A.Garajaýew

OPTIMALLAŞDYRMA USULLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

A ş g a b a t - 2 0 1 0

Gurbanguly Berdimuhamedowyň ýurduň Prezidentligine ählihalk tarapyndan saýlanmagy ýylyň esasy syýasy wakasy boldy. Bu waka garaşsyz, bitarap Türkmenistanyň öz ösüşiniň täze basgançagyna─milletiň Beýik Galkynyş eýýamyna gadam urmagy bilen şöhratlandy.

Gurbanguly Berdimuhamedow döwlet baştutanynyň wezipesine girişen gününden başlap, jemgyýetçilik durmuşynyň ähli ugurlaryny düýpli özgertmäge başlady. Onuň başlangyjy we ýolbaşçylygy bilen ýurtda demokratiýany pugtalandyrmaga, ykdysadyýeti döwreBaplaşdyrmaga, ilatyň ýaşaýyş derejesini ýokarlandyrmaga gönükdirilen ägirt giň gerimli, ösüşli özgertmeler ýaýbaňlandy. Biziň halkymyz öz lideriniň asylly başlangyçlaryny gyzgyn goldap, olary durmuşa geçirmäge işeňňir girişdi. Bu bolsa ýurdumyzyň durmuş-ykdysady taýdan ösüşiniň depginlerine bada-bat täsirini ýetirdi. Türkmenistanyň Prezidentiniň saýlap alan syýasy ugry dünýäde ägirt uly seslenme tapyp, giň jemgyýetçiligiň üns berip synlaýan obýektine öwrüldi we özüniň çuňňur esaslandyrmalary, ynsanperwerlikli many-mazmuny hem-de sosial ugurlylygy bilen jümle-jahany aňk etdi.

Biziň halkymyz Gurbanguly Berdimuhamedowa çäksiz ynam bildirmek, öz zähmet üstünlikleri bilen onuň ýurdy ösüşiň täze basgançaklaryna çykarmak baradaky belent hyjuwlaryny jany-teni bilen goldamak arkaly jemgyýetimiziň durmuşynda bolup geçýan şeýle abyrsyz özgerişlikler, il-halkymyzyň hal-ýagdaýny gowulandyrmak, Türkmenistany dünýä bileleşigine goşmak we onuň halkara abraýyny pugtalandyrmak ugrunda alyp barýan ýadawsyz tagallasy üçin oňa çuňňur minnetdardyr. Ylym-bilim adamzadyň durmuşynda uly ähmiýete eýedir. Mähriban Prezidentimiziň Baştutanynyň wezipesine saýlanan ilkinji gününden bilim ulgamyna alýratyn üns berip başlady, türkmen ýaşlarynyň dünýä derejesinde bilim-terbiýe almaklyga giň ýol açdy. Bu ugurda alnyp barylýan işler, tutumly özgertmeler ýaşlaryň döwreBap bilim almaklaryna we kämilleşmeklerine ýardam berýär.

Giriş

Her bir adam wagtal-wagtal durmuşda gabat gelýän dürli meseleleri çözmeli bolýar. Ol meseleler netijeli ýeke täk ýol ýa-da usul bilen çözülmeýän bolmagy mümkin. Bu ýagdaýlarda meseläniň iň oňat amatly çözüliş usulyny gözläp tapmaly bolýar. Ýöne dürli ýagdaýlarda iň oňat çözüwler biri-birinden tapawutly bolmagy mümkin. Meselem okuwçy mekdepden uzakda ýaşaýan bolsa, onda ol mekdebe tramwaýda 30 minut wagtda ýa-da ýoluň bir bölegini awtobus bilen, a galan beýleki bölegini bolsa, trolleýbus bilen 20 minut sarp edip geçip biler. Eger biz iki çözüwleri hem deňeşdirsek, onda ikinji çözüwiň oňatlygy aýdyň görünýär. Haçan mekdebe minimum wagtda barmaly bolsa, ýagny onuň kriteriýasy oňat minimum wagta görä. Başga kriteriýa görä (meselem, minimal baha ýa-da harajat, minimal dürli görnüşli ulaglar) birinji çözüw iň oňat bolýar. Durmuşda bolsa köplenç ýagdaýlarda **iň oňat** diýen düşünje san taýdan kriteriýasy bilen aňladylmagy mümkin, minimum çykdaýjy, normadan minimum gyşarma, maksimum tizlik, girdeýji we ş.m. Şoňa görä matematiki meseläniň (optimum – iň oňat, ýa-da amatly) optimal netijesini tapmak üçin meseläni goýmak bolýar. Sebäbi iň kiçi ýa-da iň uly bahasyny tapmakda aýratyn tapawut ýok. Meseläniň optimal çözüwini tapmak meselesine optimallaşdyrma meselesi diýilýär.

Optimal netije düzgin boýunça ýüzüniň ugruna birden tapylmaýar, ol prossesiň netijesinde tapylýar we optimallaşdyrma prossesi diýilýär. Prossesde ulanylýan optimallaşdyrma usuly, optimallaşdyrma usullary diýen ada eýe boldy. Ýönekeý ýagdaýlarda biz ýüzüniň ugruna meseläniň şertini matematiki dile geçirýäris we meseläniň matematiki şekillendirilişini alýarys. Ýöne tejribelikde meseläniň matematiki şekillendiriş prossesi ýeterlik derejede çylşyrymly.

Optimallaşdyrma usullary dersi matematiki ders bolup, ekstremal meselelerini öwrenmek bilen meşgul bolýar we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmek bilen meşgul bolýar.

Umumy ýagdaýda matematiki görnüşdäki ekstremal meseläniň goýulşy f($x_1, x_2, \ldots, x_n$)- maksat funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahasyny kesgitlemekden durýar, haçan $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$ (i=1,2,...,m) şerti ýerine ýetirende, nirede f, g_i- berilen funksiýalar, a b_i- haýsy hem bolsa bir hakyky sanlar.

f we g_i funksiýalaryň häsiýetine baglylykda optimallaşdyrma usullaryny aýratyn özbaşdak ders höküminde seretmek bolýar, ol kesgitli meseleler synpyny öwrenmek we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmeklik bilen meşgul bolýar. Şeýle hem ol çyzykly we çyzykly däl programmirleme meselelerine bölünýär. Eger hemme f we g_i funksiýalar çyzykly bolsalar onda degişli mesele çyzykly programmirlemäniň meselesi bolýar. Eger haýsy hem bolsa funksiýalaryň birisi çyzykly däl bolsa onda degişli mesele çyzykly däl programmirlemäniň meselesi bolýar. Optimallaşdyrma usullarynda iň köp öwrenilen bölüm bolup çyzykly programmirlemäniň meselesi bolup durýar. Çyzykly programmirlemäniň meselesini çözmek üçin birgiden peýdaly usullar, algoritmler we programmalar işlenip düzülendir.

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň içinde giňden köp öwrenilen mesele güberçek programmirlemäniň meselesidir. Bu meseleleriň çözüwleriniň netijesinde minimum güberçek (ýa-da maksimum oýuk) berilen funksiýalar güberçek ýapyk köplükde kesgitlenilýär. Öz gezeginde güberçek programmirlemäniň meselesiniň arasynda giňden yzygiderli kwadrat programmirlemäniň meselesi derňelýändir. Şeýle meseleleriň umumy ýagdaýda çözülişiniň netijesinde maksimum (ýa-da minimum) kwadrat funksiýalary tapmaklyk talap edilýär, haçan onuň näbellileri haýsy hem bolsa bir deňsizlikler ýa-sa çyzykly deňlemeler sistemasyny ýa-da çyzykly deňlemeler we çyzykly deňsizlikler sistemasyny bilelikde özünde saklaýan şertleri kanagatlandyrýan bolsa, matematiki programmirlemäniň aýratyn synpy meseleleri bolup bitin sanly, parametrik we ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesine degişlidir.

Bitin sanly programmirlemäniň meselesinde näbelliler diňe bitin sanly bahalary kabul edip alyp biler. Parametrik programmirlemäniň meselesinde maksat funksiýa ýa-da funksiýa näbellileriň mümkin bolan oblastyny kesgitleýän , ýa-da ikisi hem degişlilikde haýsy hem bolsa bir parametra bagly bolsa ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesiniň maksat funksiýasy bolsa iki sany çyzykly funksiýalaryň gatnaşygy görnüşinde getirilýär, kesgitlenýän funksiýanyň oblastynda bolsa näbellileriň mümkin bolan üýtgemesi hem çyzykly bolýar.

I Bap. Optimal dolandyrmanyň meselesi

§1. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň san usullary bilen çözülişi

Bu meselede ýönekeý matematiki modeliň optimallaşdyrmasyna seredilýär. Gözlenýän maksat funksiýa bir näbellä x degişli bolup, hakyky okda ýerleşen kesimiň köplügine seredilýär.

$$f(x) \to \min$$
$$x \in [a, b] \qquad \textbf{(1)}$$

(f(x)→max) ekwiwalent (-f(x) →min) şoňa görä diňe minimum meselesine hem ýeterlik bolup durýar.

(1) matematiki meseläniň amaly görnüşine seretsek, ol ýeke-täk näbellili bilen dolandyrmak meselesine gelýär. A bir näbelli meseläniň minimumlaşdyrma meselesi bolsa, ýüze çykýan bir näçe çylşyrymly meseleleri çözmekde hökmany suratda ulanmak üçin gerek bolýar.

1. Bir näbellili funksiýanyň minimumy.

Goý f(x)-funksiýa U-köplükde hakyky okda kesgitlenen bolsun.

1. $x^* \in U$, san global minimumyň (absolýut) nokady ýa-da f(x) funksiýanyň minimum ýönekeý nokady diýilip U-köplükde .

Eger $f(x^*) \le f(x), \ \forall x \in U$ ýerine ýetýän bolsa $f^* = f(x^*) = \min\limits_{U} f(x)$ bahsyna global (absolýut) minimum diýilýär, ýa-da ýöne f(x) funksiýanyň U-köplükde minimumy diýilýär.

Geljekde U-köplükdäki f(x) funksiýanyň hemme minimum nokatlarynyň köplügini U* bilen belläliň.

2. $\tilde{x} \in U$ san f(x)-funksiýanyň lokal minimum nokady diýilip aýdylýar, eger $f(\tilde{x}) \le f(x) \forall x \in U$, ýagny $\tilde{x}$ nokada ýakyn bolan nokatlara;

Eger $E, \varepsilon > 0$ san bar bolup $\forall x \in \{x | x \in U|, |x - \tilde{x}| < \varepsilon\}$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa.

3. Goý funksiýa f(x), U köplükde aşakdan çäklendirilen bolsun, ýagny

$f(x) \geq A > -\infty \forall x \in U$ f_* -san aşaky çäginiň nokady diýilip f(x) funksiýa, U- köplükde aýdylýar $(f_* = \inf_U f(x))$, eger $f(x) \geq f_* \quad \forall x \in U$ şeýle hem $\forall \varepsilon > 0$ şeýle bir $x_\varepsilon \in U$ nokat tapylyp $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$, ýagny f(x) funksiýanyň bahalarynyň U-köplükde , f_* - ýeterlik derejede ýakyn nokat tapylar.

Eger $f_* = -\infty$ bolsa onda, oňa aşakdan çäklendirilmedik diýilip aýdylýar.

Bellikler.

1. Global f(x) min funksiýa f(x) lokal min hem bolýar, tersine umumy ýagdaýda bu ýerine ýetmeýär.
2. U-köplükde, U^*-min nädogry nokatlaryň köplügi f(x)-funksiýa tükenikli ýa-da tükeniksiz sany nokatlardan durýan bolup, boş bolmagy hem mümkin.

Unimodel funksiýalar

Eger f(x) funksiýa U-köplükde globaldan başga lokal minimumy hem bar bolsa, onda f(x) funksiýanyň minimumlaşmasy düzgün boýunça kynlaşýar. Bize belli bolşy ýaly hususy, f(x)-funksiýanyň minimum nokadyny gözlemeklik her bir lokal minimum, şol wagtyň özünde global minimum hem bolmaklygyny düzgünleşdirilen usuldyr.

Kesgitleme 1. f(x) funksiýa unimodel diýilip, $[a,b]$ kesimde aýdylýar. Eger ol şol kesimde üznüksiz bolup, şeýle bir α we β sanlar bar bolup $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär:

a) Eger a<α bolsa, onda $[a;\alpha]$ - kesimde f(x) funksiýa monoton kemelýär;

b) Eger β<b bolsa, onda $[\beta;b]$ kesimde f(x) funksiýa artýar.

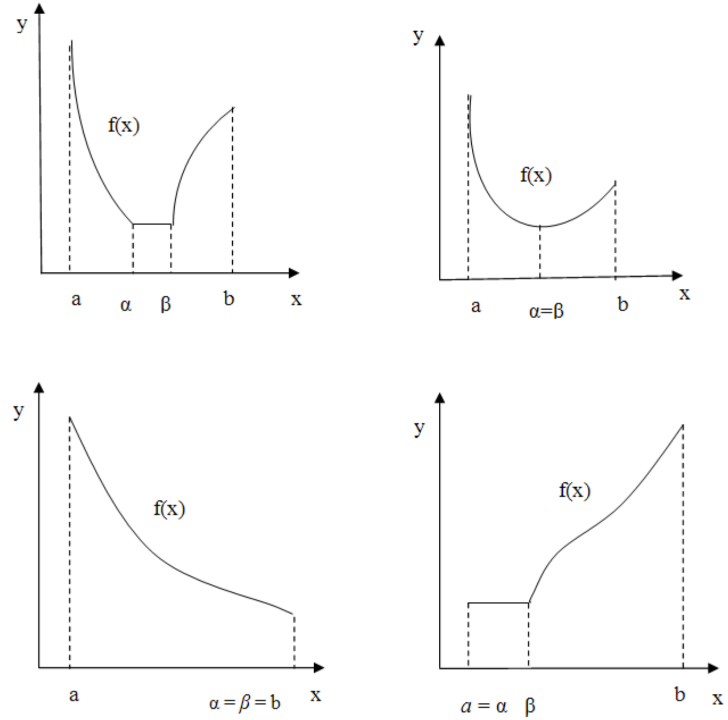
ç) Haçan $x \in [\alpha;\beta]\, f(x) = f^* = \min_{[a;b]} f(x)$

Biz $[a;b]$ kesimdäki unimodel funksiýalaryň köplügini geljekde Q $[a;b]$ bilen bellejekdiris.

Mazmuny

12. Под редакцией Ляшенко И.Н., Линейное и нелинейное прогромирование, Киев "Вышая школа" 1975,370 стр.
13. Полунин И.Ф. Курс математического программирования, "Высшая школа", 1970, стр. 317
14. Акулич И.Л., математичсекое программирование в примерах и задачах., Москва "Высшая школа" 1986 г., стр. 317.
15. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации., Москва МАИ 1995г.,341 стр.
16. Замков О.О., и другие, Математические методы в экономике, Москва "Дис" 1997г, 365 стр.
17. Эддоус М., Стэнсфилд Р.Методы принятия решения. Москва "Аудит","Юнити" 1997г.,590 стр.
18. Под редакцией В.Ф Кротова, Основы теории оптимального управления, Москва " Высшая школа" 1990г. 430 стр.
19. Васильев Ф.П., Численные методы решения экстремальных задач.,Москва, "Наука" 1980г, 550 стр.
20. Garajaýew A., we başgalar. Käbir ykdysady meseleleriň matematiki modelleri we olary optimal çözmekligiň Simpleks usuly. Aşgabat-2001 ý., 63-64 sah.
21. Garajaýew we başgalar. Amaly meseleleri derňemekde ýasama usulynyň ulanylyşy. Aşgabat-2007ý.
22. Garajaýew we başgalar. Kesgitsizlik şertli matematiki modelleriň düzülişi we optimal çözülişi. Aşgabat-2007ý.
23. Garajaýew we başgalar.Ätiýaçlyklary meýilnamalaşdyrma we dolandyrma meselesiniň matematiki modeli.Aşgabat-2008ý.
24. Garajaýew we başgalar. Kesgitsizlikde ätiýaçlyklary dolandyrmak meselesi we onuň matematiki modeli.Aşgabat-2008ý.
25. Garajaýew we başgalar. Tor usuly bilen ykdysady meseleleriň meýilnamalaşdyrylyşy.Aşgabat-2008ý.
26. Garajaýew we başgalar. Köpçülige hyzmat ediş ulgamyň ykdysady matematiki modeli.Türkmenistanda ylym we tehnika, Aşgabat-2008 ý.№6

$[a;\alpha]$, $[\alpha;\beta]$ we $[\beta;b]$ bir ýa-da iki aralykda nokadyň azmagynyň mümkindigini belläliň. Unimodel funksiýalaryň hemişelikligi we kesimlerde nokadyň azmagynyň monotonlygyny ýerleşişiniň bir näçe wariantlary görkezilendir.



