündirilýär.

TEOREMA. Gönüburçly üçburçlukda:

1) katet gipotenuza bilen bu katetiň gipotenuza bolan proýeksiýasynyň arasyndaky orta proporsionaldyr;

2) göni burçuň depesinden inderilen perpendikulýar katetleriň gipotenuza bolan proýeksiýalarynyň arasyndaky orta proporsionaldyr.

Subudy. Gönüburçly ABC üçburçluga garalyň (*30-njy surat*). C göni burçuň depesinden CD beýikligi geçireliň we CD-ni h harp bilen belgiläliň. Meňzeş üçburçluklaryň üç jübütini alarys:



30-njy surat

$\Delta ADC \sim \Delta ACB$ (A burç umumy, $\angle D = \angle C = 90^o$),

$\Delta ACB \sim \Delta CDB$ (B burç umumy, $\angle C = \angle D = 90^o$),

$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (meňzeş figuralaryň gatnaşygynyň tranzitiwlik häsiýeti boýunça).

$\Delta ADC \sim \Delta ACB$ bolýandygy sebäpli, $b_c : b = b : c$.

$\Delta ACB \sim \Delta CDB$ bolýandygy sebäpli, $c : a = a : a_c$.

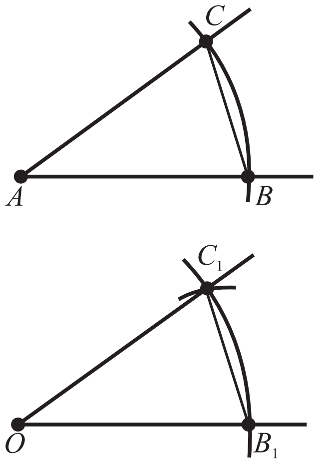
ADC we CDB üçburçluklaryň meňzeşliginden $b_c : h = h : a_c$ gelip çykýar.

§ 15. Sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmaga degişli meseleler

1. Sirkulyň we çyzgyjyň kömegi bilen gurmak.

Gurmaga degişli meselelerde gürrüň çyzgy gurallarynyň kömegi bilen geometrik figuralary gurmak barada gidýär. Şeýle gurallara çyzgyç we sirkul degişlidir. Meseläniň çözülişi diňe bir figurany gurmakdan däl-de, meseläni degişli subudy bilen nähili çözmelidiginden ybaratdyr. Eger figuranyň gurluş usullary görkezilen we görkezilen gurluşlaryň ýerine ýetmeginiň netijesinde hakykatdan-da talap edilen häsiýetdäki figuranyň alnandygy subut edilen bolsa, onda mesele çözülipdir diýip hasap edilýär.

Geometrik gurluşlaryň guraly hökmünde çyzgyjyň kömegi bilen berlen nokadyň üstünden geçýän erkin göni çyzygy geçirmek bolar. Çyzgyç bilen başga hiç hili operasiýany ýerine ýetirmek bolmaz. Hususan-da, hatda çyzgyjyň üstünde bölümleri bar hem bolsa, onuň bilen kesimleri alyp goýmak bolmaz. Sirkul geometrik gurluşlaryň



31-nji surat

guraly hökmünde berlen merkezden berlen radiusly töwerek çyzmaga mümkinçilik berýär. Hususan-da, sirkul bilen berlen göni çyzygyň üstünde berlen nokatdan berlen kesimi alyp goýmak bolar.

2. Berlen burça deň bolan burçy gurmak.

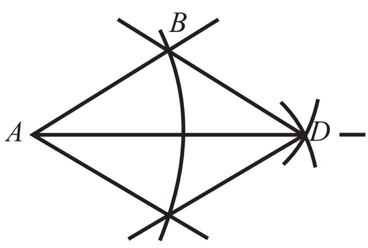
Mesele. Berlen ýarym göni çyzykdan berlen ýarym tekizlikde berlen burça deň bolan burçy alyp goýmaly.

Çözülişi. Berlen burçuň A depesinde merkezi bolan erkin töwerek geçireliň (*31-nji surat*). Goý, B we C – töweregiň burçuň taraplary bilen kesişme nokatlary bolsun. Merkezi O nokatda – berlen ýarym göni çyzygyň başlangyjynda bolan AB radiusly töwerek geçirýäris. Şol töweregiň berlen ýarym göni çyzyk bilen kesişme nokadyny B_1 bilen belgiläliň. B_1 merkezli we BC radiusly töwerek çyzýarys. Görkezilen ýarymtekizlikde gurlan töwerekleriň kesişýän C_1 nokady gözlenilýän burçuň tarapynyň üstünde ýatýar. Subut etmek üçin ABC we OB_1C_1 üçburçluklaryň degişli taraplary deň üçburçluklar hökmünde deňdiklerini bellemek ýeterlikdir. A we O burçlar şol üçburçluklaryň degişli burçlarydyr.

3. Burçuň bissektrisasyny gurmak.

Mesele. Berlen burçuň bissektrisasyny gurmaly.

Çözülişi. Merkez hökmünde, berlen burçuň A depesinden erkin radiusly töwerek çyzýarys (*32-nji surat*). Goý, B we C – onuň burçuň taraplary bilen kesişýän nokatlary bolsun. B we C nokatlardan hem şol radiusly töwerek çyzýarys. Goý, D-olaryň A nokatdan tapawutly kesişýän nokady bolsun. AD ýarym göni çyzyk geçirýäris. Ol BAC burçy ýarpa bölýär. Bu bolsa ABD we ACD üçburçluklaryň deňdiginden gelip çykýar, olarda DAB we DAC degişli burçlardyr.



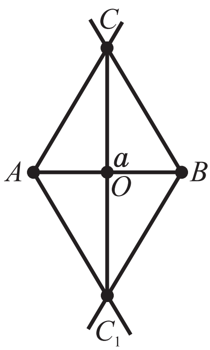
32-nji surat

4. Kesimi ýarpa bölmek.

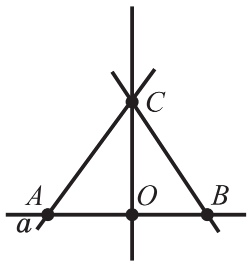
Mesele. Berlen kesimi ýarpa bölmeli.

Çözülişi. Goý, AB berlen kesim bolsun (*33-nji surat*). A we B nokatlardan AB radiusly töwerekleri çyzýarys. Goý, C we C_1 şol töwerekleriň kesişme nokatlary bolsun. Olar AB göni çyzyga görä dürli ýarymtekizliklerde ýatýarlar. CC_1 kesim AB göni çyzygy käbir O nokatda kesýär. Şol nokat hem AB kesimiň ortasydyr.

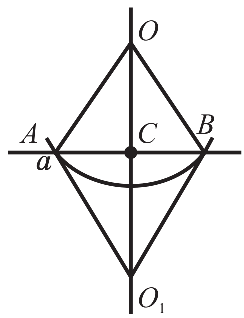
Hakykatdan-da, CAC_1 we CBC_1 üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça deňdirler. Bu ýerden ACO we BCO burçlaryň deňdigi gelip çykýar. ACO we BCO üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany boýunça deňdirler. Şeýlelikde, O nokat AB kesimiň ortasydyr.



33-nji surat



34-nji surat



35-nji surat

5. Perpendikulýar göni çyzyklary gurmak.

Mesele. Berlen O nokadyň üstünden geçýän berlen a göni çyzyga perpendikulýar göni çyzyk gurmaly.

Çözülişi. Iki halyň bolmagy mümkin:

1. O nokat a göni çyzygyň üstünde ýatýar (*34-nji surat*);

2. O nokat a göni çyzygyň üstünde ýatmaýar (*35-nji surat*).

Birinji hala garalyň. O nokatdan erkin radiusly töwerek geçirýäris. Ol a göni çyzygy A we B iki nokatda kesýär. A we B iki nokatdan AB radiusly töwerek geçirýäris. Goý, C olaryň kesişme nokady bolsun. Gözlenilýän göni çyzyk O we C nokatlaryň üstünden geçýär. OC we

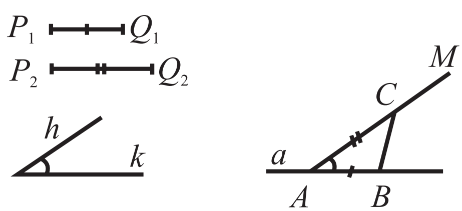
AB göni çyzyklaryň perpendikulýardygy ACO we BCO üçburçluklaryň O depesindäki burçlaryň deňdiginden gelip çykýar. Şol üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça deňdirler.

Ikinji hala garalyň. O nokatdan a göni çyzygy kesýän töwerek geçirýäris (*35-nji surat*). Goý, A we B töweregiň a göni çyzyk bilen kesişýän nokatlary bolsun. A we B nokatlardan şol radius bilen töwerekler geçirýäris. Goý, O_1 (olaryň kesişme nokady) nokat O nokadyň ýatan ýarymtekizliginden tapawutly bolan ýarymtekizlikde ýatýan bolsun. Gözlenilýän göni çyzyk O we O_1 nokatlaryň üstünden geçýär. Ony subut edeliň. AB we OO_1 göni çyzyklaryň kesişme nokadyny C bilen belgiläliň. AOB we AO_1B üçburçluklar üçünji nyşan boýunça deňdirler. Şoňa görä-de OAC burç O_1AC burça deňdir. Şonda OAC we O_1AC üçburçluklar birinji nyşan boýunça deňdirler. Diýmek, olaryň ACO we ACO_1 burçlary deňdir. Olar çatyk bolanlygy üçin olar gönüdirler. Şeýlelik bilen, OC – O nokatdan a göni çyzyga inderilen perpendikulýardyr.

6. Üç elementi boyunça üçburçluk gurmak.

1-nji mesele. Iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boyunça üçburçlugy gurmaly.

Çözülişi. Ilki bilen bu meselä nähili düşünmelidigini, ýagny nämeleriň berlendigini we nämäni gurmalydygyny anyklalyň. P_1Q_1, P_2Q_2 kesimler we hk burç (*36-njy surat*) berlipdir. Sirkulyň we masştabsyz çyzgyjyň kömegi bilen AB we AC taraplary berlen P_1Q_1 we P_2Q_2 kesimlere deň bolan, bu taraplaryň arasyndaky A burçy bolsa berlen hk burça deň bolan ABC üçburçlugy gurmak talap edilýär.



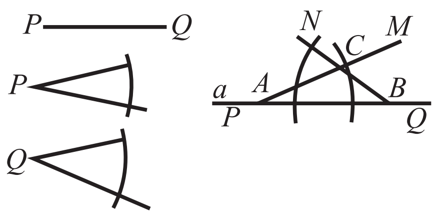
36-njy surat

a göni çyzygy geçirýäris we onda sirkulyň kömegi bilen P_1Q_1 kesime deň bolan AB tarapy alyp goýýarys (*36-njy surat*). Soňra berlen burça deň bolan burçy gurmagyň düzgüni boýunça hk burça deň bolan BAM burçy gurýarys. AM şöhlede P_2Q_2 kesime deň bolan AC tarapy sirkulyň kömegi bilen alyp goýýarys we BC kesimi geçirýaris. ABC – gözlenilýän üçburçluk.

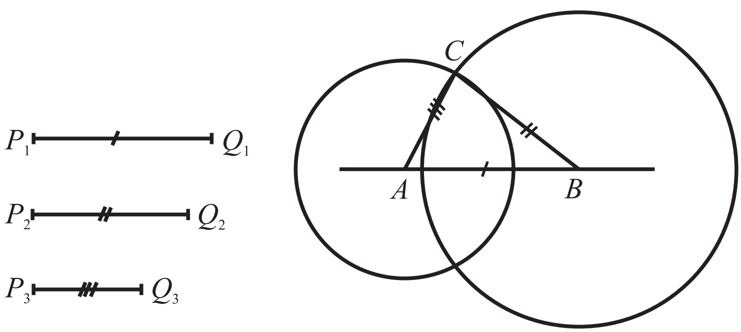
Dogrudan-da, gurluşy boýunça $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$. $\angle A = \angle hk$.

Eger hk ýazgyn däl burç we P_1Q_1, P_2Q_2 islendik uzynlykly kesimler bolsa, onda gözlenilýän üçburçlugy gurup bolar. Bu üçburçluk ýeketäkdir. Şoňa gorä-de bu meseläniň ýeke-täk çözüwi bar diýilýär.

2-nji mesele. Tarapy we oňa sepleşýän iki burçy boýunça üçburçluk gurmaly.



a)



b)

37-nji surat

Çözülişi. AB tarapa deň bolan PQ kesim hem-de ol tarapa sepleşýän A we B burçlara deň bolan P we Q burçlar berlipdir. ABC üçburçlugy gurmak talap edilýär (*37-nji a surat*).

a göni çyzygyň üstünde PQ kesime deň bolan AB tarapy alyp goýýarys. a göni çyzygyň bir tarapynda A nokatda berlen P burça deň MAQ burçy, B nokatda berlen Q burça deň bolan NBP burçy gurýarys. AM we BN şöhleleriň kesişme nokady üçünji C depe bolar.

Eger berlen tarapa sepleşýän burçlaryň jemi 180°-dan kiçi bolsa, onda meseläniň ýeke-täk çözüwi bar. Eger berlen tarapa sepleşýän burçlaryň jemi 180°-a deň ýa-da ondan uly bolsa, onda meseläniň çözüwi ýokdur.

3-nji mesele. Üç tarapy boýunça üçburçlugy gurmaly.

Çözülişi. P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 kesimler berlipdir. $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$ bolan ABC üçburçlugy gurmaly.

Göni çyzygy geçirýäris we onuň üstünde AB tarapa deň bolan P_1Q_1 kesimi alyp goýýarys. Soňra merkezi A nokatda we radiusy P_3Q_3 deň bolan, merkezi B nokatda we radiusy P_2Q_2 deň bolan iki töweregi gurýarys. Goý, C bu töwerekleriň kesişme nokatlarynyň biri bolsun (*37-nji surat*). AC we BC kesimleri geçirip, biz gözlenilýän ABC üçburçlugy alýarys. Bu meselede eger berlen kesimleriň biriniň uzynlygy beýleki ikisiniň uzynlyklarynyň jeminden uly ýa-da oňa deň bolsa, onda meseläniň çözüwi bolmaýar. Sebäbi bu ýagdaýda üçburçlugyň deňsizligi (üçburçlugyň islendik tarapy onuň beýleki iki taraplarynyň jeminden kiçi bolmaly) ýerine ýetmeýär.

II baba degişli gönükmeler

1. Deňýanly üçburçlugyň burçlarynyň biri 70°-a deň. Beýleki burçlaryny tapyň. Meseläniň näçe çözüwi bar?

2. Parallel göni çyzyklarda alynýan iki sany birtarap burçuň bissektrisalary nähili burç bilen kesişýärler.

3. Üçburçlugyň iki depesindäki daşky burçlarynyň 120° we 150° deňdigini bilip, onuň burçlaryny tapyň.

4. Deňtaraply ABC üçburçlugyň AD medianasy geçirilipdir. ABD üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

5. Üçburçlugyň islendik tarapynyň onuň beýleki iki tarapynyň tapawudyndan uludygyny subut ediň.

6. Üçburçlugyň bir tarapy 1,9 *m*, beýlekisi bolsa 0,7 *m*-e deň. Perimetri 5 *m* deň. Üçünji tarapyň uzynlygyny tapyň.

7. Aşakdaky ýaly taraplary bolan üçburçlugy gurup bolarmy? 1) $a = 1$ *sm*, $b = 2$ *sm*, $c = 30$ *sm*; 2) $a = 2$ *sm*, $b = 3$ *sm*, $c = 4$ *sm*; 3) $a = 3$ *sm*, $b = 7$ *sm*, $c = 11$ *sm*; 4) $a = 4$ *sm*, $b = 5$ *sm*, $c = 9$ *sm*?

8. Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň gatnaşygy 19:28. Onuň burçlaryny tapyň.

9. Deňýanly gönüburçly üçburçlugyň esasy a. Gapdal tarapyny tapyň.

10. Berlen üçburçlugyň içinden iki depesi onuň bir tarapynda ýatýan, beýleki iki depesi beýleki iki tarapynda ýatýan kwadrat çyzyň.

11. Gönüburçly üçburçlugyň göni burçunyň depesinden inderilen beýikligiň ony özüne meňzeş iki sany üçburçluga bölýändigini subut ediň.

12. ABC üçburçlugyň AB tarapyna parallel göni çyzyk onuň AC tarapyna C depeden hasaplap, $m:n$ gatnaşykda bölýär. Ol BC tarapy nähili gatnaşykda bölýär?

13. ABC üçburçlukda AC tarapa parallel DE kesim geçirilipdir (kesimiň D ujy AB tarapda, E ujy BC tarapda ýatýar). Eger $AB = 16$ *sm*, $AC = 20$ *sm* we $DE = 15$ *sm* bolsa, AD tapyň.

14. Eger käbir göni çyzyk parallel iki göni çyzygyň birini kesýän bolsa, onda onuň beýlekisini hem kesýändigini subut ediň.

15. ABC üçburçluk berlipdir. AB tarapyň üstünde B_1 nokat, AC tarapyň üstünde bolsa C_1 nokat bellenipdir. AB, AC göni çyzyklaryň we B_1C_1 kesiji göni çyzygyň içki birtarap we içki atanak ýatan burçlaryny aýdyň.

16. AB göni çyzyk we şol göni çyzygyň üstünde ýatmaýan C nokat berlipdir. C nokadyň üstünden AB göni çyzyga parallel bolan göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.

17. Parallel we kesiji göni çyzyklaryň emele getiren içki atanak ýatan burçlarynyň bissektrisalarynyň paralleldiklerini, ýagny parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatýandyklaryny subut ediň.

18. Eger deňýanly üçburçlugyň esasyndaky burç: 1. 40°; 2. 55°; 3. 72° bolsa, onuň gapdal taraplarynyň arasyndaky burçy tapyň.

19. Deňýanly üçburçlugyň burçlarynyň biri 70°. Beýleki burçlaryny tapyň. Meseläniň näçe çözüwi bar?

20. ABC üçburçluk berlipdir. AC tarapyň dowamynyň üstünde $AD=AB$ we $CE=CB$ kesimler alnyp goýlupdyr, ABC üçburçlugyň burçlaryny bilip, DBE üçburçlugyň burçlaryny nähili tapmaly?

21. ABC üçburçlukda BD mediana geçirilipdir. ABD üçburçlugyň burçlaryny tapyň.

22. *a* göni çyzyk *BC* kesimiň ortasyndan kesýär. *B* we *C* nokatlaryň *a* göni çyzykdan birdeň uzaklykda ýerleşýändiklerini subut ediň.

23. Göni çyzygyň islendik iki nokadyndan parallel göni çyzyga çenli uzaklyklaryň deňdigini subut ediň.

24. 1) *c* gipotenuzasy we *b* kateti boýunça; 2) *a* we *b* katetleri boýunça; 3) *a* kateti we sepleşýän β ýiti burçy boýunça; 4) *c* gipotenuzasy we α ýiti burçy boýunça; b) *a* kateti we gipotenuza geçirilen *h* beýikligi boýunça gönüburçly üçburçluk guruň.

25. 1) *b* gapdal tarapy we şol tarapa geçirilen *h* beýikligi boýunça; 2) *a* esasy we gapdal taraplarynyň birine geçirilen *h* beýikligi boýunça gönüburçly üçburçlugy guruň.

26. Eger gönüburçly üçburçlugyň kateti we uzynlygy beýleki kateti bilen gipotenuzasynyň uzynlyklarynyň jemine deň kesim berlen bolsa, onda şol üçburçlugy guruň.

27. 1) Ýiti burçuň içinde *M* nokat alnan *K* we *L* depeleri berlen burçuň taraplarynyň üstünde ýatan iň kiçi perimetrli *KLM* üçburçlugy guruň.

2) *a* göni çyzyk we $A \in a$, $B \notin a$ nokatlar berlen. *AX* we *XB* uzaklyklaryň jemi berlen kesimiň uzynlygyna deň bolar ýaly edip, *a* göni çyzygyň üstünde *X* nokady guruň.

28. *a* we *b* kesimler berlipdir. 1) $\sqrt{a^2 - b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$; $a>b$ kesimleri nähili gurmaly?

29. *a* we *b* kesimler berlipdir. $x = \sqrt{ab}$ kesimi nähili gurmaly?

30. *ABC* üçburçlugyň *AB* tarapynda *X* nokat alnypdyr. *CX* tarapyň *AC* ýa-da *BC* taraplaryň iň bolmanda birinden kiçidigini subut ediň.

31. Üçburçlugyň taraplaryndaky islendik iki nokadynyň arasyndaky uzaklygyň onuň taraplarynyň iň ulusyndan uly däldigini subut ediň.

32. 4 *sm* we 7 *sm* taraplary bolan parallelogramyň biri 2 *sm*-e deň bolup bilermi?

33. Üçburçlugyň bir tarapy 3 *m*, beýlekisi bolsa 0,7 *m*-e deň. Üçünji tarapyň uzynlygynyň bu iki tarapyň jeminden 2 esse uludygyny bilip, ony tapyň.

34. *ABC* üçburçlugyň *A* depesinden geçirilen medianasynyň *AB* we *AC* taraplaryň ýarym jeminden kiçidigini subut ediň.

35. Dörtburçlugyň diagonallarynyň kesişýändikleri belli. Olaryň uzynlyklarynyň jeminiň dörtburçlugyň perimetrinden kiçidigini, ýöne ýarym perimetrinden uludygyny subut ediň.

36. Üçburçlugyň her bir tarapynyň perimetriň ýarysyndan kiçidigini subut ediň.

37. *R* radiusly töweregiň içinde merkezden *d* uzaklykda nokat alnypdyr. Bu nokatdan töweregiň nokatlaryna çenli iň uly we iň kiçi uzaklyklary tapyň.

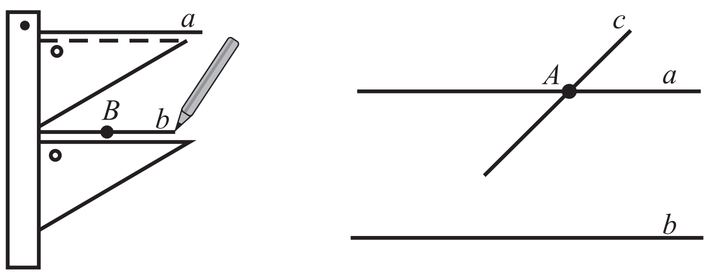
III BAP

PARALLEL GÖNI ÇYZYKLAR

§1. Parallel göni çyzyklar we olaryň häsiýeti

Eger tekizlikde iki göni çyzyk kesişmeýän bolsa, onda olara **parallel göni çyzyklar** diýilýär. Şonda göni çyzyklar iki tarapa hem çäksiz dowam edendirler diýip hasaplaýarlar.

38-nji suratda burçlugyň we çyzgyjyň kömegi bilen berlen *B* nokadyň üstünden berlen *a* göni çyzyga parallel bolan göni çyzygy hähili geçirmelidigi görkezilendir.



38-nji surat

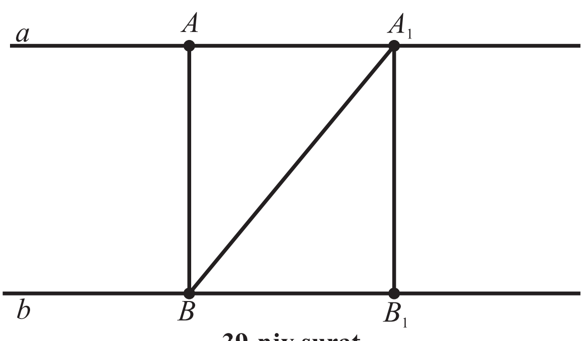
Göni çyzyklaryň parallelliklerini belgilemek üçin || belgi peýdalanylýar. $a \parallel b$ ýazgy şeýle okalýar: “*a* göni çyzyk *b* göni çyzyga paralleldir”.

Parallel göni çyzyklaryň esasy häsiýeti aşakdakydan ybaratdyr:

Tekizlikde berlen göni çyzykda ýatmaýan nokadyň üstünden berlen göni çyzyga parallel bolan birden köp bolmadyk göni çyzyk geçirip bolar.

Mesele. Göni çyzygyň islendik iki nokadyndan oňa parallel göni çyzyga çenli uzaklyklaryň deňdigini subut edeliň.

Çözülişi. Goý, a we b parallel göni çyzyklar bolsun (*39-njy surat*). a göni çyzygyň üstünde A we A_1 iki nokady belläliň we olardan b göni çyzyga AB we A_1B_1 perpendikulýarlary indereliň. ABA_1 we B_1A_1B gönüburçly üçburçluklar gipotenuzasy we ýiti burçy boýunça deňdirler. Olarda BA_1 gipotenuza umumy, AA_1B we B_1BA_1 ýiti burçlar bolsa a we b parallel göni çyzyklaryň we BA_1 kesiji göni çyzygyň içki atanak ýatan burçlary hökmünde deňdirler. Dogrudan-da, ol burçlar ýa-ha içki atanak ýatan, ýa-da içki birtarap burçlar. Olar içki birtarap burçlar bolup bilmezler, sebäbi bu ýiti burçlar jeminde 180°-y bermeýärler. Üçburçluklaryň deňliginden AB we A_1B_1 taraplaryň deňdigi, ýagny a göni çyzygyň A we A_1 nokatlaryndan b göni çyzyga çenli uzynlyklarynyň deňdigi gelip çykýar.



39-njy surat

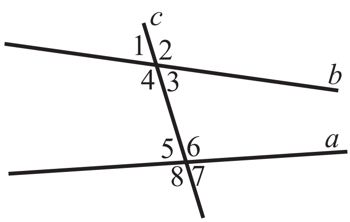
Görşümiz ýaly, göni çyzygyň ähli nokatlaryndan parallel göni çyzyga çenli uzaklyklary deňdirler. Şoňa görä-de parallel göni çyzyklara deňdaşlykda duran göni çyzyklar diýýärler. **Parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyk** diýip, bir göni çyzygyň haýsy bolsa-da bir nokadyndan beýleki göni çyzyga çenli uzaklyga aýdylýar.

Parallel göni çyzyklary şeýle-de gurmak bolar. Göni çyzyk we oňa degişli bolmadyk dürli iki nokat alýarys. Ol nokatlardan berlen gönä perpendikulýar göni çyzyklary geçirýäris. Perpendikulýar göni çyzyklaryň üstünde berlen göni çyzykdan bir tarapda ýatýan deň kesimleri alyp goýýarys. Şol kesimleriň uçlaryndan göni çyzyk geçirýäris. Alnan göni çyzygyň hemme nokatlary berlen göni çyzykdan deň uzaklykda ýatýarlar, diýmek ol berlene parallel göni çyzykdyr.

§2. Iki göni çyzygyň parallellik nyşanlary

a we ***b*** göni çyzyklaryň kesiji çyzygy diýlip, olary iki nokatda kesýän *c* göni çyzyga aýdylýar. ***a*** we ***b*** göni çyzyklar *c* kesiji göni çyzyk bilen kesişende emele gelen 8 burçuň ýörite atlary bardyr *(40-njy surat).*

3 we 5, 4 we 6 atanak ýatýan burçlar.
4 we 5, 3 we 6 birtaraplaýyn burçlar.
1 we 5, 4 we 8, 2 we 6, 3 we 7 degişli burçlar.

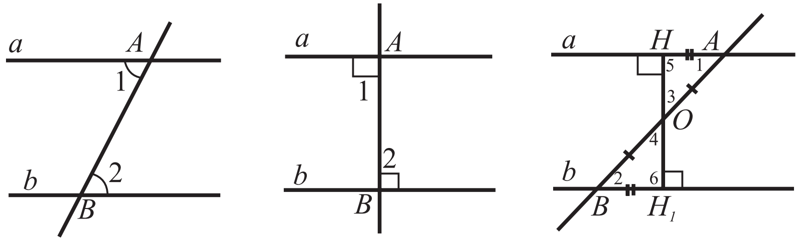


40-njy surat

Iki göni çyzygyň parallelliginiň bu burçlaryň jübütleri bilen baglanyşykly üç nyşanyna garap geçeliň.

TEOREMA (I nyşan). Eger iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip geçende alynýan atanak ýatýan burçlar deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.

Subudy. Goý, *a* we *b* göni çyzyklar *AB* kesiji göni çyzyk bilen kesişende alynýan $\angle 1$ we $\angle 2$ atanak ýatýan burçlar deň bolsun (*41-nji surat*). $a||b$ bolýandygyny subut edeliň.



41-nji surat

Eger 1 we 2 göni burçlar bolsalar, onda a we b göni çyzyklar AB kesiji göni çyzyga perpendikulýardyrlar. Diýmek, olar özara paralleldirler. 1 we 2 burçlaryň göni burç däl ýagdaýyna seredeliň. AB kesimiň ortasy bolan O nokatdan a tarapa OH perpendikulýar geçireliň. b göni çyzygyň üstünde B nokatdan AH kesime deň bolan BH_1 kesimi alyp goýalyň we OH_1 kesimi geçireliň. OHA we OH_1B üçburçluklar iki tarapy we olaryň arasyndaky burçy boýunça ($AO = BO$, $AH = BH_1$ $\angle 1 = \angle 2$) deňdirler. Bu ýerden $\angle 3 = \angle 4$ we $\angle 5 = \angle 6$ alynýar. $\angle 3 = \angle 4$ deňlikden (wertikal burçlar) H_1 nokadyň OH şöhläniň üstünde ýatýanlygy gelip çykýar. $\angle 5 = \angle 6$ we $\angle 5$ burçuň göni burçlugy üçin *6* burçuň göni burçlugy gelip çykýar. Diýmek, a we b göni çyzyklar HH_1 göni çyzyga perpendikulýar, şoňa görä-de $a \| b$. Teorema subut edildi.

TEOREMA (II nyşan). Eger iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip geçende alynýan degişli burçlar deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.

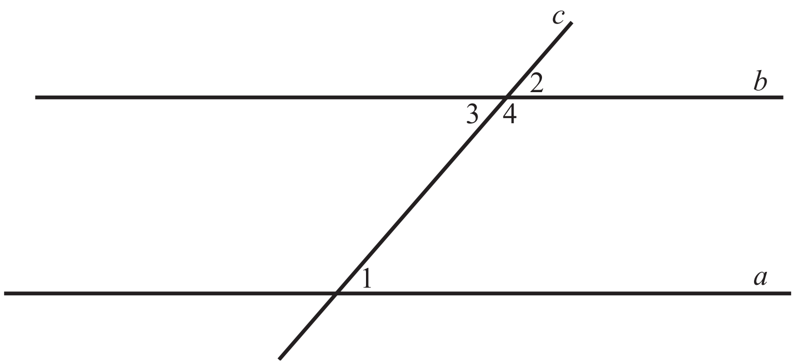
Subudy. Goý, a we b göni çyzyklar kesiji c göni çyzyk bilen kesilende alnan **1** we **2** degişli burçlar deň bolsunlar.

2 we **3** wertikal burçlar bolany $\angle \mathbf{2} = \angle \mathbf{3}$. $\angle \mathbf{1} = \angle \mathbf{2}$ we $\angle \mathbf{2} = \angle \mathbf{3}$ deňliklerden $\angle \mathbf{1} = \angle \mathbf{3}$ alynýar. Emma **1** we **3** atanak ýatýan burçlardyr, şoňa görä-de ***a*** we ***b*** göni çyzyklar (parallelligiň birinji nyşanyna görä) paralleldirler. Teorema subut edildi.

TEOREMA (III nyşan). Eger iki göni çyzyk üçünji c göni çyzyk bilen kesişende alnan birtaraplaýyn burçlaryň jemi 180°-a deň bolsa, onda ol göni çyzyklar paralleldirler.

Subudy. Goý, ***a*** we ***b*** göni çyzyklar kesiji ***c*** göni çyzyk bilen kesilende alnan birtaraplaýyn burçlaryň jemi **180°**-a deň bolsun.

Meselem, $\angle \mathbf{1} + \angle \mathbf{4} = \mathbf{180°}$ (*42-nji surat*). $\angle$**3 we** $\angle$**4** çatyk burçlar bolany üçin $\angle \mathbf{3} + \angle \mathbf{4} = \mathbf{180°}$**.** Bu iki deňlikden $\angle \mathbf{1} = \angle \mathbf{3}$ gelip çykýar. Diýmek, atanak ýatýan **1** we **3** burçlar deň, onda ***a***||***b***. Teorema subut edildi.



42-nji surat

Iki parallel göni çyzygyň kesiji göni çyzyk bilen emele getirýän burçlary hakyndaky teoremalara hem seredeliň (*42-nji surat*). Bu teoremalar ýokarky üç teorema ters bolan teoremalardyr.

Eger parallel iki göni çyzyk üçünji göni çyzyk bilen kesilse, onda: 1) atanak ýatýan burçlar deňdirler; 2) degişli burçlar hem deňdirler; 3) içki birtaraplaýyn burçlaryň jemi bolsa 180°-a deňdir;

Bu teoremalary özbaşdak subut ediň.

Tekizlikde göni çyzygyň deňlemesi $ax + by + c = 0$ görnüşde berilýär.

Goý, bize $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ we $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ deňlemeler bilen iki göni çyzyk berlen bolsun.

Eger $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ bolsa, onda bu göni çyzyklar paralleldirler.

Eger-de göni çyzyklar $y = k_1x + b_1$ we $y_2 = k_2x + b_2$ görnüşli deňlemeler bilen berlen bolsalar, onda olaryň parallellik şerti: $k_1 = k_2$.

KÖPBURÇLUKLAR WE OLARYŇ MEÝDANLARY

§1. Döwük çyzyk

$A_1A_2A_3 \dots A_n$ döwük çyzyk diýip, $A_1, A_2, \dots, A_n$ nokatlardan we olary birleşdirýän $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ kesimlerden ybarat bolan figura aýdylýar. $A_1, A_2, \dots, A_n$ nokatlara döwük çyzygyň depeleri, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ kesimlere bolsa döwük çyzygyň **düzüjileri** diýilýär. Eger döwük çyzyk özüni kesmeýän bolsa, onda oňa ýönekeý döwük çyzyk diýilýär. Döwük çyzygyň uzynlygy diýip, onuň düzüjileriniň uzynlyklarynyň jemine aýdylýar.

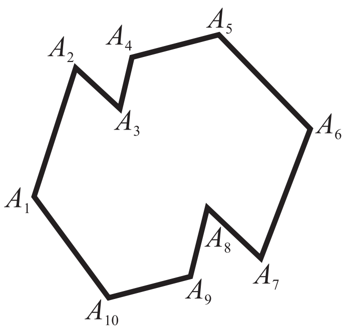
TEOREMA. Döwük çyzygyň uzynlygy onuň uçlaryny birleşdirýän kesimiň uzynlygyndan kiçi däldir.

Subudy. Goý, $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – berlen döwük çyzyk bolsun. Döwük çyzygyň A_1A_2 we A_2A_3 düzüjilerini A_1A_3 bir düzüji bilen çalşalyň. $A_1A_3A_4 \dots A_n$ döwük çyzyk alarys. Üçburçlugyň deňsizligi boýunça onuň uzynlygy başdaky döwük çyzygyň uzynlygyndan uly däldir. Şunuň ýaly usul bilen A_1A_3 we A_3A_4 düzüjileri A_1A_4 düzüji bilen çalşyryp, $A_1A_4A_5 \dots A_n$ döwük çyzyga geçeris, bu döwük çyzygyň uzynlygy hem başdaky döwük çyzygyň uzynlygyndan uly däldir. Soňra hem şonuň ýaly etmek bolar. Ahyrsoňunda biz döwük çyzygyň uçlaryny birleşdirýän A_1A_n kesime geleris. Bu ýerden başdaky döwük çyzygyň uzynlygynyň A_1A_n kesimiň uzynlygyndan kiçi däldigi gelip çykýar. Teorema subut edildi.

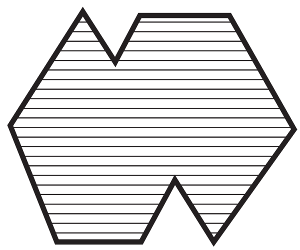
§2. Güberçek köpburçluklar

Eger döwük çyzygyň uçlary gabat gelýän bolsa, onda oňa *ýapyk döwük çyzyk* diýilýär. Eger ýönekeý ýapyk döwük çyzygyň goňşy düzüjileri bir göni çyzygyň üstünde ýatmaýan bolsa, onda oňa **köpburçluk** diýilýär (*43-nji surat*). Döwük çyzygyň depelerine **köpburçlugyň depeleri**, döwük çyzygyň düzüjilerine bolsa, *köpburçlugyň taraplary* diýilýär. Köpburçlugyň goňşy däl depeleri birleşdirýän kesimlerine *diagonallary* diýilýär. n depeli, diýmek n taraply köpburçluga n – burçluk diýilýär.

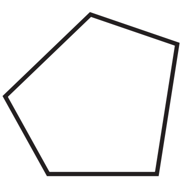
Tekiz köpburçluk ýa-da köpburçly ýaýla diýip, tekizligiň köpburçluk bilen çäklenen tükenikli bölegine aýdylýar (*44-nji surat*).

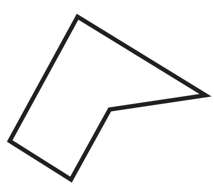


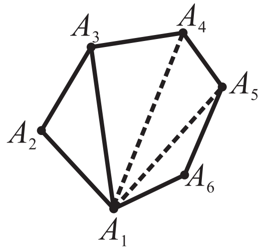
43-nji surat


44-nji surat

Eger köpburçluk bir tarapyny saklaýan islendik göni çyzyga görä bir ýarymtekizlikde ýatan bolsa, onda *güberçek köpburçluk* diýilýär. Şonda göni çyzygyň özi ýarymtekizlige degişli hasap edilýär. 45-nji suratda güberçek köpburçluk, 46-njy suratda bolsa güberçek däl köpburçluk şekillendirilendir. Güberçek köpburçlugyň berlen depesindäki *burçy* diýip, onuň şol depeden çykýan taraplary bilen emele getirilen burça aýdylýar.


45-nji surat


46-njy surat



47-nji surat

§3. Güberçek köpburçlugyň içki we daşky burçlary

TEOREMA. Güberçek n – burçlugyň burçlarynyň jemi $180° \cdot (n-2)$ deňdir.

Subudy. Goý, P: $A_1A_2 \dots A_n$ – berlen güberçek köpburçluk bolsun (*47-nji surat*). A_1A_3 diagonaly geçireliň. $A_1A_2A_3$ üçburçluk we $n-1$ depeli P_1: $A_1\ A_3 \dots A_n$ köpburçluk alarys. P köpburçlugyň A_1 we A_3 depelerindäki burçlary P_1 köpburçlugyň we $A_1A_2A_3$ üçburçlugyň şol depelerdäki burçlarynyň jemine deňdir. Bu ýerden P köpburçlugyň burçlarynyň jeminiň P_1 köpburçlugyň burçlarynyň jemine we plýus $A_1A_2A_3$ üçburçlugyň burçlarynyň jemine (ýagny180^o) deňdigi gelip çykýar. Soňra şunuň ýaly usul bilen P_1 köpburçlugyň burçlarynyň jemi P_2 : $A_1A_4 \dots A_n$ köpburçlugyň burçlarynyň jemi we plýus 180^o deň diýip netije çykarýarys. Diýmek, köpburçlugyň burçlarynyň jemi P köpburçlugyň burçlarynyň jemine we plýus $180° \cdot 2$ deňdir.

Şunuň ýaly usul bilen dowam edip, $(n-3)$ ädimde biz $A_n\ A_{n-1}\ A_n$ üçburçluga gelýäris.Onuň burçlarynyň jemi bolsa 180°-a deň. Netijede, P köpburçlugyň burçlarynyň jemi $180°(n-3) + 180° = 180°(n-2)$ deňdir. Teorema subut edildi.

Güberçek köpburçlugyň *daşky burçy* diýip, köpburçlugyň şol depedäki içki burçuna çatyk bolan burçuna aýdylýar.

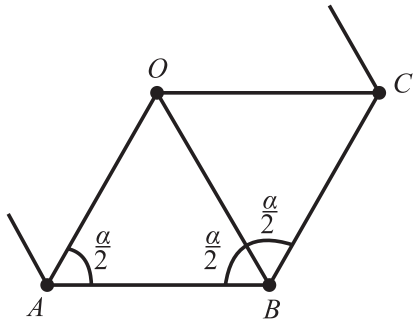
§4. Dogry köpburçluklar

Eger güberçek köpburçlugyň ähli taraplary we ähli burçlary deň bolsa, onda oňa **dogry güberçek köpburçluk** diýilýär.

Eger köpburçlugyň ähli depeleri käbir töweregiň üstünde ýatan bolsa, onda oňa **töweregiň içinden çyzylan köpburçluk** diýilýär. Eger köpburçlugyň ähli taraplary käbir töwerege galtaşýan bolsa, onda oňa töweregiň daşyndan çyzylan köpburçluk diýilýär.

TEOREMA. Dogry güberçek köpburçlugyň içinden we daşyndan töwerek çyzyp bolar.

Subudy. Goý, A we B – köpburçlugyň iki goňşy depesi bolsun (*48-nji surat*). A we B depelerden köpburçlugyň burçlarynyň bissektrisalaryny geçireliň. Goý, O – olaryň kesişme nokady bolsun. AOB üçburçluk AB esasly we esasdaky burçlary $\frac{\alpha}{2}$ bolan deňýanly üçburçlukdyr, bu ýerde α – köpburçlugyň burçy. O nokady B bilen goňşy bolan C depe bilen birleşdireliň. Üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşany boýunça ABO we CBO üçburçluklar deňdir.

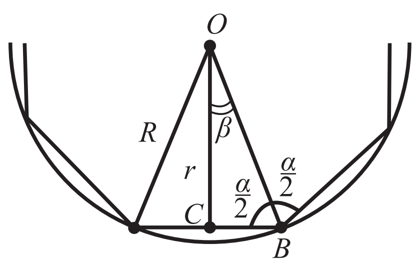


48-nji surat

Olaryň OB tarapy umumy, AB we BC taraplary köpburçlugyň taraplary hökmünde deňdirler, B depedäki burçlary bolsa $\frac{\alpha}{2}$-a deňdir. Üçburçluklaryň deňliginden OBC üçburçlugyň C depedäki burçy $\frac{\alpha}{2}$ bolan deňýanly üçburçlukdygy gelip çykýar, ýagny CO – C burçuň bissektrisasydyr.

Indi O nokady C depä goňşy bolan D depe bilen birleşdireliň we COD üçburçlugyň deňýanly üçburçlukdygyny hem-de DO-nyň köpburçlugyň D burçunyň bissektrisasydygyny subut etmeli. Soňra galanlary hem şonuň ýaly subut edilýär. Netijede, bir tarapy köpburçlugyň tarapy, garşysynda ýatan depesi O nokat bolýan her bir üçburçlugyň deňýanly üçburçlukdygy alynýar. Bu üçburçluklaryň hemmesiniň deň gapdal taraplary bar. Bu ýerden köpburçlugyň hemme depesiniň O merkezli we R radiusly töweregiň üstünde ýerleşýändigi, köpburçlugyň hemme taraplarynyň bolsa O merkezli we radiusy üçburçluklaryň O depeden geçirilen beýikliklerine deň bolan töwerege galtaşýandygy gelip çykýar. Teorema subut edildi.

a taraply we taraplarynyň sany n bolan dogry köpburçluk üçin daşyndan çyzylan töweregiň R radiusyny, içinden çyzylan töweregiň r radiusyny tapalyň (*49-njy surat*). Alarys:



49-njy surat

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{(n-2)180^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};\ r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Dogry (deň taraply) üçburçluk üçin $n = 3$, $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$;

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}};\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Dogry dörtburçluk (kwadrat üçin) $n = 4$, $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$;

$$R = \frac{\alpha}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}};\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

Dogry altyburçluk üçin $n = 6$; $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$;

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a;\ r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

§5. Käbir dogry köpburçluklaryň gurluşy

Töweregiň içinden çyzylan dogry köpburçlugy çyzmak üçin onuň merkezi burçuny gurmak ýeterlikdir. Dogry altyburçlukda şeýle burç $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Şoňa görä-de dogry altyburçlugy gurmak üçin töwerekde bir depäni (A) erkin alýarys. Ondan merkez hökmünde töweregiň radiusyna deň radius bilen bellik edýäris we A_2 depäni alýarys. Soňra şoňa meňzeşlikde beýleki A_3, A_4, A_5, A_6 depeleri gurýarys we olary kesimler bilen birleşdirýäris.

Içinden çyzylan dogry üçburçlugy gurmak üçin içinden çyzylan dogry altyburçlugyň depelerini depeaşa birikdirmeli.

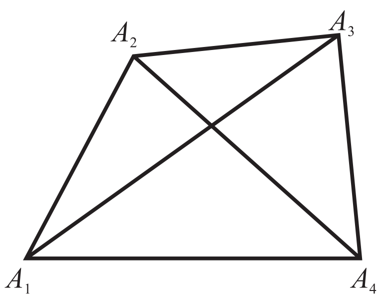
Içinden çyzylan dogry dörtburçlygy (kwadraty) gurmak üçin töweregiň merkezi arkaly perpendikulýar göni çyzyklary geçirmek ýeterlikdir. Olar töweregi kwadratyň depelerinde keserler.

Daşyndan çyzylan dogry köpburçluk gurmak üçin içinden çyzylan dogry köpburçlugyň depelerinden töwerege galtaşýan göni çyzyklar geçirmek ýeterlikdir. Içinden çyzylan dogry köpburçlugyň depeleri arkaly geçýän galtaşýan göni çyzyklar daşyndan çyzylan dogry köpburçlugyň depelerinde kesişýärler.

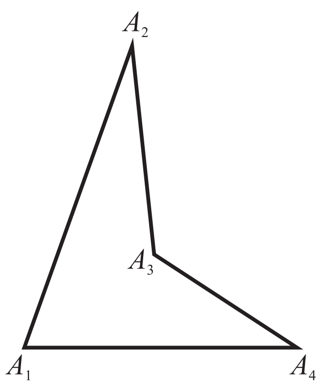
Eger töweregiň içinden çyzylan dogry n – burçluk gurlan bolsa, onda içinden çyzylan dogry $2n$ – burçlugy gurmak aňsatdyr.

§6. Dörtburçluklar

Dört nokatdan we olary yzygiderli birleşdirýän dört kesimden ybarat bolan figura **dörtburçluk** diýilýär. Şonda berlen nokatlaryň hiç bir üçüsi bir göni çyzygyň üstünde ýatmaly däldirler, olary birleşdirýän kesimler bolsa kesişmeli däldirler. Berlen nokatlara dörtburçlugyň depeleri, olary birleşdirýän kesimlere bolsa, dörtburçlugyň taraplary diýilýär. Aşakdaky suratlarda ýokarky şertleri kanagatlandyrýan dörtburçluklar şekillendirilen. Olaryň biri (*50-nji surat*) güberçek dörtburçluk, beýlekisi (*51-nji surat*) güberçek däl dörtburçluk. Biz, esasan, güberçek dörtburçluklara serederis. Şonuň üçin mundan beýläk gysgalyk üçin diňe dörtburçluk diýeris. Şonda biz güberçek dörtburçlugy göz öňünde tutarys.



50-nji surat



51-nji surat

Eger dörtburçlugyň depeleri onuň taraplarynyň biriniň uçlary bolsa, onda olara **goňşy depeler** (A_1 we A_2, A_2 we A_3 we ş.m.) diýilýär. Goňşy däl depelere **garşylykly ýatan depeler** (A_1 we A_3, A_2 we A_4)

diýilýär. Dörtburçlugyň garşylykly ýatan depelerini birikdirýän kesimlere **diagonallary** (A_1A_3, A_2A_4) diýilýär.

Dörtburçlugyň bir depeden çykýan taraplaryna **goňşy taraplary** (A_1A_2 we A_2A_3, A_2A_3 we A_3A_4 we ş.m.) diýilýär. Umumy uçlary bolmadyk taraplara **garşylykly ýatan taraplar** (A_1A_2 we A_3A_4; A_1A_4 we A_2A_3) diýilýär.

Dörtburçluk onuň depelerini görkezmek bilen belgilenilýär.

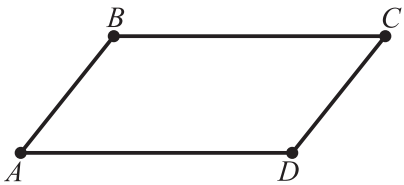
1. Parallelogram

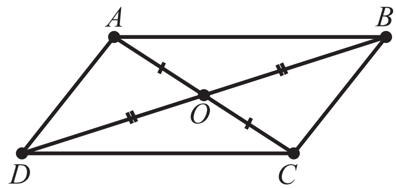
Parallelogram – ol garşylykly taraplary parallel bolan, ýagny parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatan dörtburçlukdyr.

Dörtburçlugyň parallelogramdygy kesgitleme boýunça däl-de, aşaky nyşanlar boýunça anyklanylýar.

TEOREMA. Eger dörtburçlugyň diagonallary kesişýän bolsa we kesişme nokady bilen ýarpa bölünse, onda şol dörburçluk parallelogramdyr.

Subudy. Goý, $ABCD$-berlen dörtburçluk we O-onuň diagonallarynyň kesişme nokady bolsun (*52-nji surat*). AOD we COB üçburçluklar deňdirler. Onuň O depesindäki burçlar wertikal burçlar hökmünde deňdirler, teoremanyň şerti boýunça $OD=OB$ we $OA=OC$. Diýmek, OBC we ODA burçlar deňdirler. Olar AD we BC göni çyzyklaryň we BD kesiji çyzygyň içki atanak ýatan burçlarydyr. Göni çyzyklaryň parallelliginiň I nyşan boýunça AD we BC göni çyzyklar paralleldirler. AB we CD göni çyzyklaryň parallelligi AOB we COD üçburçluklaryň deňligi arkaly subut edilýär. Teorema subut edildi.

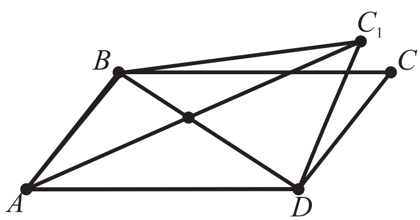




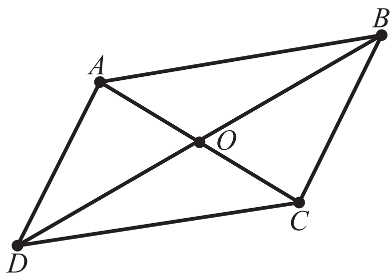
52-nji surat

TEOREMA. Parallelogramyň diagonallary kesişýärler we kesişme nokady bilen ýarpa bölünýärler.

Subudy. Goý, $ABCD$ – berlen parallelogram bolsun (*53-nji surat*). Onuň BD diagonalyny geçireliň. Onuň ortasynda O nokady belläliň we AO kesimiň dowamynyň üstünde AO deň bolan OC_1 kesimi alyp goýalyň. Ýokardaky subut edilen teorema boýunça ABC_1D dörtburçluk parallelogramdyr. Şeýlelikde, BC_1 göni çyzyk AD göni çyzyga paralleldir. Emma B nokadyň üstünden AD göni çyzyga parallel bolan diňe bir göni çyzyk geçirmek bolar. Diýmek, BC_1 göni çyzyk BC göni çyzyk bilen gabat gelýär. DC_1 göni çyzygyň DC göni çyzyk bilen gabat gelýändigi hem şonuň ýaly subut edilýär. Diýmek, C_1 nokat C nokat bilen gabat gelýär. $ABCD$ parallelogram ABC_1D bilen gabat gelýär. Şoňa görä-de onuň diagonallary kesişýärler we kesişme nokady bilen ýarpa bölünýärler. Teorema subut edildi.



53-nji surat



54-nji surat

TEOREMA. Parallelogramyň garşylykly ýatan taraplary deňdir, garşylykly ýatan burçlary deňdir.

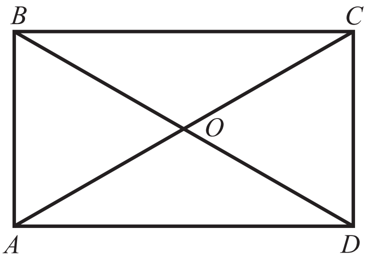
Subudy. Goý, $ABCD$ berlen parallelogram bolsun (*54-nji surat*). Parallelogramyň diagonallaryny geçireliň. Goý, O – olaryň kesişme nokady bolsun. Garşylykly ýatan AB we CD taraplaryň deňdigi AOB we COD üçburçluklaryň deňdiginden gelip çykýar. Olarda O depedäki burçlar wertikal burçlar hökmünde deňdirler, ýokarda subut edilen ikinji teorema boýunça $OA = OC$ we $OB = OD$. Edil şonuň ýaly AOD we COB üçburçluklaryň deňdiginden garşylykly ýatan taraplaryň beýleki AD we BC jübütiniň deňligi gelip çykýar.

Garşylykly ýatan ABC we CDA burçlaryň deňligi ABC we CDA üçburçluklaryň deňdiginden gelip çykýar (üç tarapy boýunça). Olarda subut edilişi boyunça $AB = CD$ we $BC = DA$, AC tarap bolsa umumy. Edil şonuň ýaly garşylykly ýatan BCD we DAB burçlaryň deňdigi BCD we DAB üçburçluklaryň deňdiginden gelip çykýar. Teorema doly subut edildi.

2. Gönüburçluk. Romb. Kwadrat

Gönüburçluk – ol hemme burçlary göni bolan dörtburçlukdyr.

TEOREMA. **Gönüburçlugyň diagonallary deňdir.**

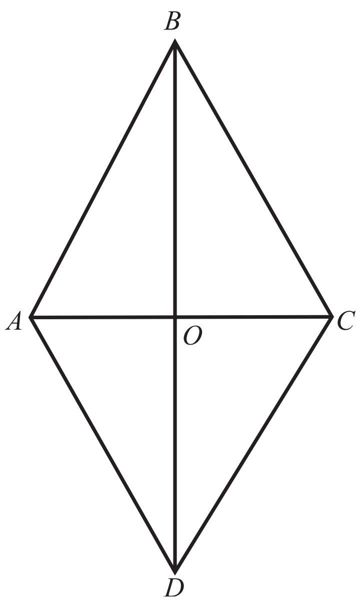


55-nji surat

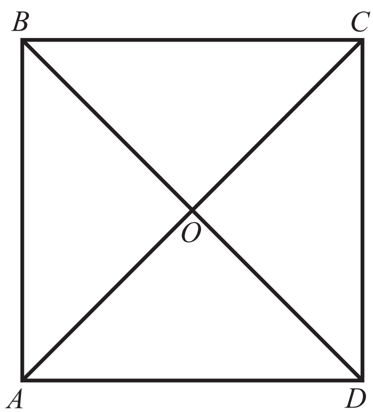
Subudy. Goý, *ABCD* – berlen gönüburçluk bolsun (*55-nji surat*). Teoremanyň tassyklamasy *BAD* we *CDA* gönüburçly üçburçluklaryň deňliginden gelip çykýar. Olarda *BAD* we *CDA* burçlar göni, *AD* katet umumy, *AB* we *CD* katetler bolsa parallelogramyň garşylykly ýatan taraplary hökmünde deňdir. Üçburçluklaryň deňliginden olaryň gipotenuzalarynyň deňdigi gelip çykýar. Gipotenuzalar bolsa gönüburçlugyň diagonallarydyr. Teorema subut edildi.

Romb – hemme taraplary deň bolan parallelogramdyr.

TEOREMA. Rombuň diagonallary göni burç astynda kesişýärler. Rombuň diagonallary onuň burçlarynyň bissektrisalarydyr.



56-njy surat



57-nji surat

Subudy. Goý, *ABCD* – berlen romb (*56-njy surat*). *O* – onuň diagonallarynyň kesişme nokady bolsun. Parallelogramyň häsiýeti boýunça *AO* = *OC*. Diýmek, *ABC* deňýanly üçburçlukda *BO* kesim medianadyr. Deňýanly üçburçlugyň häsiýeti boýunça onuň esasyna geçirilen mediana bissektrisadyr we beýiklikdir. Bu bolsa *BD* diagonal *B* burçuň bissektrisasy we *AC* diagonala perpendikulýar diýildigidir. Teorema subut edildi

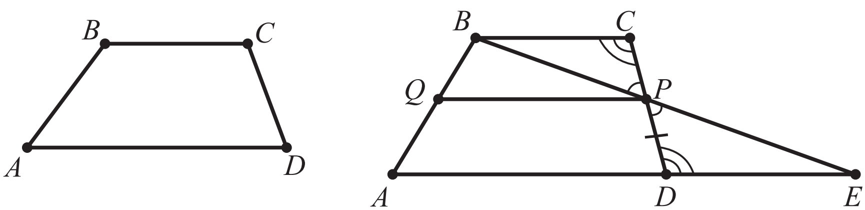
Kwadrat – hemme taraplary deň bolan gönüburçlukdyr.

Kwadrat şeýle hem rombdyr, şoňa görä-de ol gönüburçlugyň we rombuň häsiýetlerine eýedir (*57-nji surat*).

3. Trapesiýa. Trapesiýanyň orta çyzygy

Trapesiýa diýip, garşylykly ýatan iki tarapy parallel bolan güberçek dörtburçluga aýdylýar. Şol parallel taraplara trapesiýanyň **esaslary** diýilýär. Beýleki iki tarapyna **gapdal taraplary** diýilýär. Gapdal taraplary deň bolan trapesiýa **deňýanly trapesiýa** diýilýär. Gapdal taraplarynyň ortasyny birleşdirýän kesime trapesiýanyň **orta çyzygy** diýilýär.

TEOREMA. Trapesiýanyň orta çyzygy esaslaryna parallel we olaryň ýarym jemine deň.

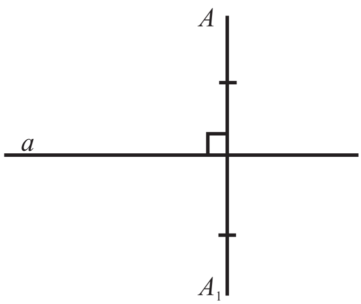


58-nji surat

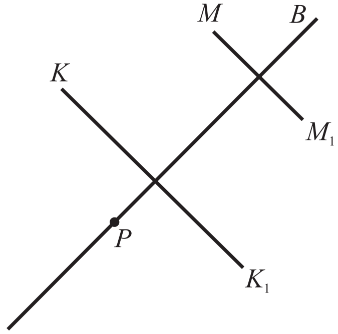
Subudy. Goý, *ABCD* – berlen trapesiýa bolsun (*58-nji surat*). *B* depäniň üstünden we *CD* gapdal tarapyň *P* ortasyndan göni çyzyk geçireliň. Ol *AD* göni çyzygy käbir *E* nokatda kesýär. *PBC* we *PED* üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň ikinji nyşany boýunça deňdirler. Olarda gurluş boýunça *CP* = *DP*, *P* depedäki burçlar wertikal burçlar hökmünde deňdirler, *PCB* we *PDE* burçlar bolsa, *BC* we *AD* parallel göni çyzyklaryň we *CD* kesiji çyzygyň içki atanak ýatan burçlary hökmünde deňdirler. Üçburçlugyň deňliginden taraplaryň deňligi gelip çykyar: *PB* = *PE*, *BC* = *ED*. Diýmek, trapesiýanyň *PQ* orta çyzygy ABE üçburçlugyň orta çyzygydyr. Üçburçlugyň orta çyzygynyň häsiýeti boýunça $PQ||AE$ we $PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$ deňdir. Teorema subut edildi.

§7. Ok we merkezi simmetriýalar

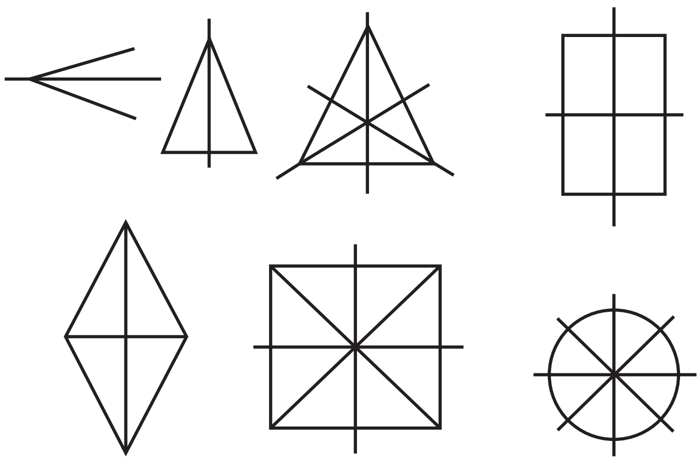
Eger a göni çyzyk AA_1 kesimiň ortasyndan geçse we oňa perpendikulýar bolsa, onda A we A_1 nokatlara a göni çyzyga görä simmetrik nokatlar diýilýär (*59-njy surat*). *a göni çyzygyň her bir nokady öz-özüne simmetrik diyilýär.* 60-njy suratda M we M_1, K we K_1 nokatlar b göni çyzyga görä simmetrikdir, P nokat bolsa b göni çyzyga görä öz-özüne simmetrikdir.



59-njy surat



60-njy surat

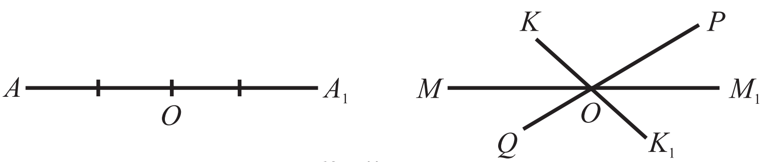


61-nji surat

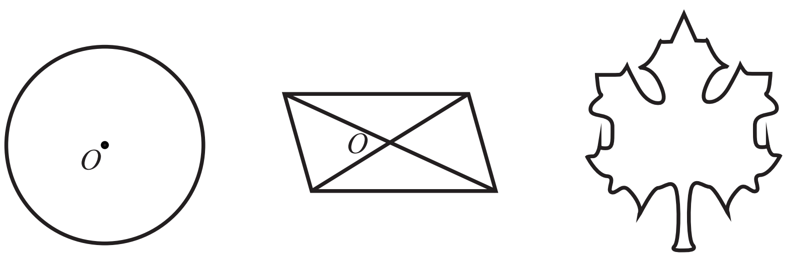
Eger figuranyň her bir nokady üçin *a* göni çyzyga görä simmetrik nokat hem şol figura degişli bolsa, onda oňa *a* göni çyzyga görä simmetrik figura diýilýär. *a* göni çyzyga figuranyň simmetriýa oky diýilýär. Şeýle ýagdaýda figuranyň simmetriýa oky bar hem diýilýär. Simmetriýa oky bolan figuralara mysallar getireliň (*61-nji surat*). Ýazgyn däl burçuň bir simmetriýa oky bardyr. O1 simmetriýa oky burçuň bissektrisasy ýatan göni çyzykdyr. Deňýanly üçburçlugyň bir simmetriýa oky, deňtaraply üçburçlugyň bolsa üç simmetriýa oky bardyr. Kwadrat däl gönüburçlugyň we rombuň her haýsynyň iki simmetriýa oky bardyr. Töweregiň merkezinden geçýän islendik göni çyzyk onuň simmetriýa okudyr. Şoňa görä-de töweregiň tükeniksiz köp simmetriýa oklary bardyr.

Hiç bir simmetriýa oky bolmadyk figuralar hem bardyr. Şeýle figuralara gönüburçlukdan we rombdan tapawutly parallelogram, dürli taraply üçburçluk degişlidir.

Eger *O* nokat AA_1 kesimiň ortasy bolsa, onda *A* we A_1 nokatlara *O* nokada görä simmetrik nokatlar diýilýär (*62-nji surat*).

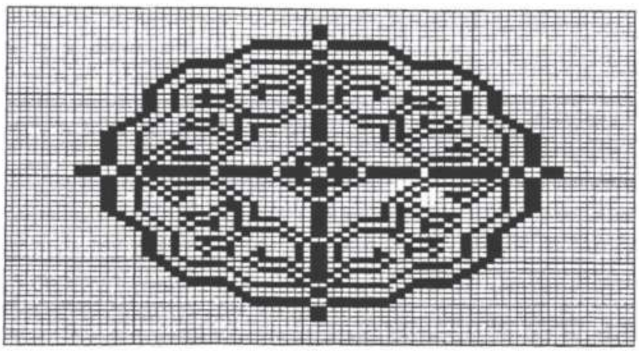


62-nji surat



63-nji surat

O nokat öz-özüne simmetrik nokat hasaplanylýar. Suratda *M* we M_1, *K* we K_1 nokatlar *O* nokada görä simmetrikdir, *P* we *Q* nokatlar bolsa, *O* nokada görä simmetrik däldirler. Eger figuranyň her bir nokady üçin *O* nokada görä simmetrik nokat hem şol figura degişli bolsa, onda oňa *O* nokada görä simmetrik figura diyilyär. *O* nokada figuranyň simmetriýa merkezi diýilýär. Şeýle yagdaýda figuranyň simmetriya merkezi bar hem diyilýär. Simmetriýa merkezi bolan figuralara mysallar getireliň. Töweregiň we parallelogramyň simmetriýa merkezi bardyr. Töweregiň simmetriýa merkezi töweregiň merkezidir. Parallelogramyň simmetriýa merkezi onuň diagonallarynyň kesişme nokadydyr. Töweregiň we parallelogramyň her biriniň diňe bir simmetriýa mekrezleri bardyr (*63-nji surat*). Göni çyzygyň simmetriýa merkezleri tükeniksiz köpdür. Göni çyzygyň islendik nokady onuň simmetriýa merkezidir. Simmetriýa merkezi bolmadyk figura mysal edip üçburçlugy getirip bolar.



64-nji surat

Biziň daş-töweregimizi gurşap alan dünýäniň köp predmetleriniň tekizlikdäki şekilleriniň simmetriýa merkezi ýa-da simmetriýa oky bardyr. Köp agaçlaryň ýapraklarynyň simmetriýa oky bardyr.

Sungatda, arhitekturada, tehnikada, durmuşda biz simmetriýa bilen ýygy-ýygydan gabat gelýäris. Meselem, türkmen halylarynyň gölleriniň simmetriýa oklary hem-de simmetriýa merkezleri bardyr (*64-nji surat*). Köp jaýlar hem simmetrik edilip gurulýar. Mehanizmleriň hem köp detallary simmetrikdir.

§8. Figuralaryň meýdanlary

1. Meýdan düşünjesi

Öýüň meýdany pylança kwadrat metr, ýer uçastogynyň meýdany pylança gektar, ýurduň meýdany pylança kwadrat kilometr diýen jümleleri biz ýygy-ýygydan eşidýäris. Meýdan näme we ony nädip tapmaly? Meseläni sadalaşdyrmak üçin biz ilki ýönekeý figuralara serederis. Eger figurany tükenikli üçburçluklara bölüp bolýan bolsa, onda oňa **ýönekeý figura** diýeris. Biz üçburçly ýaýlalara, ýagny tekizligiň üçburçluk bilen çäklenen tükenikli bölegine üçburçluk diýip düşünýäris. Güberçek tekiz köpburçluk ýönekeý figuranyň mysalydyr. Ol özüniň haýsy hem bolsa bir depesinden geçirilen diagonallary arkaly üçburçluklara bölünýär. Ýönekeý figuralaryň meýdany üçin kesgitleme bereliň.

Ýönekeý figuralar üçin meýdan – **bu san bahasy aşakdaky häsiýetlere eýe bolan položitel ululyk:**

1) Deň figuralaryň deň meýdanlary bar.

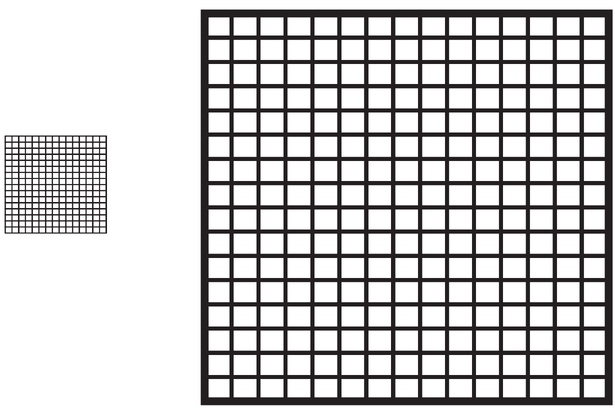
2) Eger figura ýönekeý figuralar bolan böleklere bölünýän bolsa, onda bu figuranyň meýdany onuň bölekleriniň meýdanynyň jemine deň.

3) Tarapy ölçeg birligine deň bolan kwadratyň meýdany bire deň.

Eger kesgitlemede agzalan kwadratyň 1*m*-e deň tarapy bar bolsa, onda meýdan (m^2) metr kwadrat bolar. Eger kwadratyň tarapy 100 *m* bolsa, onda meýdan gektar bolar. Eger kwadratyň tarapy 1 *km* bolsa, onda kilometr kwadrat we ş.m. bolar.

2. Gönüburçlugyň meýdany

Gönüburçlugyň meydanyny tapalyň. Suratda meýdan ölçeginiň birligi bolan kwadrat we meýdanyny ölçemek gerek bolan gönüburçluk şekillendirilipdir *(65-nji surat)*. Uzynlyk birligi bolup kwadratyň tarapy hyzmat edýär.



65-nji surat

Ilki bilen gönüburçlugyň ***a*** we ***b*** taraplarynyň uzynlyklaryny tükenikli onluk droblar bilen aňladylýan we oturdan soňky onluk belgileriň sany ***n***-den köp bolmaýan hala garalyň.

Kwadratyň taraplaryny 10^n deň bölege böleliň we bölme nokatlarynyň üstünden onuň taraplaryna parallel göni çyzyklary geçireliň (*65-nji surat*). Şonda ol $10^n \cdot 10^n$ kiçi kwadratlara bölünýär. Suratda kwadratyň tarapy 10 bölege bölünendir. Kiçi kwadratlaryň sany $10 \cdot 10 = 100$ deňdir.

Kiçi kwadratyň meýdanyny tapalyň. Meýdanyň häsiýeti boýunça uly kwadratyň meýdany kiçi kwadratyň meýdanlarynyň jemine deňdir. Uly kwadratyň meýdanynyň birlige deňdigi, kiçi kwadratlaryň sanynyň bolsa 10^{2n} deňdigi sebäpli, kiçi kwadratyň meýdany $\frac{1}{10^{2n}}$.