1-nji surat

Birinji kesgitlemeden unimodel funksiýalaryň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar.

1. Unimodel funksiýanyň, $\forall$ lokal minimumyň nokady, $[a;b]$ kesimde aralykda global minimumyň hem nokady bolup durýandyr.
2. $[a;b]$ kesimde unimodel funksiýa, $\forall$ kiçi kesimde $[c;d] \in [a;b]$ hem unimodeldir.
3. Goý $f(x) \in Q\,[a;b]$ we $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Onda:

$$
(2) \quad \begin{cases} \text{eger } f(x_1) \leq f(x_2), \text{ onda } x^* \in [a; x_2]; \\ \text{eger } f(x_1) \geq f(x_2), \text{ onda } x^* \in [x_1; b] \end{cases}
$$

x^*- $[a; b]$ kesimde f(x) funksiýanyň haýsy hem bolsa, bir minimum nokady.

Edebiýat

1. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 128 sah.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 96 sah.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 44 sah.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 416 sah.
5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Umumy milli “Galkynyş” Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 48 sah.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 175 sah.
7. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 64 sah.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 133 sah.
9. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984, 293 с.
10. Иванилев Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. М., Наука, 1979, 303с.
11. Монахов В.М, и другие, Методы оптимизации. Москва " Просвешение",1978г,172 стр.

x_3 x_1	0 1	$-\frac{5}{2}$ -2	1 0	$\boxed{\frac{3}{2}}$ 1	-5 -3	(-3;0;-5;0)
x_4 x_1	0 1	$-\frac{5}{3}$ $\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	1 0	$-\frac{10}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};0;0-\frac{10}{3}\right)$
x_4 x_2	-5 -3	0 1	4 $\boxed{2}$	1 0	-5 -1	(0;-1;0;-5)
x_4 x_3	1 $-\frac{3}{2}$	-2 $\frac{1}{2}$	0 1	1 0	-3 $-\frac{1}{2}$	$\left(0;0;-\frac{1}{2};-3\right)$

§2. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň Lipşisanyň şerti

Bir ölçegli minimumlaşdyrma, bir näçe usullary ulanmak mümkin bolýar, haçan maksat funksiýa f(x) – funksiýa $[a;b]$- kesimde üýtgemesiniň tizligi haýsy hem bolsa, bir san bilen hemme ýerlerde kesgitlenýän bolsa, bu ýagdaýda f(x) – funksiýa $[a;b]$- kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýär. Şoňa görä tejribelikde maksat funksiýa f(x) tejribelige degişli optimallaşdyrma meselelerde ýokarda görkezilen häsiýete eýedir.

Kesgitleme 1. $[a;b]$- kesimde f(x) – funksiýa Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýär, eger şeýle bir L>0 hemişelik san tapylyp,

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \quad (1)$$

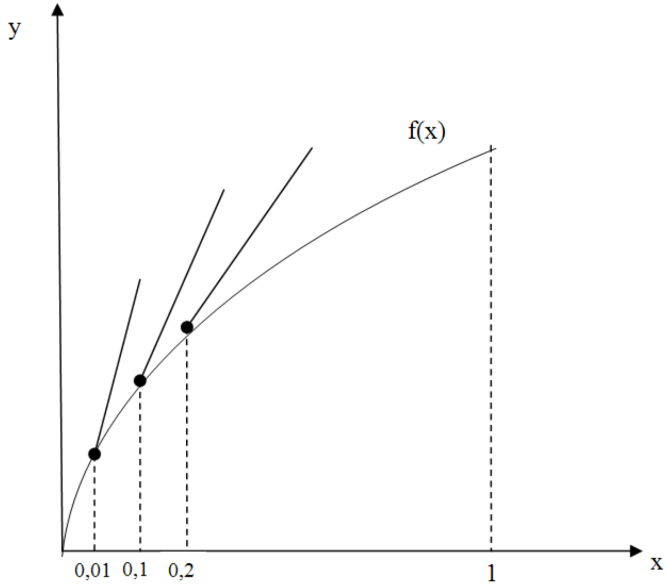
şeýle deňsizliligi islendik $x'', x' \in [a;b]$ücin ýerine ýetirýän bolsa (L – Lipşesanyň hemişeligi).

Bellikler:

1. Eger ýokardaky deňsizlik L – hemişelik çin ýerine ýetýän bolsa, onda ol hemme $L' > L$ üçin hem ýerine ýetýändir. Şoňa görä Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýän hemişelikler tükeniksiz köpdirler. Olaryň hemmesi f(x)- funksiýa üçin adalatlydyr. Minimumlaşdyrma üçin ulanylýan algaritmde L – parameter hökminde degişli bolup, iň oňat netije, haçan L – minimum hemişelik diýilip alynan Mahalynda.

2. Deňsizligiň şertinden [a;b] – kesimde f(x)- funksiýanyň üznüksizligi gös göni gelip çykýar. Şoňa görä Weýerştrassyň teoremasy esasynda [a;b] – kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýän funksiýa, şol kesimde bolmanda bir minimum nokada eýedir.

3. Lipşisanyň şerti islendik hordanyň grafiginiň funksiýasy f(x)- funksiýanyň burç koiffisiýentiniň moduly Lipşisadan uly däldir.



1-nji surat

4. Eger f(x)- funksiýa [a;b] – kasimde üznüksiz önüme eýe bolýan bolsa, onda ol şol kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetýändir.

$$L = \max_{[a;b]} |f'(x)|$$

Hakykatdan tükenikli artdyrmanyň formulasynda $\forall$ azat nokatlary üçin $x', x'' \in [a;b]$-den f(x')-f(x'')=f '(ξ)(x')-f(x'-x'')-alarys, nirede ξ-x' we x'' nokadyň arasyndaky nokatdyr. Bu ýerden

$$|f'(x)| \le \max_{[a;b]} |f'(x)| = L$$

5. Eger a<x_0<x_1<…<x_n=b, f(x) [a;b] – kesimde üznüksiz bolsa we Lipşisanyň şertini her bir [x_i, x_{i+1}] ýerine ýetirýän bolsa onda, ol [a;b] – kesimiň hemme ýerinde ýerine ýetirýändir.

$$L = \max_{0 \le i \le n-1} L_i$$

	1 0 0 0	−2 5 5 5	0 $\boxed{5}$ −2 −2 −2	1 −3 −3 −3	−3 10 10 10	
	1 0	−2 1	0 $-\frac{2}{5}$	1 $-\frac{3}{5}$	−3 2	
x_1 x_2	1 0	0 1	$-\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$ $-\frac{3}{5}$	1 2	(1; 2; 0; 0)

Deňlemäniň bazis çözüwi $C_4^2 = 6$ deň. Galan bazis çözüwler bolsa aşakdaky ýaly tapylýar.

Bazis üýtge-ýänler	x_1	x_2	x_3	x_4	Azat aggzalar	Bazis çözüwler
x_1 x_2	1 0	0 1	$-\frac{4}{5}$ $-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$ $-\frac{3}{5}$	1 2	(1; 2; 0; 0)
x_3 x_2	$-\frac{5}{4}$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$	0 1	1 0	$\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$	$\left(0; \frac{3}{2}; -\frac{5}{4}; 0\right)$

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1
0	1	0	-3
0	0	1	2

Şeýlelikde, bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi (1; -3; 2) deňdir.

Mesele 11. Deňlemeler ulgamynyň hemme bazis çözüwlerini tapyň.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Azat aggzalar	Bazis çözüwler
	$\boxed{1}$	-2	0	1	-3	
	3	-1	-2	0	1	
	2	1	-2	-1	4	
	1	3	-2	-2	7	

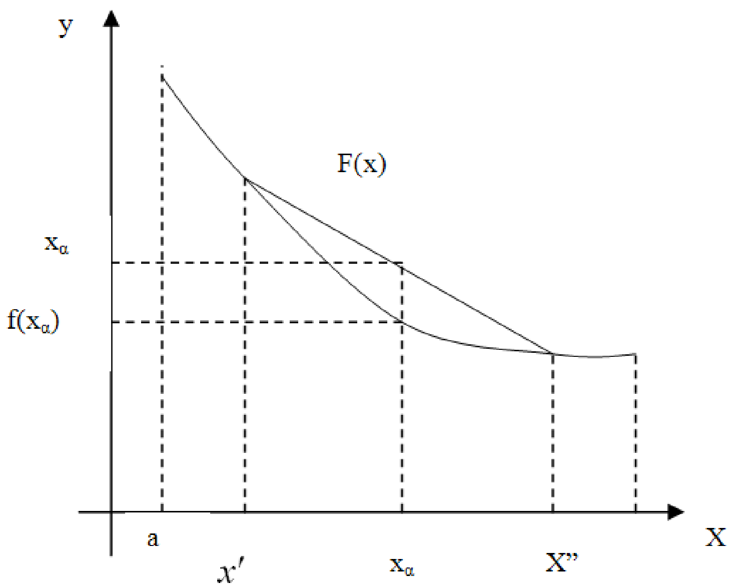
§3. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň güberçeklik şerti

Kesgitleme 1. $[a;b]$ kesimde berlen f(x) – funksiýa şu kesimde güberçek diýilip aýdylýar, eger $\forall$ hemme x', $x'' \in [a;b]$ we $\alpha \in [0;1]$ azat san üçin aşakdaky deňsizlik ýerine ýetýän bolsa

$$f[\alpha x' + (1-\alpha)x''] \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'') \qquad (1)$$

Güberçek funksiýalaryň esasy häsiýetlerini sanalyň

1. Eger f(x) – funksiýa $[a;b]$ kesimde güberçek bolsa, onda ol $\forall[x';x''] \subset [a;b]$- kesimde onuň grafigi hordadan ýokarda ýerleşen däldir, ýagny absissalar okunda x' we x'' nokatlardan geçirlen grafik.



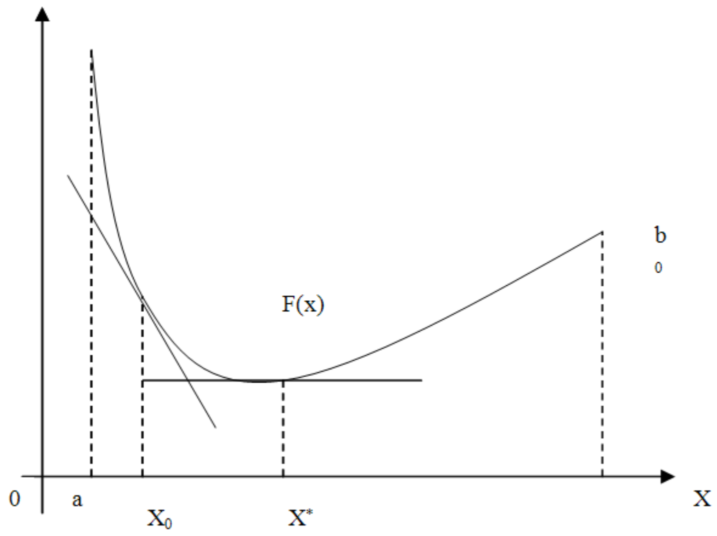
1-nji surat

Horda bilen güberçek funksiýanyň özara ýerleşişleri.

2. Matematiki derňew kursyndan funksiýanyňgüberçekligi aşakdaky şertler bilen bellidir:

a) $[a;b]$- kesimde differensirlenýän f(x)- funksiýanyň güberçek bolmaklygy üçin hökmany we ýeterlik şerti, onuň önümi $f'(x)[a;b]$- kesimde kemelmeli däldir;

b) $[a;b]$-kesimde 2 gezek differensirlenýän funksiýanyň güberçek bolmaklygy üçin hökmany we ýeterlik şerti $x \in [a;b]$ $f''(x) \geq 0$ deňsizligi ýerine ýetirmeli.



2-nji surat

Güberçek differensirlenýän funksiýanyň grafigi bilen oňa bolan galtaşmanyň özara ýerleşişleri.

3. $[a;b]$-kesimde differensirlenýän f(x) – funksiýanyň güberçekliginiň şerti şol kesimde $\forall f(x)$ - funksiýanyň grafigine bolan galtaşma grafikden ýokarda (ýerleşip) bilmeýär.

4. Eger f(x) güberçek differensirlenýän $[a;b]$- kesimde funksiýa bolsa we $x^* \in [a;b]$- nokatda aşakdaky şerti ýerine ýetirýän bolsa

x_1	x_2	x_3	
1	$-\frac{5}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$
0	$\boxed{-\frac{11}{2}}$	-4	$\frac{17}{2}$
0	0	3	-21

Hasaplamalary geçirip alarys.

x_1	x_2	x_3	
1	0	$-\frac{13}{11}$	$-\frac{15}{11}$
0	1	$\frac{8}{11}$	$-\frac{17}{11}$
0	0	$-\frac{13}{11}$	$-\frac{26}{11}$

x_3 näbellini birinji we ikinji deňlemelerden aýyryp alarys.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 \end{cases}$$

Şeýlelikde x_1, x_2-bazis üýtgeýänler, x_3, x_4, x_5-bolsa azat üýtgeýänler. Diýmek, bu deňlemäniň bazis çözüwi $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0; 0\right)$ bolar.

Mesele 10. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -16 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{2}$	-5	-6	5
-3	2	5	1
2	4	-3	-16

Birnji deňligi iki bölege bölüp, ikinji we üçünji deňliklerden x_1-i aýyryp alarys.

$$f'(x^*) = 0, \qquad (1)$$

onda $x^*; [a; b]$- kesimde f(x) – funksiýanyň global minimum nokady bolýar.

5. $\forall [a; b]$-kesimde güberçek üznüksiz funksiýanyň şol kesimde unimodel funksiýadygyny görkezmek bolýar. Tersine umumy ýagdaýda dogry däldir.

Şeýlelikde ýokarda bellenilen häsiýetlerden başga hem, güberçek funksiýalar unimodel funksiýalaryň hemme häsiýetlerine hem eýedir.

Bellik funksiýanyň güberçekligini tejribelikde derňelende onuň ýerine ýetirýän deňsizligini örän az ýagdaýlarda ulanyp bolýar. Şoňa görä gerek bolýan gezek, differensirlenýän funksiýa güberçekligiň differensiýal kriteriýasyny ulanmak amatly bolýar. (häsiýet – 2)

Edil şonuň ýaly hem unimodellik funksiýalar üçin kesgitleme 1 köplenç ýagdaýa kynçylyk döredýär. Onuň üçin unimodelligini kepillendirmek üçin, onuň ýylmanaklygyny göz öňüne tutup, güberçeklik kriteriýasyny ulanmak bolýar.

Eger funksiýa güberçek bolsa, onda ol unimodeldir. Tersine umuman dogry däldir.

§4. Optimal dolandyrma meselesiniň takmyn çözülişi

1. Optimal dolandyrma meselesiniň goýluşy.

Optimal dolandyrma nazarýeti bu dolandyrma obýektleriň öwrenilmegine degişliylmyň bir bölegi bolup durýar we dolandyrmanyň iň oňat usullaryny kesgitleýär.

Dolandyrma obýektleri ylmy derňewlerde, önümçilikde we her günki tejribelikde giňden ýaýrandyr. Meselem: Awtomobil we S. M. dolandyrma enjamlar enjamlar bilen üpjün edilen. Şolaryň hemmesine seredilýän obýektleriň özüni alyp barşyna täsir etmekden durýar.

Umuman aýdanda dolandyrylýan obýektiň başlangyç ýagdaýyndan soňky, ahyrky ýagdaýyna geçýän çenli dürli usullar bilen täsir edilýär. Şoňa görä iň oňat geçiş ýollaryny saýlap almak ýagny, iň amatly ýol bilenöwrenilýän obýekti dolandyrma meselesi ýüze çykýar. Köplenç dolandyrylýan obýektler.

Differensial deňlemerler (ýönekeý we hususy) gyra şertler bile. Berilen meseleler görnüşde suratlandyrylýar ýa-da şoňa meňzeş deňlemel sistemasy. Bular ýaly gyra meselelerine $x(t)$-iň skalýar we wektor häsýetlendirmesinden başga hem seredilýän obýektiň t pursatdaky ýagdaýyny $U(z)$ dolandyrmany hem özünde saklaýar. Ç skalýar we wertikal funksiýalar. Biz şeýlelikde $U(t)$ dolandyrmany saýlap dolandyrylýan obýektiniň häsýetlerini kesgitleýäris ýagny $x(z)$ degişli gyra meselesiniň çözüwini kesgitleýäris.

Obýektleri optimal dolandyrmasynyň matematiki modeliniň gyra meselesi baş obýekti suratlandyrýanyndan başga hem obýektiň hilini görkezýän sanlary hem özünde saklamalydyr. Bular ýaly görkeziji umuman J- funksional bolup ol $x(t)$ bagly we $U(t)$ dolandyrmanyň özüne bagly bolýar. (ýagny obýektiň ewolýusiýasyna we $U(t)$ saýlanan dolandyrmasyna) $X(t)$-funksiýa doly kesgitleýär haçan $U(t)$ saýlanylanda, onda bu funksional diňe $U(t)$: $J = J(t)$ dolandyrma bagly bolýar diýip hasap etmek bolýar.

Mesele 9. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	-2	0
0	3	-3	-3	5	1
0	6	-6	-6	10	2
0	9	-9	-9	15	3

x_2 -ni üçünji we dördünji deňlemelerden aýyryp aşakdaky tablisany alarys.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	-2	0
0	3	$\boxed{-3}$	-3	5	1

Bu ýerden bolsa alarys:

Mesele 8. Funksiýanyň minimum bahasyny tapyň.

$$F = 4x_1 - x_2 - 5x_3$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	$\boxed{1}$	2
	3	2	-1	1
	0	1	1	2
	3	3	0	3
x_3	-1	0	1	1
	1	1	0	
x_2				1

Onda alarys:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 \\ x_2 = 1 - x_1 \\ x_i \geq 0 \ \ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

$$F = 4x_1 - (1 - x_1 - 5(1 + x_1)) = -6 + 0 \cdot x_1$$

Diýmek, bu deňlemeler ulgamynyň bazis çözüwi (0;1;1) deňdir. funksiýanyň minimum bahasy bolsa-6-a deňdir ýagny, $F_{\min} = -6$

2. Optimal dolandyrma meselesinde differensial deňlemeler ulgamy

Goý obýektiň ýagdaýy wagta görä kesimde berlen bolsun [0;T]-

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Wektor fuksiýa görnüşinde häsýetlendirilýän bolsun (E_n-giňişlikde faza görä traektoryasy), differensial deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \\ \dot{x}_2(t) = f_2[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \end{cases}$$

nirede $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(x)}{dx}, \quad i = \overline{1,n}$

Geljekde biz bu ulgam Wektor görnüşinde ýazjakdyrys.

$$\dot{x}_1(t) = f_1[t, x(t), u(t)]. \qquad (1)$$

Bu ýerde $u(t)$=($x_1(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)$)- Wektor – funsiýa (dolandyrma) haýsy hem bolsa bir köplükden, ýagny U-dolandyrmanyň mümkin bolan köplüklerinden saýlaýarys. $f = (f_1, \dots, f_n)$ argumentleri t, x, u bolan belli wektor funksiýalar.

U(t) we x(t) berilmeginde (1) – ulgamyň ýeke täk çözülşini kesgitlemek üçin takyk ýagdaýlarda, dolandyrma prosessini şekillendirýän ulgam goşmaça $x_i(t)$ we (ýa-da) x_i (t) bahalary üçin gatnaşyklar haýsy hem bolsa bir $t \in [0;T]$- nokatda (t=0, ýa-da t=T düzgün boýunça). Şeýle gatnaşyklar gyra şertleri diýilip atlandyrylýar, umumy görnüşde biz ony deňleme görnüşde ýazjakdyrys.

$$\Gamma(x) = 0 \qquad (2)$$

Gyra şertine iň ýönekeý mysal hökmünde koşiniň şertini getirmek bolýar. x(0)-x^0=0 (ýa-da x(T)-x^T =0), nirede x^0(ýa-da x^T) – berlen wektor.

Optimal dolandyrmanyň meselesiniň matematiki modeline u(t) – dolandyrmany saýlamaklygyň çäklendirilmesi hem girýändir. Bu çäklendirmeleri umumy ýagdaýda aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$u(t) \subset U \qquad (3)$$

nirede U – berilen köplik haýsy hem bolsa bir funksional giňişlikde.

Biz $U \subset L_2^{(m)}[0;T]$, nirede $U \subset L_2^{(m)}[0;T]$, m- ölçegli Gilbert giňişligi wektor – funksiýa diýip hasap edýäris. Goý X – haýsy hem bolsa bir funksional giňişlik, (3) çäklendirmä goşmaça faza görä traektoriýa girizilmegi mümkin $x(t): x(t) \in X$.

Dürli görnüşli funksionallaryň dolandyrma prosesleriniň hilini suratlandyrýan, ilki bilen funksionala seredeliň

$$J(u,x) = \int_0^T \Phi[t, x(t), u(t)]dt,$$

tejribelikde ýüze çykýan optimal dolandyrma degişli ýeterlik derejede giň klass meseleleriň matematiki modelini girýändir.

Şeýlelikde meselä seredeliň

$$J(u,x) = \int_0^T \Phi[t, x(t), u(t)]dt \to \min(\max) \qquad (4)$$

$$x(t) = [t, x, u], t \in [0;T] \qquad (5)$$

$$\Gamma(x) = 0, \qquad (6)$$

$$u(t) \in U \subset L_2^m[0;T]. \qquad (7)$$

x_1-iň artmagy bilen F funksiýa şonça-da kemelýär. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 7. Funksiýanyň maksimumyny tapyň.

$$F_{\max} = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,\ldots,4 \end{cases}$$

Çözülişi

Otrisatel däl bazis çözüwini tapalyň.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 + x_4 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,4) \end{cases}$$

Onda

$$F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 =$$
$$= (x_3 - x_4) - (1 - x_3 + x_4) + 2x_3 - x_4 =$$
$$= -1 + 4x_3 - 3x_4$$
$$F_Б = -1$$

Täze deňlemeler ulgamyny alarys:

$$F = 3 - 4x_2 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = 1 - x_2 + x_4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots 4 \end{cases}$$

Şeýlelikde, biz bazis çözüwi alarys ýagny, (1; 0; 1; 0) $F_Б = 3$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1,2,3) \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany aşakdaky görnüşde düzeliň.

	x_1	x_2	x_3	Azat agza
	-2	1	1	4
	-1	2	-1	-1
	-2	1	1	4
	-1	-2	1	1
	-3	3	0	3
	1	-2	1	1
x_2	-1	1	0	1
x_3	-1	0	1	3

Doly funksiýa aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$F = -x_1 - (1 + x_1) - (3x_1) = -4 - 3x_1$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 + x_1 \\ x_3 = 3 + x_1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

§6. Funksionalyň güberçeklik şerti

Ýokarda belleýşimiz ýaly J(U)-funksionalyň ýeke täk minimum nokadyny barlygyny derňänimizde onuň minimumlaşmagyny we beýleki wajyp soraglara jogap bolup, takyk usul ulanylanda, onuň güberçekligi we J(U)-iň güçli güberçekligi esasy roly oýnaýar. Ýönekeýleşdirip aýdanda, J(u)-funksionalyň bu şertleri kabul edip alanda, onuň häsiýetleri (5)-çyzykly differensial deňlemeler ulgamy üçin goýulýar. Optimal dolandyrma meselesine seredeliň.

$$J(u) = \int_0^T \phi[t, x(t), u(t)]dt \to \min \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) + C(t), \qquad t \in [0; T] \tag{2}$$

$$\Gamma(x) = x(0) - x^0 = 0 \tag{3}$$

$$u(t) \in U \subset L_2^{(m)}[0; T], \tag{4}$$

nirede $A(t)=(a_{ij}(t))$, $B(t)=(b_{k1}(t))$, $n \times n$ we $n \times m$ çäkli möçberde berlen matrisalar; $C(t)=(C_1(t), C_2(t),\dots, C_n(t))^T$ azat agzalaryň sütün wektory (2) deňlemeler ulgamy açyk görnüşde ýazylyp bilner.

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t) + C(t), \qquad i = 1, \dots, n.$$

görüşimiz ýaly (1) - (4) – deňleler ulgamy (4) – (7) – deňlemeler ulgamynyň hususy halydyr, degişlilikde çyzykly wektor-funksianyň esasynda

$$f(t,x,u)=A(t)x+B(t)u+C(t)$$

Bu ýagdaýda f'_xwe f'_u- matrisalar $f'_x = A(t)$, $f'_u = B(t)$ bellemek ýeterlikdir. Şoňa görä çatrymdaş mesele aşakdaky görnüşe eýedir:

$$\dot{\Psi}(t) + A^T \cdot \Psi(t) = -\phi'_x[t, x(t), u(t)], \qquad t \in [0; T];$$

$$\Psi(T) - 0$$

gradient üçin bolsa

$$J'(u) = B^T \cdot \Psi + \phi'_u = \left(J'_{u1}(u), \dots, J'_{um}(u)\right),$$

nirede $J'_{u1}(u) = \sum_{k-1}^{l} b_{lk}\Psi_k + \phi'_{u_l}$

(1)– (4) meselede J(u)–funksionalyň güberçeklik şertini kesgitläliň.

Teorema 1. Goý Φ(t,x,u)-funksiýa (1)- deňlemede hemme $x\in E_n$, $u\in E_m$-ler üçin kesgitlenen bolsun, ýagny x^1 , x^2 , u^1, u^2, we $\alpha\in[0;1]$-üçin deňsizlik.

$$\phi'_x[t,\alpha x^1+(1-\alpha)x^2,\alpha u^1+(1-\alpha)u^2]\le\alpha\phi(t,x^1,u^1)+(1-\alpha)\phi(t,x^2,u^2) \quad (5)$$

Ýerine ýetýär. Onda J(u)-funksional (1)-güberçek U-köplikde, güberçek bolýar.

Subudy. Goý u^1 (t), $u^2(t)\in U$, $ax^1(t)$ we $x^2(t)$, (1)–(3)- gra meselesiniň çözülişi, onda

$$J'_{u1}(u)=\int_{k-1}^{l}\phi(t,x^1,u^1)dt, \qquad J'_{u1}(u)=\int_{k-1}^{l}\phi(t,x^1,u^1)dt,$$

Haçan $u(t)=u^1(t)$ we $u(t)=u^2(t)$ bize belli bolşy ýaly $u(t)=\alpha u^1(t)+(1-\alpha)u^2(t)$ degişlilikde $\mathbf{x}(t)=\alpha x^1(t)+(1-\alpha)x(t)$ (1)-(3) meseläniň çözülişi. Şoňa görä

$$J[\alpha u^1(t)+(1-\alpha)\mathbf{u}^2(t)]=$$

$$\int_0^T\phi[t+\alpha x^1(t)+(1-\alpha)x^2(t),\alpha u^1(t)+(1-\alpha)\mathbf{u}^2(t)]dt$$

$$J[\alpha u^1(t)+(1-\alpha)u^2(t)]\le\alpha J(u^1)+(1-\alpha)J(u^2)$$

Deňsizlik J(u) güberçekligini subut edýär.

Çözülişi

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	2	-1	3
5	0	3	2
2	-1	2	1
5	0	3	5
5	0	3	2
-2	1	-2	-1
0	0	0	3
$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$

Birinji deňlemäniň hemme agzalary nola deň emma onuň azat agzasy 3-e deň. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 6. Funksiýanyň min bahasyny tapyň.

$$F=-x_1-x_2-x_3$$

0	-11	4	-10
0	11	-4	10
1	3	-1	2
0	0	0	0
0	1	$-\frac{4}{11}$	$\frac{10}{11}$
1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{8}{11}$

Şeýlelikde, bu ulgam tükeniksiz köp çözüwe eýedir. Onuň umumy çözüwi: $\left(-\frac{8}{1}-\frac{1}{11}x_3, \frac{10}{11}+\frac{4}{11}x_3, x_3\right)$ görnüşde bolar. Onuň bazis çözüwi bolsa: $\left(-\frac{8}{11}; \frac{10}{11}; 0\right)$ görnüşde bolar.

Mesele 5. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + \quad 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

§7. Optimal dolandyrma meselesiniň gradiýent usuly

Gradient usulynyň J(u) funksionalyň minimumlaşmasyna ulanylmagy, u(t)-erkin nokatda mümkinçiligi bolan U-köplüginde J’(u) gradienti hasaplap bolmaklygy bilen esaslandyrylýar. Ýokarda seredilen optimal dolandyrma meselesiniň $J'(u)$ gradientin iň kesgitlenişine seredeliň. Onuň üçin bolsa funksionalyň artdyrmasyny hökman aşakdaky görnüşde ýazalyň.

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = < J'(u), \Delta u > + \sigma(\|\Delta u\|) \qquad (1)$$

Goý u(t)∈U. Onda u(t) dolandyrma artdyrma berip $\Delta u(t)$ görnüşiň esasynda (u(t)+ $\Delta u(t)$) ∈U diýip ýazmak bolar. Bu artdyrma bolsa $\Delta x(t)$ artdyrma degişli bolup, fazanyň traektoriýasyny, ýagny x(t), bolsa x(t)+ $\Delta x(t)$ geçýär.
Onda funksiýa x(t) bolsa meseläniň çözülişi bolýar, a=x(t)+ $\Delta x(t)$ aşakdaky meseläniň çözülişi bolýar,

$$x(t) + \Delta\dot{x}(t) = f(t, x+\Delta x, u+\Delta u), \quad t \in [0; T]; \qquad (2)$$
$$\Gamma(x+\Delta x) = 0 \qquad (3)$$

(2) we (3) degişlilikde (5) we (6) aýryp, $\Delta x(t)$ kesgitleýän gyra meselesini alarys;

$$\Delta\dot{x} = \Delta f(t, x, u), \quad t \in [0; T]; \qquad (4)$$
$$\Delta\Gamma(x) = 0, \qquad (5)$$

nirede $\Delta f(t, x, u) = f(t, x+\Delta x, u+\Delta u) - f(t, x, u)$
Eger biz f_i(t,*x*,u)-funksiýany *x* we u argumentlere görä differensirlenýän diýip hasap etsek we Δf_i-nji deňlemäniň sag tarapyny takmynan aşakdaky differensiallar bilen çalyşyp alsak ýagny:

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Delta u_m = f'_{ix}\Delta x + f'_{iu}\Delta u,$$

nirede $f'_{ix}x, f'_{iu}u$ - funksiýalar $f_i(t,x,u)$ – funksiýanyň gradienti, olar x we u-argumentlere görä, a $f_{ix}^{1}\Delta x, f_{iu}^{1}\Delta u$ degişlilikde E_n we E_m – giňişlikde olaryň skalýar köpeltmek hasyly Δx we Δu degişlilikde wektor artdyrmalara görä. Onda (4) deňlemeler ulgamy aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner.

$$\Delta\dot{x}_i = f'_{ix}\cdot\Delta\dot{x} + f'_{iu}\cdot\Delta u, \quad i=1,2,\dots,n$$

ýa-da $\Delta\dot{x} = f'_x\cdot\Delta\dot{x} + f'_{iu}\cdot\Delta u,$

nirede $f'_x=(f'_{xij})=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

degişlilikde nxn we nxm –möçberli önümler matrisasy;

$$f'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad f'_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Nirede $f'_x\cdot\Delta x$ we $f_u{}'\cdot\Delta u$, şu matrisalaryň $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n)$. Wektor- sütin matrisalara köpeldilmegidir. Şeýlelikde (4)-(6)-meseläniň ýerine $\Delta x(t)$-ni kesgitlemek üçin takmyn meselä seredeliň :

$$\Delta x = f'_x\cdot\Delta\dot{x} + f'_u\cdot\Delta u, \quad t\in[0;T]; \qquad (7)$$

$$\Delta\Gamma(x) = 0. \qquad (8)$$

Ýeterlik derejede giň öertleriň esasynda (7)-(8) meseläniň çözülişi 0 $(\|\Delta u\|)$ haçan $\|\Delta u\|\to 0$ takyklykda ululygyň tertibinde (4)-(5) meseläniň çözülişine ýakynlaýar we ΔJ aňlatmanyň getirlip çykarlyşynda (2) Δx höküminde (1)-(2) meseläniň takmyn çözülişi kabul edip almak bolýar.