$a : \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ we $b : \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ sanlaryň bitindikleri sebäpli, gönüburçlugyň tarapyny $\frac{1}{10^n}$ deň bolan bölekleriň bitin sanyna bölmek bolar. ***a*** tarapyň üstünde olar $\boldsymbol{a \cdot 10^n}$ bolar, ***b*** tarapyň üstünde bolsa olar $\boldsymbol{b \cdot 10^n}$ bolar. Bölme nokatlary arkaly gönüburçlugyň taraplaryna parallel göni çyzyklar geçireliň. Şunlukda $\frac{1}{10^{2n}}$. taraply kiçi kwadratlara bölünmesini aldyk. Olaryň sany $\boldsymbol{a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n}$ bolar. Gönüburçlugyň meýdany ondaky bar bolan kiçi kwadratlaryň meýdanlarynyň jemine deňdir. Kiçi kwadratyň meýdanynyň $\frac{1}{10^{2n}}$. deňdigi, olaryň sanynyň bolsa $\boldsymbol{ab \cdot 10^{2n}}$ deňdigi sebäpli, gönüburçlugyň meýdany

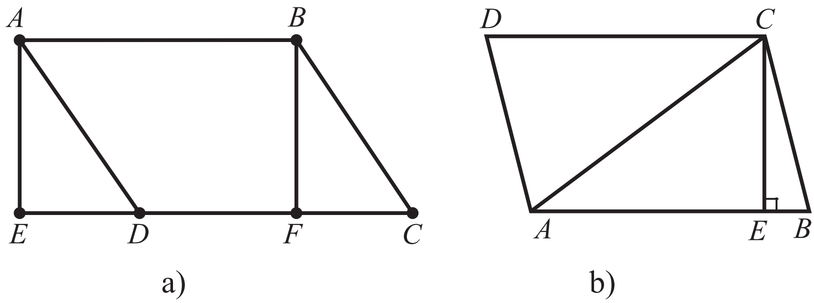
$$\boldsymbol{ab \cdot 10^{2n}} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = \boldsymbol{ab} \text{ deňdir.}$$

Goý, indi gönüburçlugyň ***a*** we ***b*** taraplarynyň iň bolmanda biri tükeniksiz onluk drob bilen aňladylsyn. ***a*** sanynyň ***n*** onluk belgilere çenli takyklykda kemi we artygy bilen alnan ýakynlaşan bahalaryny $\boldsymbol{a_1}$ we $\boldsymbol{a_2}$ bilen belgiläliň. ***b*** sanynyň şol takyklykda alnana ýakynlaşan bahalaryny $\boldsymbol{b_1}$ we $\boldsymbol{b_2}$ bilen belgiläliň. $\boldsymbol{a_1}$ we $\boldsymbol{b_1}$ taraply gönüburçlugyň meýdany berlen gönüburçlugyň meýdanyndan kiçidir, çünki ony berlen gönüburçlugyň içinde ýerleşdirmek bolar. $\boldsymbol{a_2}$ we $\boldsymbol{b_2}$ taraply gönüburçlugyň meýdany berlen gönüburçlugyň meydanyndan uludyr, çünki berlen gönüburçlugy onuň içinde ýerleşdirmek bolar. Subut edilişi boýunça $\boldsymbol{a_1}$ we $\boldsymbol{b_1}$ taraply gönüburçlugyň meýdany $\boldsymbol{a_1 b_1}$ deň,

a_2 we b_2 taraply gönüburçlugyň meýdany bolsa a_2b_2 deň. Şeýlelik bilen, biziň gönüburçlugymyzyň S meýdany $a_1\ b_1$ bilen a_2b_2-niň arasynda ýerleşendir. Eger n ýeterlik uly bolsa, onda $a_1\ b_1$ we $a_2\ b_2$ berlen, islendik takyklykda ab-niň ýakynlaşan bahasyny berýändigi üçin $S = ab$. Şeýlelikde, **gönüburçlugyň meýdany $S = ab$ formula bilen hasaplanylýar.**

3. Parallelogramyň meýdany

Parallelogramyň meýdanyny tapalyň. Goý, ***ABCD*** berlen parallelogram bolsun (*66-njy a surat*). Eger ol gönüburçluk bolmasa, onda onuň burçlarynyň biri – ***A*** ýa-da ***B*** ýitidir. Goý, kesgitlilik üçin suratda görkezilişi ýaly, ***A*** burç ýiti bolsun. ***A*** depeden ***CD*** göni çyzyga ***AE*** perpendikulýar indereliň. ***ABCE*** trapesiýanyň meýdany ***ABCD*** parallelogram bilen ***ADE*** üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deňdir.



66-njy surat

B depeden ***CD*** göni çyzyga ***BF*** perpendikulýar indereliň. Şonda ***ABCE*** trapesiýanyň meýdany ***ABFE*** gönüburçluk bilen ***BCF*** üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deňdir. ***ADE*** we ***BCF*** gönüburçly üçburçluklar deňdirler, diýmek olaryň deň meýdanlary bardyr. Bu ýerden ***ABCD*** parallelogramyň meýdanynyň ***ABFE*** gönüburçlugyň meýdanyna deňdigi, ýagny ***AB·BF*** deňdigi gelip çykýar. ***BF*** kesime parallelogramyň ***AB*** we ***CD*** taraplara degişli **beýikligi** diyilýär.

Şeýlelikde, **perallelogramyň meýdany onuň tarapyny şol tarapa geçirilen beýiklige köpeltmek hasylyna deňdir.**

4. Üçburçlugyň meýdany

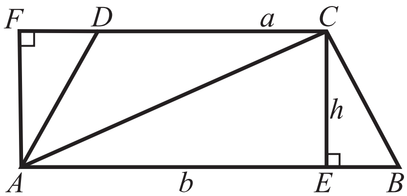
Üçburçlugyň meýdanyny tapalyň. Goý, ***ABC*** berlen üçburçluk bolsun. Ol üçburçlugy ***ABCD*** parallelograma çenli dolduralyň. (*66-njy b surat)* Parallelogramyň meýdany ***ABC*** we ***CDA*** üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemine deňdir. Ol üçburçluklaryň deňdikleri üçin parallelogramyň meýdany $\boldsymbol{ABC}$ üçburçlugyň ikeldilen meýdanyna deňdir. Parallelogramyň $\boldsymbol{AB}$ tarapa degişli beýikligi $\boldsymbol{ABC}$ üçburçlugyň $\boldsymbol{AB}$ tarapa geçirilen beýikligine deňdir.

Bu ýerden **üçburçlugyň meýdanynyň onuň tarapyny şol tarapa geçirilen beýiklige köpeltmek hasylynyň ýarysyna** deňdigi gelip çykýar:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}AB \cdot CE.}$$

5. Trapesiýanyň meýdany

Trapesiýanyň meýdanyny tapalyň. Goý, $\boldsymbol{ABCD}$ berlen trapesiýa bolsun (*67-nji surat*). Trapesiýanyň $\boldsymbol{AC}$ diagonaly ony $\boldsymbol{ABC}$ we $\boldsymbol{CDA}$ iki üçburçluga bölýär. Şeýlelikde, trapesiýanyň meýdany şol üçburçluklaryň meýdanynyň jemine deňdir. $\boldsymbol{ABC}$ üçburçlugyň meýdany $\frac{1}{2}\ \boldsymbol{AB \cdot CE}$ deň, $\boldsymbol{ACD}$ üçburçlugyň meýdany $\frac{1}{2}\ \boldsymbol{DC \cdot AF}$ deň. Şol üçburçluklaryň $\boldsymbol{CE}$ we $\boldsymbol{AF}$ beýiklikleri $\boldsymbol{AB}$ we $\boldsymbol{CD}$ parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyga deňdir. Şol uzaklyga trapesiýanyň **beýikligi** diýilýär.



67-nji surat

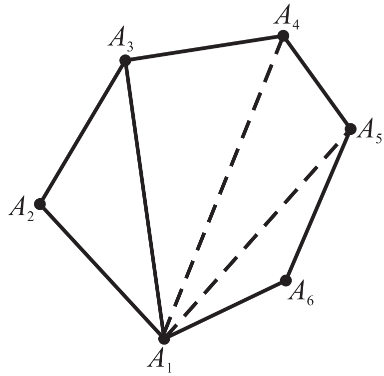
Şeýlelikde, **trapesiýanyň meýdany onuň esaslarynyň ýarym jeminiň beýikligine köpeltmek hasylyna deňdir:**

$$\boldsymbol{S = \frac{DC + AB}{2} \cdot CE, \qquad S = \frac{a + b}{2} \cdot h.}$$

6. Güberçek *n* burçlugyň meýdany

Güberçek *n* burçlugyň meýdanyny tapmak üçin onuň bir depesinden mümkin bolan diagonallaryň ählisini geçireliň (*68-nji surat*).

Şonda biz n–2 sany üçburçluk alarys. Berlen güberçek n burçlugyň meýdany şol n–2 sany üçburçlugyň meýdanlarynyň jemine deňdir.



68-nji surat

IV baba degişli gönükmeler

1. Diagonallarynyň sany: 1) taraplarynyň sanyndan iki esse köp; 2) taraplarynyň sanyndan iki esse az; 3) taraplarynyň sanyndan üç esse az bolan köpburçluk barmy?

2. Dörtburçlugyň: 1) gönüburçluk; 2) trapesiýa bolmagy üçin birnäçe şertleri görkeziň.

3. Deňýanly üçburçlugyň gapdal tarapy 5 *m*. Bu üçburçlugyň esasynda alnan nokatdan gapdal taraplara parallel iki göni çyzyk geçirilipdir. Alnan parallelogramyň perimetrini tapyň.

4. Parallelogramyň burçlarynyň biriniň beýlekisinden 50° uludygyny bilip, onuň burçlaryny tapyň.

5. Eger parallelogramyň burçlarynyň ikisiniň jemi: 1) 80°; 2) 100°; 3)160° bolsa, onuň ähli burçlaryny tapyň.

6. Dörtburçlugyň taraplarynyň onuň ortalaryndan geçýän göni çyzykdan deň daşlaşandyklaryny subut ediň.

7. AC diagonally $ABCD$ trapesiýanyň ABC we ACD burçlary deň. Eger BC we AD esaslar degişlilikde 12 *m* we 27 *m* bolsa, onda AC diagonaly tapyň.

8. Parallelogramyň c we d diagonallary we olaryň arasyndaky α burç berlipdir. Parallelogramyň taraplaryny tapyň.

9. Parallelogramyň a we b taraplary we burçlarynyň biri α berlipdir. Parallelogramyň diagonallaryny tapyň.

10. Içki burçlarynyň her biri 1) 135°; 2) 150° bolan dogry köpburçlugyň näçe tarapy bar?

11. Daşky burçlarynyň her biri: 1) 36°; 2) 24° bolan dogry köpburçlugyň näçe tarapy bar?

12. Dogry $2n$ – burçlugyň başaşa alnan depeleriniň dogry n – burçlugyň depeleridigini subut ediň.

13. Töweregiň daşyndan çyzylan kwadratyň meýdany şol töweregiň içinden çyzylan kwadratyň meýdanyndan näçe esse uly?

14. Eger kwadratyň her tarapy 3 esse ulaldylsa, onuň meýdany nähili üýtgär?

15. Kwadratyň meýdany 25 esse kiçeler ýaly, onuň tarapyny näçe esse kiçeltmeli?

16. Eger gönüburçlugyň taraplary 4:9 ýaly gatnaşsa, meýdany 144 m^2 bolsa, onuň taraplary näçä deň?

17. Kwadratyň we rombuň deň perimetrleri bar. Figuralaryň haýsysynyň meýdany uly? Jogabyny düşündiriň.

18. Eger rombuň beýikligi 10 *sm*, ýiti burçy 30^o bolsa, onuň meýdanyny tapyň.

19. Rombuň diagonallarynyň 1:2 gatnaşýandygyny, meýdanynyň bolsa 12 sm^2-a deňdigini bilip, onuň tarapyny tapyň.

20. 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80 taraplary boýunça üçburçlugyň iň kiçi beýikligini we 4) $\frac{25}{6}, \frac{29}{6}, 6$; 5) $13, 37, \frac{12}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}, 3\frac{44}{75}$, 1,83 taraplary boýunça üçburçlugyň iň uly beýikligini tapyň.

21. Taraplary: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7 bolan üçburçluk üçin daşyndan çyzylan (*r*) töwerekleriň radiuslaryny tapyň.

22. Parallel taraplary 60 *sm* we 20 *sm*, parallel däl taraplary 13 *sm* we 37 *sm* bolan trapesiýanyň meýdanyny tapyň.

23. Dogry üçburçlugyň içinden çyzylan tegelegiň meýdanynyň onuň daşyndan çyzylan tegelegiň meýdanyna bolan gatnaşygyny tapyň.

24. Eger sektora degişli bolan merkezi burç: 1) 40^o; 2) 90^o; 3) 150^o; 4) 240^o; 5) 300^o; 6) 330^o deň bolsa, *R* radiusly tegelek sektoryň meýdanyny tapyň.

25. Tegelegiň onuň içinden çyzylan: 1) kwadrata; 2) dogry üçburçluga; 3) dogry altyburçluga degişli bolmadyk böleginiň meýdanyny tapyň. Tegelegiň radiusyny tapyň.

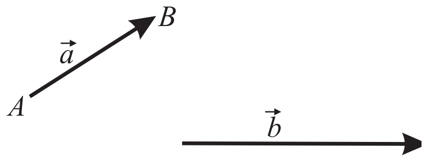
V BAP

TEKIZLIKDE WEKTORLAR

§1. Wektor barada düşünje. Wektoryň absolýut ululugy we ugry

Käbir fiziki ululyklar (güýç, tizlik, tizlenme we başg.) diňe san bahasy bilen däl-de, eýsem ugur bilen hem häsiýetlendirilýär. Meselem, pursatda jisimiň hereketini häsiýetlendirmek üçin, ol 60 *km/sag* tizlik bilen hereket edýär diýip aýtmak ýeterlik däldir, ondan başga-da onuň hereketiniň ugruny, ýagny tizligiň ugruny görkezmek gerek. Şol sebäpli hem görkezilen fiziki ululyklary ugrukdyrylan kesimler bilen şekillendirmek amatlydyr. Fiziki ululyklary şekillendirmegiň şeýle usuly diňe bir aýdyňlygy bilen tapawutlanman, eýsem onuň başga esaslanmalary hem bardyr.

Ugrukdyrylan kesime wektor diýilýär. Wektoryň ugry onuň başlangyjyny we ahyryny görkezmek bilen kesgitlenilýär. Çyzgyda wektoryň ugry strelka bilen bellenilýär. Wektorlary belgilemek üçin ***a, b, c,*** ... latyn setir harplaryndan peýdalanarys. Wektory onuň başlangyjyny we ahyryny görkezmek bilen hem belgilemek bolar. Şonda wektoryň başlangyjy başlangyç orunda goýlar. “Wektor” sözüniň deregine wektoryň harply belgilenmesiniň üstünde käte strelka ýa-da çyzyk goýlar (*69-njy surat*). Wektory şeýle belgilemek bolar: $\vec{a}$ ýa-da $\overrightarrow{AB}$



69-njy surat

Eger iki sany ýarym göni çyzyk parallel göçürme arkaly gabat gelýän bolsa, onda olara birmeňzeş ugrukdyrylan ýarym göni çyzyklar diýilýär, ýagny bir ýarym göni çyzygy beýleki ýarym göni çyzyga geçirýän parallel göçürme bardyr.

Eger *a* we *b* ýarym göni çyzyklar birmeňzeş ugrukdyrylan bolsa hem-de *b* we *c* göni çyzyklar birmeňzeş ugrukdyrylan bolsa, onda *a* we c göni çyzyklar hem birmeňzeş ugrukdyrylandyr.

Eger her bir ýarym göni çyzyk beýleki ýarym göni çyzygy dolduryjy ýarym göni çyzyk bilen birmeňzeş ugrukdyrylan bolsa, onda şol iki ýarym göni çyzyga **garşylykly ugrukdyrylan** ýarym göni çyzyklar diýilýär.

Eger ýarym göni çyzyklar garşylykly ugrukdyrylan bolsalar, onda olara **garşylykly ugrukdyrylan wektorlar** diýilýär. Wektory şekillendirýän kesimiň uzynlygyna wektoryň **absolýut ululygy *(ýa-da moduly)*** diýilýär. $\vec{a}$ wektoryň absolýut ululygy $|\vec{a}|$ bilen belgilenilýär.

§2. Wektoryň koordinatalary

Goý, $\vec{a}$ wektoryň A_1 (x_1,y_1) nokatly başlangyjy we A_2 (x_2, y_2) nokatly ahyry bolsun. $\vec{a}$ wektoryň koordinatalary diýip, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ sanlara aýdýarys. Wektoryň koordinatalaryny wektoryň harply belgilenmesiniň gapdalynda goýýarys, şu halda $\vec{a}$ (a_1,a_2) ýa-da ýöne $\overrightarrow{(a_1, a_2)}$. Nol wektoryň koordinatalary nola deň.

Iki nokadyň arasyndaky uzaklygy olaryň koordinatalarynyň üsti bilen aňladýan formuladan a_1, a_2 koordinataly wektoryň absolýut ululygynyň $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ deňdigi gelip çykýar.

TEOREMA. Deň wektorlaryň deň degişli koordinatalary bar. Tersine, eger wektorlaryň degişli koordinatalary deň bolsa, onda wektorlar deňdirler.

Subudy. Goý, A_1 (x_1,y_1) we A_2 (x_2,y_2) nokatlar – $\vec{a}$ wektoryň degişlilikde başlangyjy we ahyry bolsun. Oňa deň bolan $\vec{a}$ wektoryň parallel göçürme arkaly $\vec{a}$ wektordan alynýandygy üçin onuň başlangyjy we ahyry degişlilikde şeýle bolýar: A'_1 $(x_1+c,\ y_1+d)$, $A'_2(x_2+c,\ y_2+d)$.

Bu ýerden $\vec{a}$ we $\vec{a}$ iki wektoryň hem şol bir koordinatalarynyň bardygy görünýär: $x_2–x_1$, $y_2–y_1$.

Ters tassyklamany subut etmäge synanyşyň.

§3. Wektorlary goşmak we olary sana köpeltmek

$\boldsymbol{a_1+b_1}$, $\boldsymbol{a_2+b_2}$ koordinataly $\boldsymbol{c}$ wektora $\boldsymbol{a_1, a_2}$ **we** $\boldsymbol{b_1, b_2}$ koordinataly $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemi diýilýär, ýagny

$$\vec{a}\ (\boldsymbol{a_1, a_2}) + \vec{b}\ (\boldsymbol{b_1, b_2}) = \vec{\boldsymbol{c}}\ (\boldsymbol{a_1 + b_1, a_2 + b_2}).$$

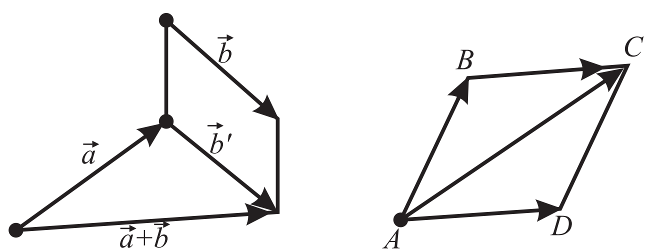
Islendik $\vec{a}\,(a_1, a_2)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2)$, $\vec{c}\,(c_1, c_2)$ wektorlar üçin

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},\ \ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Subut etmek üçin wektorlaryň deňlikleriň sag we çep böleklerinde duran koordinatalaryny deňeşdirmek ýeterlikdir. Degişli koordinatalary deň bolan wektorlar deňdirler.

TEOREMA. ***A*, *B*, *C* nokatlar nähili bolsalar-da,** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ wektor deňlik dogrudyr.

Subudy. Goý, $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ – berlen nokatlar bolsun. $\overrightarrow{AB}$ wektoryň koordinatalary $x_2–x_1$, $y_2–y_1$ bolar, BC wektoryň koordinatalary $x_3–x_2$, $y_3–y_2$ bolar. Şeýlelikde, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ wektoryň koordinatalary $x_3–x_1$, $y_3–y_1$ bolar. Bu bolsa $\overrightarrow{A_1C}$ wektoryň koordinatalarydyr. Şeýlelikde, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ we $\overrightarrow{AC}$ wektorlar deňdirler. Teorema subut edildi.



70-nji surat

Subut edilen teorema $\vec{a}$ we $\vec{b}$ erkin wektorlaryň jemini gurmagyň aşakdaky usulyny berýär: $\vec{a}$ wektoryň ahyrynda $\vec{b}$ wektora deň bolan $\vec{b}$ wektory alyp goýmak gerek (*70-nji surat*). Şonda başlangyjy $\vec{a}$ wektoryň başlangyjy bilen, ahyry bolsa $\vec{b'}$, wektoryň ahyry bilen gabat gelýän wektor $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemi bolar. Iki wektoryň jemini almagyň şunuň ýaly usulyna wektorlary goşmagyň "üçburçluk düzgüni" diýilýär.

Umumy başlangyjy bolan wektorlaryň jemi bu wektorlarda gurlan parallelogramyň diagonaly arkaly şekillendirilýär (parallelogram düzgüni). Hakykatdan-da $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$. Diýmek $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

$\vec{a}(a_1, a_2)$ wektoryň λ sana köpeltmek hasyly diýip $\vec{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$ wektora aýdylýar, ýagny $\vec{a}(a_1, a_2)\lambda = \vec{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

Kesgitleme boýunça $\vec{a}(a_1, a_2)\lambda = \vec{a}\lambda(a_1, a_2)$.

Wektory sana köpeltmegiň kesgitlemesinden islendik $\vec{a}$ wektor we λ, μ sanlary üçin $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ gelip çykýar.

Islendik $\vec{a}$ we $\vec{b}$ iki wektor we λ san üçin

$$\lambda(\vec{b} + \vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

TEOREMA. $\lambda\vec{a}$ wektoryň absolýut ululygy $|\vec{a}||\lambda|$ deň. $\vec{a} \neq \vec{0}$ bolanda, eger $\lambda > 0$ bolsa, onda $\lambda\vec{a}$ wektoryň ugry $\vec{a}$ wektoryň ugry bilen gabat gelýär. Eger-de $\lambda < 0$ bolsa, onda a wektoryň ugruna garşylyklydyr.

Subudy. Degişlilikde $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlara deň bolan $\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{OB}$ wektorlary guralyň (O – koordinatalar başlangyjy). Goý, a_1 we a_2 – $\vec{a}$ wektoryň koordinatalary bolsun. Şonda A nokadyň koordinatalary bolsa a_1 we a_2 sanlar bolar, B nokadyň koordinatalary bolsa λa_1 we λa_2 bolar. OA göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnişi alar:

$$ax + by = 0.$$

Deňlemäni $A(a_1, a_2)$ nokadyň koordinatalarynyň kanagatlandyrýandyklary üçin ony B $(\lambda a_1, \lambda a_2)$ nokadyň koordinatalary hem kanagatlandyrýar. Bu ýerden B nokadyň OA göni çyzygyň üstünde ýatýandygy gelip çykýar. OA ýarym göni çyzygyň üstünde ýatan islendik C

nokadyň c_1 we c_2 koordinatalarynyň edil A nokadyň a_1, a_2 koordinatalarynyňky ýaly alamatlary bardyr. OA ýarym göni çyzygy dolduryjy ýarym göni çyzygyň üstünde ýatan islendik nokadyň koordinatalarynyň bolsa garşylykly alamatlary bardyr. Şoňa görä-de eger $\lambda > 0$ bolsa, onda B nokat OA ýarym göni çyzygyň üstünde ýatar, diýmek $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar birmeňzeş ugrukdyrylandyrlar. Eger $\lambda < 0$ bolsa, onda B nokat dolduryjy ýarym göni çyzygyň üstünde ýatar, $\vec{a}$ we $\lambda\vec{a}$ wektorlar garşylykly ugrukdyrylandyrlar.

$\lambda\vec{a}$ wektoryň absolýut ululygy

$|\lambda\vec{a}| = \sqrt{|\lambda a_1|^2 + |\lambda a_2|^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda||a^2|$ deňdir.

Teorema subut edildi.

§4. Kollinear wektorlar

Eger noldan tapawutly iki wektor bir göni çyzygyň üstünde ýa-da parallel göni çyzyklaryň üstünde ýatan bolsa, onda olara **kollinear** wektorlar diýilýär.

TEOREMA. Kollinear wektorlaryň degişli koordinatalary proporsionaldyrlar. Tersine, eger iki wektoryň degişli koordinatalary proporsional bolsa, onda ol wektorlar kollineardyrlar.

Subudy. Goý, $\vec{a}(a_1, a_2)$ we $\vec{b}(b_1, b_2)$ – berlen wektorlar bolsun. Goý wektorlar kollinear we birmeňzeş ugrukdyrylan bolsun. $\vec{c} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ wektora garalyň. $\vec{c}$ wektor $\vec{a}$ wektora deň, çünki subut edilen teorema boýunça olar bieňzeş ugrukdyrylandyrlar we olaryň şol bir absolýut ululygy bardyr. $\vec{a}$ we $\vec{c}$ wektorlaryň koordinatalaryny deňeşdirip alarys:

$$a_1 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}b_1,\ a_2 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}b_2.$$

Bu ýerden $\frac{b_2}{a_2}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, $\frac{b_1}{a_1}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Diýmek $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, ýagny $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň koordinatalary proporsionaldyrlar.

Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ kollinear wektorlar garşylykly ugrukdyrylan bolsalar, onda subut etmek üçin $\vec{c}=-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ wektora garamak gerek. Şonda hem $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$.

Goý, indi $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň koordinatalary proporsional bolsun. Wektorlaryň kollineardyklaryny subut edeliň. Alarys:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Şu gatnaşyklaryň umumy bahasyny λ bilen belgiläp alarys: $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$. Bu ýerden $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ gelip çykýar. Bu bolsa wektorlar kollinear diýildigidir.

Teorema subut edildi.

§5. Komplanar wektorlar

Kollinear däl iki wektory goşmak üçin planimetriýadan mälim bolan parallelogram düzgüninden peýdalanmak käte amatly bolýar. Ol düzgüni ýatlalyň.

Goý, kollinear däl $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlaryň jemini tapmak gerek bolsun. Erkin O nokatdan $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ we $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ wektorlary alyp goýalyň. $AOBC$ parallelogramda $\overrightarrow{OC}$ wektor gözlenilýän jemdir. Hakykatdan-da, üçburçlugyň düzgüni boýunça

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

Kesgitleme. Eger nol däl üç wektoryň ugruny berýän şöhleler şol bir tekizlige parallel bolan göni çyzyklaryň üstünde ýatýan bolsa, onda şeýle nol däl üç wektora komplanar wektorlar diýilýär.

Eger üç wektoryň iň bolmanda biri nol wektor bolsa,onda şeýle wektorlary hem komplanar wektorlar hasaplaýarys.

$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ wektorlaryň komplanarlyk halynda O, A, B, C nokatlar bir tekizlige degişlidirler.

TEOREMA. Eger $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar kollinear däl bolsalar, onda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ bilen komplanar bolan islendik wektory ýeke-täk usul bilen $\vec{c} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by}$ görnüşde görkezmek bolar.

Subudy. Goý, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ wektorlar komplanar, özem $\vec{a}$ we $\vec{b}$ kollinear däl bolsunlar. $\vec{c} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by}$ deňligi kanagatlandyrýan x we y sanlary tapalyň. O nokadan $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ wektorlary alyp goýalyň.Teoremanyň şertinden O,A,B,C nokatlaryň käbir α tekizlige degişlidigi gelip çykýar. C nokadyň OA we OB göni çyzyklara degişli bolýan hallaryna garap geçeliň.α tekizlikde C nokadyň üstünden OA we OB göni çyzyklara parallel bolan göni çyzyklary geçireliň. $MONC$ parallelogram alarys. Parallelogram düzgüni boýunça şeýle ýazmak bolar. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$. Emma $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA}$ we $\overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OB}$, onda $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ýa-da $\vec{c} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{yb}$.

Eger-de C nokat OA we OB göni çyzyklara degişli bolsa, onda iň soňky deňlikde degişlilikde y=0 ýa-da x=0.

x we y sanlaryň bir bahaly kesgitlenýändigini, ýagny eger $\vec{c} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by}$ we $\vec{c} = \overrightarrow{x_1 a} + \overrightarrow{by_1}$ bolsa, onda $x=x_1$ we $y=y_1$ bolýandygyny subut etmek bolar.

Eger kollinear däl $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar berlen bolsa, onda $\vec{a}$ we $\vec{b}$ bilen komplanar bolan $\vec{c}$ wektoryň $\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{by}$ jem görnüşinde görkezilişine $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar boýunça $\vec{c}$ **wektoryň dagydylyşy** diýilýär.

V baba degişli gönükmeler

1. *ABCD* dörtburçluk – parallelogram. *AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA* şöhleleriň arasyndan birmeňzeş ugrukdyrylan we garşylykly ugrukdyrylan şöhleleriň jübütlerini aýdyň.

2. Islendik $\vec{a}$ we $\vec{b}$ wektorlar üçin $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$ deňsizligiň dogrudygyny subut ediň.

3. Üç nokat berlipdir: $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;1)$. $\overrightarrow{AB}$ we $\overrightarrow{CD}$ wektorlar deň bolar ýaly, $D\ (x,y)$ nokady tapyň.

4. Eger 1) $\vec{a}(1;-4)\,\vec{b}(-4;8)$; 2) $\vec{a}(-2;7)\,\vec{b}(4;-1)$.

5. $\vec{a}(10;7)\,\vec{b}(2;-2)$ bolsa, $\vec{a}-\vec{b}$ wektoryň absolýut ululygyny tapyň.

6. $\vec{a}(1;-1)$ we $\vec{b}(-2;m)$ wektorlaryň kollineardygy mälim, m-iň näçä deňdigini tapyň.

7. $\vec{a}(1;2), \vec{b}\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ wektorlaryň arasyndaky burçy tapyň.

8. $\vec{a}(3;4)$ we $\vec{b}(m;2)$ wektorlar berlipdir. m-iň haýsy bahasynda şol wektorlar perpendikulýardyrlar?

9. $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$ dört nokat berlipdir. $ABCD$ dörtburçlugyň gönüburçlukdygyny subut ediň.

VI BAP

TÖWEREK WE TEGELEK

§1. Töwerek we onuň deňlemesi

Töwerek diýip tekizligiň berlen nokadyndan deň daşlaşan ähli nokatlardan ybarat bolan figura aýdylýar.

Şol berlen nokada *töweregiň merkezi* diýilýär .

Töweregiň nokadyndan onuň merkezine çenli uzaklyga *töweregiň radiusy* diýilýär. Şeýle hem töweregiň nokadyny onuň merkezi bilen birleşdirýän islendik kesime *radius* diýilýär.

Töweregiň iki nokadyny birleşdirýän kesime *horda* diýilýär. Onuň merkeziniň üstünden geçýän horda *diametr* diýilýär.

Dekart koordinatalar tekizliginde **figuranyň deňlemesi** diýip, bu figuranyň islendik nokadynyň koordinatalaryny kanagatlandyrýan x we y iki näbellili deňlemä aýdylýar. Şol deňlemäni kanagatlandyrýan islendik iki san figuranyň käbir nokadynyň koordinatalarydyr.

Merkezi $A_0(a;\ b)$ nokatda bolan R radiusly töweregiň deňlemesini düzeliň. Töweregiň üstünde erkin $A(x;y)$ nokady alalyň. $A(x;\ y)$ nokatdan $A_0(a;\ b)$ nokada çenli uzaklygyň formulasyny ýazalyň:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

(1) deňleme merkezi $A_0(a;\ b)$ nokatda bolan R radiusly töweregiň deňlemesidir.

Koordinatalary (1) deňlemäni kanagatlandyrýan islendik A nokat töwerege degişlidir, çünki ondan A_0 nokada çenli uzaklyk R-e deňdir. Bu ýerden (1) deňlemäniň hakykatdan-da A_0 merkezli we R radiusly töweregiň deňlemesidigi gelip çykýar.

Eger töweregiň merkezi koordinatalar başlangyjy bolsa, onda töweregiň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$x^2+y^2=R^2.$$

§2. Töweregiň uzynlygy

Töweregiň uzynlygy barada aýdyň düşünje aşakdaky usul bilen alynýar, ýagny sapagy töwerek görnüşinde göz öňüne getireliň. Ony keselin we uçlaryndan tutup dartalyň. Alnan kesimiň uzynlygy töweregiň uzynlygydyr. Töweregiň radiusyny bilip, onuň uzynlygyny nähili tapmaly? Töweregiň uzynlygynyň onuň içinden çyzylan ýeterlik kiçi taraply güberçek köpburçlugyň perimetrinden juda az tapawutlanýandygy aýdyň göz öňüne getirmelerden düşnüklidir. Şondan ugur alyp, töweregiň uzynlygynyň käbir häsiýetlerini subut edeliň.

TEOREMA. Töweregiň uzynlygynyň onuň diametrine bolan gatnaşygy töwerege bagly däldir, ýagny islendik iki töwerek üçin şol bir gatnaşykdyr.

Subudy. Erkin iki töwerek alalyň. Goý, R_1 we R_2 – olaryň radiuslary, l_1 we l_2 – töwerekleriň uzynlyklary bolsun. Goý, teoremanyň tassyklamasy nädogry, ýagny

$$\frac{l_2}{2R_2} \neq \frac{l_1}{2R_1}, \text{ meselem: } \frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2} \qquad (1)$$

bolsun.

Töwerekleriň içinden köpsanly tarapy bolan dogry güberçek köpburçluklary çyzalyň. Eger n örän uly bolsa, onda biziň töwereklerimiziň uzynlyklary içinden çyzylan köpburçluklaryň p_1 we p_2 perimetrlerinden örän az tapawutlanýarlar. Şoňä görä-de eger (1) deňsizlikdäki l_1 ululyk p_1 bilen, l_2 ululyk p_2 bilen çalşyrylsa, ol deňsizlik bozulmaz:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (2)$$

p_1 we p_2 perimetrleri töwerekleriň radiuslary arkaly aňladalyň. Dogry köpburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň radiusy üçin bolan $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$ formuladan içinden çyzylan köpburçlugyň taraplarynyň $2R_1\sin\frac{180°}{n}$, $2R_2\sin\frac{180°}{n}$-e deňdigi gelip çykýar. Şoňa görä-de köpburçluklaryň perimetrleri $p_1 = 2R_1 n\sin\frac{180°}{n}$, $p_2 = 2R_2 n\sin\frac{180°}{n}$ bolar. Bu ýerden $\frac{p_1}{2R_1} = n\sin\frac{180°}{n}$, $\frac{p_2}{2R_2} = n\sin\frac{180°}{n}$, ýagny $\frac{p_1}{2R_1} = \frac{p_2}{2R_2}$. Bu bolsa (2) deňsizlige garşy gelýär. Teorema subut edildi.

Töweregiň uzynlygynyň diametre bolan gatnaşygyny π („*pi*" diýip okalýar) grek harpy bilen belgilemek kabul edilendir:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π san – irrasional san. Ýakynlaşan bahasy: $3{,}14 \approx \pi$.

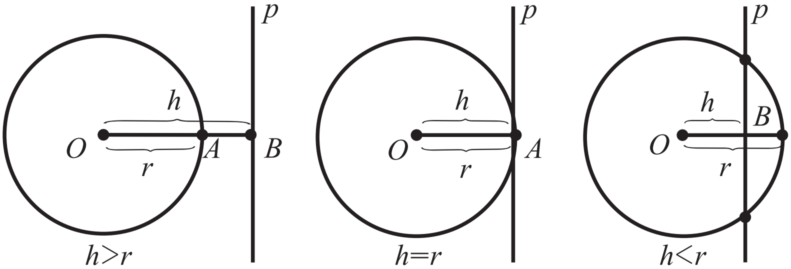
Şeýlelik bilen, töweregiň uzynlygy

$$l=2\pi R$$

formula boýunça kesgitlenilýär.

§3. Göni çyzyk bilen töweregiň özara ýerleşişi. Töwerege geçirilen galtaşýan göni çyzyk we onuň häsiýetleri

Göni çyzyk bilen töweregiň özara ýerleşişleriniň dürli hallary 71-nji a, b, ç suratlarda görkezilendir. Töwerek bilen diňe bir umumy nokady bolan göni çyzyga şol töwerege galtaşýan çyzyk, olaryň umumy nokadyna bolsa galtaşma nokady diýilýär. Eger göni çyzyk bilen töweregiň iki umumy nokady bar bolsa, onda göni çyzyk bilen töwerek kesişýär diýýärler.



a) b) ç)

71-nji surat

Berlen p göni çyzyk bilen (O, r) töweregiň näçe umumy nokady bar diýen sowala jogap bermek üçin töweregiň O merkezinden p göni çyzyga çenli h uzaklygy şol töweregiň r radiusy bilen deňeşdirmek talap edilýär.

Üç halyň bolýanlygy üçin: 1) $h>r$, 2) $h=r$, 3) $h<r$, bu hallara garalyň.

1. Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli uzaklyk töweregiň radiusyndan uly bolsa, onda göni çyzyk bilen töweregiň umumy nokady ýokdur (*71-nji a surat*).

Dogrudan-da, eger $h > r$ bolsa, onda p göni çyzygyň O merkeze ýakyn nokady (diýmek, ol göni çyzygyň islendik nokady hem) (O, r) töwerege degişli bolup bilmez. Çünki ol merkezden şol töweregiň radiusyndan uly bolan uzaklykda ýereşýär.

2. Eger töweregiň merkezinden göni çyzyga çenli uzaklyk töweregiň radiusyna deň bolsa, onda göni çyzyk bilen töweregiň bir we diňe bir umumy nokady bardyr (*71-nji b surat*).

Dogrudan-da, eger $h = r$ bolsa onda p göni çyzygyň O merkeze ýakyn nokady töweregiň radiusyna deň bolan uzaklykda ýerleşýär, diýmek, ol nokat töwerege degişlidir. p göni çyzygyň beýleki hemme nokady O merkezden töweregiň radiusyndan uly bolan uzaklykda bolýar, diýmek ol nokatlar töwerege degişli däldirler.

3. Eger $h < r$ bolsa, onda göni çyzyk töweregi iki nokatda kesýär (*71-nji ç surat*).

Töweregiň nokadynyň üstünden radiusa perpendikulýar geçýän göni çyzyga **galtaşýan göni çyzyk** diýilýär. Şonda töweregiň berlen nokadyna **galtaşma nokady** diýilýär. Töweregiň A nokady arkaly OA radiusa perpendikulýar $\boldsymbol{a}$ göni çyzyk geçirilipdir diýeliň, $\boldsymbol{a}$ göni çyzyk töwerege galtaşýan göni çyzykdyr. A nokat galtaşma nokadydyr. Şeýle hem töwerek $\boldsymbol{a}$ göni çyzyga A nokatda galtaşýar diýip bolar.

Eger umumy nokady bar bolan iki töweregiň şol nokatda umumy galtaşýan çyzygy bar bolsa, onda olar şol nokatda **galtaşýarlar** diýýärler. Eger töwerekleriň merkezleri olaryň umumy galtaşýan çyzygyndan bir tarapda ýatan bolsalar, onda şol töwerekleriň galtaşmasyna **içki galtaşma** diýilýär. Eger töwerekleriň merkezleri olaryň umumy galtaşýan çyzygyndan dürli taraplarda ýatýan bolsalar, onda şol töwerekleriň galtaşmasyna **daşky galtaşma** diýilýär.

§4. Merkezi we içinden çyzylan burçlar

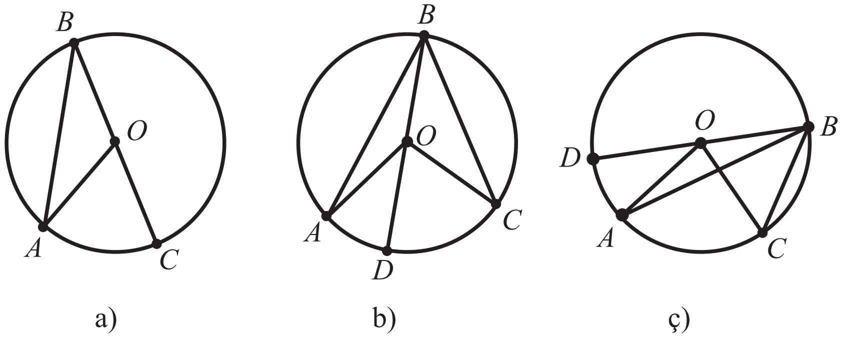
Depesi töweregiň merkezinde bolan burça merkezi burç diýilýär.

Depesi töwerekde ýatyp, taraplary bu töweregi kesýän burça töweregiň içinden çyzylan burç diýilýär.

TEOREMA. Töweregiň içinden çyzylan burç degişli merkezi burçuň ýarysyna deňdir.

Subudy. Ilki bilen burçuň taraplarynyň biri töweregiň merkezinden geçýän hala seredeliň (*72-nji a surat*). AOB üçburçluk deňýanly, sebäbi onuň OA we OB taraplary radiuslar hökmünde deň. A we B burçlaryň jeminiň üçburçlugyň O depesindäki daşky burçuna deňdigi sebäpli, üçburçlugyň B burçy AOC burçuň ýarysyna deň, şuny hem subut etmek talap edilýärdi.

Umumy hal goşmaça BD diametri geçirmek bilen seredilen hususy hala getirilýär.



72-nji surat

72-nji b suratda berlen halda:

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC$$

72-nji ç suratda berlen halda:

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

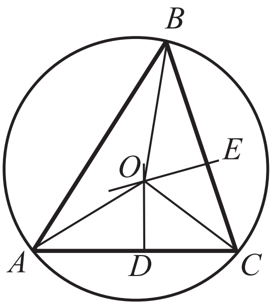
Teorema doly subut edildi.

§5. Üçburçlugyň daşyndan we içinden çyzylan tőwerek

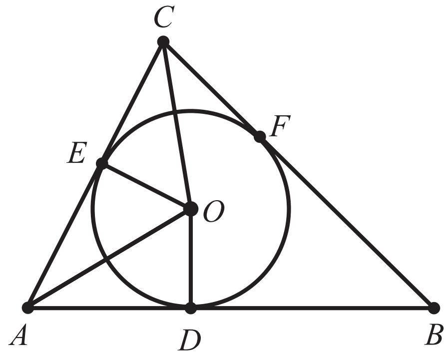
Eger töwerek üçburçlugyň ähli depesiniň üstünden geçýän bolsa, onda oňa üçburçlugyň daşyndan çyzylan töwerek diýilýär.

TEOREMA. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi üçburçlugyň taraplarynyň ortasyndan geçirilen perpendikulýarlaryň kesişme nokadydyr.

Subudy. Goý, ABC – berlen üçburçluk we O – onuň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi bolsun (*73-nji a surat*). AOC deňýanly üçburçlukdyr; onuň OA we OC taraplary radiuslar hökmünde deňdirler. Bu üçburçlugyň OD medianasy şol bir wagtda onuň beýikligidir. Şoňa görä-de, töweregiň merkezi AC perpendikulýar bolan we onuň ortasyndan geçýän göni çyzygyň üstünde ýatar. Töweregiň merkeziniň üçburçlugyň beýleki iki tarapyna bolan perpendikulýaryň üstünde ýatýandygy hem edil ýokardaky ýaly subut edilýär. Teorema subut edildi.



a)



b)

73-nji surat

Bellik. Kesimiň ortasyndan oňa perpendikulýar geçýän göni çyzyga, köplenç, **orta perpendikulýar** diýilýär. Şol sebäpli käwagt üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi üçbuçlugyň taraplaryna bolan orta perpendikulýaryň kesişmesiniň üstünde ýatýar hem diýýärler.

Eger töwerek üçburçlugyň ähli taraplary bilen galtaşýan bolsa, onda oňa üçburçlugyň içinden çyzylan töwerek diýilýär.

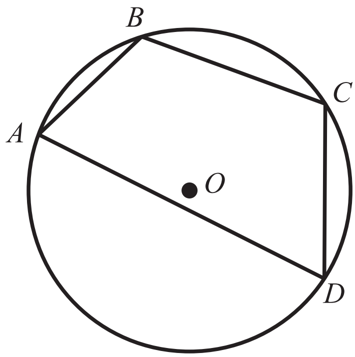
TEOREMA. Üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň merkezi onuň bissektrisalarynyň kesişme nokadydyr.

Subudy. Goý, *ABC* berlen üçburçluk, *O* – onuň içinden çyzylan töweregiň merkezi, *D, E* we *F* – töweregiň taraplary bilen galtaşma nokady bolsun (*73-nji b surat*). *AOD* we *AOE* gönüburçly üçburçluklar gipotenuzasy we kateti boýunça deňdirler. Olaryň *AO* gipotenuzasy umumy, *OD* we *OE* katetleri bolsa radiuslar hökmünde deňdirler. Üçburçluklaryň deňdiginden *OAD* we *OAE* burçlaryň deňdigi gelip çykýar. Bu bolsa *O* nokat üçburçlugyň *A* depeden geçirilen bissektrisasynyň üstünde ýatýar diýildigidir. *O* nokadyň üçburçlugyň beýleki iki bissektrisasynyň üstünde ýatýandygy hem edil ýokarky ýaly subut edilýär. Teorema subut edildi.

§6. Içinden çyzylan we daşyndan çyzylan dörtburçluklar

TEOREMA. Içinden çyzylan dörtburçlugyň garşylykly burçlarynyň jemi 2*d* deňdir.

Subudy. Goý, *ABCD* dörtburçluk (O; r) töweregiň içinden çyzylan bolsun (*74-nji surat*). Onda içinden çyzylan burç hakyndaky teorema görä



74-nji surat

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD, \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB.$$

Diýmek,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup DAB = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup DAB).$$

Ýöne, *BCD* we *DAB* dugalaryň birikmesi töwerekdir. Diýmek, *A* we *C* burçlaryň jemi töweregiň ýarysynyň burç ululygyna deň, ýagny $\angle A + \angle C = 2d$.

Şeýlelikde, dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak üçin onuň garşylykly burçlarynyň jeminiň 2*d* deň bolmagy zerurdyr.

Içinden çyzylan dörtburçluk bolmak üçin şu şert ýeterlikdir.

TEOREMA. **Eger dörtburçlukda garşylykly iki burçuň jemi 2*d* deň bolsa, onda şu hili dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak bolar.**

Subudy. $\angle B$ we $\angle D$ burçlaryň jemi 2*d*, ýagny $\angle B + \angle D = 2d$.

ABCD dörtburçluga garalyň. Dörtburçlugyň *A, B* we *C* depeleriniň üstünden töwerek geçireliň. Teoremany subut etmek üçin dördünji *D* depäniň şu töweregiň içinde hem, daşynda hem ýatmajakdygyny görkezmek zerurdyr.

Goý, *D* nokat töweregiň içinde ýatýar diýeliň. Onda

$\angle B + \angle D = 2d$ (teoremanyň şerti boýunça),

$\angle B + \angle E = 2d$ (teorema boýunça).

Bu ýerden $\angle D = \angle E$ munuň özi mümkin däldir. (*EDC* üçburçlugyň daşky *D* burçy onuň içki *E* burçuna deň bolup bilmez). Diýmek, *D* nokat gurlan töweregiň içinde ýatyp bilmez.

D depäniň şu töweregiň daşynda ýatyp bilmejegi hem ýokarka meňzeş subut edilýär.

Şunlukda, *D* depe töweregiň içinde hem, daşynda hem ýatyp bilmez. Diýmek, *D* nokat şu töweregiň üstünde ýatmaly, ýagny *ABCD* dörtburçlugyň daşyndan töwerek çyzmak bolar.

TEOREMA. Daşyndan çyzylan dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň jemi deňdir.

Subudy. Goý, *ABCD* dörtburçlugyň taraplary (*O*; *r*) töwerege degişlilikde *M, P, Q, N* nokatlarda galtaşsyn. Onda bir nokatdan geçirilen galtaşýanlaryň häsiýeti boýunça aşakdakylary alarys:

$$AM=AN,\ BM=BP,\ CQ=CP,\ DQ=DN.$$

Bu deňlikleri agzama-agza goşup alarys:

$$AB+CD=AD+BC.$$

Şeýlelikde, dörtburçlugyň içinden töwerek çyzmak üçin zerur şerti aldyk. Güberçek dörtburçluklar üçin bu şert ýeterlik hem eken.

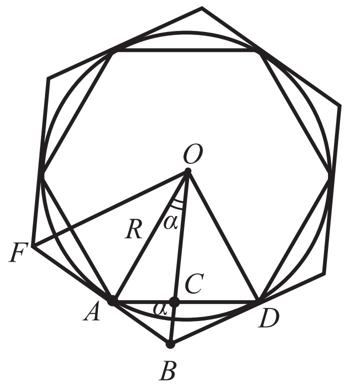
TEOREMA. Eger güberçek dörtburçlugyň garşylykly taraplarynyň jemleri deň bolsa, onda bu dörtburçlugyň içinden töwerek çyzmak bolar (özbaşdak subut ediň).

§7. Tegelek. Tegelegiň meýdany

Tekizligiň berlen nokadyndan berlen uzaklykdan uly bolmadyk uzaklykda ýerleşýän ähli nokatlardan ybarat bolan figura *tegelek* diýilýär. Şol nokada *tegelegiň merkezi,* berlen uzaklyga bolsa *tegelegiň radiusy* diýilýär. Tegelegiň araçägi şol merkezli we radiusly töwerekdir.

TEOREMA. Tegelegiň meýdany ony çäklendirýän töweregiň uzynlygyny radiusa köpeltmek hasylynyň ýarysyna deň.

Subudy. Iki dogry P_1 – tegelegiň içinden çyzylan we P_2 – tegelegiň daşyndan çyzylan köpburçlugy guralyň (*75-nji surat*). P_1 we P_2 ýönekeý figuralardyr. P_2 köpburçluk tegelegi özünde saklaýar, P_1 köpburçluk bolsa tegelekde saklanýar.



75-nji surat

P_1 köpburçlugyň depesinden geçirilen radiuslar tegelegi AOD üçburçluga deň bolan n sany üçburçluga bölýär. Şoňa görä-de

$$S(P_1) = nS(AOD).$$

$S(AOD) = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cos \alpha$ bolýandygy sebäpli,

$$S(P_1) = (nAC) \cdot AO \cos \alpha = \frac{Rp}{2} \cos \alpha,$$

bu ýerde p – P_1 köpburçlugyň perimetri, R tegelegiň radiusy.

P_2 köpburçlugyň meýdanyny şoňa meňzeşlikde taparys:

$$S(P_2) = nS(BOF),$$

$$S(BOF) = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos \alpha} \cdot AO,$$

$$S(P_2) = \frac{(nAC)AO}{\cos \alpha} = \frac{RP}{2\cos \alpha}.$$

P – P_2 köpburçlugyň perimetri.

Şeýlelikde, tegelekde saklanýan P_1 we P_2 köpburçluklaryň meýdany:

$$S(P_1) = \frac{pR}{2} \cos \alpha, \quad S(P_2) = \frac{PR}{2\cos \alpha}.$$

n ýeterlik uly bolanda P perimetr töweregiň l uzynlygyndan örän az tapawutlanýandygy, α burçuň kiçidigi sebäpli, $\cos\alpha$ birden örän az tapawutlanýandygy üçin P_1 we P_2 köpburçluklaryň meýdanlary $\frac{lR}{2}$-den örän az tapawutlanýarlar. Teorema laýyklykda bu tegelegiň meýdany

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2 \text{ deňdir.}$$

Teorema subut edildi.

§8. Tegelegiň sektorynyň meýdany

Tegelege degişli merkezi burçuň içinde ýatan bölegine *tegelek sektor* diýilýär (*76-njy a surat*).

Tegelek sektoryň meýdany aşakdaky formula boýunça hasaplanylýar:

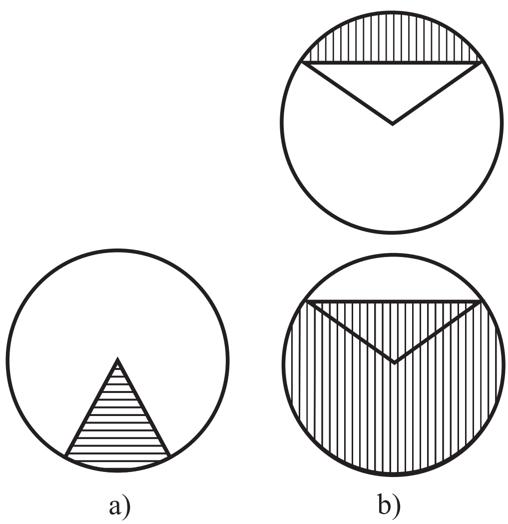
$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha,$$

bu ýerde R – tegelegiň radiusy, α – degişli merkezi burçuň gradus ölçegi.

Tegelek segment diýip, tegelek bilen ýarymtekizligiň umumy bölegine aýdylýar. Ýarymtegelege deň bolmadyk segmentiň meýdany

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha \pm S_\Delta,$$

formula boýunça hasaplanylýar, bu ýerde α – şol tegelek segmentiň dugasyny saklaýan merkezi burçuň gradus ölçegi, S_Δ – depesi tegelegiň merkezinde bolan we radiuslarynyň uçlary degişli sektor bilen çäklenýän üçburçlugyň meýdany. $\alpha < 180^\circ$ bolanda "–" alamaty, $\alpha > 180^\circ$ bolanda bolsa, " +" alamaty alynýar.



76-njy surat

VI baba degişli gönükmeler

1. (1; 2), (3; 4), (– 4; 3), (0; 5), (5; – 1) nokatlaryň haýsylary $x^2 + y^2 = 25$ deňleme bilen berlen töwerekde ýatýar?

2. $x^2 + y^2 = 169$ deňleme bilen berlen töwerekde: 1) abssissasy 5; 2) ordinatasy 12 bolan nokady tapyň.

3. A (– 1; – 1) we C (– 4; 3) nokatlar berlipdir. Merkezi C nokatda bolan we A nokat arkaly geçýän töweregiň deňlemesini düzüň.

4. Iki: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 – 2x + y – 2 = 0$ töweregiň kesişme nokatlarynyň koordinatalaryny tapyň.

VII BAP

ELLIPS, GIPERBOLA WE PARABOLA

§1. Ellipsiň deňlemesi we meýdany

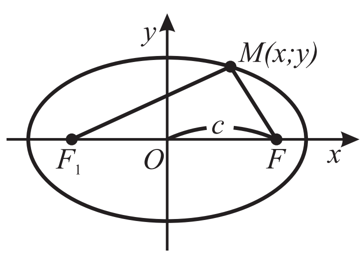
Kesgitleme. Berlen iki nokatdan uzaklyklarynyň jemi hemişelik bolan tekizlikdäki nokatlaryň geometrik ornuna **ellips** diýilýär.

Berlen nokatlara ellipsiň **fokuslary** diýilýär. Olary F we F_1 bilen belläliň. Goý, M ellipsiň erkin nokady bolsun (*77-nji surat*). Bu nokatdan fokuslara çenli uzaklyklaryň jemini $2a$ bilen belläliň. Onda kesgitlemä görä:

$$FM + F_1M = 2a.$$

F_1 we F fokuslaryň arasyndaky uzaklygy $2c$ bilen belleýärler: $F_1 F = 2c$.

$F_1F < F_1M + FM$ bolany üçin $2c < 2a$, ýagny $c < a$. Ellipsiň deňlemesini düzeliň. F_1F göni çyzygy abssissalar oky, F_1F kesimiň ortasyny koordinatalar başlangyjy hökmünde kabul



77-nji surat

edeliň. Onda F_1 we F nokatlaryň koordinatalary (–c; 0) we (c; 0) bolar. M nokadyň koordinatalary ($x; y$) bolsun. Koordinatalary boýunça kesimiň uzynlygyny hasaplamagyň formulasy esasynda alarys:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};\ FM = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};\ F_1M + FM = 2a$$

deňlikde F_1M we FM bahalaryny goýup alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Ýönekeýleşdirip alarys:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ ýa-da } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

$a^2 - c^2$ ululygyň položiteldigini göz öňünde tutsak, ýokarky deňlemäni $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ görnüşde ýazmak bolar. Bu ýerde $b^2 = a^2 - c^2$.
Deňlemedäki a we b ululyklar ellipsiň uly we kiçi ýarym oklarynyň uzynlyklarydyr: $a = OA$, $b = OB$.

Ellipsiň meýdanyny hasaplamak üçin orta mekdebiň algebra we analiziň başlangyçlary kursundaky egri çyzykly trapesiýa üçin getirilip çykarylan formulany ulanalyň:

$$S = \int_b^a f(x)\,dx, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, S = 4\cdot\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi\, ab.$$

Hakykatdan hem:

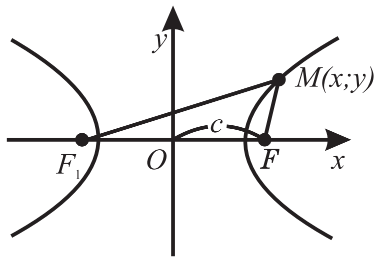
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^2 a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^2 \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

($x = a\sin t$; $dx = a\cos t\,dt$; $0 = a\sin t$; $t = 0$; $a = a\sin t$; $1 = \sin t$; $t = \frac{\pi}{2}$). Onda

$$S = 4\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

§2. Giperbola we onuň deňlemesi



78-nji surat

Kesgitleme. Berlen F_1 we F nokatlardan uzaklyklarynyň tapawudynyň absolýut bahasy hemişelik bolan tekizlikdäki nokatlaryň geometrik ornuna *giperbola* diýilýär.

$M(x, y)$ giperbolanyň erkin nokady bolsa, onda $|F_1M–FM|=2a$.

F_1 we F nokatlara giperbolanyň *fokuslary,* F_1F uzaklyga *fokus aralygy* diýilýär we ol $2c$ bilen bellenilýär (*78-nji surat*): $F_1F=2c$.

$F_1F >|F_1M – FM|$ bolany üçin, $c > a$.

Giperbolanyň deňlemesini düzeliň.

Ox oky diýip F_1F göni çyzygy, koordinata başlangyjy hökmünde F_1F fokus aralygyň ortasy O nokadyny kabul edeliň. Onda $F(c; 0)$, $F_1(–c; 0)$ bolar. $M(x; y)$ giperbolanyň sag şahasynyň nokady bolsa, onda kesgitlemä laýyklykda alarys:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

$M(x; y)$ giperbolanyň çep şahasynyň nokady bolsa, onda kesgitlemä laýyklykda alarys:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Bu deňlikden alarys: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2=a^2(a^2 – c^2)$ ýa-da:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

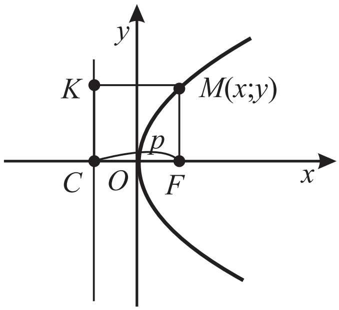
$a < c$ bolany üçin $a^2 – c^2$ – otrisatel ululyk, şonuň üçin $c^2 – a^2 = b^2$ diýip bellesek,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ deňlemäni alarys.

Bu deňlemä giperbolanyň *kanonik* deňlemesi diýilýär, bu ýerdäki a we b ululyklara giperbolanyň degişlilikde hakyky we hyýaly ýarym oklary diýilýär.

§3. Parabola we onuň deňlemesi

Kesgitleme. Berlen nokatdan we göni çyzykdan deň uzaklaşan tekizlikdäki nokatlaryň geometrik ornuna *parabola* diýilýär. Berlen



79-njy surat

nokada parabolanyň fokusy, göni çyzyga bolsa onuň direktrisasy diýilýär.

Parabolanyň deňlemesini düzeliň.

Koordinata başlangyjy hökmünde FC kesimiň O ortasy, abssissalar oky diýip CF göni çyzygy kabul edeliň (*79-njy surat*). Onda $C\left(-\frac{p}{2};0\right)$ we $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ bolar. $M\,(x;\,y)$ parabolanyň erkin nokady bolsun.

$$FM = KM,\ FC = p.$$

Kesgitlemä görä $FM = KM$. $C\left(-\frac{p}{2};0\right)$ bolany üçin $K\left(-\frac{p}{2};y\right)$ bolar. $FM = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$; $KM = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$;

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2};$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ýönekeýleşdirip alarys: $y^2 = 2px$.

Bu parabolanyň kanonik deňlemesidir.

Taryhy maglumatlar

Biz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$ deňlemeleriň degişlilikde ellipsi, giperbolany, parabolany kesgitleýändigini anykladyk. Bu egriler (egri çyzyklar) kosmonawtika we astronomiýa, mehanika we arhitektura üçin uly ähmiýete eýedirler. Olar bilen gadymy grekleriň tanyş bolandygy belli. Grek matematikleri koordinatalar usulyny, deňlemeleri bilmändirler, ýöne şonda-da olara ellipsiň, giperbolanyň, parabolanyň ähli häsiýetleri belli bolupdyr. Grekler bu egrileri koniki üstleriň tekiz kesikleri hökmünde alypdyrlar we öwrenipdirler.

Şondan bäri ellipse, giperbola, parabola *koniki kesikler* diýilýär. Bu egrileriň başga-da umumy häsiýetleri bar. Bu egrileriň deňlemeleri ikinji derejeli x^2, y^2, xy goşujylaryň hiç bolmanda birini saklaýarlar. Şonuň üçin ellipse, giperbola, parabola **ikinji tertipli egriler** diýilýär.

Ylmyň we tehnikanyň ösüş taryhynyň bütin dowamynda ikinji derejeli deňlemeler alymlaryň ünsüni özüne çekip gelipdir. Ony bizi gurşap alan tebigy hadysalarda we adam işlerinde ellipsiň, giperbolanyň, parabolanyň ýygy-ýygydan duş gelýändigi bilen düşündirmk bolar. Mysal üçin, ýiti burç boýunça zyňylan daş ýa-da atylan top oky parabola meňzeş egri çyzyk boýunça hereket edýär. Dürli prožektorlaryň, antennalaryň gurluşynda "parabolik aýnalar" ulanylýar. Önümçilikde käbir mehanizmleriň gurluşynda "elliptik" dişli geçirijiler ulanylýar. Köplenç, iki ululyk özara ters proporsional baglylykda bolýarlar. Mysal üçin, gazyň basyşy we göwrümi. Şeýle funksional baglylygyň grafigi giperbola bolýar.

Nemes astronomy *Iogan Kepleriň* (1571-1630) we iňlis fizigi we matematigi *Isaak Nýutonyň* (1643-1727) açyşlaryndan soň ikinji derejeli egriler uly ylmy ähmiýete eýe boldular. Kepler asman giňişliginde planetalaryň görünýän hereketlerine syn edip, üç kanun açypdyr. Şolaryň birinde her bir planetanyň fokuslarynyň birinde Günüň ýerleşendigi aýdylýar. Nýuton planetalaryň hereket kanunlaryny diňe bir esaslandyrman, eýsem her bir jisimiň beýleki jisimiň dartyş güýjüniň täsiri astynda diňe ýa ellips, ýa-da giperbola, ýa-da parabola boýunça hereket edýändigini subut hem edipdir. Hususan-da Gün sistemasynyň ähli kometalarynyň hereketleri bu egriler boýunça bolup geçýär.

Biziň döwrümizde Ýeriň daşyndan müňlerçe emeli hemralar elliptik orbitalar boýunça aýlanan wagtynda, goňşy planetalara onlarça kosmiki gämileriň ugradylýan döwründe ikinji derejeli egriler has köp ulanylýar.

VIII BAP

STEREOMETRIÝANYŇ AKSIOMALARY WE OLARDAN GELIP ÇYKÝAN NETIJELER

§1. Stereometriýanyň aksiomalary

Stereometriýa – bu geometriýanyň giňişlikdäki figuralary öwrenýän bölümidir. Stereometriýada hem geometrik figuralaryň häsiýetleri edil planimetriýada bolşy ýaly, degişli teoremalary subut etmek arkaly kesgitlenilýär. Şonda aksiomalar bilen aňladylýan esasy geometrik figuralaryň häsiýetleri başlangyç häsiýetlerdir. Giňişlikde esasy figuralar nokat, göni çyzyk we tekizlikdir. Täze geometrik figuranyň – tekizligiň girizilmegi aksiomalaryň sanyny giňeltmäge mejbur edýär. Şonuň üçin hem biz *C* aksiomalar toparyny girizeris, ol giňişlikdäki tekizlikleriň esasy häsiýetlerini aňladýar. Bu topar aşakdaky üç aksiomadan ybarat.

C_1. Tekizlik nähili bolsa-da, oňa degişli hem-de oňa degişli bolmadyk nokatlar bardyr.

C_2. Eger dürli iki tekizligiň umumy nokady bar bolsa, onda olar göni çyzyk boýunça kesişýärler.

Eger dürli iki α we β tekizlikleriň umumy nokady bar bolsa, onda bu tekizlikleriň her birine degişli bolan c göni çyzyk bardyr diýlen sözlem şu aksioma bilen tassyklanylýar. Şonda eger C nokat iki tekizlige hem degişli bolsa, onda ol c göni çyzyga degişlidir.

C_3. Eger dürli iki göni çyzygyň umumy nokady bar bolsa, onda olaryň üstünden tekizlik geçirip bolar, özünem diňe birini geçirip bolar.

Bu bolsa, eger dürli iki a we b göni çyzyklaryň C umumy nokady bar bolsa, onda a we b göni çyzyklary saklaýan γ tekizlik bardyr diýildigidir. Bu häsiýete eýe bolan tekizlik ýeke-täkdir. Şeýlelik bilen, stereometriýanyň aksiomalarynyň ulgamy planimetriýanyň aksiomalaryndan we *C* aksiomalaryň toparyndan ybaratdyr. Beýan etmek amatly bolar ýaly, planimetriýanyň birinji toparynyň aksiomalaryny ýatlalyň.

I_1. Göni çyzyk nähili bolsa-da oňa degişli hem-de oňa degişli bolmadyk nokatlar bardyr.

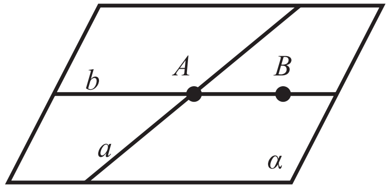
I_2. Islendik dürli iki nokat arkaly bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar.

§ 2. Stereometriýanyň aksiomalaryndan gelip çykýan netijeler

1. Berlen göni çyzygyň we berlen nokadyň üstünden geçýän tekizligiň barlygy

1-nji TEOREMA. Göni çyzyk we onuň üstünde ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirmek bolar.

Subudy. Goý, a – berlen göni çyzyk we B – oňa degişli bolmadyk nokat bolsun. (*80-nji surat*) a – göni çyzygyň üstünde haýsy hem bolsa bir A nokady belläliň. Şeýle nokat I_1 aksioma boýunça bardyr. A we B nokatlar arkaly b göni çyzygy geçireliň (I_2 *aksioma*). a we b göni çyzyklar dürlüdirler, çünki b göni çyzygyň B nokady a göni çyzykda ýatmaýar. a we b göni çyzyklaryň umumy A nokady bardyr. a we b göni çyzyklaryň üstünden α tekizligi geçireliň (C_3 *aksioma*). Bu tekizlik a göni çyzygyň we B nokadyň üstünden geçýär.



80-nji surat

Indi bolsa a göni çyzygyň we B nokadyň üstünden geçýän tekizligiň ýeke-täkdigini subut edeliň. Goý, a göni çyzygyň we B nokadynyň üstünden geçýän α tekizlikden tapawutly tekizlik bar bolsun. Dürli bolan α we α'tekizlikler C_2 aksioma görä göni çyzyk, hut a göni çyzyk boýunça kesişýärler. Şeýlelikde, α we α' tekizligiň islendik üç umumy nokady a göni çyzykda ýatýar. Emma α we α' tekizlikler üçin umumy bolan B nokat a göni çyzykda ýatmaýandygy äşgärdir. Biz garşylyga geldik. Teorema subut edildi.

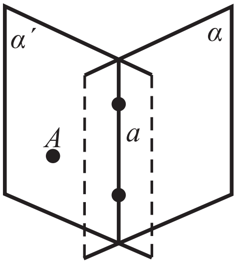
Mesele. Dört nokat bir tekizlikde ýatmaýar. Olardan haýsy hem bolsa üçüsi bir göni çyzygyň üstünde ýatyp bilermi? Jogabyny düşündiriň.

Çözülişi. Goý, haýsy hem bolsa üç nokat bir göni çyzykda ýatýar diýeliň. Şol göni çyzyk we dördünji nokat arkaly tekizlik geçireliň (*1-nji teorema*). Bu tekizlikde ähli dört nokat hem ýatýar. Bu bolsa meseläniň şertine garşy gelýär. Diýmek, hiç bir üç nokat bir göni çyzygyň üstünde ýatyp bilmez.

2. Göni çyzyk bilen tekizligiň kesişmesi

2-nji TEOREMA. Eger göni çyzygyň iki nokady tekizlige degişli bolsa, onda bu göni çyzyk tutuşlygyna tekizlige degişlidir.

Subudy. Goý, a – berlen göni çyzyk, α – berlen tekizlik bolsun. (*81-nji surat*). I_1 aksioma boýunça a göni çyzykda ýatmaýan A nokat bardyr. a göni çyzyk we A nokat arkaly α' tekizlik geçireliň. Eger

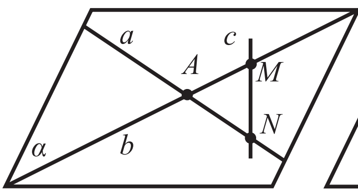


81-nji surat

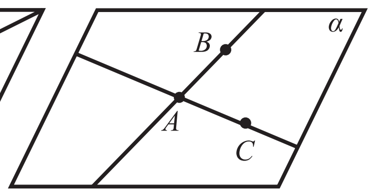
α' tekizlik α bilen gabat gelýän bolsa, onda α tekizlik a göni çyzygy özünde saklaýar, bu bolsa teorema bilen tassyklanylýar. Eger α' tekizlik α tekizliginden tapawutly bolsa, onda bu tekizlikler a göni çyzygyň iki nokadyny özünde saklaýan a' göni çyzyk boýunça kesişýärler. I_2 aksioma boýunça a' göni çyzyk a göni çyzyk bilen gabat gelýär we şeýlelikde, a göni çyzyk α tekizlikde ýatýar. Teorema subut edildi.

2-nji teoremadan tekizligiň we onuň üstünde ýatmaýan göni çyzygyň ýa-ha kesişmeýändigi ýa-da bir nokatda kesişýändigi gelip çykýar.

Mesele. *A* nokatda kesişýän dürli iki göni çyzyk berlipdir.Berlen göni çyzyklary kesýan we *A* nokatdan geçmeýän ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.



82-nji surat



83-nji surat

Çözülişi. Berlen a we b göni çyzyklar arkaly α tekizlik geçireliň (*82-nji surat*). Muny C_3 aksioma boýunça edip bolýar. Berlen göni çyzyklary kesýän c göni çyzygyň α tekizlik bilen iki M we N umumy nokady bar (berlen göni çyzyklar bilen kesişme nokatlary). 2-nji teorema boýunça bu göni çyzyk hökmany α tekizlikde ýatmalydyr.

3. Berlen üç nokadyň üstünden geçýän tekizligiň barlygy

3-nji TEOREMA. Bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

Subudy. Goý, A, B, C – bir göni çyzykda ýatmaýan üç nokat bolsun (*83-nji surat*). AB we AC göni çyzyklary geçireliň; olar dürlüdir, çünki A, B, C nokatlar bir göni çyzykda ýatmaýarlar. C_3 aksioma boýunça AB we AC göni çyzyklar arkaly α tekizligi geçirmek bolar. Bu tekizlik A, B, C nokatlary özünde saklaýar.