Biz $\phi(x,u)$ öz argumentlerine görä differensirlenýän funksiýa daýip hasap etsek, onda

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	0	0	1
0	1	0	−1
0	0	1	3

Soňky tablisadan deňlemeler ulgamynyň çözüwini alarys: (1; -1; 3)

Mesele 4. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany aşakdaky görnüşde düzeliň.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
3	−2	1	−4
−2	5	−2	6
1	3	−1	2

x_1	x_2	x_3	Azat agza
$\boxed{-7}$	0	-13	-46
-3	1	-5	-19
19	0	24	91

Soňky deňlikden $a'_{21} = -7$ deň diýip alarys.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	0	$\frac{13}{7}$	$\frac{44}{7}$
0	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$
0	0	$\boxed{-\frac{79}{7}}$	$-\frac{237}{7}$

Indi bolsa mümkin bolan element hökmünde $a'_{33} = -\frac{79}{7}$ saýlap alalyň.

$$\Delta J = J(u + \Delta u) - J(U) = \int_0^T [\Phi[x(t + \Delta x(T), u(t) + \Delta u(T))] - \Phi[x(t), u(t)]]dt = \int_0^T \Phi'_x \Delta x dt + \int_0^T \Phi'_u \cdot \Delta u dt + 0(\|\Delta u\|) = < \Phi'_x, \Delta x > + < \Phi'_u, \Delta u > + 0(\|\Delta u\|)$$

Nirede $\Phi'_x, \Phi_u{}'$ funksiýalar $\Phi(x,u)$ funksiýanyň x we u näbellilere görä gradiýentidir. $< \Phi_x, \Delta x > -$ skalýar köpeltmek hasylyny bize gerek bolan görnüşde ýazmak üçin, ýagny Δx üsti bilen Δu aňlatmak üçin, berlen meselä çatrymdaş $\psi(t)$ meseläniň çözülişini peýdalanýarys,

$$\dot{\psi} + f_x'^{T}\psi = -\Phi'_x, \quad t \in [0, T]; \tag{9}$$

$$\Gamma^*(\psi) = 0,$$

Nirede $f_x'^{T}$ funksiýa (6)-nji meseleden önümli transportirlenen matrisa, (9)- gyra şerti aşakdaky deňlemäniň ýerine ýetmegine görä saýlanylýar.

$$\psi(T) \cdot \Delta x(T) - \psi(0) \cdot \Delta x(0) = 0$$

Aşakdaky deňleme adalatlydyr

$$< \Phi' x, \Delta x > = < f' uT \cdot \psi, \Delta u >, \tag{10}$$

(9)- görä

$$\Delta J = < f' xT \cdot \Phi' u, \Delta u > + 0(\|\Delta u\|).$$

Bu ýerde (1)- görä f'' (u)- gradient üçin gözleýän aňlatmamyzy alarys: $f'(u) = f' u\mathbf{T} \cdot \psi + \Phi^1 u$, ýa-da açyk görnüşde:

$$f(u) = (f_u(u), \ldots, f_{um}(u)), f_{ue} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial fj}{\partial ue} \cdot \psi j + \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta ue}, \qquad (l = 1, m) \tag{11}$$

(10)-(11) deňlemäni getirip çykarmak üçin bize aşakdaky Lemma gerek bolar.

Lemma1. Goý $\Delta x(t)$, $\psi(t)$- n ölçegli üznüksiz wektor- funksiýa, (0;T)- kesimde bölekleýin üznüksiksiz önümleri bar bolsun. Onda Lagranžyň toždestwasy ýerine ýetýändir.

$$\int_0^T [\psi \cdot (\Lambda x - f'x \cdot \Lambda x) + \Lambda x \cdot (\psi + fx'T \cdot \psi)]dt = \psi \cdot \Lambda^T/_0, \qquad (12)$$

nirede f- meseläniň goýluşyndaky wektor – funksiýa, a $f'x$ - (6)-den önüm matrisasy, a $f_x'^T$ – oňa görä transportrlenen matrisa. Onda görkezeliň

$$\int_0^T \psi \bullet (f_x' \cdot \Delta x)dt = \int_0^T (f_x'^T \cdot \psi)\Delta x dt,$$

ýagny

$$< \psi; (f_x'^T \cdot \Delta x) \geq < f_x'^T \cdot \psi, \Delta x >.$$

Şoňa görä $f_x'^T \Delta x$ we $f_x'^T \cdot \psi$ wektorlaryň i-nji koordinatalaryny ýazalyň:

$$(f_x'^T \cdot \Delta x)_i = \sum_{j=1}^n f'xji\Delta xj, \quad (f_x'^T \cdot \psi)i = \sum_{j=1}^n f_x'^T \cdot \psi j.$$

Bu ýerden,

$$\psi \cdot (f_x'^T \cdot \Delta x) = \sum_{i=1}^n \psi i \cdot (f_x'^T \cdot \Delta x)i = \sum_{i=1}^n \psi i \sum_{j=1}^n f'xij\Delta xi =$$
$$= \sum_{i=1}^n \psi i \sum_{j=1}^n f'xij\, \psi i \Delta xi;$$

$$(f_x'^T \cdot \psi) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n (f_x'^T \cdot \psi)\Delta xi$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n f_{xji}' \cdot \psi j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{xji}'\psi j \cdot \Delta xi$$

Şeýlelikde $\psi \cdot (f_x'^T \Delta x) = (f_x'^T \cdot \psi)\Delta x)$

x_1	x_2	x_3	
1	-2	1	0
0	7	-5	0
0	20	0	100

Soňky deňlikden taparys $x_2 = 5$. Bu bahany birinji we ikinji deňliklerde goýup alarys, $x_3 = 7$, $x_1 = 3$. Bu ýerden bolsa deňlemeler ulgamynyň çözüwini taparys (3;5;7)

Mesele 3. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_2 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -19 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -4 \end{cases} \qquad (23)$$

Çözülişi
Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
2	-3	2	11
-3	$\boxed{1}$	-5	-19
4	5	-1	-4

$a_{22} = 1$ deň diýip alarys

x_1	x_2	
1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$
0	0	$-\frac{7}{4}$

Ikinji setiriň hemme agzalary nola deň emma azat agza noldan tapawutly boldy. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 2. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 100 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{1}$	-2	1	0
3	1	-2	0
7	6	7	100

Bu ýerden iň oňaýly koeffisiýent hökmünde 1-i saýlap almak bolar. Birinji setirden galanlaryny özgerdip alarys.

Bu aňlatmany t-görä integirläp biz (12) geleris. Indi bolsa integral aşagyndaky aňlatmalary başgaça toparlap (11) çep tarapyny (12) kömegi bilen alarys.

$$\int_0^T \{[\psi \cdot \Delta\dot{x} - \dot{\psi} \cdot \Delta x] + [(f_x'^T \cdot \psi) \cdot \Delta x - \psi \cdot (f_x'^T \cdot \Delta x)]\}dt$$

$$= \int_0^T \frac{d}{dt}(\psi \cdot \Delta x)dt = \psi \cdot \Delta x \, {}^T/_0$$

subut boldy.

§9. Pontrýaginyň maksimum prinsipi

Fizikanyň we tehnikanyň dürli bölümlerinde gabat gelýän birnäçe meselelerinde iş prosesinde, parametrleri örän oňatlyk bilen saýlap kesgitlemeklik gerek bolýar. Bu meseleler özüniň gurluşy boýunça Wariasion mesele bolup durýar. Ýöne bu meseleler (klassiki) synpy wariasion usullar bilen çözüp bolmaýar. Bu meseleri çözmegiň usullary L.S.Pontrýaginyň we onuň talyplary tarapyndan işlenip düzüldi. Bu meseläniň çözüliş usulynyň esasy bolup maksimum prinsipi hyzmat edýär.

Biz maksimum prinsipiniň dürli görnüşlerini getireliň we oňa degişli birnäçe meselelere seredeliň:

1. Ýönekeý differensial deňlemelere getirilýän prosessine seredeliň:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^1, x^2, ..., x^n, u), \quad (i = \overline{1, n}) \qquad (1)$$

ýa-da wektor görnüşde

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$$

nirede

$$x = \{x^1, x^2, ..., x^n\}, \ f(t, x, u) = \{f^1(t, x, u), f^2(t, x, u), ...,$$

$$f^n(x, t, u)\},$$

u–parametr.

Goý $x_0 = \{x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n\}$, $x_1 = \{x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n\}$ - fazaly giňişligiň $x^1, x^2, ..., x^n$; 2-sany nokady u=u(t) - $[t_0, t_1]$ – kesimde kesgitlenen funksiýa. $u = u(t), \ (t_0 \le t \le t_1)$ funksiýa dolandyrmaly diýilýär.

Dolandyrmaly u=u(t) funksiýa rugsatly diýilýär, eger u(t) – funksiýa $[t_0, t_1]$ kesimde bölekleýin üznüksiz bolsa we onuň bahasy haýsy hem bolsa bir U – köplügiň predeliniň daşyna

Meseleler

Mesele 1. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24 \\ -3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Çözülişi:

Bu deňlemeler ulgamyndaky x_1-näbellini x_2-niň üsti bilen aňladalyň.

$$\begin{cases} x_1 = 24 - 3x_2 \\ -3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	
$\boxed{12}$	16	-1
3	4	-2

Soňky özgertmeleri göz öňünde tutup alarys.

x_1	x_2	
1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$
3	4	-2

Birinji setiri -3-e köpeldip ikinji setir bilen jemläp alarys:

$$\psi(t)=\left(\nabla f(x_k-t\nabla f(x_k)\right), \qquad \nabla f(x_k)\le\left\|\nabla f(x_k-t\nabla f(x_k))\right\|\bullet$$
$$\bullet\left\|\nabla f(x_k)\right\|\le\left(\left\|\nabla f(x_k)\right\|-tM\left\|\nabla f(x_k)\right\|\right)\left\|\nabla f(x_k)\right\|$$

onda

$$f(x_k)-f(x_{k+1})\le\alpha\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2\left(1-\frac{\alpha\mu}{2}\right)=ac\left\|\nabla f(x_k)\right\|^2 \quad (1)$$

nirede

$$c=1-\frac{\alpha\mu}{2}>0;$$

bu ýerde monoton toplanmak gelip çykýar

$$f(x_k)\to \min f(x).$$

Şeýlelikde hemişelik M apriori näbelli. α iň kiçi bilen hem işlemekligiň ahjaty ýok (peýdasy) α bilen (regulirlemek) amatlaşdyrmak iş gidip durka hasaplamak işlenip düzildi. Olaryň iň ýönekeýi (1) formula bilen baglanşykly. Ýagny $\mu=\mu_0$ diýip

$$\alpha=\frac{1}{\mu}$$

saýlaýarys.

Eger şonda hem (1) formula ýerine ýetmese, onda $\mu=2\mu_0$ bilen $\alpha=\dfrac{1}{2\mu_0}$ saýlap alýarys, ýenede (1) form ulany barlaýarys.

çykmaýan bolsa, islendik rugsatly dolandyrmanyň kesgitliligi aýdyňdyr.

Goý funksional berlen bolsun

$$F=\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))dt \qquad (2)$$

f(t,x,u) $\dfrac{\partial f}{\partial x^j}(t,x,u)$ $(j=\overline{1,n})$, $f^0(t,x,u)$ funksiýalary, islendik $x^1,x^2,...,x^n$, $t\in[t_0,t_1]$, $u\in u$ bahalarda üznüksiz diýip hasap edýäris.

Her bir rugsatly *u=u(t)* dolandyrma haýsy hem bolsa bir çözüliş, (1) deňlemeler ulgamy *x(t)=x* başlangyç şerti ýerine ýetirýän jogap bolýar.

Aşakdaky meselä seredeliň:
u=u(t) rugsat berlen dolandyrmalaryň içinde şeýle bir häsýete eýe bolup, *x=x(t)* – degişli çözüliş (1) deňlemeler ulgamy aşakdaky şertleri ýerine ýetirilýär:

$$x(t_0)=x_0,\, x(t_1)=x_1 \qquad (3)$$

(2) funsionalyň iň kiçi bahalary kabul edip, olar ýaly bahalary tapmaly. Eger *u=u(t), x=x(t)* $(t_0\le t\le t_1)$ – goýlan meseläniň çözülişi bolsa, onda *u=u(t), x=x(t)* funksiýalar optimal prossesi kesgitleýär diýip aýdylýar. Şeýle hem *u=u(t)* – funksiýa optimal dolandyrma diýilýär, *x=x(t)* – optimal traýektoriýa diýilýär.

Kömekçi funksiýany guralyň

$$\widetilde{H}(t,x,u,\psi)=\psi_0 f^0(t,x,u)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t,x,u) \quad (4)$$

Nirede $\psi_0,\psi_1,...,\psi_n$ – täze näbelliler.

Goý

$$\widetilde{M}(t,x,\psi)=\sup_{u\in u}\widetilde{H}(t,x,u,\psi). \qquad (5)$$

Çyzykly differensial deňlemeler ulgamyna seredeliň

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^0}{\partial x^i}\psi_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\psi_k, \quad (i=\overline{1,n}) \qquad (6)$$

(1) we (2) deňlemeler ulgamyny degişli görnüşde ýazmak bolýandygyny belläliň

$$\frac{\partial x^i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_i}, \frac{\partial \psi_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^i} \quad (i=\overline{1,n})$$

Teorema 1 (Maksimum prinsipi) *u=u(x), x=x(t)* $(t_0 \le t \le t_1)$ – funksiýalaryň optimal proseslerini kesgitlemeklik üçin hökman şeýle bir hemişelik $\psi_0 \le 0$ bor bolup we $\psi(t) = \{\psi_1(t),...,\psi_n(t)\}$, şeýle bir çözüş (terwaldäl, eger $\psi_0 = 0$) deňlemeler ulgamy (6) *u=u(t)* we *x=x(t)* funsiýalara jogap bolýan, hemme t $(t_0 \le t \le t_1)$ nokatlar üçin *u(t)* üznüksiz bolup, funksiýa $\tilde{H}(t, x(t), u\psi(t))$ näbelli üçin $u \in u$, u=u(t) – nokatda maksimuma ýetýär:

$$\tilde{H}(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \tilde{M}(t, x(t), \psi(t)). \qquad (7)$$

Görşimiz ýaly teorema 1 *u=u(t)* we *x=x(t)* prosessiň optimallygynyň diňe bir hökmany şertini berýär (eger ol bar bolsa). Kesgitlenen çözülişiň optimallygynyň tükenikli çözülişi diýen soraga goşmaça getiriljek derňewiň esasynda jogap bermek bolýar.

§10. Çyzykly däl programmirlemäniň şol bir ädimli gradiýent usuly

Funksiýanyň minimumyny gözlemekligiň özi örän ullakan işdir, şonuň üçin antigradiýente tarap hereket edende hemişelik ädimli gradiyent usuly, aşakdaky shema boyunça ulanylýar:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

$\alpha > 0$, san. teorma seredeliň.