A, B, C nokatlar arkaly geçýän α tekizligiň ýeke-täkdigini subut edeliň. Hakykatdan-da A, B, C nokatlar arkaly geçýän tekizlik Teorema 2 boýunça AB we AC göni çyzyklary özünde saklaýar. C_3 aksioma boýunça bolsa şeýle tekizlik ýeke-täkdir.

Mesele. Eger üç nokat bir göni çyzykda ýatýan bolsa, onda olar arkaly tekizlik geçirip bolarmy? Jogabyny düşündiriň.

Çözülişi. Goý, A, B, C – a göni çyzykda ýatýan üç nokat bolsun. a göni çyzykda ýatmaýan D nokady alalyň. (*aksioma* I_2) A, B, D nokatlar arkaly tekizlik geçirip bolar. (*3-nji teorema*). Bu tekizlik a göni çyzygyň iki – A we B nokadyny özünde saklaýar, diýmek, bu göni çyzygyň C nokadyny hem saklaýandyr. (*2-nji teorema*). Şeýlelikde, bir göni çyzykda ýatýan üç nokat arkaly mydama tekizlik geçirip bolar.

VIII baba degişli gönükmeler

1. A, B, C we D nokatlar bir tekizlikde ýatmaýarlar. AB we CD göni çyzyklaryň kesişmeýändigini subut ediň.

2. Berlen iki göni çyzygyň kesişme nokady arkaly olar bilen bir tekizlikde ýatmaýan üçünji göni çyzygy geçirip bolarmy? Jogabyny düşündiriň.

3. A, B, C nokatlar dürli tekizligiň her birinde ýatýarlar. Bu nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.

4. Jübüt-jübütden kesişýän dürli üç tekizlik berlipdir. Eger bu tekizlikleriň kesişme çyzyklarynyň ikisi kesişýän bolsa, onda üçünji kesişme çyzygyň kesişme nokat arkaly geçýändigini subut ediň.

5. Dört nokat bir göni çyzykda ýatyp bilermi? Jogabyny düşündiriň.

6. Kesişmeýän iki tekizlik berlipdir. Bu tekizlikleriň birini kesip gelýän göni çyzygyň beýleki tekizligi hem kesýändigini subut ediň.

7. A nokatda kesişýän dürli iki göni çyzyk berlipdir. Berlen göni çyzyklary kesýän we A nokatdan geçmeýän ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

8. Berlen göni çyzygy kesýän we berlen göni çyzygyň daşynda ýatan berlen nokat arkaly geçýän ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

9. Eger AB we CD göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýan bolsa, onda AC göni çyzyklaryň hem bir tekizlikde ýatmaýandygyny subut ediň.

10. Bir tekizlikde ýatmaýan dört nokat berlipdir. Bu nokatlaryň üçüsiniň üstünden geçýän näçe sany dürli tekizlik geçirip bolar? Jogabyny düşündiriň.

11. Eger üç nokat bir göni çyzykda ýatýan bolsa, onda olar arkaly tekizlik geçirip bolarmy? Jogabyny düşündiriň.

12. Bir göni çyzykda ýatýan üç nokat arkaly dürli iki tekizlik geçirip bolarmy? Jogabyny düşündiriň.

13. Dört nokat berlipdir. Şol nokatlaryň islendik ikisi arkaly geçýän göni çyzygyň beýleki ikisi arkaly geçýän göni çyzyk bilen kesişmeýändigi mälim. Berlen dört nokadyň bir tekizlikde ýatmaýandygyny subut ediň.

IX BAP

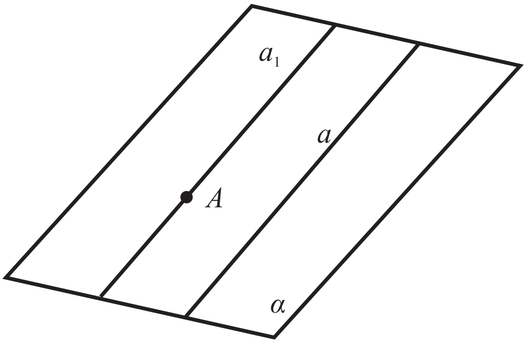
GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PARALLELIGI

§1. Giňişlikde parallel göni çyzyklar

Eger iki göni çyzyk bir tekizlikde ýatýan bolsa we kesişmeýän bolsa, onda olara giňişlikde parallel göni çyzyklar diýilýär. Kesişmeýän we bir tekizlikde ýatmaýan göni çyzyklara atanak göni çyzyklar diýilýär.

1-nji TEOREMA. Berlen göni çyzygyň daşynda ýatýan nokat arkaly bu göni çyzyga parallel bir we diňe bir göni çyzyk geçirip bolar.

Subudy. Goý, a – berlen göni çyzyk, A – bu göni çyzykda ýatmaýan nokat bolsun (*84-nji surat*). a göni çyzyk we A nokat arkaly α tekizligi geçireliň. α tekizlikde A nokat arkaly a göni çyzyga parallel a_1 göni çyzyk geçireliň. a göni çyzyga parallel a_1 göni çyzygyň ýeketäkdigini subut edeliň.



84-nji surat

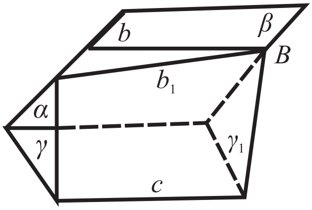
Goý, A nokatdan geçýän we a göni çyzyga parallel başga bir a_2 göni çyzyk bar bolsun. a we a_2 göni çyzyklar arkaly a_2 tekizlik geçirmek mümkin. α_2 tekizlik a göni çyzyk we A nokat arkaly geçýär; şeýlelikde 1-nji teorema (VIII bap) boýunça ol α tekizlik bilen gabat gelýär. Indi parallel göni çyzyklaryň aksiomasy boýunça a_1 we a_2 göni çyzyklar gabat gelýär. Teorema subut edildi.

§2. Göni çyzyklaryň parallellik nyşany

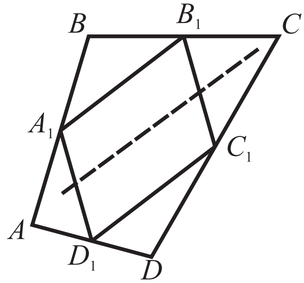
2-nji TEOREMA. Üçünji göni çyzyga parallel iki göni çyzyk paralleldirler.

Subudy. Goý, b we c göni çyzyklar a göni çyzyga parallel bolsun. b we c göni çyzyklaryň paralleldigini subut edeliň.

a, b, we c göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýan halyna planimetriýada seredilipdi. Şonuň üçin biziň göni çyzyklarymyz bir tekizlikde ýatmaýar diýip güman ederis. Goý, $\beta - a$ we b göni çyzyklaryň ýatýan tekizligi, $\gamma - a$ we c göni çyzyklaryň ýatýan tekizligi bolsun. β we γ tekizlikler dürlüdirler (*85-nji surat*). b göni çyzykda haýsy hem bolsa bir B nokady belläliň we c göni çyzyk we B nokat arkaly γ_1 tekizligi geçireliň. Ol β tekizligi b_1 göni çyzyk boýunça keser.



85-nji surat



86-njy surat

b_1 göni çyzyk γ tekizligi kesmeýär. Hakykatdan-da, kesişme nokady a göni çyzyga degişli bolmaly, çünki b_1 göni çyzyk β tekizlikde ýatýar. Başga tarapdan, c göni çyzykda hem ýatmaly, çünki b_1 göni çyzyk γ_1 tekizlikde ýatýar. Emma a we c göni çyzyklar edil parallel göni çyzyklar ýaly kesişmeýärler. b_1 göni çyzygyň β tekizlikde ýatýandygyny we a göni çyzygy kesmeýändigi sebäpli, ol a göni çyzyga paralleldir. Diýmek, parallel göni çyzyklaryň aksiomasy boýunça b göni çyzyk bilen gabat gelýär. Şeýlelik bilen, b göni çyzyk b_1 göni çyzyk bilen gabat gelýär, c göni çyzyk bilen bir tekizlikde (γ_1 tekizlikde) ýatýar we ony kesmeýär. Diýmek, b we c göni çyzyklar paralleldirler. Teorema subut edildi.

Mesele. Giňişlikdäki dörtburçlugyň taraplarynyň ortalarynyň parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. Goý, $ABCD$ – giňişlikde berlen dörtburçlugyň (dörtburçlugyň depeleri bir tekizlikde ýatmaýar) bolsun (*86-njy surat*). Goý, A_1, B_1, C_1, D_1 – onuň taraplarynyň ortalary bolsun. Şonda $A_1 B_1$ we ABC üçburçlugyň AC tarapyna parallel orta çyzygy. C_1, D_1 – ACD üçburçlugyň AC tarapyna parallel orta çyzygy. Subut edilen teorema boýunça $A_1 B_1$ we $C_1 D_1$ göni çyzyklar parallel, diýmek, bir tekizlikde ýatýarlar. $A_1 D_1$ we $B_1 C_1$ göni çyzyklaryň parallelligi hem edil şolar ýaly subut edilýär. Şeýlelikde, A_1, B_1, C_1, D_1 dörtburçluk bir tekizlikde ýatýar we garşylykly taraplary parallel diýmek, ol parallelogramdyr.

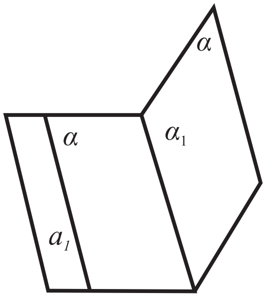
§3. Göni çyzygyň we tekizligiň parallelligi

Eger göni çyzyk we tekizlik kesişmeýän bolsa onda olara parallel diýilýär.

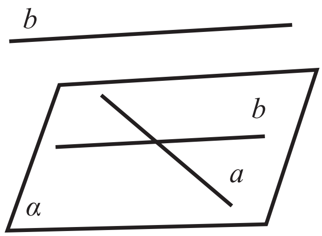
3-nji TEOREMA. Eger tekizlige degişli bolmadyk göni çyzyk şol tekizligiň haýsy hem bolsa bir göni çyzygyna parallel bolsa, onda ol tekizligiň özüne hem paralleldir.

Subudy. Goý, α – tekizlik, a –şol tekizlikde ýatmaýan göni çyzyk we a_1 göni çyzyk α tekizlikde ýatyp, a göni çyzyga parallel bolsa a we a_1 göni çyzyklar arkaly α_1 tekizlik geçireliň (*87-nji surat*). Ol α tekizlikden tapawutlydyr. Çünki a göni çyzyk α tekizlikde ýatmaýar. α we

α_1 tekizlikler a_1 göni çyzyk boýunça kesişýärler. Eger a göni çyzyk α tekizligi kesýän bolsady, onda kesişme nokady a_1 göni çyzyga degişli bolardy. Emma bu mümkin däldir, çünki a we a_1 göni çyzyklar parallеldirler. Şeýlelikde, a göni çyzyk $\alpha_1$tekizligi kesmeýär, diýmek ol α tekizlik bilen paralleldir. Teorema subut edildi.



87-nji surat



88-nji surat

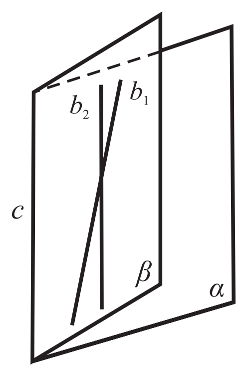
Mesele. Atanak iki göni çyzygyň islendigi arkaly beýleki göni çyzyga parallel tekizlik geçirip bolýandygyny subut ediň.

Çözülişi. Goý, a we b atanak iki göni çyzyk bolsun (*88-nji surat*). a göni çyzykda islendik nokady alalyň we ol arkaly b göni çyzyga parallel b' göni çyzygy geçireliň. a we b' göni çyzyklar arkaly α tekiz-lik geçireliň. 3-nji teorema boýunça ol b göni çyzyga parallel bolýar.

§4. Tekizlikleriň parallellik nyşany

Eger iki tekizlik kesişmeýän bolsa, onda olara parallel diýilýär.

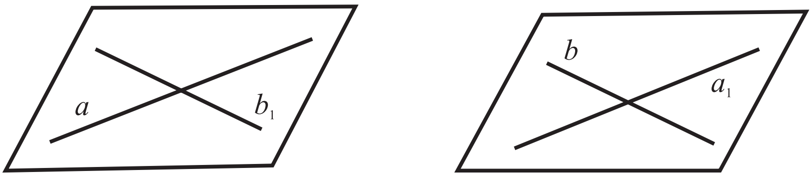
4-nji TEOREMA. Eger iki tekizligiň biri beýleki tekizlikde ýatan iki sany kesişýän göni çyzyga parallel bolsa, onda olara parallel tekizlikler diýilýär.



89-njy surat

Subudy. Goý, α we β – berlen tekizlikler we b_1, b_2 – β tekizlikdäki kesişýän iki göni çyzyk α tekizlige parallel bolsun (*89-njy surat*). α we β tekizlikler dürlüdirler. Goý, olar käbir c göni çyzyk boýunça kesişýär diýeliň. b_1 we b_2 göni çyzyklar α tekizligi kesmeýärler; şeýlelikde, bu tekizligiň c göni çyzygyny kesmeýärler. Emma göni çyzyklaryň parallellik aksiomasy boýunça bu mümkin däldir. Çünki β tekizlikde ýatýan b_1 we b_2 kesişýän göni çyzyklar şol bir c göni çyzyga paralleldirler.

Mesele. Atanak iki göni çyzyk berlipdir. Olar arkaly parallel iki tekizligi nädip geçirmeli?



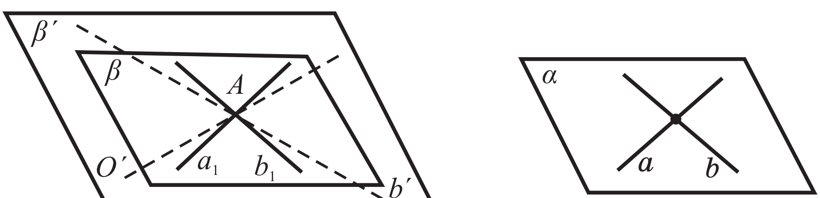
90-njy surat

Çözülişi. Goý, a we b – berlen atanak göni çyzyklar bolsun (*90-njy surat*). a göni çyzygyň erkin nokady arkaly b göni çyzyga parallel b_1 göni çyzyk geçireliň, b göni çyzygyň erkin nokadyndan bolsa, a göni çyzyga parallel a_1 göni çyzyk geçireliň. Indi iki tekizlik – birini a we b_1 arkaly, beýlekisini bolsa b we a_1 arkaly geçireliň. 4-nji teorema boýunça bu tekizlikler paralleldirler. Olaryň birinjisinde a göni çyzyk, ikinjisinde bolsa b göni çyzyk ýatýar.

§5. Berlen tekizlige parallel bolan tekizligiň barlygy

5-nji TEOREMA. Berlen tekizligiň daşynda ýatan nokat arkaly berlen tekizlige parallel bir we diňe bir tekizlik geçirip bolar.

Subudy. Berlen α tekizlikde haýsy hem bolsa iki sany a we b kesişýän göni çyzyk geçireliň (*91-nji surat*). Berlen A nokat arkaly olara parallel bolan a_1 we b_1 göni çyzyklary geçireliň.



91-nji surat

4-nji teorema boýunça a_1 we b_1 göni çyzyklar arkaly geçýän β tekizlik α tekizlige paralleldir. Goý, A nokat arkaly α tekizlige parallel başga bir β' tekizlik geçýär diýeliň. a we a_1 parallel göni çyzyklaryň tekizligi β' tekizligi a' göni çyzyk boýunça kesýär. a' göni çyzyk a göni çyzygy kesmeýär, çünki ol a göni çyzygy özünde saklaýan α tekizligi kesmeýär. Şonuň üçin a' göni çyzyk a göni çyzyga parallel, diýmek, parallel göni çyzyklaryň aksiomasy boýunça a_1 göni çyzyk bilen gabat gelýär. b we b_1 parallel göni çyzyklaryň tekizligi β' tekizligi b' göni çyzyk boýunça kesýär. b' göni çyzyk b göni çyzygy kesmeýär. Şonuň üçin b' göni çyzyk b göni çyzyga parallel, diýmek, b_1 göni çyzyk bilen gabat gelýär, a_1 we b_1 göni çyzyklar arkaly C_3 aksioma boýunça diňe bir tekizlik geçirip bolýandygy sebäpli β' tekizlik β tekizlik bilen gabat gelýär. Biz garşylyga geldik. Teorema subut edildi.

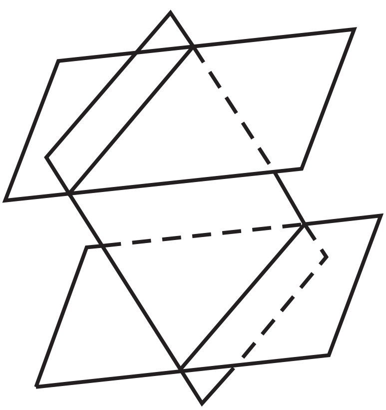
Mesele. α we β tekizlikler γ tekizlige parallel, α we β tekizlikler kesişip bilermi?

Çözülişi. α we β tekizlikler kesişip bilmezler. Eger α we β tekizlikleriň umumy nokady bar bolsa, onda bu nokat arkaly γ tekizlige parallel iki tekizlik (α we β geçerdi). Bu bolsa 5-nji teorema garşy gelýär.

§6. Parallel tekizlikleriň häsiýetleri

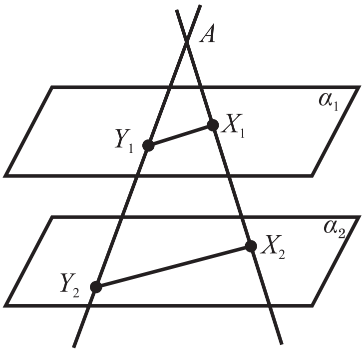
6-njy TEOREMA. Eger iki parallel tekizlik üçünji tekizlik bilen kesişýän bolsa, onda kesişme çyzyklary paralleldir (*92-nji surat*).

Subudy. Kesgitlemä laýyklykda parallel göni çyzyklar – bu tekizlikde ýatýan we kesişmeýän göni çyzyklardyr. Biziň göni çyzyklarymyz bir tekizlikde – kesiji tekizlikde ýatýar. Olar kesişmeýärler, çünki olary özünde saklaýan parallel tekizlikler kesişmeýärler. Diýmek, göni çyzyklar paralleldirler. Teorema subut edildi.



92-nji surat

7. Sargyt №



93-nji surat

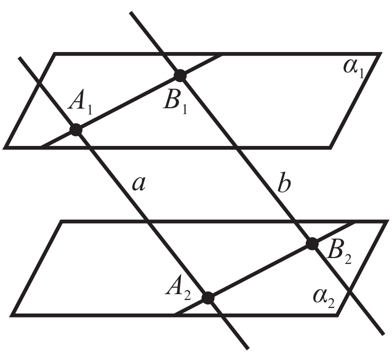
Mesele. α_1 we α_2 parallel iki tekizlik we olaryň hiç birinde ýatmaýan A nokat berlipdir. A nokat arkaly erkin göni çyzyk geçirilipdir. Goý, X_1 we X_2 – onuň α_1 we α_2 tekzlikleri bilen kesişme nokatlary bolsun. Kesimleriň uzynlyklarynyň $AX_1 : AX_2$ gatnaşygynyň alnan göni çyzyga bagly däldigini subut ediň.

Çözülişi. A nokat arkaly başga bir göni çyzyk geçireliň we onuň α_1 we α_2 tekizlikler bilen kesişme nokadyny Y_1 we Y_2 bilen belgiläliň (*93-nji surat*). AX_1 we AY_1 göni çyzyklar arkaly tekizlik geçireliň. Ol α_1 we α_2 tekizlikleri X_1,Y_1 we X_2 Y_2 parallel göni çyzyklar boýunça keser. (*6-njy teorema*). Bu ýerden AX_1Y_1 we AX_2Y_2 üçburçluklaryň meňzeşligi gelip çykýar. Üçburçluklaryň meňzeşliginden bolsa

$\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2}$ gelip çykýar, ýagny $AX_1 : AX_2$ we $AY_1 : AY_2$ gatnaşyklar iki göni çyzyk üçin hem birmeňzeşdir.

7-nji TEOREMA. Parallel göni çyzyklaryň iki parallel tekizligiň arasynda galan kesimleri deňdir.

Subudy. Goý, α_1 we α_2 parallel tekizlikler a we b – olary kesýän göni çyzyklar, A_1, A_2 we B_1, B_2 – göni çyzyklaryň tekizlikler bilen kesişme nokady bolsun (*94-nji surat*). a we b nokatlar arkaly tekizlik geçireliň. Ol α_1 we α_2 tekizlikleri A_1B_1 we A_2 B_2 parallel göni çyzyklar boýunça kesýär. $A_1B_1A_2B_2$ dörtburçluk – parellelogram, çünki onuň garşylykly taraplary parallel. Parallelogramyň bolsa garşylykly ýatan taraplary deň. Diýmek, $A_1A_2 = B_1B_2$. Teorema subut edildi.



94-nji surat

IX baba degişli gönükmeler

1. Berlen iki parallel göni çyzygy kesýän ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

2. a we b göni çyzyklar kesişýärler. b göni çyzyga parallel we a göni çyzygy kesýän ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

3. Eger tekizlik parallel iki göni çyzygyň birini kesýän bolsa, onda onuň beýlekisini hem kesýändigini subut ediň.

4. AB kesimiň ahyrlary we onuň M ortasy arkaly käbir tekizligi A_1 B_1 we M_1 nokatlardan kesýän parallel göni çyzyklar geçirilipdir. Eger AB kesim tekizligi kesmeýän bolsa we eger:

1) $AA_1 = 5$ m, $BB_1 = 7$ m;

2) $AA_1 = 3{,}6$ dm, $BB_1 = 4{,}8$ dm;

3) $AA_1 = 8{,}3$ sm, $BB_1 = 4{,}1$ sm;

4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, bolsa, onda MM_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

5. AB kesim tekizligi kesýän şertde 4-nji meseläni çözüň.

6. AB kesimiň A ahyry arkaly tekizlik geçirilipdir. Bu kesimiň B ahyry we C nokady arkaly tekizligi B_1 we C_1 nokatlarda kesýän parallel göni çyzyklar geçirilipdir. Eger: 1) CC_1=15 sm, $AC:BC$=2:3; 2) CC_1=8,1 sm, $AB : AC$= 11:9; 3) AB=6 sm, $AC:CC_1$=2:5; 4) $AC=a$, $BC= b$, $CC_1= c$ bolsa, onda BB_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

7. $ABCD$ parallelogram we ony kesmeýän tekizlik berlipdir. Parallelogramyň depeleri arkaly berlen tekizligi $A_1B_1C_1D_1$ nokatlarda kesýän parallel göni çyzyklar geçirilipdir. Eger: 1) AA_1= 2m, BB_1= 3 m, CC_1=8 m, 2) AA_1= 4 m, BB_1=3 m, CC_1=1 m, 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$, bolsa, onda DD_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

8. a we b göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýar. a we b göni çyzyklara parallel c göni çyzyk geçirip bolarmy?

9. A, B, C, D nokatlar bir tekizlikde ýatmaýar. AB we BC kesimleriň ortasyndan geçýän göni çyzygyň AD we AC kesimleriň ortasyndan geçýän göni çyzyga paralleldigini subut ediň.

10. Giňişlikdäki dörtburçlugyň taraplarynyň ortalarynyň parallelogramyň depeleridigini subut ediň.

11. Bir tekizlikde ýatmaýan dört sany *A, B, C, D* nokat berlipdir. *AB* we *CD, AC* we *BD*, *AD* we *BC* kesimleriň ortalaryny birleşdirýän göni çyzyklaryň bir nokatda kesişmeýändigini subut ediň.

12. *A, B, C,* üçburçluk berlipdir. *AB* göni çyzyga parallel tekizlik üçburçlugyň *AC* tarapyny A_1 nokatda *BC* tarapyny bolsa B_1 nokatda kesýär. Eger:

1) $AB = 15$ *sm*, $AA_1 : AC = 2:3$;
2) $AB = 8$ *sm*, $AA_1 : A_1C = 5:3$;
3) $B_1C = 10$ *sm*, $AB : BC = 4:5$;
4) $AA_1 = a,\ AB = b,\ A_1C = c$ bolsa, onda A_1B_1 kesimiň uzynlygyny tapyň.

13. Berlen nokat arkaly kesişýän iki tekizligiň her birine parallel göni çyzyk geçiriň.

14. Eger *AB* we *CD* göni çyzyklar atanak ýatýan bolsa, onda *AC* we *BD* göni çyzyklaryň hem atanak ýatýandygyny subut ediň.

15. *AB* we *CD* göni çyzyklar kesişýärler. *AC* we *BD* göni çyzyklar kesişýärler. *AC* we *BD* göni çyzyklar atanak ýatyp bilermi?

16. Atanak iki göni çyzygyň biri arkaly beýleki göni çyzyga parallel tekizlik geçirip bolýandygyny subut ediň.

17. Eger *a* göni çyzyk boýunça kesişýän iki sany tekizlik *α* tekizligi parallel göni çyzyklar boýunça kesýän bolsa, onda *a* göni çyzygyň α tekizlige paralleldigini subut ediň.

18. Eger göni çyzyk parallel iki tekizligiň birini kesýän bolsa, onda onuň beýlekini hem kesýändigini subut ediň.

19. Atanak iki göni çyzyk berlipdir. Olar arkaly parallel iki tekizligi nädip geçirmeli?

20. Giňişligiň berlen nokady arkaly atanak göni çyzyklaryň her birini kesýän göni çyzyk geçiriň. Bu islendik ýagdaýda mümkinmi?

21. Ahyrlary atanak iki sany göni çyzyklaryň üstünde bolan kesimleriň ortalarynyň geometrik ornunyň tekizlikdigini subut ediň.

22. Bir tekizlikde ýatmaýan dört sany *A, B, C* we *D* nokat berlipdir. *AB* we *CD* göni çyzyklara parallel islendik tekizligiň *AC, AD, BD* we *BC* göni çyzyklary parallelogramyň depelerinde kesýändigini subut ediň.

23. α we β tekizlikler γ tekizlige parallel. α we β tekizlikler kesişip bilermi?

24. α we β tekizlikler kesişýärler. Islendik γ tekizligiň α, β tekizlikleriň iň bolmanda birini kesýändigini subut ediň.

25. Berlen nokatdan geçýän berlen tekizlige parallel ähli göni çyzyklaryň bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

26. Berlen nokat arkaly kesişýän iki göni çyzygyň her birine parallel tekizlik geçiriň. Bu mydama mümkinmi?

27. $ABCD$ we ABC_1D_1 parallelogramlar dürli tekizliklerde ýatýarlar. CDD_1C_1 dörtburçlugyň hem parallelogramdygyny subut ediň.

28. Parallel iki tekizligiň birinde ýatýan $ABCD$ parallelogramyň depeleri arkaly ikinji tekizligi $A_1B_1C_1D_1$ nokatlarda kesýän parallel göni çyzyklar geçirilipdir. $A_1B_1C_1D_1$ dörtburçlugyň hem parallelogramdygyny subut ediň.

29. Parallel iki tekizligiň birinde ýatýan ABC üçburçlugyň depeleri arkaly beýleki tekizligi $A_1B_1C_1$ nokatlarda kesýän göni çyzyklar geçirilipdir. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň deňdigini subut ediň.

30. Bir nokatdan geçýän üç göni çyzyk berlen tekizligi ABC nokatlarada, oňa parallel tekizligi bolsa, $A_1B_1C_1$ nokatlarda kesýär. ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklaryň deňdigini subut ediň.

31. Eger A nokat arkaly geçýän dört göni çyzyk α tekizligi parallelogramyň depelerinde kesýän bolsa, onda olaryň α tekizlige parallel we A nokat arkaly geçmeýän islendik tekizligi hem parallelogramyň depelerinde kesýändigini subut ediň.

32. Parallel iki tekizlik berlipdir. Bu tekizlikleriň biriniň A we B nokatlary arkaly ikinji tekizligi A_1 we B_1 nokatlarda kesýän parallel göni çyzyklar geçirilipdir. Eger $AB= a$ bolsa, onda $A_1 B_1$ kesim nämä deň?

33. α_1 we α_2 parallel iki tekizlik we olaryň hiç birinde ýatmaýan A nokat berlipdir. A nokat arkaly erkin göni çyzyk geçirilipdir. Goý, X_1 we X_2 – onuň α_1 we α_2 tekizlikler bilen kesişme nokatlary bolsun. Kesimleriň uzynlyklarynyň AX_1:AX_2 gatnaşygynyň alnan göni çyzyga bagly däldigini subut ediň.

34. A nokat α tekizligiň daşynda ýatýar, X – α tekizligiň erkin nokady. X^1–A X kesimiň ony m:n gatnaşykda bölýän nokady. X^1 nokatlaryň geometrik ornunyň α tekizlige parallel tekizlikdigini subut ediň.

35. Parallel üç α_1, α_2 we α_3 tekizlik berlipdir. X_1 X_2 X_3 – bu tekizlikleriň erkin göni çyzyk bilen kesişme nokady. Kesimleriň uzynlyklarynyň $X_1 X_2$: $X_2 X_3$ gatnaşygynyň göni çyzyga bagly däldigini, ýagny bu gatnaşygyň islendik iki göni çyzyk üçin birmeňzeşdigini subut ediň.

36. Parallel dört göni çyzyk berlipdir. Eger haýsy hem bolsa bir tekizlik bu göni çyzyklary parellelogramyň depelerinde kesýän bolsa, onda berlen göni çyzyklara parallel bolmadyk islendik tekizligiň olary käbir parallelogramyň depelerinde kesýändigini subut ediň.

37. Parallel iki tekizlik, olary kesýän göni çyzyk we tekizlikleriň birinde töwerek berlipdir. Töweregiň her bir X nokady arkaly berlen göni çyzyga parallel we ikinji tekizligi käbir X^1 nokatda kesýän göni çyzyk geçirilipdir. X^1 nokatlaryň geometrik orny nämäni aňladýar? Jogabyny düşündiriň.

38. Parallel iki tekizlik, bu tekizlikleriň daşynda ýatýan nokat we bu tekizlikleriň birinde töwerek berlipdir. Töweregiň her bir X nokady we berlen nokat arkaly ikinji tekizligi käbir X^1 nokatda kesýän göni çyzyk geçirilipdir. X^1 nokatlaryň geometrik orny nämäni aňladýar? Jogabyny düşündiriň.

39. Üçburçlugyň parallel proýeksiýasy berlipdir. Bu üçburçlugyň medianasynyň proýeksiýasyny nähili gurmaly?

40. Üçburçlugyň parallel proýeksiýasy berlipdir. Üçburçlugyň orta çyzygynyň proýeksiýasy näme bilen şekillenýär?

41. Parallelogram parallel proýektirlenende trapesiýa alnyp bilnermi? Jogabyny düşündiriň.

42. Parallel proýektirlemede parallelogramyň proýeksiýasy kwadrat bolup bilermi?

43. Merkezleýin – simmetrik figuranyň paraller proýeksiýasynyň hem merkezleýin-simmetrik figura bolýandygyny subut ediň.

44. Töweregiň we onuň diametriniň parallel proýeksiýasy berlipdir. Perpendikulýar diametriň proýeksiýasyny nähili gurmaly?

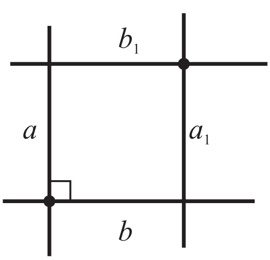
GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PERPENDIKULÝARLYGY

§1. Giňişlikde göni çyzyklaryň perpendikulýarlygy

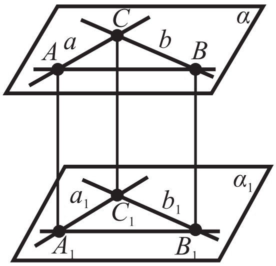
Eger iki göni çyzyk göni burç astynda kesişýän bolsa, onda edil tekizlikde bolşy ýaly, olara perpendikulýar göni çyzyklar diýilýär.

1-nji TEOREMA. Perpendikulýar göni çyzyklara parallel bolan kesişýän göni çyzyklaryň özleri perpendikulýardyr.

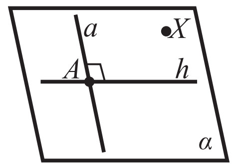
Subudy. Goý, a we b perpendikulýar göni çyzyklar, a_1 we b_1 – olara parallel kesişýän göni çyzyklar bolsun. a_1 we b_1 göni çyzyklaryň perpendikulýardygyny subut edeliň. Eger a, b, a_1 we b_1 göni çyzyklar bir tekizlikde ýatýan bolsa, onda olar teoremada görkezilen häsiýete eýedirler (*95-nji surat*). Hakykatdan-da, b we b_1 göni çyzyklaryň paralleldigi sebäpli, b göni çyzyga perpendikulýar bolan a göni çyzyk b_1 göni çyzyga hem perpendikulýardyr. a we a_1 göni çyzyklaryň paralleldikleri sebäpli, a göni çyzyga perpendikulýar bolan b_1 göni çyzyk a_1 göni çyzyga hem perpendikulýar bolýar.



95-nji surat



96-njy surat



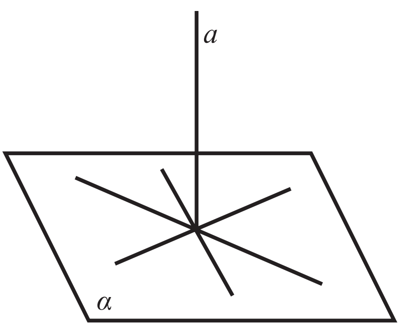
97-nji surat

Goý, indi biziň göni çyzyklarymyz bir tekizlikde ýatmaýan bolsun. Şonda a we b göni çyzyklar käbir α tekizlikde, a_1 we b_1 göni çyzyklar bolsa, käbir α_1 tekizlikde ýatýar. (*96-njy surat*). 3-nji teorema (IX bap) boýunça a we b göni çyzyklar α_1 tekizlige parallel. 4-nji teorema (IX bap) boýunça α we α_1 tekizlikler parallel. Goý, C – a we b göni çyzyklaryň kesişme nokady, C_1 bolsa a_1 we b_1 göni çyzyklaryň kesişme nokady bolsun. a we a_1 parallel göni çyzyklaryň tekizliginde CC_1 göni çyzyga parallel göni çyzyk geçireliň. Ol a we a_1 göni çyzyklary A we A_1 nokatlarda kesýär. b we b_1 göni çyzyklaryň tekizliginde CC_1 göni çyzyga parallel göni çyzyk geçireliň we onuň b we b_1 göni çyzyklar bilen kesişme nokadyny B we B_1 bilen belgiläliň.

CAA_1C_1 we CBB_1C_1 dörtburçluklar parallelogramdyr, çünki olarda garşylykly ýatan taraplar paralleldir. ABB_1A_1 dörtburçluk hem parallelogramdyr. Onda AA_1 we BB_1 taraplar parallel, sebäbi olaryň her biri CC_1 göni çyzyga parallel. Şeýlelik bilen, dörtburçluk AA_1 we BB_1 göni çyzyklar arkaly geçýän tekizlikde ýatýar. Ol tekizlik bolsa α we α_1 tekizlikleri AB we A_1B_1 parallel göni çyzyklar boýunça kesýär.

Parallelogramda garşylykly taraplaryň deňdigi üçin $AB = A_1B_1$ $AC = A_1,C_1$, $BC = B_1C_1$. Üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça ABC we $A_1B_1C_1$ üçburçluklar deňdir. Şeýlelikde, ACB burça deň bolan $A_1C_1B_1$ burç göni burçdur, ýagny a_1 we b_1 göni çyzyklar perpendikulýardyr. Teorema subut edildi.

Mesele. Giňişlikde göni çyzygyň islendik nokady arkaly oňa perpendikulýar bolan göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.



98-nji surat

Çözülişi. Goý, a – berlen göni çyzyk we A – onuň üstündäki nokat bolsun (*97-nji surat*). a göni çyzygyň daşynda ýatan islendik X nokady alalyň we bu nokat we a göni çyzyk arkaly α tekizlik geçireliň (*1-nji teorema*) (VIII bap). α tekizlikde A nokat arkaly a göni çyzyga perpendikulýar b göni çyzyk geçirip bolýar. Şony hem subut etmek talap edilýärdi.

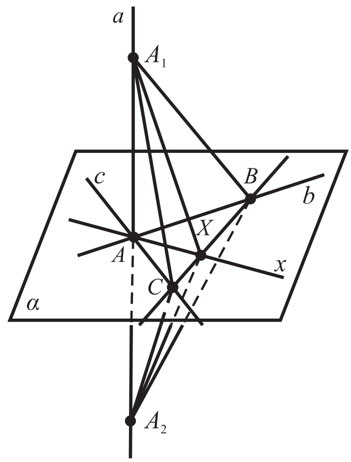
§2. Göni çyzygyň we tekizligiň perpendikulýarlygy

Eger tekizligi kesýän göni çyzyk berlen göni çyzyk bilen tekizligiň kesişme nokady arkaly geçýän tekizlikdäki islendik göni çyzyga perpendikulýar bolsa, onda oňa bu tekizlige perpendikulýar diýilýär.

98-nji suratda *a* göni çyzyk α tekizlige perpendikulýardyr.

TEOREMA 2. Eger tekizligi kesýän göni çyzyk bu tekizlikdäki kesişme nokady arkaly geçýän iki göni çyzyga perpendikulýar bolsa, onda tekizlige perpendikulýardyr.

Subudy. Goý, *a* *α* tekizligi *A* nokatda kesýän we *A* nokat arkaly geçýän *b* we *c* göni çyzyklara perpendikulýar bolan göni çyzyk bolsun (*99-njy surat*). *a* göni çyzygyň *α* tekizlige perpendikulýardygyny subut edeliň.



99-njy surat

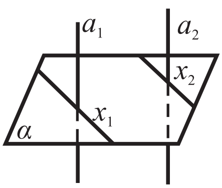
A nokat arkaly erkin *x* göni çyzyk geçireliň we onuň *a* göni çyzyga perpendikulýardygyny subut edeliň. *α* tekizlikde *A* nokat arkaly geçmeýän we *b*, *c*, we *x* göni çyzyklary kesýän erkin göni çyzyk geçireliň. Goý, *B*, *C* we *X* kesişme nokatlary bolsun. *a* göni çyzygyň üstünde *A* nokatdan dürli tarapa deň AA_1 we AA_2 kesimleri alyp goýalyň. A_1CA_2 üçburçluk deňýanlydyr. Çünki *AC* kesim teoremanyň şertine görä beýiklikdir we gurluş (AA_1=AA_2) boýunça medianadyr. Edil şol sebäp boýunça A_1BA_2 üçburçluk hem deňýanlydyr. Şeýlelikde, A_1BC we A_2 *BC* üçburçluklar üçburçluklaryň deňliginiň üçünji nyşany boýunça deňdirler.

A_1BC we A_2BC üçburçluklaryň deňdiginden A_1BX we A_2BX burçlaryň deňdigi gelip çykýar we şeýlelikde, A_1BX we A_2BX üçburçluklaryň deňdigi üçburçluklaryň deňliginiň birinji nyşanyndan gelip çykýar. Bu üçburçluklaryň A_1X we A_2X taraplarynyň deňdiginden A_1XA_2 üçburçluk deňýanly diýen netijä gelýäris. Şonuň üçin onuň *XA* medianasy beýiklik hem bolar. Bu bolsa, *x* göni çyzyk *a* göni çyzyga perpendikulýardyr diýildigidir. Teorema subut edildi.

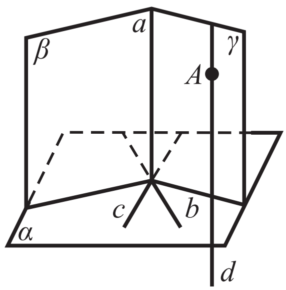
§3. Perpendikulýar göni çyzyklaryň we tekizlikleriň häsiýetleri

3-nji TEOREMA. Eger tekizlik parallel iki göni çyzygyň birine perpendikulýar bolsa, onda ol beýlekä hem perpendikulýardyr.

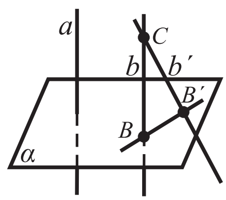
Subudy. Goý, a_1 we a_2 parallel iki göni çyzyk we α – a_1 göni çyzyga perpendikulýar tekizlik bolsun (*100-nji surat*). Bu tekizligiň a_2 göni çyzyga hem perpendikulýardygyny subut edeliň. α tekizlik bilen a_2 göni çyzygyň α tekizlikdäki kesişme nokady arkaly erkin x_2 göni çyzyk geçireliň.



100-nji surat



101-nji surat



102-nji surat

a_1 göni çyzygyň α tekizlik bilen kesişme nokady arkaly x_2 göni çyzyga parallel x_1 göni çyzyk geçireliň. Ol α tekizlikde ýatýar. a_1 göni çyzygyň α tekizlige perpendikulýarlygy sebäpli a_1 we x_1 göni cyzyklar perpendikulýardyr. 1-nji teorema boýunça bolsa olara parallel a_2 we x_2 göni çyzyklar hem perpendikulýardyr. Bu bolsa, a_2 göni çyzygyň α tekizlige perpendikulýardygyny aňladýar. Teorema subut edildi.

Mesele. Islendik A nokat arkaly α tekizlige perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut edeliň.

Çözülişi. α tekizlikde kesişýan iki b we c göni çyzyk geçireliň (*101-nji surat*). Olaryň kesişme nokatlary arkaly b we c göni çyzyklara degişlilikde perpendikulýar β we γ tekizlikler geçireliň. Olar käbir a göni çyzyk boýunça kesişerler. a göni çyzyk b we c göni çyzyklara perpendikulýar, diýmek, α tekizlige hem perpendikulýardyr. Indi A

nokat arkaly a göni çyzyga parallel d göni çyzyk geçireliň. 3-nji teorema boýunça ol α tekizlige perpendikulýardyr.

4-nji TEOREMA. Şol bir tekizlige perpendikulýar iki göni çyzyk paralleldir.

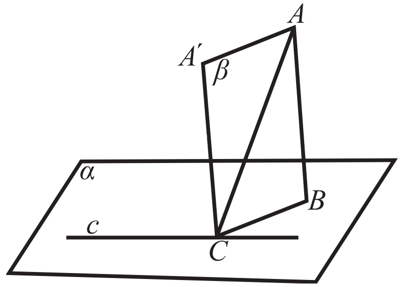
Subudy. Goý, a we b – α tekizlige perpendikulýar iki göni çyzyk bolsun (*102-nji surat*). Goý, a we b göni çyzyklar parallel däl diýeliň. b göni çyzygyň haýsy hem bolsa bir C nokady arkaly a göni çyzyga parallel b' göni çyzyk geçireliň. b' göni çyzyk α tekizlige perpendikulýar (*3-nji teorema*). Goý, B we B' – b we b' göni çyzyklaryň α tekizlik bilen kesişme nokady bolsun. Şonda BB' göni çyzyk kesişýän b we b' göni çyzyklara perpendikulýardyr. Bu mümkin däldir. Biz garşylyga geldik. Teorema subut edildi.

§4. Üç perpendikulýar hakynda teorema

5-nji TEOREMA. Tekizlikde ýapgyt çyzygyň esasy arkaly onuň proýeksiýasyna geçirilen perpendikulýar göni çyzyk ýapgyt çyzygyň özüne hem perpendikulýardyr we tersine, eger tekizlikde göni çyzyk ýapgyt çyzyga perpendikulýar bolsa, onda ol ýapgyt çyzygyň proýeksiýasyna hem perpendikulýardyr.

Subudy. Goý, AB – α tekizlige perpendikulýar, AC – ýapgyt çyzyk we c ýapgyt çyzygyň C esasy arkaly geçýän α tekizlikdäki göni çyzyk bolsun (*103-nji surat*). α tekizlige perpendikulýar CA' göni çyzyk geçireliň. Ol AB göni çyzyga paralleldir (*4-nji teorema*). AB we $A'C$ göni çyzyklar arkaly β tekizlik geçireliň. c göni çyzyk CA' göni çyzyga perpendikulýar. Eger ol CB göni çyzyga perpendikulýar bolsa, onda ol β tekizlige perpendikulýardyr, diýmek, AC göni çyzyga hem perpendikulýardyr.

Şoňa meňzeşlikde eger CA' göni çyzyga perpendikulýar bolan c

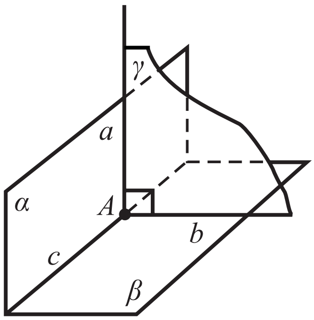


103-nji surat

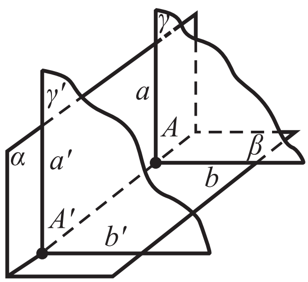
göni çyzyk CA ýapgyt çyzyga perpendikulýar bolsa, onda ol β tekizlige perpendikulýardyr, diýmek, ýapgyt çyzygyň BC proýeksiýasyna hem perpendikulýardyr. Teorema subut edildi.

§5. Tekizlikleriň perpendikulýarlyk nyşany

Eger kesişýän iki tekizligi bu tekizlikleriň kesişme çyzygyna perpendikulýar üçünji tekizlik perpendikulýar göni çyzyklar boýunça kesýän bolsa, onda kesişýän iki tekizlige perpendikulýar tekizlikler diýilýär.



104-nji surat

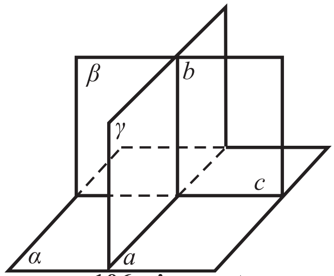


105-nji surat

104-nji suratda c göni çyzyk boýunça kesişýän perpendikulýar iki α we β tekizlik görkezilýär. c göni çyzyga perpendikulýar γ tekizlik α we β tekizlikleri a we b perpendikulýar göni çyzyklar boýunça kesýär. Tekizlikleriň perpendikulýarlygynyň kesgitlenilişi γ tekizligiň saýlanyp alnyşyna bagly däldir. Hakykatdan-da eger c göni çyzyga perpendikulýar başga bir γ' alynsa, onda ol α tekizligi c göni çyzyga perpendikulýar, diýmek, a göni çyzyga parallel a' göni çyzyk, β tekizligi bolsa c göni çyzyga perpendikulýar, diýmek, b göni çyzyga parallel b' göni çyzyk boýunça kesýär (*105-nji surat*). 1-nji teorema boýunça a we b göni çyzyklaryň perpendikulýarlygyndan a' we b' göni çyzyklaryň perpendikulýardygy gelip çykýar.

6-njy TEOREMA. Eger tekizlik başga bir tekizlige perpendikulýar göni çyzyk arkaly geçýän bolsa, onda bu tekizlikler perpendikulýardyrlar.

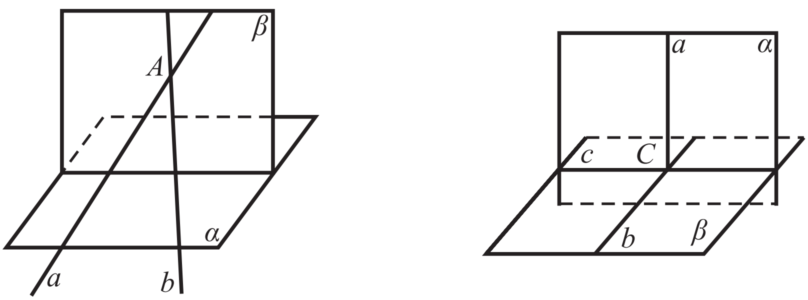
Subudy. Goý, α – tekizlik, b – oňa perpendikulýar göni çyzyk, β – b göni çyzyk arkaly geçýän tekizlik we c – α we β tekizlikleriň kesişýän göni çyzygy bolsun (*106-njy surat*). α we β tekizlikleriň perpendikulýardygyny subut edeliň. α tekizlikde b göni çyzygyň α tekizlik bilen kesişme nokady arkaly c göni çyzyga perpendikulýar a göni çyzygy geçireliň. a we b göni çyzyklar arkaly γ tekizlik geçireliň. Ol c göni çyzyga perpendikulýar, çünki c göni çyzyk a we b göni çyzyklaryň perpendikulýarlygy sebäpli, α we β tekizlikler perpendikulýardyr. Teorema subut edildi.



106-njy surat

Mesele. a göni çyzyk we α tekizlik berlipdir. a göni çyzyk arkaly α tekizlige perpendikulýar tekizlik geçireliň.

Çözülişi. a göni çyzygyň erkin nokady arkaly α tekizlige perpendikulýar b göni çyzyk (*107-nji surat*) geçireliň. a we b göni çyzyklar arkaly β tekizligi geçireliň. β tekizlik α tekizlige teorema 6 boýunça perpendikulýardyr.



107-nji surat

X baba degişli gönükmeler

1. Giňişlikde göni çyzygyň islendik nokady arkaly oňa perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.

2. Giňişlikde göni çyzygyň islendik nokady arkaly oňa perpendikulýar dürli iki göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.

3. AB, AC we AD göni çyzyklar jübüt-jübütden perpendikulýar. Eger: 1) $AB = 3$ *sm*, $BC = 7$ *sm*, $AD = 1{,}5$ *sm*; 2) $BD = 9$ *sm*, $BC = 16$ *sm*,

$AD = 5$ *sm*; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$ bolsa *CD* kesimi tapyň.

4. Berlen göni çyzygyň islendik nokady arkaly oňa perpendikulýar tekizlik geçirip bolýandygyny subut ediň.

5. Tekizligiň islendik nokady arkaly oňa perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.

6. Islendik *A* nokat arkaly berlen α tekizlige perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolýandygyny subut ediň.

7. Berlen tekizlikde ýatmaýan nokat arkaly tekizlige birden köp perpendikulýar göni çyzyk geçirip bolmaýandygyny subut ediň.

8. *A* nokat tarapy *a* deň bolan deňtaraply üçburçlugyň depesinden *a* uzaklykda ýatýar. *A* nokatdan üçburçlugyň tekizligine çenli uzaklygy tapyň.

9. Eger göni çyzyk tekizlige parallel bolsa, onda onuň ähli nokatlarynyň tekizlikden birdeň uzaklykda ýatýandygyny subut ediň.

10. Tekizligiň ähli nokatlaryndan parallel tekizlige çenli uzaklyklaryň birdeňdigini subut ediň.

11. Berlen nokatdan tekizlige geçirilen berlen uzynlykly ýapgyt çyzyklaryň esaslarynyň geometrik ornuny tapyň.

12. Nokatdan tekizlige 10 *sm* we 17 *sm* uzynlyklary bolan iki sany ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Bu ýapgyt çyzyklaryň proýeksiýalarynyň tapawudy 9 *sm*-e deň. Ýapgyt çyzyklaryň proýeksiýalaryny tapyň.

13. Nokatdan tekizlige biri beýlekisinden 26 *sm* uly bolan iki sany ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Ýapgyt çyzyklaryň proýeksiýalary 12 *sm* we 40*sm*. Ýapgyt çyzyklary tapyň.

14. Nokatdan tekizlige iki ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Eger olar 1:2 ýaly gatnaşýan bolsa we ýapgyt çyzyklaryň proýeksiýalary 1 *sm* we 7 *sm* deň bolsa, onda ýapgyt çyzyklaryň uzynlyklaryny tapyň.

15. Nokatdan tekizlige 23 *sm* we 33 *sm* uzynlyklary bolan iki ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Eger ýapgyt çyzyklaryň proýeksiýalary 2:3 ýaly gatnaşýan bolsa, onda şol nokatdan tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

16. Üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezi arkaly üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar göni çyzyk geçirilipdir. Bu göni çyzygyň her bir nokadynyň töweregiň depelerinden deňdaşlaşandygyny subut ediň.

17. α tekizligiň daşynda ýatan *S* nokatdan oňa üç sany deň *SA, SB, SC* ýapgyt çyzyk we *SO* perpendikulýar geçirilipdir. Perpendikulýaryň O esasynyň ABC üçburçlugyň daşyndan çyzylan töweregiň merkezidigini subut ediň.

18. Parallel iki tekizligiň arasyndaky uzaklyk a deň. b uzynlykly kesim öz uçlary bilen bu tekizliklere direnýär. Kesimiň tekizlikleriniň her birine bolan proýeksiýasyny tapyň.

19. a we b uzynlykly iki kesim öz uçlary bilen parallel iki tekizlige direnýär (a uzynlykly). Birinji kesimiň tekizlige proýeksiýasy c deň. Ikinji kesimiň proeksiýasyny tapyň.

20. Tekizligi kesmeýän berlen kesimiň uçlary ondan 0,3 m we 0,5 m daşlaşan. Berlen kesimi 3:7 gatnaşykda bölýän nokat tekizlikden nähili daşlaşan?

21. Kesimiň ortasy arkaly tekizlik geçirilipdir. Kesimiň uçlarynyň bu tekizlikden deňdaşlykda ýatýandygyny subut ediň.

22. Parallelogramyň diagonaly arkaly tekizlik geçirilipdir. Beýleki diagonalyň uçlarynyň bu tekizlikden deňdaşlykda ýatýandygyny subut ediň.

23. Eger A we B nokatlardan tekizlige çenli uzaklyk: 1) 3,2 sm we 5,3 sm; 2) 7,4 sm we 6,1 sm; 3) a we b deň bolsa, onda AB kesimiň ortasyndan bu kesimi kesmeýän tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

24. AB kesim tekizligi kesýär diýip hasaplap, 23-nji gönükmäni çözüň.

25. 1 m uzynlykly kesim tekizligi kesýär, onuň uçlary tekizlikden 0,5 m we 0,3 m daşlaşan. Kesimiň tekizlige proýeksiýasynyň uzynlygyny tapyň.

26. 15 m uzynlykly sim telefon sütünine ýeriň üstünden 8 m beýiklikde berkidilipdir we öýe çekilipdir. Ol ýerde sim 20 m beýiklikde berkidilipdir. Sim sallanmaýar diýip güman edip, öý bilen sütüniň aralygyndaky uzaklygy tapyň.

27. Trapesiýanyň esasy arkaly beýleki esasyndan a uzaklykda duran tekizlik geçirilipdir. Eger trapesiýanyň esaslary $m : n$ ýaly gatnaşýan bolsa, onda trapesiýanyň diagonallarynyň kesişme nokadyndan bu tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

28. Parallelogramyň tarapy arkaly garşylykly tarapyndan a uzaklykda duran tekizlik geçirilipdir. Parallelogramyň diagonallarynyň kesişme nokadyndan bu tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

29. A we B nokatlardan α tekizlige perpendikulýar geçirilipdir. Eger perpendikulýarlar 3 m we 2 m, olaryň esaslarynyň arasyndaky uzaklyk 2,4 *m*, *AB* kesim bolsa tekizligi kesmeýän bolsa, onda *A* we *B* nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

30. 3,4 *m* daşlaşan wertikal duran iki sütüniň ýokary uçlary germew arkaly birikdirilen. Bir sütüniň beýikligi 5,8 *m*, beýlekisiniňki 3,9 *m*. Germewiň uzynlygyny tapyň.

31. *A* nokatdan kwadratyň depelerine çenli uzaklyk *a* deň. Eger kwadratyň tarapy *b* bolsa, onda *A* nokatdan kwadratyň tekizligine çenli uzaklygy tapyň.

32. Üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň merkezi arkaly üçburçlugyň tekizligine perpendikulýar göni çyzyk geçirilen. Bu göni çyzygyň her bir nokadynyň üçburçlugyň taraplaryndan deňdaşlaşandygyny subut ediň.

33. Üçburçlugyň içinden çyzylan 0,7 *m* radiusly töweregiň merkezinden şol üçburçlugyň tekizliginde uzynlygy 2,4 *m* bolan perpendikulýar dikeldilipdir. Bu perpendikulýaryň ujundan üçburçlugyň taraplaryna çenli uzaklyklary tapyň.

34. Berlen nokatdan üçburçlugyň tekizligine çenli uzaklyk 1,1 *m*, onuň taraplarynyň her birine çenli uzaklyk bolsa 6,1 *m*-e deň. Bu üçburçlugyň içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

35. Deňtaraply *ABC* üçburçlugyň depesinden üçburçlugyň tekizligine *AD* perpendikulýar dikeldilipdir. Eger *AD* = 13 *sm*, *BC* = 6 *sm* bolsa, *D* nokatdan *BC* tarapa çenli uzaklygy tapyň.

36. *b* uzynlykly *AB* kesimiň *A* ujy arkaly kesime perpendikulýar tekizlik we bu tekizlikde göni çyzyk geçirilipdir. Eger *A* nokatdan göni çyzyga çenli uzaklyk *a* deň bolsa, *B* nokatdan göni çyzyga çenli uzaklygy tapyň.

37. *A* nokatdan kwadratyň ähli tarapyna çenli uzaklyk *a* deň. Eger kwadratyň diagonaly *d* deň bolsa, *A* nokatdan kwadratyň tekizligine çenli uzaklygy tapyň.

38. Kwadratyň depesinden onuň tekizligine perpendikulýar dikeldilipdir. Bu perpendikulýaryň ujundan kwadratyň beýleki depelerine çenli uzaklyk *a* we *b* deň ($a < b$). Perpendikulýaryň uzynlygyny we kwadratyň tarapyny tapyň.

39. Gönüburçlugyň depesinden onuň tekizligine perpendikulýar dikeldilipdir. Bu perpendikulýaryň ujundan gönüburçlugyň beýleki depelerine çenli uzaklyk *a*, *b*, *c* ($a < c$, $b < c$). Perpendikulýaryň uzynlygyny we gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.

40. Berlen burçuň tekizliginiň daşynda ýatan M nokat burçuň depesinden a uzaklyga daşlaşypdyr, taraplaryndan bolsa b uzaklyga daşlaşypdyr. M nokatdan burçuň tekizligine çenli uzaklygy tapyň.

41. $ABCD$ gönüburçlugyň A depesinden onuň tekizligine AK perpendikulýar dikeldilipdir, onuň K ujundan beýleki depelere çenli uzaklyklar 6 *m*, 7 *m* we 9 *m*. AK perpendikulýaryň uzynlygyny tapyň.

42. Berlen nokatdan tekizlige 2 *m* uzynlykly iki sany deň ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Eger ýapgyt çyzyklar 60° burçy emele getirýän bolsa we olaryň proýeksiýalary perpendikulýar bolsa, nokatdan tekizlige çenli uzaklygy tapyň.

43. Tekizlikden 1 *m* daşlykda duran iki sany deň ýapgyt çyzyk geçirilipdir. Eger ýapgyt çyzyklaryň perpendikulýardygy we tekizlige geçirilen perpendikulýar bilen 60° burçy emele getirýändigi belli bolsa, ýapgyt çyzyklaryň esaslarynyň arasyndaky uzaklygy tapyň.

44. Gönüburçly ABC üçburçlugyň C göni burçunyň depesi arkaly ondan 1 *m* uzaklykda gipotenuza parallel tekizlik geçirilipdir. Katetleriň bu tekizlige proýeksiýalary 3 *m* we 5 *m* deň. Gipotenuzany tapyň.

45. Rombuň bir tarapy arkaly garşysynda ýatan tarapyndan 4 *m* uzaklykda duran tekizlik geçirilipdir. Diagonallaryň bu tekizlige proýeksiýalary 8 *m* we 20 *m* deň. Taraplaryň proýeksiýalaryny tapyň.

46. Deňtaraply üçburçlugyň taraplary 3 *m-e* deň Üçburçlugyň her bir depesinden 2 *m* uzaklykda duran nokatdan üçburçlugyň tekizligine çenli uzaklygy tapyň.

47. Esasy 6 *m* we gapdal tarapy 5 *m* bolan deňýanly üçburçluk berlipdir. Içinden çyzylan tegelegiň merkezinden üçburçlugyň tekizligine 2 *m* uzynlykly perpendikulýar dikeldilipdir. Bu perpendikulýaryň ujundan üçburçlugyň taraplaryna çenli uzaklygy tapyň.

48. Deňýanly üçburçlukda esas we beýiklik 4 *m*-e deň. Berlen nokat üçburçlugyň tekizliginden 6 m we onuň depelerinden deňdaşlykda ýatýar. Bu uzaklygy tapyň.

49. Tekizlige parallel AB kesimiň uçlaryndan bu tekizlige AC perpendikulýar we BD ýapgyt çyzyk geçirilipdir. BD göni çyzyk AB göni çyzyga perpendikulýardyr. Eger $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$ bolsa, CD uzaklyk nämä deň?

50. C gönüburçly ABC gönüburçly üçburçlugyň ýiti burçunyň depesinden üçburçlugyň tekizligine AD perpendikulýar dikeldilipdir.

Eger $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$ bolsa, D nokatdan B we C depelere çenli uzaklygy tapyň.

51. ABC üçburçlugyň C göni burçunyň depesinden üçburçlugyň tekizliginde AD perpendikulýar dikeldilipdir. Eger $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ bolsa, D nokatdan gipotenuza çenli uzaklygy tapyň.

52. a göni çyzyk we α tekizlik berlipdir. a göni çyzyk arkaly α tekizlige perpendikulýar tekizlik geçiriň.

53. a göni çyzyk we α tekizlik berlipdir. α tekizlige perpendikulýar we a göni çyzygy kesýän ähli göni çyzyklaryň α tekizlige perpendikulýar bir tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

54. Perpendikulýar iki tekizlikde ýatan A we B nokatlarda tekizlikleriň kesişme göni çyzygyna AC we BD perpendikulýarlar inderilipdir. Eger: 1) $AC = 6$ m, $BD = 7$ m, $CD = 6$ m; 2) $AC = 3$ m, $BD = 4$ m, $CD = 12$ m; 3) $AD = 4$ m, $BC = 7$ m, $CD = 1$ m; 4) $AD = BC = 5$ m, $CD = 1$ m; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD+c$ bolsa, AB kesimiň uzynlygyny tapyň.

55. Nokat perpendikulýar iki sany tekizliklerden a we b uzaklykda ýerleşýär. Bu nokatdan tekizlikleriň kesişme çyzygyna çenli uzaklygy tapyň.

56. Deňtaraply ABC üçburçlugyň A we B depelerinden üçburçlugyň tekizligine AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar dikeldilipdir. Eger $AB= 2$ m, $CA_1= 3$ m, $CB_1= 7$ m we A_1B_1 kesim üçburçlugyň tekizligini kesmeýän bolsa, C depeden A_1B_1 kesimiň ortasyna çenli uzaklygy tapyň.

57. ABC gönüburçly üçburçlugyň A we B ýiti burçlarynyň depesinden üçburçlugyň tekizligine AA_1 we BB_1 perpendikulýar dikeldilipdir. Eger $A_1C = 4$ m, $A_1A = 3$ m, $B_1C = 6$ m, $B_1B = 2$ m we A_1B_1 kesim üçburçlugyň tekizligini kesmeýän bolsa, C depeden A_1B_1 kesimiň ortasyna çenli uzaklygy tapyň.

58. α we β tekizliklere perpendikulýar α tekizlikde A nokat alnypdyr. Şol nokatdan c göni çyzyga (tekizlikleriň kesişme çyzygyna) çenli uzaklyk 0,5 m-e deň. β tekizlikde c göni çyzyga parallel we ondan 1,2 m daşlykda duran b göni çyzyk geçirilipdir. A nokatdan b göni çyzyga çenli uzaklygy tapyň.

59. α we β perpendikulýar tekizlikler c göni çyzyk boýunça kesişýärler. α tekizlikde $a \parallel c$ göni çyzyk geçirilipdir. β tekizlikde $b \parallel c$ göni çyzyk geçirilipdir. Eger a we c göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyk 1,5 m-e deň, b we c göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyk 0,8 m bolsa, a we b göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

60. a göni çyzygyň A nokady arkaly oňa perpendikulýar β tekizlik we b göni çyzyk geçirilipdir. b göni çyzygyň β tekizlikde ýatýandygyny subut ediň.

XI BAP

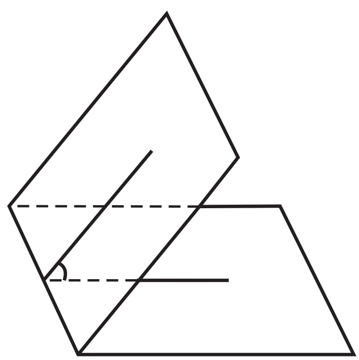
KÖPGRANLYKLAR. AÝLANMA JISIMLER

§1. Ikigranly, üçgranly we köpgranly burçlar

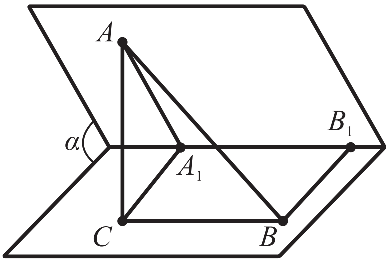
Çäklendiriji umumy göni çyzyklary bolan iki sany ýarym tekizlikler bilen emele gelen figura **ikigranly burç** diýilýär (*108-nji surat*). Ýarym tekizliklere **granlar**, olary çäklendiriji göni çyzyga **ikigranly burçuň gapyrgasy** diýilýär.

Ikigranly burçuň gapyrgasyna perpendikulýar tekizlik onuň granlaryny iki ýarym göni çyzyk boýunça kesýär. Bu ýarym göni çyzyklar bilen emele gelen burça **ikigranly burçuň çyzyk burçy** diýilýär.

Ikigranly burçuň ölçegi hökmünde oňa degişli çyzyk burçuň ölçegi kabul edilýär. Ikigranly burçuň ähli çyzykly burçlary parallel göçürme bilen gabat gelýärler, diýmek deňdirler. Şoňa görä-de, ikigranly burçuň ölçegi çyzykly burçuň saýlanylyp alnyşyna bagly däldir.


108-nji surat

Mesele. Ikigranly burçuň granlarynda ýatan A we B nokatlardan burçuň

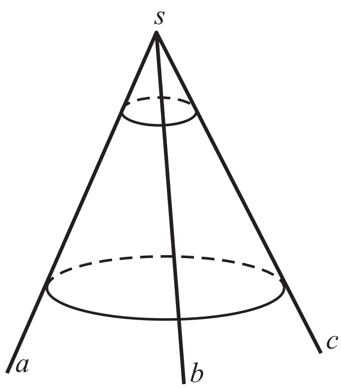


109-njy surat

gapyrgasyna AA_1 we BB_1 perpendikulýarlar inderilipdir. Eger $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ we ikigranly burç α deň bolsa, onda AB kesimiň uzynlygyny tapyň (*109-njy surat*).

Çözülişi. $A_1C \| BB_1$ we $BC \| A_1B_1$ göni çyzyklary geçirilipdir diýeliň. A_1B_1 göni çyzyk AA_1C üçburçlugyň tekizligine perpendikulýardyr, sebäbi ol bu tekizlikdäki AA_1 we CA_1 iki göni çyzyga perpendikulýardyr. Şeýlelikde, oňa parallel BC göni çyzyk hem bu tekizlige perpendikulýardyr. Diýmek, ABC üçburçluk C göni burçy bolan gönübuçly üçburçlukdyr. Kosinuslar teoremasy boýunça

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

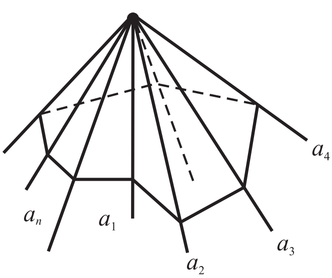


110-njy surat

Pifagoryň teoremasy boýunça

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

Bir nokatdan çykýan we bir tekizlikde ýatmaýan üç *a, b, c* şöhlä seredeliň. Tekiz (*ab*), (*bc*) we (*ac*) üç burçdan emele gelen figura (*abc*) **üçgranly burç diýilýär** (*110-njy surat*). Bu burçlara üçgranly burçuň granlary, olaryň taraplaryna bolsa gapyrgalary diýilýär. Tekiz burçlaryň umumy depesine üçgranly burçuň depesi diýilýär. Üçgranly burçuň granlary arkaly emele gelen ikigranly burçlara **üçgranly burçuň ikigranly burçlary** diýilýär.

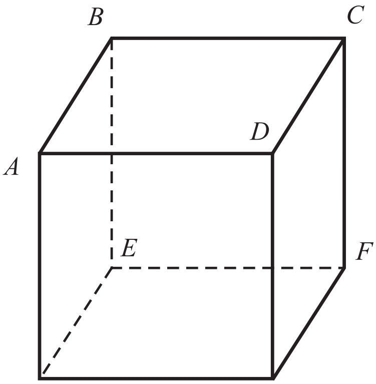


111-nji surat

Köpgranly burç düşünjesi giňişlikde tekiz burçlardan düzülen figura hökmünde şoňa meňzeşlikde kesgitlenilýär (*111-nji surat*). Köpgranly burç diýip, granlarynyň sany üç we ondan köp bolan burçlara düşünilýär.

§2. Köpgranlyk. Dogry köpgranlyklar

Köpgranlyk üsti tekiz köpburçluklardan ybarat bolan jisimdir. Eger köpgranlyk onuň üstündäki her bir tekiz köpburçlugyň tekizliginden bir tarapda ýatan bolsa, onda oňa **güberçek köpgranlyk** diýilýär. Güberçek köpgranlygyň şeýle tekizliginiň we üstüniň umumy bölegine **gran** diýilýär. Güberçek köpgranlygyň granlary tekiz güberçek köpburçluklardyr. Granlaryň taraplaryna **köpgranlygyň gapyrgalary,** depelerine bolsa **köpgranlygyň depeleri** diýilýär.



112-nji surat

Aýdylanlary kubuň mysalynda düşündireliň (*112-nji surat*). Kub güberçek köpgranlykdyr. Onuň üsti alty kwadratdan ybarat: $ABCD$, $BEFC$, ... Olar onuň granlarydyr. Kubuň gapyrgalary – bu kwadratlaryň taraplarydyr: AB, BC, BE, ... Kubuň depeleri kwadratlaryň depeleridir: A, B, C, D, E, ... Kubuň alty grany, on iki gapyrgasy we sekiz depesi bar.

Eger güberçek köpgranlygyň granlary şol birsanly taraplary bolan dogry köpburçluk bolsa we köpgranlygyň her bir depesinden şol birsanly gapyrgalar çykýan bolsa, onda oňa **dogry güberçek köpgranlyk** diýilýär.

Dogry güberçek köpgranlyklaryň bäş görnüşi bar: **dogry tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr.**

Dogry tetraedriň granlary – dogry üçburçluklar, her bir depesinden üç gapyrga çykýar. Tetraedr ähli gapyrgalary deň bolan üçburçly piramidadyr.

Kubuň ähli granlary – kwadrat, her bir depesinden üç gapyrga çykýar. Kub gapyrgalary deň bolan gönüburçly parallelepipeddir.