Teorema 1.

Goý, *f(x) – 2* gezek üznüksiz differensirlenýän güwerçek funksiýa; ýaýlasy

$$\mathrm{R}(\mathrm{x}_0) = \{x | f(x) \le f(x_0)\}$$

çäklenen we şu ýaýlada gessian H(x) aşakdaky şerti ýerine ýetirilýär.

$$(H(x)\eta, \eta) \le \mu$$

eger

$$0 < \alpha < \frac{2}{\mu}$$

onda usul funksional boýunça toplanýar.

Subudy. Seredeliň

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_k) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_{k+1}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_k - \alpha\nabla f(x_k)) = \int_0^{\alpha} \psi(t)dt ,$$

nirede

iterasyýany geçirmeli, $\left(\frac{m*}{M*}=0{,}01\right)$ bolsa onda bolmanda 100 iterasiýany geçirmeli. Şonuň üçin matematikler onuň üstinde işlediler hem-de işleýärler iň oňat minimumlaşdyrma usullary bilen şol usullaryň iň oňadynyň biri hem "çatyrymdaş gradiýent usuly" ol ýönekeý, ýylmanak funksiýalaryň minimumlaşdyrma usuly.

Belli bolşy ýaly her-bir ädimde çaltlaşdyrylan aşaklama usuly bilen minimum meselesini bir näbelli funksiýa üçin çözmeli bolýar

$$\varphi(\mathrm{h})=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}-\mathrm{h}\nabla\mathrm{f}(\mathrm{x})\right).$$

Bellik 1 1 – nji teoremanyň esasynda, ýokarda goýlan meseläni çözmek üçin, hökmany *x=x(t)*, $\psi=\psi(t)$ fun ksiýalary tapmaly, olar bolsa (1) we (6) deňlemeler ulgamynyň çözülişi bolmaly, degişlilikde funksiýa *u=u(t)* we ψ_0 – hemişelik özem hökman (3) we (7) şertleri ýerne ýetirmeli. (1) we (6) deňlemeler ulgamynyň çözüwiniň köplügi, 2n hemişelik $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ sanlara baglydyr. 2n+1 hemişelikleri $\psi_0 c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ tapmak üçin we u=u(t) funksiýanyň 2n+1 sany gatnaşyklary bar bolup (3) we (7) durýandyr. Bu ýagdaýda, ýagny $\psi_0 c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ parametrleriň birisi hökman däl, sebäbi $\widetilde{H}$ funksiýa bir tipli näbellilere görä. Şoňa görä 2n gezekli parametrleri tapmak üçin we funksiýany u=u(t) üçin 2n+1 gatnaşyklar bardyr.

Bellik 2 Bar bolan wariasion hasaplamanyň meselesi bolan we optimal dolandyrma meselesiniň arasyndaky arabaglanşygy görkezeliň. Ýönekeý wariasion meselä seredeliň: funksiýany tapmaly

$$x(t)\in E^1=\{x(t)\in D_2([t_0,t_1])x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1\},$$

şoňa görä funsional

$$F=\int_{t_2}^{t_1} f(t,x(t),x'(t))dt$$

iň kiçi bahany kabul edip alýar. *F(t,x(t),x`(t))* – funksiýanyň, üznüksiz hususy önümi hemme argumentler boýunça bar diýip hasap edilýär. Bu mesele, aşakdaky optimal dolandyrma meselesiniň hususy halydygy aýdyňdyr: *u=u(t)* $(t_0 \le t \le t_1)$, bölek üznüksiz funksiýany kesgitlemeli, eger onuň bahasy

$u = (-\infty, +\infty)$ aralygyň predeliniň daşyna çykmaýan bolsa, şeýle hem,

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$

başlangyç şertlerini ýerine ýetirýän

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$$

deňlemäniň çözülişinde funksional

$$F = \int_{t_2}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

Iň kiçi bahalaryny kabul edip alýar. Iň soňky meseläni çözmek üçin maksimum prinsipini peýdalanalyň. Biziň ýagdaýmyzda

$$\widetilde{H} = \psi_0 f(t, x, u) + \psi_1 u$$

(6) deňlemeler ulgamy bir deňlemä gelýär.

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\psi_0 \qquad (8)$$

1 – nji teoremanyň esasynda

$$\widetilde{H}(t, x(t), u, \psi_1(t)) = \psi_0 f(f, x(t), u) + \psi_1(t)u,$$

Nirede ψ_0 – hemmişelik, özem $\psi_0 \le 0,\ \psi_0 \ne 0$ görkezeliň. Hakykatdan, ters bolan ýagdaýynda $\psi_1(t) \ne 0$ we

Şu alynan netije hakykatdan hem dogrydyr sebäbi bu netijäni ýokarda getirilen kwadratik görnişdäki shema boýunça subut edip bolýar. Dargydylan hem (9) formuladan X^* nokadyň töwereginden hem-de

$$\lim_{k\to\infty} \nabla f(x_k) = 0,$$

bilelikde (3)-formula bilen bilelikde alarys.

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) = [f(x_k) - f(x^*)] \cdot$$
$$\cdot \left[1 - \frac{\|H(x^*)(x_k - x^*)\|^2}{(H^2(x^*)(x_k - x^*)H(x^*)(x_k - x^*))} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{1}{(H(x^*)(x_k - x^*), (x_k - x^*))} \right] + +0\|x_k - x^*\|^2$$

Edil şonuň ýaly (4) formula bilen ýerine ýetirip, hem-de 2-nji lemmanyň esasynda alarys: Bu işi talyplaryň özüne tejribe üçin tabşyrýaryn. Şeýlelikde toplanmanyň tizligi çaltlaşdyrylan aşaklama usuly bilen, minimum nokadyň ýakynynda geometric progresiýanyň maýdalowjysy bilen häsiýetlendirilýär.

$$q = \frac{M^* - m^*}{M^* + m^*} = \frac{1 - \frac{m^*}{M^*}}{1 + \frac{m^*}{M^*}}$$

belli bolşy ýaly $\left(\frac{m^*}{M^*} = 0{,}1\right)$ minimumy kesgitlemek üçin, onuň tertibiniň dogrylygynyň ösýänligini kesgitlemek üçin, bolanda 10

Teorema 2: Tizleşdirilen aşaklamausulu, only kesgitlenen kwadratik görnişe ulanylanda, ol norma boýunça toplanýar, özem maýdalowjysy geometric progressiýasyndan haýal däldir.

$$q = \frac{M-m}{M+m} = \frac{1-\dfrac{m}{M}}{1+\dfrac{m}{M}}$$

şeýle hem funksional boýunça maýdalowjysynyň geometrik progressiýasyndan haýal däldir.

Goý *f(x)* *2*-gezek üzüniksiz differensirlenýän funksiýa bolsun. Onda $\bar{x}$-azat nokadyň töwereginde ol funksiýa aşakdaky görnişe eýe bolup biler.

$$f(x_0 + f\eta) = f(x_0) + (\nabla f(x_0), h)t + \frac{1}{2}(H(x_0)h \cdot h)t^2 + 0(t^2)$$

H(x₀) –simmetrik matrisa

$$H(x_0) = \{h_{ij}(x_0)\}_{i,j=1}^{h}, h_{ij}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial k_i \partial x_j}(x_0)$$

gessian diýilip atlandyrylýar. Goý tizleşdirilen aşaklama usuly *f(x)*-funksiýanyň *x**-nokada minimumlaşmagy toplanmaklygy üçin ulanylýan bolsun, şeýle hem *max M**, *min m** hususy bahaly bolmaklygy ücin, *H(x*)* gessian oňly kesgitlenen matrissadyr.
Onda tizleşdirilen aşaklamanyň netijesini göz öňünde tutup, kwad-ratik görniş üçin, asimptotiki toplanmanyň tizligine, (аналогично) bir meňzeş (edil şonuň ýaly) bahalanmasyna garaşmak bolar.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|x_k - x^*\|} \le \frac{M^* - m^*}{M^* + m^*}$$

$$\sup_U \tilde{H}(t, x(t), u, \psi_1(t)) = +\infty$$

$\tilde{H}(t, x(t), u, \psi_1(t))$, *u* – boýunça differensirlenýär we *u=u(t)* bolanda maksimuma eýe bolýar. (t – islendik nokat üznüksiz *u(t)* funksiýa görä).
Şonuň üçin

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t), \psi_1(t)) = \psi_0 \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t)) + \psi_1(t) = 0$$

ýagny $\psi_1(t) = -\psi_0 \dfrac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))$. Iň soňky deňlemäni (8) – de
(9) ýerinde goýup alarys, ýagny Eýleriň deňlemesini

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0, \ (u = x'(t)).$$

2. Amaly meseleleriň arasyndaky, şeýle meseleler gabat gelýärler: u=u(t) rugsat edilen hemme deňlemeleriň içinde, şeýle bir häsýete eýe bolup, degişli çözüw *x=x(t)* (1) deňlemeler ulgamy aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär:

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_2$$

haçan $t_1 > t_0$ (t_1 – moment wagty fiksirlenen däl) şeýle bir çözülişi tapmaly, netijede (2) funksional iň kiçi bahany kabul edip alar ýaly.

II. Bap. Çyzykly programmirlemäniň esasy meselesi

§1. Çyzykly programmirleme meselesine gelýän amaly meseleler we onuň matematiki modeli

Goý, kärhananyň n görnüşli önümi öndürmäge mümkinçiligi bar bolsun. Oba hojalyk pudagyna degişli bolan edaralarda bu önümlere maldarçylyk, ösümçilik önümleri mysal bolup biler. Şonlukda kärhana m görnüşli resurslara eýe (mysal üçin: ýer, işçi güýç, tohum we ş.m.). Bu resurslaryň bar bolan mukdary öňünden belli:

$$b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m.$$

Her bir önümiň öndürilişinden alnan ykdysady taýdan peýdasy belli:

$$c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_n.$$

Mundan başga-da her görnüşiň bir önümini öndürmek üçin zerur bolan resursyň her bir görnüşiniň mukdary bellidir:

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mn}.$$

Bu ýerde a_{11} – birinji önümi öndürmek üçin brinji resursyň zerur bolan mukdary we ş.m.; umumy görnüşde a_{ij} – bu j ($j=1,2,\dots,n$) nomerli önümi öndürmek üçin zerur bolan i (i=1,2,...,m) nomerli resursyň mukdary. Bu sanlara tehnologik koeffisiýentler hem diýilýär, olaryň sany mn ululyga deň.

X önümçiligiň jemeleýji girdejisiniň iň uly baha eýe bolmagyny üpjün edýän meýilnamasyny düzmek zerurlygy ýüze çykýar (basgaça aýdanymyzda, her görnüşiň $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ önümleriň zerur bolan mukdaryny tapmaly).

Ilki bilen maksat funksiýany düzeliň. Onuň üçin girdejini belli bolan ululyklar arkaly aňladalyň. Birinji görnüşli bir önüm c_1

$$\frac{(Ax_0, x_0)}{\|Ax_0\|\|x_0\|} \ge \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (7)$$

deňlik emele gelýär haçan

$$\alpha_1^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}; \qquad \alpha_2^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(7) deňsizlikden alarys

$$\min_{\|x\|\ne 0} \frac{(Ax, x)}{\|Ax\|\|x\|} = \frac{2\sqrt{mM}}{M+m} S_2$$

S_1,S_2, A-operatoryň hususy normirlenen wektorlary, olar degişlilikde max, we min hususy sanlardyr.
Lemmanyň subudyndan we (3) formuladan alarys:

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k)\left[1-\frac{4Mm}{(M+m)^2}\right] = f(x_k)\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$$

Şeýlelikde

$$f(x_k) \le f(x_0)\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2k} \qquad (8)$$

Bu ýerden $\|x_k\|$ üçin bahany kesgitlemek bolar.

$$\|x_k\| \le \sqrt{\frac{(Ax_k, x_k)}{m}} = \sqrt{\frac{2f(x_k)}{m}} \le \sqrt{\frac{2f(x_0)}{m}}\left(\frac{M\text{ - }m}{M+m}\right)^k =$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0, x_0)}{m}} \cdot \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^k \le \sqrt{\frac{M}{m}}\|x_0\| \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k,$$

$$\|X_k\| \le \|X_0\|\sqrt{\frac{M}{m}} \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k$$

şeýlelikde aşakdaky teoremany aldyk:

min

$$\frac{(\mathrm{Ax},\mathrm{x})}{\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{x}\|}=\frac{2\sqrt{\mathrm{Mm}}}{\mathrm{M}+\mathrm{n}} \qquad (5)$$

$$\|\mathrm{x}\|\neq 0$$

Subudy: Goý X_0-fiksirlenen (belleninen) azat hususy däl wektor. Onda x_0, Ax_0 wek-torlar bilen emele gelen, $E(x_0)$ 2-ölçegli kiçi giňişlige seredeliň. $E(x_0)$ kwadratik görnişli $K(y)=(Ay,y)$ $y \in E(x_0)$ kesgitläliň bu kwadratik görnişe, 2 ölçegli $E(x_0)$kiçi görnişlikde kesgitlenen $\overline{A}x_0$ oňly, kesgitlenen simmetrik operatiw de-gişlidir. Eger λ_1, λ_2 (kemelmeýän tertipde) Ol operatoryň hususy sanlary bolsa, hemde $m=\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq M$ ýerine ýetýän bolsa. Onda ol, $\forall y \in E(x_0)$ netijesi bolup durýar.

$$m\|y\|^2 \leq \left(\overline{A}x_0, y, y\right)= A(y,y)\leq A\|y\|^2$$

Goý $E(x_0)$-kiçi giňişligiň içinde $\overline{A}x_0$-operatoryň $\{x_1, x_2\}$ hususy wek-torlary ortanormirleşdirýän ulgam we $\|x_0\|=1$ bolsun.

Onda x_0 –aşakdaky görnişde ýazalyň:

$x_0=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$, özem $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$ onda:

$$\frac{(Ax_0, x_0)}{\|Ax_0\|\|x_0\|}=\frac{\alpha_1^2\lambda+\alpha_2^2\lambda_2}{\sqrt{\alpha_1^2\lambda_1^2+\alpha_2^2\lambda_2^2}} \qquad (6)$$

sag tarapyny minimumlaşdyryp (6) deňlemeden $\alpha_1^2\lambda_1^2=1$ şertine görä alarys:

girdejini berýär; meýilnama boýunça birinji görnüşli önüm x_1 mukdarda öndürilmeli, bu bolsa c_1x_1 girdejini berer. Şuňa meňzeşlikde meýilnama boýunça x_2 mukdarda öndürilmeli ikinji gönüşli önüm c_2x_2 girdejini berer we ş.m. Umumy girdeji (ony z bilen belgiläliň) aşakdakyny berer:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_jx_j+\ldots+c_nx_n$$

Bu aňlatma meseläniň maksat funksiýasy bolup durýar. Bu aňlatmany aşakdaky görnüşde ýazmak hem bolar:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Indi bolsa çäklendirmeler ulgamyny düzeliň. Başgaça aýdanymyzda, gözlenýän X meýilnamanyň x_j komponentleriniň kanagatlandyrmaly şertlerini düzmeli. Munuň üçin önümi öndürmekde sarp ediljek her bir görnüşli resursyň mukdaryny tapmaly.

Birinji görnüşli x_1 sany önümi öndürmek üçin $a_{11}x_1$ mukdardaky birinji görnüşli resurs sarp ediler; iknji görnüşli x_2 sany önümi öndürmek üçin $a_{12}x_2$ mukdardaky ikinji görnüşli resurs sarp ediler we ş.m. Umumy çykdajy aşakdakyny berer:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n$$

(bu aňlatmada a koeffisiýentiň birinji indeksi üýtgemän galýandygyny, ikinji bolsa üýtgeýändigini bellemek gerek).