Oktaedriň granlary – dogry üçburçluklar, ýöne tetraedrden tapawutlykda her bir depesinden dört gapyrga çykýar.

Dodekaedriň granlary – dogry bäşburçluklar, her bir depesinden üç gapyrga çykýar.

Ikosaedriň granlary – dogry üçburçluklar, ýöne tetraedrden hem-de oktaedrden tapawutlylykda her bir depesinden bäş gapyrga çykýar.

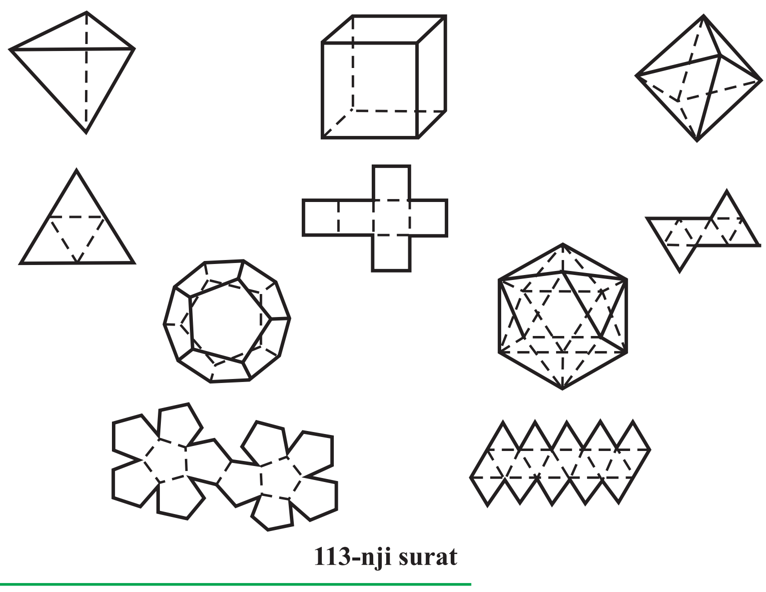
Mesele. Dogry tetraedriň ikigranly burçlaryny tapyň.

Çözülişi. Tetraedriň S depesinden onuň granlarynyň bu depeden çykýan SA, SB, SC beýikliklerini we pramidalarynyň SO beýikligini geçireliň. Eger tetraedriň gapyrgasyny a arkaly belgilesek, onda granlarynyň beýiklikleri $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ deň bolar. SA, SB, SC beýiklikleriň deňdiginden OA, OB, OC kesimleriň deňdigi gelip çykýar. Olar bolsa, tetraedriň esasyndaky üçburçlugyň taraplaryna perpendikulýardyr. Bu ýerden O nokadyň tetraedriň esasynda içinden çyzylan töweregiň merkezidigi gelip çykýar. Şeýlelikde, OA, OB we OC kesimler $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ deňdir. A nokady saklaýan gapyrgadaky ikigranly burçy φ bilen belläliň. Şonda

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3},\ \varphi \approx 70^\circ 32'.$$

Tetraedriň beýleki gapyrgalaryndaky burçlarynyň hem şeýle ululykdadygy düşnüklidir.

Dogry köpgranlyklaryň hemme görnüşiniň üstüniň ýazgyny aşakdaky 113-nji suratda şekillendirilendir.



113-nji surat

§3. Prizma. Göni prizma

Dürli tekizliklerde ýatýan we parallel göçürme arkaly gabat getirilýän tekiz iki köpburçluklar we bu köpburçluklaryň degişli nokatlaryny birleşdirýän ähli kesimlerden ybarat köpgranlyga **prizma** diýilýär. Köpburçluklara **prizmanyň esaslary**, degişli depeleri birikdirýän kesimlere bolsa **prizmanyň gapdal gapyrgalary** diýilýär.

Parallel göçürmede tekizligiň tekizlige (ýa-da özüne) geçýändigi sebäpli, prizmanyň esaslary parallel tekizlikde ýatýarlar.

Parallel göçürmede nokatlaryň parallel (ýa-da gabat gelýän) göni çyzyklar boýunça şol bir uzaklyga süýşýändigi sebäpli, prizmanyň gapdal gapyrgalary parallel we deňdirler.

Prizmanyň üsti esaslardan we gapdal üstden ybarat. Gapdal üsti parallelogramlardan ybarat. Bu parallelogramlaryň her biriniň iki tarapy esaslaryň degişli taraplary, beýleki ikisi goňşy gapdal gapyrgalaryr.

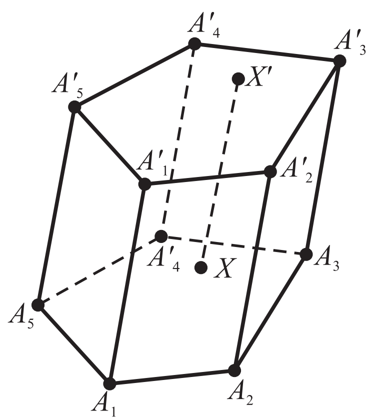
Prizmanyň esaslarynyň tekizlikleriniň arasyndaky uzaklyga onuň **beýikligi** diýilýär. Prizmanyň bir grana degişli bolmadyk iki depesini birikdirýän kesime **prizmanyň diagonaly** diýilýär.

Biz geljekde diňe esaslary güberçek köpburçluklar bolan prizmalara serederis. Şeýle prizmalar güberçek köpgranlyklardyr.

114-nji suratda – bäşburçly prizma şekillendirilendir. Onuň esaslary $A_1A_2 \dots A_5$, $A_1'A_2' \dots A_5'$ bäşburçluklardyr. XX' – esaslaryň degişli nokatlaryny birikdirýän kesim. Prizmanyň gapdal gapyrgalary A_1A_1', A_2A_2'..., A_5A_5' kesimler. Prizmanyň gapdal granlary $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ... parallelogramdyr.

Eger prizmanyň gapdal gapyrgalary esaslara perpendikulýar bolsalar, on da oňa **göni prizma** diýilýär. Tersine bolan ýagdaýda **ýapgyt prizma** diýilýär.

Göni prizmanyň gapdal granlary gönüburçluklardyr. Göni prizma suratda şekillendirilende gapdal gapyrgalary, adatça, wertikal göni çyzyklar hökmünde geçirýärler.



114-nji surat

Eger göni prizmanyň esaslary dogry köpburçluklar bolsa, onda oňa **dogry prizma** diýilýär.

Prizmanyň gapdal granlarynyň meýdanlarynyň jemine **prizmanyň gapdal üsti** (gapdal üstüniň meýdany) diýilýär. Prizmanyň doly üsti onuň gapdal üsti bilen esaslarynyň meýdanlarynyň jemine deňdir.

TEOREMA. Göni prizmanyň gapdal üsti esasynyň perimetriniň onuň beýikligine, ýagny gapdal gapyrgasynyň uzynlygyna köpeldilmegine deňdir.

Subudy. Göni prizmanyň gapdal granlary – gönüburçluklar. Bu gönüburçluklaryň esaslary prizmanyň esasynda ýatan köpburçlugyň traplarydyr, beýiklikleri bolsa, gapdal gapyrgalarynyň uzynlygyna deňdir. Bu ýerden prizmanyň gapdal üstüniň

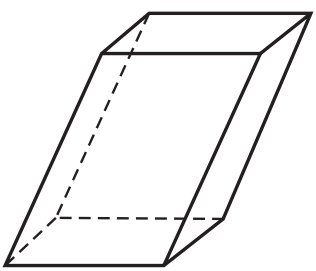
$$\boldsymbol{S = a_1 l + a_2 l + ... + a_n l = pl}$$

deňdigi gelip çykýar, bu ýerde $a_1,..., a_n$ – esasyň taraplarynyň uzynlygy, p – prizmanyň esasynyň perimetri, l – gapdal gapyrgalaryň uzynlygy. Teorema subut edildi.

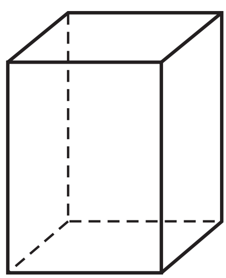
§ 4. Parallelepiped. Gönüburçly parallelepiped

Eger prizmanyň esasy parallelogram bolsa, onda oňa parallelepiped diýilýär. Parallelepipediň ähli granlary parallelogramlardyr.

115-nji suratda ýapgyt parallelepiped, 116-njy suratda göni parallelepiped şekillendirilendir.



115-nji surat

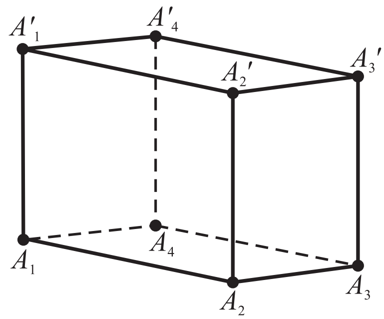


116-njy surat

Parallelepipediň umumy depeleri bolmadyk granlaryna **garşylykly granlar** diýilýär.

TEOREMA. Parallelepipediň garşylykly granlary paralleldirler we deňdirler.

Subudy. Prallelepipediň haýsy hem bolsa garşylykly ýatan iki sany, mysal üçin $A_1A_2A_2'A_1'$ we $A_3A_4A_4'A_3'$ granyna seredeliň (*117-nji surat*). Parallelepipediň ähli granlarynyň parallelogramdygy sebäpli, A_1A_2 göni çyzyk A_3A_4 göni çyzyga parallel, A_1A_1' göni çyzyk bolsa A_4A_4' göni çyzyga paralleldir. Bu ýerden seredilýän granlaryň tekizlikleriniň paralleldikleri gelip çykýar.



117-nji surat

Parallelepipediň granlarynyň parallelogramlygyndan ähli A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ we A_2A_3 kesimleriň paralleldikleri we deňdigi gelip çykýar. Bu ýerden A_1A_4 gapyrganyň boýy boýunça $A_1A_2A_2'A_1'$ gran, parallel göçürme arkaly $A_3A_4A_4'A_3'$ gran bilen gabat gelýär diýip, netije çykarýarys. Diýmek, bu granlar deňdirler.

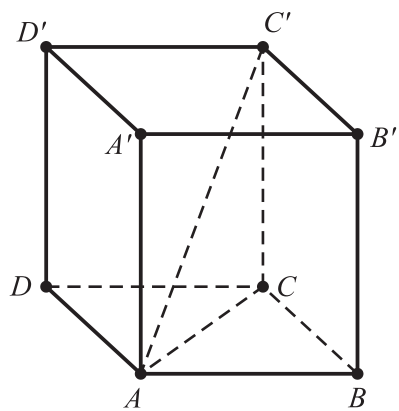
Parallelepipediň islendik garşylykly iki granynyň paralleldigi we deňdigi şuňa meňzeşlikde subut edilýär. Teorema subut edildi.

TEOREMA. Parallelepipediň diagonallary bir nokatda kesişýärler we kesişme nokady arkaly ýarpa bölünýärler (özbaşdak subut ediň).

Esasy gönüburçluk bolan göni parallelepipede **gönüburçly parallelepiped** diýilýär. Gönüburçly parallelepipediň ähli granlary gönüburçlukdyr.

Ähli gapyrgalary deň bolan gönüburçly parallelepipede **kub** diýilýär.

Parallelepipediň parallel bolmadyk üç gapyrgasynyň uzynlyklaryna onuň **çyzykly ölçegleri** diýilýär. Gönüburçly parallelepipediň üç çyzykly ölçegi bardyr.



118-nji surat

TEOREMA. Gönüburçly parallelepipediň islendik diagonalynyň kwadraty onuň üç ölçeginiň kwadratlarynyň jemine deňdir.

Subudy. $ABCDA'B'C'D'$ gönüburçly parallelepipede seredeliň (*118-nji surat*). Gönüburçly $AC'C$ üçburçlukdan Pifagoryň teoremasy boýunça alarys:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Gönüburçly ACB üçburçlukdan Pifagoryň teoremasy boýunça alarys: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Bu ýerden $AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2$.

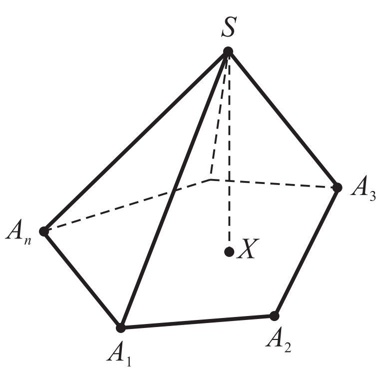
AB, BC we CC' gapyrgalar parallel däldirler, şeýlelikde, olaryň uzynlyklary parallelepipediň çyzykly ölçegleridir. Teorema subut edildi.

§ 5. Piramida. Kesilen piramida. Dogry piramida

Bir grany haýsy-da bolsa bir köpburçluk bolup, galan granlary umumy depeleri bolan üçburçluklardan ybarat bolan köpgranlyga **piramida** diýilýär.

Piramidanyň depesini esasynyň depeleri bilen birikdirýän kesimlere **gapdal gapyrgalar** diýilýär.

Piramidanyň üsti esasdan we gapdal granlardan ybaratdyr. Her bir gapdal gran – üçburçluk. Onuň depeleriniň biri piramidanyň depesi, garşysynda ýatan tarapy-piramidanyň esasynyň tarapy.



119-njy surat

Piramidanyň depesinden esasynyň tekizligine inderilen perpendikulýara **piramidanyň beýikligi** diýilýär.

Eger piramidanyň esasy ***n*** – burçluk bolsa, onda oňa ***n* – burçly piramida** diýilýär.

119-njy suratda şekillendirilen piramidanyň esasy $A_1A_2...A_n$ köpburçluk, piramidanyň depesi ***S*,** gapdal gapyrgalary – SA_1, SA_2, ..., SA_n gapdal granlary – $\Delta SA_1, A_2$, ΔSA_2A_3....

Biz geljekde esasynda diňe güberçek köpburçluk bolan piramida serederis. Şeýle piramidalar güberçek köpgranlyklardyr.

TEOREMA. Piramidanyň esasyna parallel we ony kesýän tekizlik ondan meňzeş piramidany kesip alýar.

Subudy. Goý, S – piramidanyň depesi, α – onuň esasynyň tekizligi we α' – kesiji tekizlik bolsun. Piramidanyň esasynda ýatýan iki sany erkin X we Y nokat alalyň. α' – tekizlik XS we YS kesimleri X' we Y' nokatlarda kesýär. XY we X' we Y' göni çyzyklar parelleldir,çünki bir tekizlikde – XYS üçburçlugyň tekizliginde ýatýarlar we kesişmeýärler. SXY we $SX'Y'$ üçburçluklaryň meňzeşliginden $\frac{X'S}{XS}$ we $\frac{Y'S}{YS}$ gatnaşyklaryň deňdigi, ýagny $\frac{X'S}{XS}=k$ gatnaşygyň X nokadyň alnyşyna bagly däldigi gelip çykýar. Bu ýerden α' tekizlik bilen kesilip alynýan piramidadan k koeffisiýentli S nokada görä özgertme arkaly figuranyň alynýandygy gelip çykýar. Şeýle figuralar bolsa meňzeşdirler. Teorema subut edildi.

Teorema boýunça piramidanyň esasynda parallel we onuň gapdal gapyrgalaryny kesýän tekizlik ondan meňzeş piramidany kesip alýar. Beýleki bölek kesilen piramida diýilýän köpgranlykdyr. Kesilen piramidanyň parallel tekizliklerde ýatýan granlaryna esaslary, beýleki granlaryna gapdal granlary diýilýär. Kesilen piramidanyň esaslary meňzeş köpburçluklardyr, gapdal granlary trapesiýalardyr.

Mesele. Piramidanyň gapdal gapyrgasy dört deň bölege bölünendir we bölme nokatlary arkaly esasa parallel tekizlikler geçirilendir. Esasynyň meýdany 400 sm^2 deň. Kesikleriň meýdanlaryny tapyň.

Çözülişi. Kesikler piramidanyň esasyna $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ we $\frac{3}{4}$ meňzeşlik koeffisiýentleri bilen meňzeşdirler. Meňzeş figuralaryň meýdanlary çyzykly ölçegleriň kwadratlary ýaly gatnaşýarlar. Şoňa görä-de, kesikleriň meýdanlarynyň piramidanyň esasynyň meýdanyna gatnaşygy $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{2}{4}\right)^2$ we $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ deň. Şeýlelikde, kesikleriň meýdanlary

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25(sm^2),\ 400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100(sm^2),\ 400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225(sm^2)$$

deňdir.

Eger piramidanyň esasy dogry köpburçluk, beýikliginiň esasy bolsa merkezi bilen gabat gelýän bolsa, onda oňa **dogry piramida** diýilýär. Dogry piramidanyň beýikligini saklaýan göni çyzyga onuň **oky** diýilýär. Dogry piramidanyň gapdal taraplary deňdirler, şeýlelikde, gapdal granlarynyň deň deňýanly üçburçluklardygy düşnüklidir.

Dogry piramidanyň gapdal granynyň depesinden geçirilen beýikligine onuň **apofemasy** diýilýär. Piramadanyň gapdal granlarynyň meýdanlarynyň jemine onuň **gapdal üsti** diýilýär.

TEOREMA. Dogry piramidanyň gapdal üsti esasynyň ýarym perimetriniň apofema köpeldilmegine deňdir.

Subudy. Eger esasynyň tarapy a, taraplarynyň sany n bolsa, onda piramidanyň gapdal üsti

$$\frac{al}{2}n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2}$$

deň, bu ýerde l – apofema, p – piramidanyň esasynyň perimetri. Teorema subut edildi.

Dogry piramidadan alynýan kesilen piramida ***kesilen dogry piramida*** diýilýär. Kesilen dogry piramidanyň gapdal granlary – deň deňýanly trapesiýalar, olaryň beýikliklerine **apofemalary** diýilýär.

Mesele. Kesilen dogry piramidanyň gapdal üstüniň esaslarynyň perimetrleriniň ýarym jeminiň apofema köpeldilmegine deňdigini subut ediň.

Çözülişi. Kesilen piramidanyň gapdal granlary aşaky esasy a, ýokarky esasy b we l beýikligi (apofemasy) bolan trapesiýalar. Şoňa görä-de, bir granyň meýdany $\frac{1}{2}(a+b)\cdot l$ deň. Ähli granlarynyň meýdany, ýagny gapdal üsti $\frac{1}{2}(an+bn)\cdot l$ deň, bu ýerde n – piramidanyň esasynyň depeleriniň sany, an we bn – piramidanyň esaslarynyň perimetrleri.

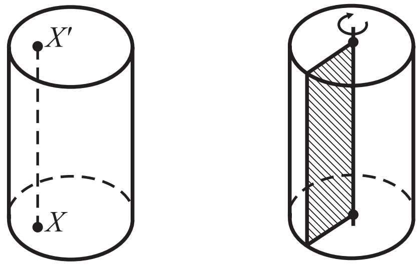
§ 6. Aýlanma jisimler: silindr, konus, şar

1. Silindr

Bir tekizlikde ýatmaýan iki deň tegelekden hem-de parallel göçürme arkaly gabat gelýän we bu tegelekleriň degişli nokatlaryny birikdirýän ähli kesimlerden ybarat jisime **silindr** diýilýär (*120-nji surat*). Tegeleklere silindriň **esaslary**, tegelegiň töwereginiň degişli nokatlaryny birikdirýän kesimlere silindriň **emele getirijileri** diýilýär.

Parallel göçürmäniň hereketdigi sebäpli, **silindriň esaslary deňdirler.**

Parallel göçürmede tekizligiň parallel tekizlige (ýa-da özüne) geçýändigi sebäpli, **silindriň esaslary parallel tekizlikde ýatýarlar.**



120-nji surat

Parallel göçürmede nokatlaryň parallel (ýa-da gabat gelýän) göni çyzyklar boýunça şol bir uzaklyga süýşýändigi sebäpli, **silindriň emele getirijileri paralleldirler we deňdirler.**

Silindriň üsti gapdal üstden we esaslardan ybaratdyr. Gapdal üsti emele getirijilerden düzülendir.

Eger silindriň emele getirijileri esaslaryň tekizliklerine perpendikulýar bolsalar, onda oňa **göni silindr** diýilýär.

Geljekde biz gysgaça silindr diýip atlandyrmak bilen diňe göni silindrlere serederis. Göni silindri gönüburçlugyň öz tarapynyň daşyndan ok hökmünde aýlanmagyndan alnan jisim hökmünde göz öňüne getirip bolar.

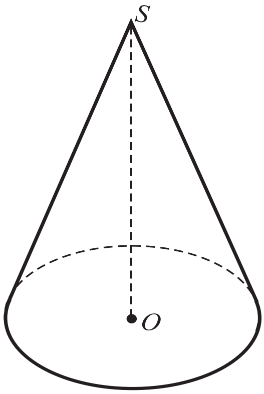
Silindriň esasynyň radiusyna onuň **radiusy** diýilýär. Silindriň esaslarynyň tekizlikleriniň arasyndaky uzaklyga **silindriň beýikligi** diýilýär. Silindriň esaslarynyň merkezinden geçýän göni çyzyga onuň **oky** diýilýär. Emele getirijiler paralleldirler.

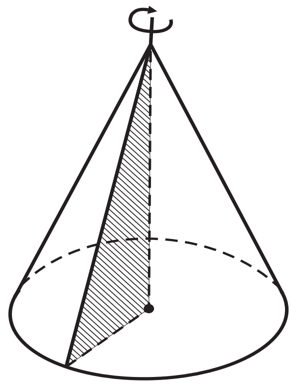
2. Konus

Berlen nokady käbir tegelegiň nokatlary bilen birleşdirýän ähli kesimler bilen emele gelen jisime konus diýilýär (*121-nji surat*). Berlen nokada konusyň depesi, berlen tegelege bolsa konusyň esasy diýilýär. Konusyň depesini esasynyň töwereginiň nokatlary bilen birikdirýän kesimlere **konusyň emele getirijileri** diýilýär. Konusyň üsti esasdan we gapdal üstden ybarat.

Eger konusyň depesini esasyň merkezi bilen birikdirýän göni çyzyk esasynyň tekizligine perpendikulýar bolsa, onda oňa **göni ko-**

nus diýilýär. Biz geljekde gysgaça konus diýip atlandyrmak bilen, diňe göni konusa serederis. Göni konusy gönüburçlugyň öz katetiniň daşyndan ok hökmünde aýlanmagyndan emele gelen jisim hökmünde göz öňüne getirip bolar.

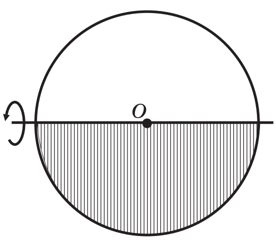




121-nji surat

Konusyň depesinden esasynyň tekizligine inderilen perpendikulýara **konusyň beýikligi** diýilýär. Göni konusyň beýikliginiň esasy esasynyň merkezi bilen gabat gelýär. Göni konusyň beýikligini saklaýan göni çyzyga onuň **oky** diýilýär.

3. Şar



122-nji surat

Giňişlikde berlen nokatdan berlen uzaklykdan uly bolmadyk uzaklykda ýerleşýän ähli nokatlardan ybarat jisime **şar** diýilýär. Bu nokada **şaryň merkezi,** berlen uzaklyga bolsa **şaryň radiusy** diýilýär.

Şaryň araçägine **şar üsti** ýa-da **sfera** diýilýär. Şeýlelik bilen, şaryň merkezinden radiusa deň uzaklyga daşlaşan ähli nokatlar sferanyň nokatlarydyr. Şaryň merkezini şar üstüniň nokady bilen birikdirýän islendik nokada hem **şaryň radiusy** diýilýär.

Şar üstüniň iki nokadyny birikdirýän we şaryň merkezi arkaly geçýän kesime **şaryň diametri** diýilýär.

Şar edil silindr we konus ýaly, aýlanma jisimidir. Ol ýarym tegeleğiň diametriniň daşyndan aýlanmagyndan alynýar (*122-nji surat*).

XI baba degişli gönükmeler

1. Üçburçly ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgalarynyň arasyndaky uzaklyklar 37 *sm*, 13 *sm* we 40 *sm*. Uly gapdal grany bilen garşysynda ýatan gapdal gapyrgasynyň arasyndaky uzaklygy tapyň.

2. Prizmanyň esasy tarapy a bolan altyburçluk gapdal granlary bilen kwadratdyrlar. Prizmanyň diagonallaryny we onuň diagonal kesikleriniň meýdanlaryny tapyň.

3. Ýapgyt prizmanyň gapdal gapyrgasy 15 *sm*-e deň we esasynyň tekizligine 30^{o} burç bilen ýapgytlanan. Prizmanyň beýikligini tapyň.

4. Dogry dörtburçly prizmanyň esasynyň meýdany 144 sm^2, beýikligi bolsa 14 *sm*-e deň. Prizmanyň diagonalyny tapyň.

5. Ýapgyt burçly prizmanyň gapdal gapyrgalaryny saklaýan parallel göni çyzyklaryň arasyndaky uzaklyklar 2 *sm*, 3 *sm* we 4 *sm*, gapdal gapyrgasy bolsa 5 *sm*-e deň. Prizmanyň gapdal üstüni tapyň.

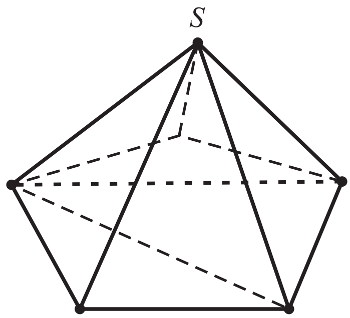
6. Her bir gapyrgasy a, esasynyň burçy 60^{o} bolan göni parallelepipediň diagonalyny tapyň.

XII BAP

KÖPGRANLYKLARYŇ WE AÝLANMA JISIMLERIŇ GÖWRÜMI

§1. Göwrüm düşünjesi

Tekizlikdäki figuralar üçin meýdan düşünjesiniň girizilişine meňzeşlikde giňişlikdäki jisimler üçin göwrüm düşünjesi girizilýär. Ilki bilen ýönekeý jisimlere serederis. Eger jisimi üçburçly piramidalaryň



123-nji surat

tükenikli sanyna bölüp bolýan bolsa, onda oňa **ýönekeý jisim** diýilýär.

Ýönekeý jisimler üçin göwrüm – bu san bahasy aşakdaky häsiýetlere eýe bolan položitel ululykdyr.

1. Deň jisimleriň deň göwrümleri bar.

2. Eger jisim ýönekeý jisimler bolýan böleklere bölünen bolsa, onda bu jisimiň göwrümi onuň bölekleriniň göwrümleriniň jemine deňdir.

3. Gapyrgasy uzynlyk birligine deň bolan kubuň göwrümi bire deňdir.

Eger gürrüňini edýän kubumyzyň 1 *sm*-e deň gapyrgasy bar bolsa, onda onuň göwrümi kub santimetr bolar, eger kubuň gapyrgasy 1 *m* bolsa, onda onuň göwrümi kub metr bolar, eger kubuň gapyrgasy 1 *km* bolsa,onuň göwrümi kub kilometr bolar we başg.

Islendik güberçek köpgranlyk ýönekeý jisimiň mysalydyr (*123-nji surat*). Ony üçburçly piramidalaryň tükenikli sanyna aşakdaky ýaly bölüp bolar. Köpgranlygyň haýsy hem bolsa bir depesini S bilen belläliň. Köpgranlygyň S depäni saklamaýan ähli granlaryny üçburçluklara böleliň. Şonda köpgranly esasy bolup şu üçburçluklar hyzmat edýär we umumy depeli (S) üçburçly piramidalara bölünýär.

§2. Gönüburçly parallelepipediň göwrümi

a, b, c çyzykly ölçegleri bolan gönüburçly parallelepipediň göwrümini tapalyň. Munuň üçin ilki bilen deň esaslary bolan iki sany gönüburçly parallelepipediň göwrümleriniň olaryň beýiklikleri ýaly gatnaşýandyklaryny subut edeliň.

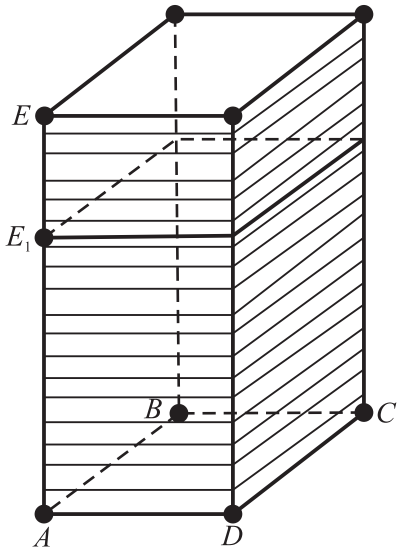
Goý, P we P_1 – umumy $ABCD$ esaslary we AE hem-de AE_1 beýiklikleri bolan iki sany gönüburçly parallelepiped bolsun (*124-nji surat*). Kesgitlilik üçin $AE_1 < AE$ diýeliň. Goý, V we V_1 – parallelepipedleriň göwrümleri bolsun. P parallelepipediň AE gapyrgasyny deň uly n böleklere böleliň. Olaryň her biri $\frac{AE}{n}$. Goý, m – AE_1 gapyrgada ýatan bölme nokatlaryň sany bolsun. Şonda

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \le AE_1 \le \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Bu ýerden:

$$\frac{m}{n} \le \frac{AE_1}{AE} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Bölme nokatlary arkaly esasa parellel tekizlikler geçireliň. Olar P parallelepipedi deň n parallelepipede bölýärler. Olaryň her biriniň $\frac{V}{n}$ göwrümi bar. P_1 parallelepiped aşakdan başlap, ilkinji m parallelepipedi saklaýar we $m + 1$ parallelepipedde saklanýar. Şoňa görä-de,



124-nji surat

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \le V_1 \le \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Bu ýerden:

$$\frac{m}{n} \le \frac{V_1}{V} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad (2)$$

(1) we (2) deňsizliklerden $\frac{V_1}{V}$ we $\frac{AE_1}{AE}$ iki sanyň $\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ sanlaryň arasynda ýerleşýändiklerini görýäris. Şoňa görä-de, olar $\frac{1}{n}$ köp bolmadyk sana tapawutlanýarlar. n sany islendik uly san edip alyp bolýandygy sebäpli, bu diňe $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$ bolanda bolup biler, şuny hem subut etmek talap edilýärdi.

Indi göwrüm ölçemegiň birligi bolan kuby hem-de a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c ölçegleri bolan üç sany gönüburçly parallelepiped alalyň. Olaryň göwrümlerini degişlilikde V_1, V_2 we V bilen belläliň. Subut edilişine görä:

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a_1}{1}; \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}; \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Bu üç deňligi agzama-agza köpeldip alarys:

$$V = abc.$$

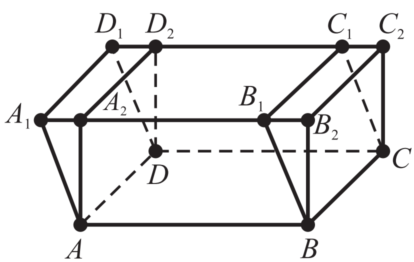
Şeýlelikde, ***a*, *b*, *c* çyzykly ölçegleri bolan gönüburçly parallelepipediň göwrümi *V* = *abc* formula bilen hasaplanylýar.**

Mesele. Eger kubuň her bir gapyrgasyny 2 *sm* uzaltsak, onda onuň göwrümi 98 sm^3 ulalar. Kubuň gapyrgasy näçä deň?

Çözülişi. Kubuň gapyrgasyny x bilen belläliň, şonda $(x+2)^3 - x^3 = 98$, ýagny $x^2 + 2x - 15 = 0$. Deňlemäniň iki köki bar: $x = 3$; $x = -5$. Diňe položitel kökүň geometrik manysy bar. Şeýlelikde, kubuň gapyrgasy 3 *sm*-e deň.

§ 3. Ýapgyt parallelepipediň göwrümi

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ ýapgyt parallelepipediň göwrümini tapalyň (*125-nji surat*).



125-nji surat

BC gapyrga arkaly $ABCD$ esasa perpendikulýar tekizlik geçireliň we ýapgyt parallelepipedi $BB_1B_2CC_1C_2$ üçburçly prizma bilen dolduralyň. Alnan jisimden AD gapyrga arkaly geçýän we $ABCD$ esasa perpendikulýar tekizlik bilen üçburçly prizmany kesip alalyň. Şonda ýene-de parallelepiped alarys. Bu parallelepipediň göwrümi başky parallelepipediň göwrümine deňdir.

Hakykatdan-da, soňky gurlan prizma bilen kesilip alnan prizma AB kesimde parallel göçürme bilen gabat gelýärler, şeýlelikde, deň göwrümleri bardyr. Parallelepipediň beýan edilen özgertmesinde onuň esasynyň meýdany we beýikligi saklanýar. Iki gapdal granynyň tekizlikleri hem saklanýar, beýleki ikisi bolsa esasa perpendikulýar bolýarlar.

Ýene bir gezek şeýle özgertmäni ýapgyt granlara ulanyp, ähli granlary esasa perpendikulýar parallelepiped, ýagny göni parallelepiped alarys.

Alnan göni parallelepipedi ilki bilen bir prizma bilen dolduryp, soňra prizmany kesip alyp, gönüburçly parallelepipede ýokardaka meňzeşlikde özgerdeliň. Bu özgertme hem parallelepipediň göwrümini, esasynyň meýdanyny we beýikligini saklaýar.

Gönüburçly parallelepipediň göwrümi onuň ölçegleriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Iki ölçeginiň köpeltmek hasyly parallelepipediň esasynyň meýdany, üçünji ölçegi bolsa onuň beýikligi.

Şeýlelik bilen, gönüburçly parallelepipediň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir. Berlen parallelepiped gönüburçly parallelepipede ýokarda beýan edilişi ýaly özgerdilende her gezek göwrüminiň esasynyň meýdanyny we beýikligini saklaýandygy sebäpli, başky parallelepipediň göwrümi hem esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.

Şeýlelikde, **islendik parallelepipediň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.**

Mesele. Göni parallelepipedde esasynyň a we b taraplary 30° burçy emele getirýärler. Gapdal üsti S-e deň. Onuň göwrümini tapyň.

Çözülişi. Beýikligi x bilen belläliň. Şonda:

$$(2a+2b)x = S.$$

Bu ýerden:

$$x = \frac{S}{2(a+b)}.$$

Parallelepipediň esasynyň meýdany $ab\sin 30^{\circ} = \frac{ab}{2}$.

Göwrümi $\frac{abS}{4(a+b)}$.

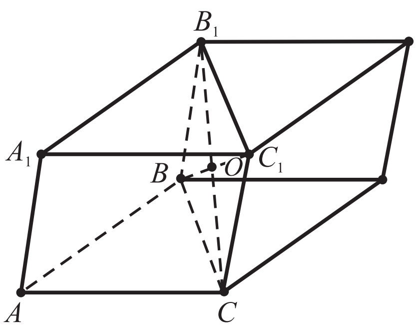
§ 4. Prizmanyň göwrümi

Ilki bilen üçburçly prizma seredeliň (*126-njy a surat*). Ony parallelepipede çenli doldurالyň. O nokat parallelepipediň simmetriýa merkezidir. Şoňa görä-de, täzeden gurlan prizma O nokada görä başky prizma simmetrik, şeýlelikde, başky prizmanyňky ýaly göwrümi bar. Şeýlelik bilen, gurlan parallelepipediň göwrümi berlen prizmanyň ikeldilen göwrümine deň.