Emma resursyň umumy çykdajysy bar bolan resursdan uly bolmaly däldir, şonuň üçin tapylan soňky aňlatma birinji b_1 resursa diňe ýa deň ýa-da uly bolup biler:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n \leq b_1$$

Şuňa meňzeşlikde galan resurslar üçin hem şertleri düzmek bolar:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n \le b_n$$

Meýilnama hakykatda ulanmaga ukyply bolar ýaly x_j komponentler ýokarda getirlen şertleri kanagatlandyrmalydyrlar.

Emma gözlenýän ululyklara ykdysady taýdan seredilende bu ululyklaryň otrisatel bolmaly däldigi gelip çykýar. Şol bir wagtda bu ululyklar nola deň bolup bilerler; bu bolsa şu görnüşiň öndürilmegi düşewüntli däldigini aňladýar. Diýmek, ýokarda alynan şertlere gözlenýän ululyklaryň otrisatel dällik şertini goşmaly:

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0,$$
$$\ldots$$
$$x_j \ge 0,$$
$$x_n \ge 0.$$

Alnan deňsizlikleriň iki topary bilelikde meseläniň çäklendirmeler ulgamyny düzýärler. Olary başgaça aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m);$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n);$$

Indi bolsa meseläni aşakdaky ýaly beýan etmek bolar: z funksionalyň iň uly baha eýe bolmagyny üpjün edýän we hemme deňsizlikleri kanagatlandyrýan x_j komponentleri tapmaly. Çäklendirmeler ulgamyň we maksat funksiýanyň näbellilere görä çyzyklydygyndan bu meseläniň çyzykly programmirlemäniň meselesidigi gelip çykýar.

$$\varphi(h_k) = \frac{1}{2}\left(Ax_{k+1}(h_k), X_{k+1}(h_k)\right):$$
$$2\varphi(h_k) = \left(Ax_k - h_k A^2 X_k, X_k - h_k Ax_k\right) =$$
$$= (Ax_k, x_k) - 2h_k(Ax_k, Ax_k) + h_k^2\left(A^2 x_k Ax_k\right)$$
$$\varphi'(h_k) = -(Ax_k, Ax_k) + h_k\left(A^2 x_k, Ax_k\right) = 0$$
$$h_k = \frac{(Ax_k, Ax_k)}{\left(A^2 x_k, Ax_k\right)}$$

yzgiderli ýerinde goýup alarys

$$x_{k+1} = x_k = \frac{(Ax_k, Ax_k)}{\left(A^2 x_k, Ax_k\right)} Ax_k$$

Göniden hasaplamanyň esasynda alarys:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) * \left[1 - \frac{(Ax_k, Ax_k)}{\left(A^2 x_k, Ax_k\right)(Ax_k, x_k)}\right] \qquad (3)$$

A-operatoryň häsiýetlerine görä: only kesgitlenen, simmetrik bolýanlygynyň esasynda $\underline{B = \sqrt{A}}$ bilen belläp, (3) formulany $Bx_k = y_k$ Kabul edip, aşakdaky görnüşde ýazmak bolar.

$$f(x_{k+1}) = f(x_k)\left[1 - \frac{\left(B^2 x_k B^2 x_k\right)^2}{\left(B^3 x_k B^3 x_k\right)\left(B^2 x_k B^2 x_k\right)}\right] =$$
$$= f(x_k)\left[1 - \frac{(By_k By_k)^2}{\left(B^2 y_k B^2 y_k\right)(y_k, y_k)}\right] = \qquad (4)$$
$$= f(x_k)\left[\frac{(Ay_k, y_k)^2}{(Ay_k, Ay_k)(y_k, y_k)}\right]$$

Kwadrat skopkanyň içindäki aňlatmany bahalamak üçin aşak-daky lemma seredeliň.

Lemma 1:

Goý *A*-oňly, kesgitlenen, simmetrik operator M_1 *m-max, min* hususy bahalary onda:

$$\left(\nabla f\left(X_{k_i}-\nabla f\right)(y),\eta\right)\le\frac{\varepsilon}{2},$$

bu ýerden

$$\left(\nabla f(y),\frac{\nabla f\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|}\right)\ge\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|-\frac{\varepsilon}{2}\ge\frac{\varepsilon}{2}$$

bahalalyň $f\left(X_{k_i}\right)-f\left(X_{ki+1}\right)$:

$$f\left(X_{k_i}\right)-f\left(X_{ki+1}\right)\ge\int_0^h\left(\nabla f\left(X_{ki}\right)-t\frac{\nabla t\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|},\frac{\Delta f\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|}\right)dt$$

$$\ge\frac{\varepsilon}{2}h$$

bu ýerden

$$f\left(X_{k_i}\right)-f\left(X_{kp+1}\right)\ge p\cdot\frac{\varepsilon h}{2}$$

$\forall$ p-natural bolanda f(x)- funksiýanyň bu bolsa aşakdan kesgitlenenligine ters gelýär. Teorema subut edildi.

Haçan položitel (oňly) kesgitlenýän kwadrat, görnişinde L.W. Kantorowiç tarapyndan tizleşdirilen lemmanyň toplanmagynyň tizligi baradaky teorema subut edildi. Goý $f(x)=\frac{1}{2}(AX,X)$. $A>0$ nirede *A*-oňly we kesgitlenen matrissa, *M-max* hususy san, m-min hususy san *A*-operatywyň. Onda ýeňillik bilen $\nabla f(X)=A_X$ tizlişdirilen aşaklamanyň ädimine görä

$$X_{k+1}=X_k-h_k kAx_{k,}$$

nirede $\boldsymbol{h_k}$ –minimum şertlerden kesgitlenilýär:

§2. Deňlemeler ulgamlarynyň žordan usuly bilen optimal çözülişi

Goý bize Ỳewklidiň giňişliginde n-tertipli çyzykly ulgamlar berlen bolsun. Ol ulgamlar degişlilikde ýokarda seredilen ýokary tertipli tekizlikler (gipro) berlen bolsun.

$$\vec{a}\vec{x}-c\ge 0$$

$$\vec{a}\vec{x}-c\le 0$$

ýarym giňilik

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n-y_1=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n-y_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n-y_m=0 \end{array}\right\}\qquad(1)$$

Onda (1)-nji ulgam üçin aşakdaky tablisany ýazýarys.

Tablisa 1

	x_1 x_2 …….x_n
$y_1=$	a_{11} a_{12} ……..a_{1n}
$y_2=$	a_{21} a_{22} …….a_{2n}
….	………………..
$y_m=$	a_{m1} a_{m2} …….a_{mn}

1) Tablisada nola deň bolmadyk a_{22} elementi saýlap alýarys we ony žordan element diýip atlandyrýarys. Soňra şol setiriň hemme elementini şol elemente bölýäris. Ýöne a_{22} elementiň özüni öz-özüniň tersini alýarys.

$$a_{22}^{-1}=\frac{1}{a_{22}}$$

Tablisa 2

	x_1	y_2	…	x_n
$y_1 =$	a_{11}	$\frac{a_{12}}{a_{22}}$	…	a_{1n}
$x_2 =$	$-\frac{a_{21}}{a_{22}}$	$\frac{1}{a_{22}}$	…	$-\frac{a_{2n}}{a_{22}}$
….	...	…	…	…
$y_m =$	a_{m1}	$\frac{a_{m2}}{a_{22}}$	…	a_{mn}

2) Žordan elementiň setirindäki hemme elementler žordan elemente bölünýärler, hem alamaty tersine alynýar.

3) Žordan elementiň sütünindäki elementleriň hemmesi žordan elemente bölünýär.
4) Galan hemme elementler

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}} \ .$$

formula boýunça tapylýar.

Netijede eger (1) ulgamyň matrisasynyň rangy $r=n$ bolsa, biz n gezek žordan usulyny ulanyp, hemme x-leri y-ler bilen ýerini çalşyp, aşakdaky n-nji tablisany alýarys.

Teorema 1: Üzüniksiz differensirlenýän, funksiýanyň *(1)* şerti ýerine ýetirende, $\nabla f(X_k)$ gradiýentleriň yzygiderligi nula ymtylýar:

$$\lim_{K\to+\infty} \nabla f(X_k) = 0 \tag{2}$$

Hakykatdan yzygiderligiň manatonlygynyň güýjine görä $\{f(X_k)\}_{k=0}^{\infty}$ we (1) häsiýete görä $\{X_k\}$-kesgitlenen hem-de onuň çlenleri

$$S_{X_0} = (x) + f(X) \le f(X_0) S$$

ýaýlanyň içinde ýerleşendir. A ol bolsa ýapyk kesgitlenen ýaýladyr. $\nabla f(X)$ üznüksizliginden onuň deňölçegli S_{X_0}-içinde üznüksizligi gelip çykýar. ýagny hemme

$$X_1 X' \in S_{X_0} \quad \text{we} \qquad \eta \|\eta\| = 1$$

üçin bardyr $t \ge 0$ $z(t) \ge 0$ funksiýa

$$\lim_{t\to 0} = (t) = 0$$

ýagny şeýle

$$|(\nabla f(x') \text{-} \nabla f(x), \eta)| \le z(\|x - x'\|)$$

Goý $\{\nabla f(X_k)\}$ nula ymtylmaýan bolsun. Onda islendik $\forall \varepsilon$ üçin yzygiderlik

$$\{\nabla f(X_{ki})\}_{i=0}^{\infty}$$

bar bolup,

$$\|\nabla f(X_{ki})\| \ge \varepsilon, k_{i+1} \ge k_i, i = 1,2,...; \text{ onda } \forall h,$$

üçin $\|h\| = 1,$ we y aşakdaky şerti ýerine ýetirýän bolsun

$$\|X_{k_i} - y\| \le h,$$

Aşakdaky deňsizlik dogrydyr.

§9. Çyzykly däl programmirlemäniň aşaklygyna tizleşme - gradiýent usuly

Bize belli bolşy ýaly ugur -boýunça önüm, funksiýanyň berilen ugurynyň artdyrmanyň çyzykly bölegidir. Eger berilen nokatda gradiýent nuldan tapawutly bolup, hereketiň ugry bilen gradiýentiň ugry öz aralarynda ýiti buruçy emele getirse, onda ýeterlik kiçijik süýşmeklikde görkezilen ugur boýunça, funksiýanyň bahasy-artýar, tersine süýşse bolsa, funksiýanyň bahasy-kemelýär. Bu häsiýetler bolsa, üzüniksiz differensirlenýän funksiýanyň bahasynyň yzygiderli gowulanma ýagny ***min (max)*** meselesini çözmekde ulanylýar, degişlilikde bu usula relaksasion usul diýilýär. Eger hereket göni gradiýentiň ugry boýunça bolsa, onda ol usula gradiýent usuly diýilýär. Üzülýän gradiýent funksiýalar üçin bolsa, umumylaşdyrylan gradiýent usuly işlenip düzülen. Biz bir-näçe ýönekeý we tejribede köp ulanylýan, gradiýent usullaryň hasaplanşyna seredeliň.

1) Tizleşdirlen aşaklama usuly

Goý *f(x)* – üzüniksiz, differensirlenýän funksiýa, E_n-hemme ýerinde kesgitlenen we aşakdaky häsiýeti ýerine ýetirýän bolsun

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{1}$$

X_0 -haýsy hem bolsa bir başlangyç nokat. Aşakdaky görnüşdäki yzygiderlige seredeliň. (çalt aşaklama usual) Proses

$$X_{k+1} = X_k - h(X_k)\nabla f(X_k), K = 1,2,...$$

nirede

$$h(X_k) \geq 0 \qquad f(X_{k+1}) = \min_{h\geq 0} f(X_k - h\nabla f(X_k))$$

ýagny prosessiň (yzygiderligiň) her bir ädiminde, biz antigradiýentiň uguryna tarap süýşýäris, şol uguryň minimumna çenli.

Tablisa 3

	y_1	y_2 …..	y_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12} …..	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22} …..	b_{2n}
…	…………………		
x_n=	b_{n1}	b_{n2} ……	b_{nn}
…	………………………		
y_m=	b_{m1}	b_{m2} …..	b_{mn}

Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň

$$y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3,$$
$$y_2 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$
$$y_3 = 7x_2 - x_3$$

Tablisa 4

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	1	3	-2
$y_2 =$	4	-2	3
$y_3 =$	0	7	-1

Tablisa 5

	x_1	x_2	y_1
$x_3 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y_2 =$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y_3 =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$(-2)^{-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{tersi} \quad \frac{1}{2}$$

Tablisadan görşümiz ýaly biz 1-ädim Žordan usulyny ulanyp, alan tablisamyzda y_1 bilen x_3-iň ýerini çalyşdyk. Edil şonuň ýaly edip degişlilikde hemme näbellileriň ýerini çalşyp, meseläniň çözüwini kesgitläp bilýäris.

Netije. Bu usulyň esasynda biz berlen ulgamyň näbellilerini tablisa görä kesgitläp bilýäris. Ýöne žordan usulynyň ulanylmasynyň sany ulgamyň elementlerinden düzülen matrisanyň rangynyň sanyna deň bolmalydyr.

$$z+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*[f_i(x)-z]\geq z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*[f_i(x^*)-z^*]\geq z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[f_i(x^*)-z^*]$$

$$(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^*)z+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* f_i(x)\geq(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*)z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* f_i(x^*)\geq(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i)z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^*)$$

kanagatlandyrýan şeýle bir $\lambda_1^*,...,\lambda_m^*$ otrisatel däl sanlar bardyr.

Eger $\varphi(x)\geq f_i(x^*)$ bolsa, bu ýerden $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*=1$ bolýandygyny alýarys.

Goý, $R(x^*)$ $f_i(x^*)=\varphi_i(x^*)$ üçin "i" indeksleriň köplügi bolsun. Onda

$$\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^* f_i(x)\geq\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^* f_i(x^*)\geq\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i f_i(x^*),$$
$$x\in E_n,\qquad \sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*=1,\lambda_i^*\geq 0,\lambda_i\geq 0,i\in R(x^*)$$

kanagatlandyrýan şeýle bir $\{\lambda_i\}, i\in R(x^*)$ otrisatel däl sanlar bardyr. Eger $f_i(x)$, $i=1,\ldots,m$ üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda bu ýerden

$$\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*\nabla f(x^*)=0,\qquad \sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*=1;\lambda_i^*\geq 0 \quad (9)$$

bolan λ_i^*-leriň barlygy gelip çykýar. (9) şert (6) minimaks meselede x^* nokadyň optimaldygynyň zerur we ýeterlik şertidir.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i^* - c_j = 0,\ j = 1,\dots,n;\ \lambda_i^* \geq 0$$

deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýandygyny, ýagny $\{\lambda_i\}$ Lagranž köpeldijileri çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň ýolbererlik çözüwlerdigini alarys.

Kun-Takkeriň teoremasynyň ulanyşy bilen bagly bolan beýleki käbir netijelere, meselem, minimaks görnüşli meselelere garalyň. Güberçek minimaks meseleler indiki görnüşde formulirlenýär. E_n giňişlikde kesgitlenen $\{f_i(x)\}$, $i=1,\dots,m$ güberçek funksiýalaryň maşgalasy berlen. Goý,

$$\varphi(x) = \max_{1\leq i\leq m} f_i(x)$$

bolsun . $\varphi(x)$-iň minimumyny tapmaklyk talap edilýär:

$$\min_{x}\max_{1\leq i\leq m} f_i(x) \qquad (6)$$

Bu mesele güberçek programmirlemäniň meselesine aňsat getirilýär:

$$f_i(x) - z \leq 0,\ i=1,\dots,m \qquad (7)$$

şertlerde:

$$\min z \qquad (8)$$

tapmaly. Dorudan–da her bir x nokada $z=\varphi(x)$ hasaba alyp, (6) meseläniň ýolbererlik çözüwini goýup bileris. (7-8) meseläniň optimal çözüwini $\varphi(x)$-iň minimumy alynýandygyny zerur we ýeterlik şertini alýarys;

$\forall$ x we z $\lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}\geq 0$ üçin

§3. Deňlemeler ulgamynyň modelleşdirlen žordan usuly bilen optimal çözülişi

Goý bize ýokardaky ýaly ulgam berlen bolsun. Ýagny,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Bu ulgamy biz haçan

1) $m=n$ bolanda, $n=r$ bolanda belli bolan usullaryň üsti bilen onuň çözüwlerini kesgiläp bilýäris;
2) Eger $m<n$ bolsa, $m=r$ bolsa, onda (1) ulgamyň çözülişinde hemme näbellileri kesgitläp bolmaýar. Sebäbi onuň tükeniksiz çözülşiniň bolup bilýändigini rangyň üsti bilen kesgitlemek bolýar;
3) Eger-de $m \geq n$ bolup, $n=r$ bolsa, onda hemme näbellileri kesgitlemek bolýar. Ýöne birnäçe deňlemeleri üýtgedip bolmaýar.

Hakykatdan :

Tablisa 1

	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_s$	-…	$-x_n$
$y_1 =$	$-a_{11}$	$-a_{12}$	…	$-a_{1s}$	-…	$-a_{1n}$
$y_2 =$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	…	$-a_{2s}$	-…	$-a_{2n}$
……	………	………	………	………	………	………
$y_r =$	$-a_{r1}$	$-a_{r2}$	…	$-a_{rs}$	-…	$-a_{rn}$
……	………	………	………	………	………	………
$y_m =$	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	…	$-a_{ms}$	-…	$-a_{mn}$

Tablisa 2

T-2	$-x_1 \quad -x_2$ - … $-y_s$ - … $-x_n$
$y_1 =$	$-b_{11} \quad -b_{12}$ - ... - a_{1s}/a_{rs}-... $-b_{1n}$
$y_2 =$	$-b_{21} \quad -b_{22}$ - ... - a_{2s}/a_{rs} -... $-a_{2n}$
……	....
$y_r =$	$-a_{r1}/a_{rs} \quad -a_{r2}/a_{rs}$ -...- a_{rs}/a_{rs} -...- a_{rn}/a_{rs}
……	....
$y_m =$	$-b_{m1} \quad -b_{m2}$ -...$-a_{ms}/a_{rs}$ -... $-b_{mn}$

Eger biz ýokarda serden žordan usulymyz ýaly yzygiderlikde görkezilen 4-punkt boýunça 1-nji tablisadan 2-nji tablisa geçsek, onda biz ony aşakdaky görnüşde ýazyp bileris. Goý žordan element diýip $a_{rs} \neq 0$ alalyň.

2-nji tablisadan görnüşi ýaly biz y_r bilen x_s -iň ýerini çalyşdyk we aşakdaky amallary ýerine ýetirdik:

1) $-a_{rs}$ elementi žordan element diýip saýladyk we 2-nji tablisada ony $-\frac{1}{a_{rs}}$ diýip ýazdyk.
2) Şol elementiň ýerleşen setirine žordan setir diýip, onuň hemme elementlerini a_{rs} elemente böldük.

Şol elementiň ýerleşen sütüninde bar bolan elementleriň hemmesini şol elemente böldük, alamatlaryny bolsa tersine öwrüp aldyk. Galan hemme elementleri žordan usuldaky ýaly

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}$$ formula bilen tapdyk.

Biz 2-nji tablisada žordan usuly bilen 1-nji ulgamy çözmeklik üçin 1 ädim žordan usulyny ulandyk. Eger-de biz yzygiderlikde şol usuly ulansaň onda ýokardaky görkezilen 3-nji görnüşe görä takyk netije alarys.

Steýnisiň teoremasy. *Eger 1-nji žordan tablisasyndan $m \leq n$ çyzykly baglanşyksyz setirler bar bolup, m ädimden soňra hemme*

$$f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda_i f_i(x^*) \leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda^*{}_i f_i(x^*) \leq f_0(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda^*{}_i f_i(x)$$

bolýan $\lambda^* = \{\lambda_1^*, ..., \lambda_{m+k+l}^*\}$ wektoryň bar bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Kun–Takkeriň teoremasyny çyzykly programmirlemedäki ikileýinlik teoremasynyň umumylaşdyrmasy, görnüşinde garamak bolar. Goý, çyzykly programmirlemäniň meselesi indiki görnüşde bolsun:

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0, i = 1, ..., m.$$

çäklendirmelerde $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ jemi minimizirlemeli. Eger bu meseläniň çözüwi bar bolsa, onda Kun – Takkeriň modofisirlenen teoremasyna laýyklykda $x \in E_n$ we $\lambda_i \geq 0$, i=1,…,n bolanda

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*] \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*] \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*]$$

kanagatlandyrýän *m* ölçegli $\lambda^* \geq 0$ wektor bardyr.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] = \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i b_i + \sum_{j=1}^{n} x_j [c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i^*]$$

Bolýandygyny göz öňünde tutup, biz λ_i^*-niň

Deňsizligiň jübiti görnüşinde aňladylyp biliner. Eger biz Kun – Takkeriň teoremasyny formal ulansak, onda Lagranž funksiýada deňlige 2 goşulyja (два слагаемых) laýyk geler:

$$\lambda_1[(e,x)+c]+\lambda_2[(-e,x)-c]=(\lambda_1-\lambda_2)[(e,x)+c]=$$
$$=\bar{\lambda}[(e,x)+c]$$

bu ýerde $\bar{\lambda}=\lambda_1-\lambda_2$. Otresateldällik şertine diňe λ_1 we λ_2 degişli, $\bar{\lambda}$ bolsa erkin san bolup biler. Şeýlelikde, biz indiki teoremany formulirleýäris: (Kun-Takkeriň modifisirlenen formulasy)

Teorema 1: Goý, güberçek programmirlemäniň meselesi bar bolsun: $x \in \Omega$ çäklendirmelerde

$$\min f_0(x) \qquad (2)$$

tapmaly, bu ýerde Ω

$$f_i(x)\le 0, i=1,...,m; \qquad (3)$$
$$f_i(x)=(e_i,x)+c_i\le 0, i=m+1,...,m+k; \qquad (4)$$
$$f_i(x)=(e_i,x)+c_i=0, i=m+k+1,...,m+k+l \qquad (5)$$

ulgam bilen berilýär we sleýter şerti ýerine ýetirilýär:

$f_i(\bar{x})<0$, $i=1,\ldots,m$ üçin $\bar{x}\in\Omega$ bardyr. Onda (2-5) meseläniň optimal çözüwi x^* bolmak üçin birinji (m+k) komponentalar otrisatel bolmadyk we (x^*,λ^*) jübüt

$$L(x,\lambda)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m+k+1}\lambda_i f_i(x), x\in E_n; \lambda_i\ge 0, i=1,...,m+k$$

Lagranž funksiýanyň eýerli nokady bolýan, ýagny $\lambda_i \ge 0, i=1,...,m+k$ kanagatlandyrýan x üçin we $x\in E_n$

y_i-ler (i=1,2,…,m) ýokary geçýär, x-ler bolsa aşak geçýär, artykmajy bolsa, çyzykly baglanşykly bolýar.
Subudy. Onda biz aşakdaky tablisany alýarys.

Tablisa 3

	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_r$	$-x_{r+1}$	…	$-x_n$
$x_1=$	c_{11}	c_{12}	…	c_{1r}	$c_{1,r+1}$	…	c_{1n}
$x_2=$	c_{21}	c_{22}	…	c_{2r}	$c_{2,r+1}$	…	c_{1n}
……	………						
$x_r=$	c_{r1}	c_{r2}	…	c_{rr}	$c_{r,r+1}$	…	c_{rn}
……	………						
y_{r+1}	$c_{r+1,1}$	$c_{r+1,2}$	…	$c_{r+1,r}$	$c_{r+1,r+1}$	…	c_{r+1n}
y_{m1}	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mr}	$c_{m,r+1}$	…	c_{mn}

Eger $m\le n$ bolup, bu ulgamyň matrisanyň rangy *r*-e deň bolsa, onda biz sag tarapdaky tablisada ýerleşen elementler olara deň bolýarlar. Onda galan y-ler öz aralarynda çyzykly baglanşyklydyrlar. Ony şeýle ýazmak bolýar:

$$\left.\begin{array}{l} y_{r+1}=-c_{r+1,1}y_1-c_{r+1,2}y_2-\ldots-c_{r+1,r}y_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m=-c_{m1}y_1-c_{m2}y_2-\ldots\ldots-c_{mr}y_r \end{array}\right\}$$

Bu bolsa Steýnisiň teoremasyny doly subut edýär.

Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň

$$y_1=x_1-4x_2+3x_3$$
$$y_2=-5x_1+x_2$$
$$y_3=2x_1-3x_2-4x_3.$$

Tablisa 4

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1=$	-1	4	-3
$y_2=$	5	-1	0
$y_3=$	-2	$\boxed{3}$	4

Tablisa 5

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$
$y_1=$	5/3	-4/3	25/3
$y_2=$	13/3	1/3	4/3
$x_2=$	-2/3	1/3	4/3

$$y_1 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}y_3 + \frac{25}{3}x_3$$

$$y_2 = -\frac{13}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3.$$

1) Ω köplükde x^* -den tapawutly nokat bu ýagdaýda $\bar{x} - x^*$ ugur bolup biler we Kun-Takkeriň teoremasy adalatlydyr.

2) x^* nokat Ω köplükde ýeke-täk. Goý, ∇ - x^* nokada $f_0(x)$ funksiýanyň umumylaşdyrylan gradiýentiniň erkin wektory bolsun. Çyzykly programmirlemäniň meselesine seredeliň. $(c_j, x) \le c_j,\ j = 1,...,k$ şertlerde $min(\nabla, x)$ tapmaly. Ol x^* nokada ýeketäk çözüwe eýe $(c_j, x^*) = c_j$, deňsizligi kanagatlandyrýan $j = 1,...,k$ indekslere garalyň. Goý, olar i^* köplügi emele getirsinler. $(c_j,\eta)<0$ ýerine ýetýän $\eta \ne 0$ wektorlaryň toplumy boş bolany üçin c_j wektorlardan minimal bölek köplük saýlap almak bolar. Bu wektorlar üçin $\sum_j \lambda_j e_j = 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan şeýle bir položitel $\lambda_j>0$ sanlar tapylar, başga tarapdan $\nabla = \sum_j \alpha_j e_j$. Bu ýerden

$$\nabla + \sum_j (\lambda_j - \alpha_j) e_j = 0$$

λ_j sanlaryň islendikçe uly bolup bilýänligi sebäpli, onda $\nabla + \sum_j \bar{\lambda}_j e_j = 0$ kanagatlandyrýan $\bar{\lambda}_j>0$ bardyr. Bu ýerden biziň ýagdaýymyzdaky Kun-Takker teoremanyň tassyklamasynyň adalatlydygy gelip çykýar. Şu usulda modifisirlenen Kun – Takkeriň teoremasy adatça güberçek programmirlemäniň meselesiniň çäklendirmeler ulgamynda güberçek we çyzykly deňsizlikleriň hatarynda çyzykly deňlemeleriň bar bolan ýagdaýynda ulanylýar.

$$(e,x)+c=0 \qquad (1)$$

görnüşli çyzykly deňleme

$$(e,x)+c=0;$$
$$(-e,x)-c=0$$

§8. Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň optimal çözüliş usullary

Bellik: Eger sleýter şerti ýerine ýetmese, onda $\{x^*, \lambda^*\}$ görnüşli Lagranž funksiýanyň eýerli nokady bolman hem biler.
Indiki ýönekeý mysala garalyň: $x^2 \leq 0$ şertde $min(-x)$ tapmaly. Sleýter şerti ýerine ýetmeýär, sebäbi $x^2<0$ bolanda x –iň bahalar köplügi boş. Optimum $x=0$ nokatda alynýar. Lagranž funksiýasy

$$L(x,\lambda)=-x+\lambda x^2$$

görnüşe eýe. X boýunça minimumyň zerur şerti $\frac{\partial L}{\partial x}=-1+\lambda x=0$ görnüşde ýazylýar. $x=0$ bolanda bu şerti kanagatlandyrýan λ ýokdur, ýagny Lagranž funksiýanyň $(0,\lambda)$ görnüşli sedlowoý nokady ýokdur. Güberçek programmirlemäniň meselesinde çäklendirmeler hökmünde çyzykly deňsizlik bolup biler. Şunda Kun-Takkeriň teoremasynyň zerurlygy subut edilende sleýter şertiniň ýerine ýetmegini diňe çyzykly däl deňsizlikleriň kesme köplükleri üçin talap etmeli. Dogrudan-da, Kun-Takkeriň teoremasyny subut edenimizde biz bolup biljek ugurlaryň köplüginiň boş däldigini görkezmek üçin sleýter şertini talap etdik.
Goý, çäklendirmeleriň ulgamy

$$\Omega=\left\{x: \begin{array}{l} f_i(x)\leq 0, i=1,\ldots,m; \\ (e_j,x)\leq c_j, j=1,\ldots,k \end{array}\right.$$

görnüşli we $j=1,\ldots,k$ üçin $f_i(\bar{x})<0, i=1,\ldots,m,\quad (e_j,\bar{x})<c_j$ kanagatlandyrýan şeýle bir $\bar{x}$ nokat bar bolsun. Goý, $x^* \in \Omega$ meseläniň optimal çözüwi bolsun. Onda 2 ýagdaýyň bolmagy mümkin :

§4. Çyzykly programmirlemäniň esasy meselesiniň goýluşy we häsiýetleri

Çyzykly z funksiýa berlen:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \qquad (1)$$

bu ýerde p_j – belli bolan koeffisiýentler (olar dürli hakyky sanlar bolup bilerler).

p_j koeffisiýentler n ölçegli ýewklid giňişliginde $\bar{P}(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ baha wektory, x_j näbelliler bolsa $\bar{x}(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ wektory berýärler. z funksiýa $\bar{P}$ we gözlenýän $\bar{x}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak bolar:

$$z = \bar{P}\cdot\bar{x} \qquad (1a)$$

z funksiýa maksat funksiýa ýa-da meseläniň funksianaly diýilýär.

Çäklendirmeler ulgamy berlen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \leq a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq a_m. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

z funksionalyň iň uly ýa-da iň kiçi baha eýe bolmagyny üpjün edýän we (2)-ni kanagatlandyrýan $\bar{x}(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ wektory (nokady, näbelliler toplumyny) tapmaly. Ýokarda bellenilşi ýaly (2) ulgam n ölçegli ýewklid giňişliginde güberçek köpburçlugy kesgitleýär. Eger bu köpburçluk boş bolsa (nokatlaryň hiç birini özünde saklamaýar), onda meseläniň çözüwi ýok diýip hasap edilýär.

Eger bu köpburçluk boş däl we diňe bir nokada getirilmeýän bolsa, onda tükeniksiz nokatlar köplügi bar bolup, bu nokatlaryň her biri *z* funksionalyň belli bir takyk baha eýe bolmagyny üpjün edýärler we (2)-ni kanagatlandyrýarlar. Bu nokatlaryň içinde *z* ululyk maksimuma ýa-da minimuma eýe bolýan nokady tapmaly. Bu nokady önüm arkaly tapmak usuly ýerlikli bolmaýar, sebäbi *max z* ýa-da *min z* kesgitleniş ýaýlanyň içinde däl-de, gyrada ýerleşýär.

Teorema1. *z* funksional maksimuma (minimuma) (2) deňsizlikler bilen kesgitlenýän Ω köpburçlugyň gyra nokadynda eýe bolýar.