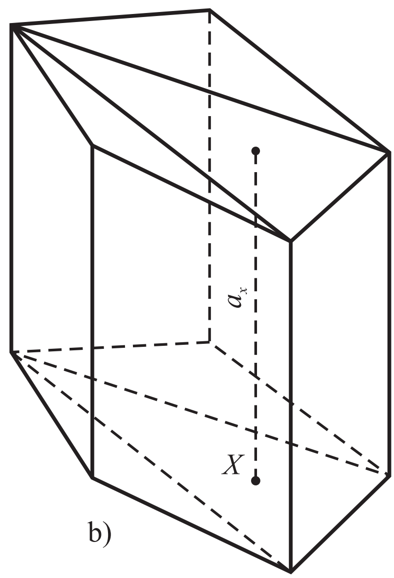
Parallelepipediň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deň. Onuň esasynyň meýdany ABC üçburçlugyň ikeldilen meýdanyna deň, beýikligi bolsa başky prizmanyň beýikligine deň. Bu ýerden göwrüm esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deň diýip, netije çykarýarys.

Indi erkin prizma seredeliň. Onuň esasyny üçburçluklara böleliň. Goý, Δ – bu üçburçluklaryň biri bolsun (*126-njy b surat*). Δ üçburçlugyň erkin X nokadyndan gapdal gapyrgalara parallel göni çyzyk geçireliň. Goý, a_x – bu göni çyzygyň prizma degişli kesimi bolsun. X nokat Δ üçburçlugy çyzanda a_x kesimler üçburçly prizmany doldurýarlar. Her bir üçburçluk üçin şeýle prizmany gurup, biz berlen prizmanyň üçburçly prizmalara bölünmesini alarys. Bu prizmalaryň ählisiniň başky prizmanyň beýikligine deň şol bir beýikligi bardyr.

Berlen prizmanyň göwrümi ony düzýän üçburçly prizmalaryň göwrümleriniň jemine deňdir. Üçburçly prizmanyň göwrümi subut



a)



b)

126-njy surat

edilişi boýunça esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir. Bu ýerden başky prizmanyň göwrüminiň

$$V = S_1H+S_2H+\ldots+S_nH = (S_1+S_2+\ldots+S_n)H$$

deňdigi gelip çykýar, bu ýerde S_1, S_2, ..., S_n – prizmanyň esasynyň bölünen üçburçluklarynyň meýdanlary, H – prizmanyň beýikligi. Üçburçluklaryň meýdanlarynyň jemi berlen prizmanyň esasynyň S meýdanyna deň. Şoňa görä:

$$V = SH.$$

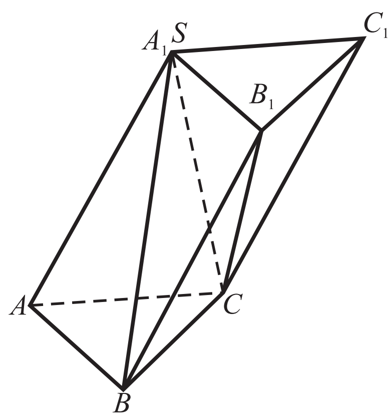
Şeýlelikde, **islendik prizmanyň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmegine deňdir.**

Mesele. Ýapgyt prizmada gapdal gapyrgalara perpendikulýar we onuň ähli gapdal gapyrgalaryny kesýän kesik geçirilipdir. Eger kesigiň meýdany Q, gapdal gapyrgalary l deň bolsa, onda prizmanyň göwrümini tapyň.

Çözülişi. Geçirilen kesigiň tekizligi prizmany iki bölege bölýär. Olaryň birini prizmanyň esasy bilen gabat getirýän parallel göçürmä sezewar edeliň. Şonda esasy bolup başky prizmanyň kesigi hyzmat edýän we beýikligi l-e deň prizma alarys. Bu prizmanyň hem şol göwrümi bar. Şeýlelik bilen, başky prizmanyň göwrümi Ql.

§ 5. Piramidanyň göwrümi

Goý, $SABC$ – S depesi we ABC esasy bolan üçburçly piramida bolsun (*127-nji surat*). Bu piramidany şol bir esasly we beýiklikli üçburçly prizma çenli dolduralyň. Bu prizma üç piramidadan düzülendir: $SABC$ berlen piramida we ýene iki sany SCC_1B_1 we $SCBB_1$ üçburçly piramida.



127-nji surat

Ikinji we üçünji piramidalaryň deň esaslary bar: ΔCC_1B_1 we ΔB_1BC we S depeden inderilen umumy beýikligi bar. Şoňa görä-de, olaryň hem göwrümleri deňdir.

Birinji we üçünji piramidalaryň hem deň esaslary – ΔSAB we ΔBB_1S hem-de C depeden geçirilen gabat gelýän beýiklikleri bar. Şoňa görä-de, olaryň hem göwrümleri deňdir.

Diýmek, ähli üç piramidanyň şol bir göwrümi bardyr. Bu göwrümleriň jeminiň prizmanyň göwrümine deňdigi sebäpli, piramidalaryň göwrümi $\frac{SH}{3}$ ululyga deňdir.

Şeýlelikde, **islendik üçburçly piramidanyň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmeginiň üçden bir bölegine deňdir:**

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}SH.}$$

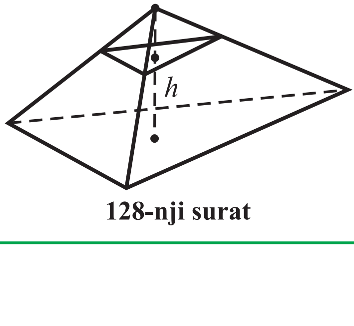
Goý, indi islendik (üçburçly bolmagy hökman däl) piramida berlen bolsun. Onuň esasyny $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ üçburçluklara böleliň. Esasy bolup bu üçburçluklar, depeleri bolup berlen piramidanyň depesi hyzmat edýän piramidalar berlen piramidany düzýärler. Berlen piramidanyň göwrümi ony düzýän piramidalaryň göwrümleriniň jemine deň. Olaryň hemmesiniň berlen piramidanyňky ýaly, şol bir H beýikliginiň bardygy sebäpli, onuň göwrümi:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + ... + S_n) = \frac{1}{3}SH.$$

Şeýlelikde, **islendik piramidanyň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmeginiň üçden birine deň.**

§6. Kesilen piramidanyň göwrümi

Mesele. Esaslary Q_1 we Q_2 hem-de h beýikligi bolan kesilen piramidanyň göwrümini tapyň (*128-nji surat*).



128-nji surat

Çözülişi. Berlen kesilen piramidany doly piramida çenli dolduralyň. Goý, x – onuň beýikligi bolsun. Kesilen piramidanyň göwrümi doly iki piramidanyň göwrümleriniň tapawudyna deň:

biriniň esasynyň meýdany Q_1 we beýikligi x, beýlekisininki Q_2 we $x-h$.

Bu piramidalaryň meňzeşliginden x taparys: $\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Bu ýerden $x=\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. Kesilen piramidanyň göwrümi:

$$V=\frac{1}{3}\left(Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}=\frac{1}{3}h(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2).$$

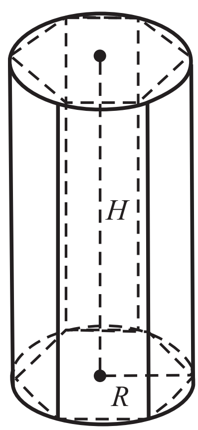
§7. Silindriň göwrümi

Silindriň göwrümini tapmak üçin aşakdakyny belläp geçeliň.

Silindriň içinden çyzylan dogry prizmanyň gapdal granlarynyň sany çäksiz ikeldilende onuň göwrüminiň ymtylýan predeli silindriň göwrüminiň ululygy deregine alynýar (*129-njy surat*).

TEOREMA. Silindriň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeltmek hasylyna deňdir.

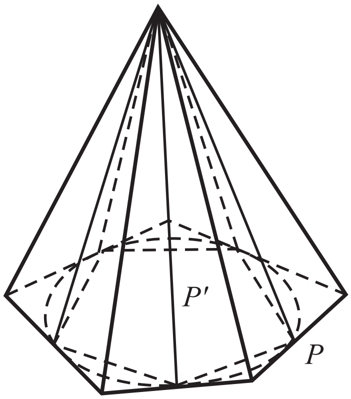
Subudy. Silindriň içinden haýsy-da bolsa bir dogry prizmany çyzalyň. Bu prizmanyň esasynyň meýdanyny Q_1 arkaly onuň beýikligini H arkaly, göwrümini bolsa V arkaly belgiläp alarys: $V_1=Q_1\cdot H$. Indi prizmanyň gapdal granlarynyň sany çäksiz ikeldilýär diýip güman edeliň. Onda prizmanyň esasynyň Q_1 meýdanynyň predeli silindriň esasynyň Q meýdanyna ymtylar. H beýikligi bolsa üýtgemän galýar. Onda silindriň göwrümi $Q\cdot H$ köpeltmek hasylyna ymtylar. Şoňa görä, silindriň göwrümi $V=Q\cdot H$ formula bilen aňladylar. Teorema subut edildi.



129-njy surat

Netije. Eger silindriň esasynyň radiusyny R bilen belgilesek, onda $Q=\pi R^2$ bolar. Bu halda silindriň göwrümi $V=\pi R^2\cdot H$ formula arkaly aňladylar.

§8. Konusyň göwrümi



130-njy surat

Konusyň esasynyň tekizliginde iki köpburçluk guralyň (*130-nji surat*): konusyň esasyny saklaýan P köpburçluk we konusyň esasynda saklanýan P' köpburçluk. Esaslary P we P', depesi bolsa konusyň depesinde bolan iki sany piramida guralyň. Birinji piramida konusy saklaýar, ikinji bolsa konusda saklanýar.

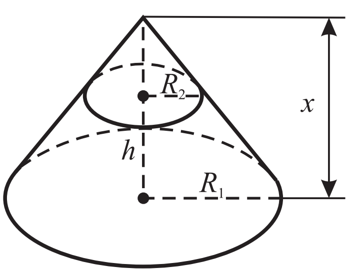
Biziň bilşimiz ýaly, taraplarynyň sany n çäksiz artanda konusyň esasyndaky tegelegiň meýdanyna çäksiz ýakynlaşýan P we P' köpburçluklar bardyr. Şeýle köpburçluklar üçin gurlan piramidalaryň göwrümleri $\frac{1}{3}$ SH-a çäksiz ýakynlaşýarlar, bu ýerde S – konusyň esasynyň meýdany, H bolsa onuň beýikligi. Kesgitlemä laýyklykda konusyň göwrüminiň

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

deňdigi gelip çykýar.

Şeýlelikde, **konusyň göwrümi esasynyň meýdanynyň beýikligine köpeldilmeginiň üçden birine deň.**

§9. Kesilen konusyň göwrümi



131-nji surat

Mesele. Esaslarynyň radiuslary R_1 we R_2 ($R_2 < R_1$), beýikligi bolsa h bolan kesilen konusyň göwrümini tapyň (*131-nji surat*).

Çözülişi. Berlen kesilen konusy doly konusa çenli dolduralyň. Goý, x – onuň beýikligi bolsun. Kesilen konusyň göwrümi iki doly konusyň göwrümleriniň tapawudyna deň: biriniň esasynyň radiusy R_1, beýikligi x, beýlekisiniň esasynyň radiusy R_2, beýikligi $x-h$.

Konuslaryň meňzeşliginden x-si taparys:

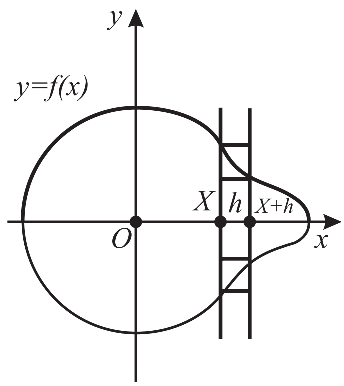
$$\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2},\ x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}.$$

Kesilen konusyň göwrümi:

$$V=\frac{1}{3}\left(\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right)=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$

§10. Aýlanma jisimleriň göwrümleri üçin umumy formula



132-nji surat

Ýönekeý halda aýlanma jisimi diýip, käbir göni çyzyga perpendikulýar tekizlikler bilen merkezi şu göni çyzygyň üstünde bolan tegelekler boýunça kesişýän jisime aýdylýar. Tegelek silindr, konus, şar aýlanma jisimleriniň mysallarydyr. Aýlanma jisimleriniň göwrümini hasaplamak üçin formulany tapalyň.

Jisimiň oky deregine x oky kabul edip, x, y, z dekart koordinatalaryny girizeliň (*132-nji surat*). xy tekizlik jisimiň üstüni çyzyklar boýunça kesýär, ol çyzyklar üçin x ok simmetriýa okudyr. Goý, $y=f(x)$ deňleme çyzygyň okuň üstünde ýerleşen böleginiň deňlemesi bolsun.

Tekizligiň $(X,0,0)$ nokady arkaly oňa perpendikulýar tekizlik geçireliň we jisimiň bu tekizlikden çepde ýerleşen böleginiň göwrümini $V(x)$ bilen belgiläliň, şonda V hem x-e bagly funksiýadyr. Onuň önümini tapalyň. Kesgitleme boýunça:

$$V'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{V(x+h)-V(x)}{h}.$$

$V(x+h) - V(x)$ tapawut jisimiň x we $x+h$ abssissaly nokatlar arkaly geçýän h oka perpendikulýar iki tekizligiň arasyndaky h galyňlykly gatlagynyň göwrümidir. Goý, $M - f(x)$ funksiýanyň $[x, x+h]$ kesimdäki iň uly, m bolsa iň kiçi bahalary bolsun. Şonda jisimiň garalýan gatlagy m radiusly, h beýiklikli silindri özünde saklýar we M radiusly, şol bir h beýiklikli silindrde saklanýar. Şoňa görä-de

$$\pi m^2 h \le V(x+h) - V(x) \le \pi M^2 h, \pi m^2 \le \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \le \pi M^2.$$

Eger $f(x)$ – üznüksiz funksiýa bolsa, onda $h \to 0$ soňky deňsizligiň sag we çep bölegi şol bir $\pi f^2(x)$ predele ymtylýar. Şol predelde olaryň arasynda ýerleşen gatnaşyk ýagny $\dfrac{V(x+h) - V(x)}{h}$ hem $V'(x) = \pi f^2(x)$ ymtylýar.

Analiziň belli formulasy boýunça:

$$V(b) - V(a) = \int_a^b V'(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx, a < b.$$

Bu formula hem jisimiň $x = a$ we $x = b$ parallel tekizlikleriň arasynda ýerleşen böleginiň göwrümini berýär.

§11. Şaryň we onuň bölekleriniň göwrümi

Aýlanma jisimleriniň göwrümleri üçin alnan formulany şaryň we onuň bölekleriniň: şar gatlagynyň we şar segmentiniň göwrümleri üçin ulanalyň.

Şar segmenti diýip, şardan tekizlik bilen kesilip alnan bölege aýdylýar. Şar gatlagy diýip, şary kesýän parallel iki tekizligiň arasynda ýerleşýän şar bölegine aýdylýar.

Şaryň merkezini koordinatalar başlangyjy deregine kabul edip, dekart koordinatalaryny girizeris. xy tekizlik R radiusly şary, belli bolşy ýaly,

$$x^2 + y^2 = R^2$$

deňleme bilen berilýän töwerek boýunça kesýär. x okuň ýokarsynda ýerleşen ýarymtekizlik

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, - R \le x \le R$$

formula bilen berilýär. $x = a$ we $x = b$ tekizlikleriň arasyndaky şar gatlagynyň göwrümi

$$V = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b =$$

$$= \pi R^2(b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

formula bilen kesgitlenilýär. Tutuş şaryň göwrümini tapmak üçin $a = -R$, $b = R$ diýip almaly. Şonda şaryň göwrümi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

bolar. H beýiklikli şar segmentiniň göwrümini almak üçin $a = R - H$, $b = H$ diýip almak gerek. **Onda şar segmentiniň göwrümi**:

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Şar sektory diýip, şar segmentinden we konusdan aşakdaky usul bilen alynýan jisime aýdylýar. Eger şar segmenti ýarym şardan kiçi bolsa, onda şar segmenti depesi şaryň merkezinde, esasy bolup segmentiň esasy hyzmat edýän konus bilen doldurylýar. Eger segment ýarym şardan uly bolsa, onda şol konus ondan bölünip aýrylýar. Şar sektorynyň göwrümi degişli segmentiň we konusyň göwrümlerini goşmak we aýyrmak bilen alynýar. Bu ýerden **şar sektorynyň göwrümi** üçin aşakdaky formula alynýar:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

bu ýerde R – şaryň radiusy, H bolsa degişli şar segmentiniň beýikligidir.

XII baba degişli gönükmeler

1. 25 *m* mis siminiň massasy 100,7 *g*. Simiň diametrini tapyň. (misiň dykyzlygy 8,94 g/sm^3).

2. Bug gazanyna suw iterýän nasosyň iki sany suw silindri bar. Silindrleriň diametrleri 80 *mm*, porşeniň iş göçümi 150 *mm*. Eger her bir porşen minutda 50 iş göçümini edýän bolsa, onda nasosyň sagatdaky öndürijiligi näçä deň?

3. Her bir gapyrgasy a bolan dogry altyburçly prizmanyň içinden çyzylan silindriň göwrümini tapyň.

4. Çagyl üýşmeginiň esasynyň radiusy 2 *m*, emele getiriji 2,5 *m* bolan konus formasy bar. Çagyl üýşmeginiň göwrümini tapyň.

5. Bede küdesiniň konus şekilli depesi bolan silindrik formasy bar. Esasynyň radiusy 2,5 *m*, beýikligi 4 *m*, özünem küdäniň silindrik böleginiň 2,2 *m* beýikligi bar. Bedäniň dykyzlygy 0,03 g/sm^3. Bede küdesiniň massasyny kesgitläň.

6. Deňtaraply üçburçluk özüniň a tarapynyň daşynda aýlanýar. Alnan aýlanma jisimiň göwrümini tapyň.

7. Esaslarynyň radiuslary 4 *sm* we 22 *sm* bolan kesilen konusyň we oňa deňululykly silindriň şol bir beýikligi bar. Bu silindriň esasynyň radiusy näçä deň?

8. Massasy 1 *kg* bolan gurşun bölegi bar. Bu bölekden diametri 1 *sm* bolan näçe şarjagazlary guýup bolar? (gurşunyň dykyzlygy 11,4 g/sm^3).

9. Beýikligi esasynyň diametrine deň bolan agaç silindrden iň uly şar oýulyp alnypdyr. Materialyň näçe göterimi ýonulypdyr?

10. Boş şaryň daşky diametri 18 *sm*. Diwarlarynyň galyňlygy 3 *sm*. Taýýarlanylan şaryň materialynyň göwrümini tapyň.

11. Gabyň silindr bilen doldurylan R radiusly ýarym şar formasy bar. Gabyň V göwrümi bolar ýaly, onuň silindrik böleginiň nähili beýikligi bolmaly?

12. Şaryň diametrine perpendikulýar tekizlik ony diametri 3 *sm* we 9 *sm* böleklere bölýär. Şaryň göwrümi nähili böleklere bölüner?

13. 30° burçy we R radiusy bolan tegelek sektor özüniň gapdal radiuslarynyň biriniň daşyndan aýlanýar. Alnan jisimiň göwrümini tapyň.

14. Üçburçlugyň gipotenuzasy we katetleri üç şaryň diametrleri bolýarlar. Olaryň üstleriniň arasynda nähili baglanyşyk bar?

15. Kwadratyň öz tarapynyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelen jisimiň üsti radiusy kwadratyň tarapyna deň bolan şaryň üsti bilen deňululykly. Subut ediň.

16. Radiusy 10 *sm* bolan şar oky boýunça silindr görnüşinde oýulypdyr. Deşigiň diametri 12 *sm*. Jisimiň doly üstüni tapyň.

17. Ýerzeminiň ýarym silindrik gümmeziniň 6 *m* uzynlygy we 5,8 *m* diametri bar. Ýerzeminiň doly üstüni tapyň.

18. Tegelek metal listden diametri 25 *sm* we beýikligi 50 *sm* bolan silindrik stakan ştamplanypdyr. Ştamplananda listiň meýdany üýtgemeýär diýip, listiň diametrini tapyň.

19. Ýarymtegelegi konus şekilli üst görnüşinde doladylar. Konusyň emele getirijisi bilen okunyň arasyndaky burçy tapyň.

20. Tegelek sektoryň radiusy 3 *m*, onuň burçy 120°. Sektory konus üst görnüşinde dolapdyrlar. Konusyň esasynyň radiusyny tapyň.

21. Bir ujunyň diametri 0,43 *m*, beýleki ujunyň diametri 0,036 *m* we emele getirijisi 1,42 *m* bolan gural ýasamak üçin näçe kwadrat metr bolan latun list talap edilýär?

22. Eger 1 m^2 meýdana 150 *g* olif talap edilýän bolsa, onda esaslarynyň diametrleri 25 *sm* we 30 *sm* we emele getirijisi 27,5 *m* bolan kesilen konus formaly 100 bedräniň daşky üstüni reňklemek üçin näçe olif talap edilýär?

XIII BAP

AÝLANMA JISIMLERIŇ ÜSTLERINIŇ MEÝDANY

§1. Silindriň gapdal we doly üstüniň meýdany

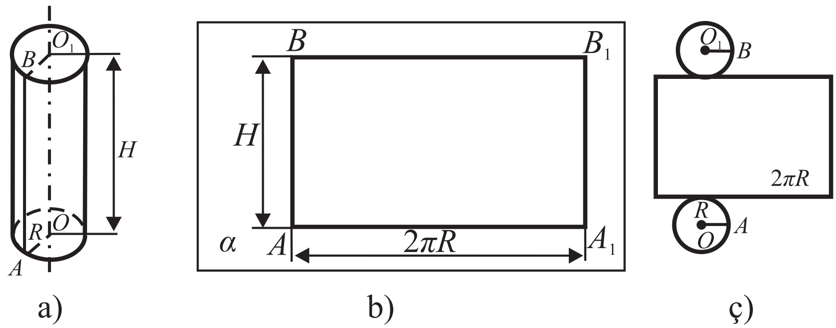
Silindriň üsti gapdal üstden we iki sany deň meýdanly esasdan düzülendir.

Silindriň gapdal üstüniň meýdany bilen iki sany esaslarynyň meýdanlarynyň jemine **silindriň doly üstüniň meýdany** diýilýär:

$$S = S_g + S_e.$$

Bu has aýdyň bolar ýaly silindriň üstüniň ýazgyn görnüşini alalyň (*133-nji b, ç surat*). Onuň üçin silindriň gapdal üstüni onuň *AB* emele getirijisi boýunça kesip, ähli emele getirijileri tekizlikde ýerleşer ýaly edip goýalyň (*133-nji b surat*).

Netijede, α tekizlikde ABB_1A_1 gönüburçluk alnar. Bu gönüburçluga silindriň gapdal üstüniň ýazgyny diýilýär. Gönüburçlugyň AA_1 ýa-da BB_1 tarapy silindriň esasynyň töwereginiň uzynlygynyň ýazgynydyr. AB beýikligi bolsa, silindriň emele getirijisidir. Şonuň üçin $AA_1 = 2\pi R$, $AB = H$, bu ýerde R – silindriň esasynyň radiusy, H – onuň beýikligidir (göni silindriň beýikligi emele getirijisine deňdir).



133-nji surat

Silindriň gapdal üstüniň meýdany hökmünde onuň ýazgynynyň meýdany kabul edilýär. ABB_1A_1 gönüburçlugyň meýdany $AA_1 \cdot AB =$ $= 2\pi RH$ bolanlygy sebäpli, R radiusly, H beýiklikli silindriň gapdal üstüniň meýdany

$$S_g = 2\pi RH.$$

Şeýlelikde, **silindriň gapdal üstüniň meýdany esasynyň töwereginiň uzynlygynyň silindriň beýikligine köpeltmek hasylyna deňdir.**

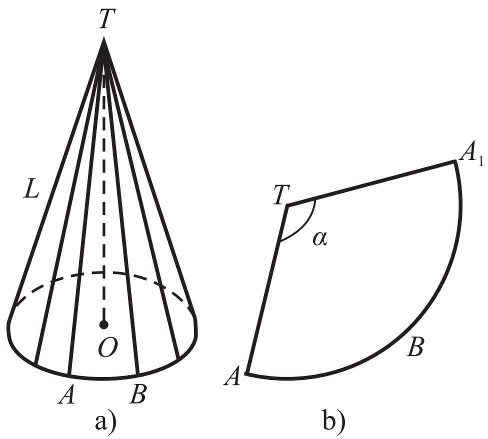
Islendik R radiusly tegelegiň meýdany πR^2 bolýanlygy sebäpli, silindriň doly üstüniň meýdany:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2 \text{ ýa-da } S = 2\pi R(H+R) \text{ bolar.}$$

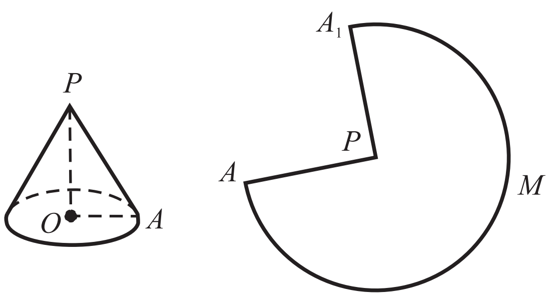
§2. Konusyň, kesilen konusyň gapdal we doly üstüniň meýdany

Konusyň gapdal üstüni emele getirijiniň haýsy hem bolsa biri boýunça kesip, tekizlikde ýazgyn görnüşde ýerleşdirip bolar. Konusyň gapdal üstüniň ýazgyny tegelegiň sektory bolup (*134-nji a, b, 135-nji suratlar*), onuň radiusy konusyň emele getirijisine, duganyň uzynlygy bolsa, konusyň esasynyň töwereginiň uzynlygyna deňdir. Konusyň gapdal üstüniň meýdany hökmünde onuň ýazgynynyň meýdany alynýar.

Konusyň gapdal üstüniň S meýdanyny, onuň L emele getirijisi we esasynyň R radiusy bilen aňladalyň.



134-nji surat



135-nji surat

Konusyň gapdal üstüniň ýazgyny bolan tegelek sektoryň meýdany $\frac{\pi L^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ bolany sebäpli,

$$S_g = \frac{\pi L^2}{360^\circ} \cdot \alpha, \qquad (1)$$

bu ýerde α – ABA_1 duganyň gradus ölçegi. Bu AA_1 duganyň uzynlygy $\frac{2\pi L}{360^\circ}\cdot\alpha$ deň, şeýle hem silindriň esasynyň töwereginiň uzynlygy $2\pi R$-e deň, onda $2\pi R = \frac{2\pi L}{360^\circ}\cdot\alpha$.

Bu ýerden $\alpha = \frac{360^\circ\cdot R}{L}$. (2)

Indi α-nyň bahasyny (1) formulada goýup alarys:

$$\boldsymbol{S_g = \pi RL}.$$

Şeýlelikde, **konusyň gapdal üstüniň meýdany onuň esasynyň töwereginiň uzynlygynyň ýarysynyň emele getirijisiniň uzynlygyna köpeldilmegine deňdir.**

Başgaça, **konusyň gapdal üstüniň meýdany esasynyň töwereginiň uzynlygynyň emele getirijisiniň uzynlygyna köpeldilmeginiň ýarysyna deňdir.**

Gapdal üstüniň we esasynyň meýdanlarynyň jemine **konusyň doly üstüniň meýdany** diýilýär.

$$\boldsymbol{S_k = S_g + S_e}$$

$$\boldsymbol{S_k = \pi RL + \pi R^2} \text{ ýa-da } \boldsymbol{S_k = \pi R\,(L+R)}.$$

L emele getirijili esaslarynyň radiuslary R we R_1 ($R>R_1$) bolan kesilen konusyň $\boldsymbol{S_g}$ gapdal üstüniň meýdany

$$S_g = \frac{2\pi R + 2\pi R_1}{2}\cdot L = \pi(R + R_1)L$$

formula boýunça hasaplanylýar.

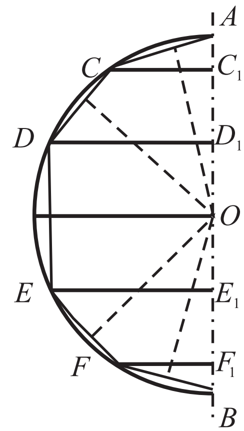
Şeýlelikde, **kesilen konusyň gapdal üstüniň meýdany esaslarynyň töwerekleriniň uzynlyklarynyň ýarym jeminiň emele getirijä köpeltmek hasylyna deň (özbaşdak subut ediň).**

Eger kesilen konusyň esaslarynyň meýdanlaryny S_e we $\overline{S_e}$ bilen belgilesek, onda kesilen konusyň S doly üstüniň meýdany

$$S = S_g + S_e + \overline{S_e} = \pi(R+R_1)L + \pi R^2 + \pi R_1^2$$

formula arkaly hasaplanylýar.

§3. Sferanyň meýdany



136-njy surat

TEOREMA. Sferanyň meýdany uly tegelegiň dördeldilen meýdanyna deňdir: $S = 4\pi R^2$.

Subudy. *ADB* ýarym töweregiň aýlanmagy bilen emele gelen sfera (*136-njy surat*) *AD* we *DB* dugalaryň aýlanmagy bilen emele gelýän üstleriň jemi hökmünde seretmek mümkin.

Şonuň üçin şeýle ýazyp bileris:

$S = 2\pi R\cdot AD_1 + 2\pi R\cdot D_1B = 2\pi(AD_1+D_1B)R =$
$= 2\pi R\cdot 2R = 4\pi R^2,$

$$S = 4\pi R^2.$$

Teorema subut edildi.

XIII baba degişli gönükmeler

1. Eger: a) silindriň beýikligi iki esse ulaldylsa; b) onuň esasynyň radiusy üç esse ulaldylsa, onuň gapdal üstüniň meýdany nähili üýtgär?

2. Aşakdaky berlenler boýunça: a) esasynyň diametri 12 *sm*, beýikligi 3,5 *sm*; b) esasynyň radiusy 18 *sm*, beýikligi 2,5 *dm* silindriň üstüniň meýdanyny hasaplaň.

3. Silindriň esasynyň meýdany *S*, ok kesiginiň meýdany bolsa *P* deň. Silindriň doly üsti nämä deň?

4. Gönüburçlugyň taraplary 4 *sm* we 5 *sm*. Kiçi tarapynyň daşynda aýlanmagynda emele gelýän jisimiň üstüniň meýdanyny tapmaly.

5. Silindriň üstüniň we gapdal üstüniň meýdany degişlilikde 50 sm^2 we 30 sm^2. Onuň radiusyny we beýikligini tapmaly.

6. Silindriň gapdal üstüniň meýdany *S*. Ok kesiginiň meýdanyny tapmaly.

7. Eger: 1) konusyň emele getirijisiniň uzynlygy üç esse ulaldylsa; 2) onuň esasynyň radiusy üç esse kiçeldilse, konusyň gapdal üstüniň meýdany nähili üýtgeýär?

8. Aşakdaky berlenler boýunça konusyň üstüniň meýdanyny we göwrümini hasaplaň: a) emele getirijisi 1,6 *dm* we esasynyň radiusy

4 *sm*; b) emele getirijisi 15 *sm* we beýikligi 10 *sm*; ç) beýikligi 2,4 *dm*, esasynyň radiusy bolsa 15 *sm*.

9. Katetleri 40 *sm* we 20 *sm* bolan gönüburçly üçburçluk uly katetiň daşyndan aýlanýar. Aýlanmadan alnan konusyň göwrümini we üstüniň meýdanyny hasaplaň.

10. Konusyň esasynyň meýdany S, emele getirijileri bolsa esasyna α burçy bilen ýapgytlanandyr. Konusyň gapdal üstüni tapyň.

11. Konusyň emele getirijisi 5 *sm*, beýikligi bolsa 4 *sm*. Konusyň gapdal üstüniň meýdanyny tapmaly.

12. Konusyň ok kesiginiň meýdany 0,6 sm^2, beýikligi bolsa 1,2 *sm*. Konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

13. Konusyň emele getirijisi 8 *sm*, ok kesiginiň depesindäki burçy 60^o. Konusyň gapdal üstüniň meýdanyny tapmaly.

14. Konusyň ok kesigi gipotenuzasy 12 *sm* bolan deňýanly gönüburçly üçburçluk. Konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

15. Konusyň ok kesigi gapdal taraplary 16 *sm*, depesindäki burçy 120^o bolan deňýanly üçburçluk. Konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

16. Kesilen konusyň gapdal üstüniň meýdany esaslarynyň meýdanlarynyň jemine deň. Eger: a) $l = 5$ *m*, $h = 4$ *m*; b) $r = 2$ *m*, $l = 4$ *m* bolsa, kesilen konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

17. Kesilen konusyň esaslarynyň meýdanlary 25π sm^2 we $64\ \pi$ sm^2, ok kesiginiň meýdany 52 sm^2. Onuň üstüniň meýdanyny tapmaly.

18. Gönüburçly trapesiýanyň esaslary 13 *sm* we 18 *sm*, kiçi gapdal tarapy 12 *sm*. Trapersiýanyň kiçi gapdal tarapynyň daşyndan aýlanmagyndan emele gelýän kesilen konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

19. Kesilen konusyň gapdal üstüniň meýdany 208π sm^2, emele getirijisi 13 *sm* we beýikligi 5 *sm* bolsa, onuň esaslarynyň radiuslaryny tapmaly.

20. Kesilen konusyň emele getirijisi 8 *sm* we esasynyň tekizligine 60^o burç bilen ýapgytlanan. Ok kesiginiň diagonaly bu burçy deň ikä bölýär. Kesilen konusyň üstüniň meýdanyny tapmaly.

MAZMUNY

I BAP. GEOMETRIÝANYŇ BAŞLANGYÇ MAGLUMATLARY

II BAP. ÜÇBURÇLUKLAR

III BAP. PARALLEL GÖNI ÇYZYKLAR

IV BAP. KÖPBURÇLUKLAR WE OLARYŇ MEÝDANLARY

V BAP. TEKIZLIKDE WEKTORLAR

VI BAP. TÖWEREK WE TEGELEK

VII BAP. ELLIPS, GIPERBOLA WE PARABOLA

VIII BAP. STEREOMETRIÝANYŇ AKSIOMALARY WE OLARDAN GELIP ÇYKÝAN NETIJELER

IX BAP. GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PARALLELLIGI

X BAP. GÖNI ÇYZYKLARYŇ WE TEKIZLIKLERIŇ PERPENDIKULÝARLYGY

XI BAP. KÖPGRANLYKLAR. AÝLANMA JISIMLER

XII BAP. KÖPGRANLYKLARYŇ WE AÝLANMA JISIMLERIŇ GÖWRÜMI

XIII BAP. AÝLANMA JISIMLERIŇ ÜSTLERINIŇ MEÝDANY

Gündogdy Şadurdyýew, Arazdurdy Arazmedow,
Sona Kurbanowa, Bikesoltan Arazmedowa

GEOMETRIÝA BOÝUNÇA BAŞLANGYÇ OKUW

Mugallymçylyk mekdepleri üçin synag okuw kitaby

Redaktory	*O. Heşdekow*
Surat redaktory	*T. Aslanowa*
Teh. redaktor	*T. Aslanowa*
Suratçy	*Ý. Peskowa*
Neşir üçin jogapkär	*T. Gulamow*

Ýygnamaga berildi 12.05.2010. Çap etmäge rugsat edildi 29.04.2011.
Ölçegi 60x90 $^{1}/_{16}$. Ofset kagyzy. Edebi garniturasy.
Ofset çap ediliş usuly. Çap listi 9,5.
Hasap-neşir listi 7,524. Neşir №18. Sargyt № . Sany 500.

Türkmenistanyň Ylymlar akademiýasynyň “Ylym” neşirýaty.
744000. Aşgabat, Türkmenbaşy şaýoly, 18.