Subudy. Ω köpburçluk gyra nokatlaryň tükenikli sanyna eýedir. Goý, gyra nokatlar aşakdakylar bolsun:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$$

Onda $\forall x \in \Omega$ nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$$

bu ýerde

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

Goý, *z* funksiýa käbir x_0 nokatda maksimuma eýe bolýar diýeliň

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x}_0 \qquad (x_0 \in \Omega).$$

$x_0 \in \Omega$ bolýanlygy üçin bu nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar. Diýmek, käbir λ_i^0 bar bolup aşakdakyny alarys:

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \overline{x}^{(i)} = \lambda_1^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)} + \lambda_2^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} + \dots + \lambda_r^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(r)}$$

$$\overline{\nabla} L_1(x^*) = \alpha_0 \overline{\nabla} f_0(x^*) + \sum_{i \in I^*} \alpha_i \nabla f_i(x^*) \quad G_{L_1}(x^*) \equiv \overline{G}$$

görnüsli wektordan ybarat. $\overline{G}$ - niň nul wektor saklaýandygy üçin x^* nokatda $L_1(x)$ minimum gazanylýar. $i \overline{\in} I^*$ üçin $\alpha_i = 0$ ulanyp we $\frac{\partial L}{\partial x} = -1 + \lambda x = 0$ belgiläp

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

funksiýa garalyň. Bu funksiýanyň $\lambda_i = \lambda_i^*$ bolanda $x = x^*$ nokada *x* boýunça minimal baha we $x = x^*$ bolanda $\{\lambda_i^*\}$ nokada $\lambda \geq 0$ boýunça maksimal baha eýe bolýandygyny görmek aňsat. Şunlukda, $\{x^*, \lambda^*\}$ Lagranž funksiýanyň eýerli nokady, subut etmelimiz hem şudy. Kun – Takkeriň teoremasy subut edildi.

$$\max_{\nabla \in G_{f_\upsilon}(x^*)} (\nabla,\eta) \geq 0, G(x^*) = \bigcup_{\upsilon \in I^* \cup \{0\}} G_{f_\upsilon}(x^*) \qquad (5)$$

$G(x^*)$ köplügiň $\overline{G}$ güberçek ýagny,

$$\sum_{\upsilon \in I^* \cup \{0\}} \alpha_\upsilon \nabla_\upsilon, \sum_\upsilon \alpha_\upsilon = 1, \alpha_\upsilon \geq 0, \nabla_\upsilon \in G_{f_\upsilon}(x^*)$$

görnüşli wektorlarynyň toplumyna seredeliň. Şu köplük üçin (5) deňsizlik saklanylýar:

$$max(\nabla, \eta) > 0, \text{ hemme } \eta \text{ üçin} \qquad (6)$$

Ýöne bu $\overline{G}$ nul wektory saklaýandygyny aňladýar. Dogrudanda $\overline{G}$ ýapyk çäkli güberçek köplük. Eger G nuly saklamadyk bolsady, onda nul nokatdan 1(§2) häsiýete laýyklykda hemme $\nabla \in G$, $(a,\nabla)<0$ kanagatlandyrýan a normal bilen gipertekizlik geçirip bolardy. Ol blsa (6) deňsizlige garşy gelýär. $\overline{G}$ - niň nul wektory saklaýandygyndan

$$\alpha_0 \nabla_0 + \sum_{i \in I^*} \alpha_i \nabla_i = 0,$$

bu ýerde $\nabla_0 \in G_{f_0}(x^*), \nabla_i \in G_{f_i}(x^*)$

kanagatlandyrýan şeýle bir $\alpha_\upsilon \geq 0, \upsilon \in I^* \cup \{0\}, \sum_\upsilon \alpha_\upsilon = 1$ sanlar bardygy gelip çykýar, şeýle hem $\alpha_0 \neq 0$, sebäbi tersine bolan halatynda W köplük boş bolardy. $L_1(x) = \alpha_0 f_0(x) + \sum_{i \in I^*} \alpha_i f_i(x)$ funksiýa seredeliň. Bu funksiýa güberçek we x^* nokada $G_{L1}(x^*)$ umumylaşdyrylan gradiýentiň köplügi

Her bir $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)}, \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)}, \ldots, \overline{P} \cdot \overline{x}^{(r)}$ skalýar köpeltmek hasyly san ululykdyr. Bu sanlardan iň ulusyny saýlalyň; goý, bu san $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ bolsun. $\overline{x}^{(k)}$ gyra nokatlaryň köplüginiň biri bolup durýar; $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ bolsa funksionalyň şol nokatda eýe bolýan bahasy.

Hemme $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(i)}$ skalýar köpeltmek hasyllaryň ýerine olaryň iň ulusyny $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ -ny goýalyň; deňligiň ýerine deňsizlik alarys:

$$z_{\max} \leq \lambda_1^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} + \lambda_2^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} + \ldots + \lambda_r^0 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$$

(eger hemme $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(i)}$ -ler biri-birine deň bolanda, onda deňlik alamaty goýulardy, şonuň üçin deňsizlige deňlik hem goşulýar). $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ -i jemiň daşyna çykaryp we $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = 1$ bolýanlygy göz öňünde tutup alarys:

$$z_{\max} \leq \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} \cdot \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$$

Şeýlelik bilen,

$$z_{\max} \leq \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$$

Bu ýerde $z_{\max}$ alnan köplükde funksionalyň iň uly bahasy; $\overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$ - funksionalyň käbir gyra nokatda eýe bolýan bahasy. Emma iň uly baha mümkin bolan bahalardan kiçi bolup bilmeýär, şonuň diňe = alamaty galýar:

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}$$

Diýmek, z iň uly baha diňe gyra nokatda eýe bolýar.

Teorema2. *Eger z funksional maksimuma (minimuma) birnäçe gyra nokatlarda eýe bolýan bolsa:*

$$z_{\max} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)} = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} = \ldots = \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)}, \quad k > r$$

(r – gyra nokatlaryň umumy sany), onda z şol bir baha agzalan k nokatlaryň güberçek oboloçkasynyň her bir nokadynda eýe bolýar.

Subudy. $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ nokatlar bilen emele gelen güberçek köplügiň islendik x nokadyndaky z funksionalyň bahasyna seredeliň:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1;$$

$$z(x) = \overline{P} \cdot \overline{x} = \overline{P} \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{x}^{(i)} = \lambda_1 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(1)} + \lambda_2 \overline{P} \cdot \overline{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_k \overline{P} \cdot \overline{x}^{(k)} =$$
$$= \lambda_1 z_{\max} + \lambda_2 z_{\max} + \ldots + \lambda_k z_{\max} = z_{\max} (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k =$$
$$= z_{\max} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = z_{\max} \cdot 1 = z_{\max}.$$

Diýmek, güberçek oboloçkanyň islendik nokadynda $z(x)$-iň bahasy

$$z(x) = z_{\max}$$

Geometriki manyda: eger max z iki nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda ol bütin kesimde ýerine ýetýär; eger üç nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda bütin üçburçlukda we ş.m. Eger max z hemme gyra nokatlarda ýerine ýetýän bolsa, onda çözüwler ýaýlasynda funksional üýtgemeýär.

Subut edilen teoremalar meseleleri çözmekligiň usullaryny gurmaklygyň esasyny düzýärler.

$f_i(x^*)>0$ bolsa, onda bu $f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^*) \geq 0, i = 1, \ldots, m.$ ýokardan çäklilige garşy gelýär. Şonuň üçin hemme $i=1,\ldots,m$ üçin $f_i(x^*) \leq 0$, ýagny $x^* \in \Omega$. Soňra $x \in \Omega$ bolanda $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leq 0$ we şol sebäpli:

$$f_0(x) \geq f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) \geq f_0(x^*)$$

Şunlukda x^* optimal çözüw.

Zerurlygy. Goý, x^* optimal çözüw bolsun. $F_i(x^*)=0$ kanagatlandyrýan şeýle bir $i \in \{1, \ldots, m\}$ elerden ybarat bolan I^* indeksler köplügine we soňra ähli $i \in I^*$ üçin $f'_{i\eta}(x^*) < 0$ kanagatlandyrýan şeýle bir η wektoryň W köplügine garalyň. Goý, $k = W \bigcup \{0\}$ bolsun.

Bellik. Eger I^* boş bolsa onda W köplük erkin nul däl wektorlarda ybarat, k köplük bolsa bütin giňişligi doldurýar diýip hasap ederis. W-ny emele getirýän wektorlaryň köplügi – bu x^* nokatdan bolup biljek ugurlaryň köplügidir, ýagny $x + i(\eta)\eta\overline{\Omega}$ kanagatlandyrýan şeýle bir $t(\eta)>0$ san tapylýan η ugurlardyr. Bu ýerde $\overline{\Omega} - \Omega$ köplügiň içki nokatlarynyň bölek köplügi. Sleýter şerti bize W köplügiň boş dälligini berýär. x^* - minimum nokady bolany üçin, mümkin bolan islendik ugurda $f(x)$ kemelmeli däldir, ýagny W girýän islendik ugur boýunça önüm otrisatel bolmaly däldir. $f'_{0\eta}(x^*) < 0$ kanagatlandyrýan η köplügini W_0 diýip belgiläliň. Aşakdaky şert ýerine ýetirilmeli: $W_0 \bigcap W = \emptyset$, diýmek, $i \in I^*$ bolanda $f'_{0\eta}(x^*) we f'_{i\eta}(x^*)$ şol bir wagtda otrisatel bolýan η ugur ýokdyr. Islendik η üçin

$$\max_{\upsilon \in I^* \bigcup \{0\}} \max_{\nabla \in G_{f_\upsilon}(x^*)} (\nabla, \eta) \geq 0$$

gelip çykýar. Bu ýerden:

çözüwleriniň gözlegini aňsatlaşdyrýan örän möhüm indiki häsiýete eýe:
Teorema 1: Güberçek programmirlemäniň meselesiniň islendik lokal minimumy global minimumdyr.
Subudy: Eger $x^* \in \Omega$ lokal minimumyň nokady bolsa onda şeýle bir $S(x^*)$ etrap bar bolup, $x \in \Omega \bigcap S(x^*)$ bolanda $f_0(x)-f_0(x^*)\geq 0$ ýerine ýeter. Goý, $-x$ Ω degişli nokat we $f(x) < f(x^*)$ bolsun. Goý $0 < \alpha < 1$ bolsun.

$$f((1-\alpha)x^* + \alpha x) < (1-\alpha) f(x^*) + \alpha f(x) < f(x^*)$$

Ýöne kiçi $\alpha - da$ $(1-\alpha)x^* + \alpha x \in \Omega \bigcap S(x^*)$ garşylyga geldik . bu ýerden x^* nokada global minimuma ýetilýändigi gelip çykýar.
Teorema 2: (Kun-Takkeriň teoremasy). Goý, (2-3) meseläniň Ω ýaýlasynyň içki nokatlary bar bolsun, ýagny sleýter şerti kanagatlansyn: ähli $i=1,\dots,m$ üçin $f_i(x)<0$ kanagatlandyrýan $x \in \Omega$ bar bolsun. Onda x^* (2-3) meseläniň optimal çözüwi bolmagy ücin (x^*,λ^*) jübütiň

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), x \in E_n; \lambda \geq 0$$

Lagranž funksiýasynyň sedlowoý nokady bolýan otresatel däl m ölçegli $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}_{i=1}^m$ wektoryň bar bolmagy zerur we ýeterlik, ýagny:

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) \geq$$
$$\geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x^*) \geq 0, i = 1,\dots,m. \quad (4)$$

Subudy:
Ýeterligi: Goý, (4) ýerine ýetirilýän bolsun. Eger käbir I üçin

§5. Çyzykly programmirlemäniň geometrik manysy we grafiki usul bilen çözülişi

Goý bize E^n- ýewklidiň giňişliginde maksat funksiýa berlen bolsun.

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad (1)$$

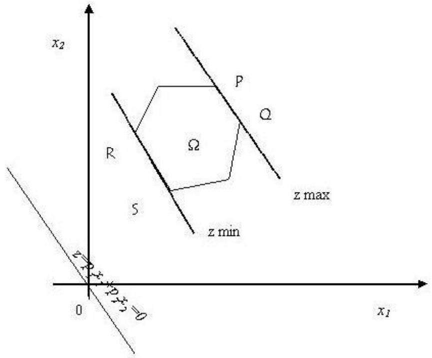
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i < b_j \quad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad (3)$$

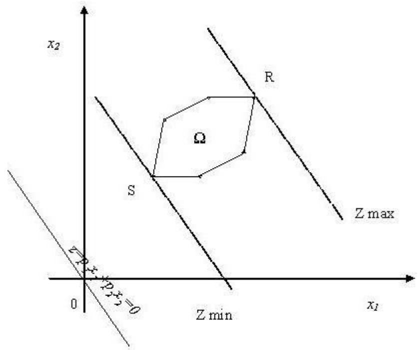
Bu meseläniň geometrik çözülişi maksat funksiýanyň $z=0$ (4) şerti bilen kesgitlenilýär. Eger biz $x(x_1,x_2,\dots,x_n)$ azat nokady alsak onda ol nokada görä maksat funksiýa şeýle görnüşde ýazylýar.

$$Z^{/}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad (5)$$

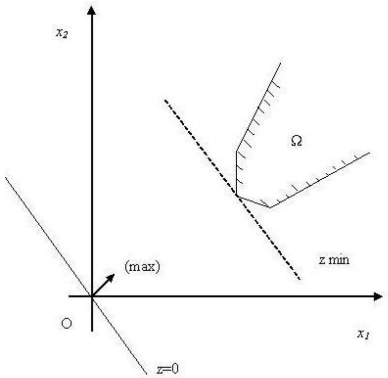
Bu bolsa ýokary tizlikden daşlaşýan nokady görkezýär. Onda biz 4-nji şerte görä, ýokary tekizligi koordinatalar başlangyjyndan geçirip x' nokada görä oňa parallel bolan tekizligi kesgitlemeli bolýarys. Meseläni aýdyňlaşdyrmak üçin biz ony ýönekeýleşdirip tekizlikde x_1 hem-de x_2 nokat arkaly hususy hala Ýewklidiň E^2 2-nji giňişliginde seredeliň. Onda biz aşakdaky hususy hallary alýarys.



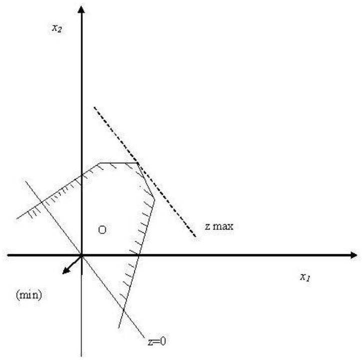
1-nji surat



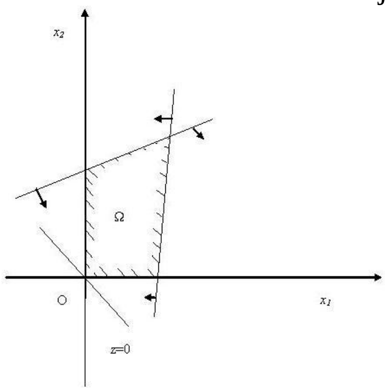
2-nji surat



3-nji surat



4-nji surat



5-nji surat

§7. Çyzykly däl güberçek programmirlemä gelýän amaly meseleler

M ýapyk güberçek köplükde $f_0(x)$ güberçek funksiýanyň minimal bahasyny tapmaklygyň meselesini biz güberçek programmirlemäniň meselesi diýip atlandyralyň. M köplügiň $f_i(x)\le 0$ $(i=1,..,m)$ güberçek deňsizlikler ulgamy bilen kesgitlenýän ýagdaýa seredeliň. Güberçek programmirlemäniň meselesi hökmünde biz indiki meselä düşüneris:

$$\boldsymbol{f_i(x)\le 0;\ i=1,\dots m} \qquad (1)$$

$f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m$ çäklenmelerde

$$\boldsymbol{\min f_0(x)} \qquad (2)$$

tapmaly. Bu ýerde $f_\nu(x), \nu = 0,1,...m$ - n ölçegli E_n ýewklid giňişliginde kesgitlenen güberçek funksiýalar. $\boldsymbol{f_i(x)\le 0}$ görnüşli her bir deňsizlik ýa boş ýa-da Ω_i güberçek köplügi kesgitleýär. Dogrudanam, goý Ω_i boş däl $x_1,x_2\in\Omega_i$ ýagny $f_i(x_1)\le 0$, $f_i(x_2)\le 0$ we goý $\alpha_1,\alpha_2\ge 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ bolsun. Onda $f_i(x)$ güberçekligi esasynda alarys:

$$f_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2) \le 0 \qquad (3)$$

Diýmek $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \Omega_i$. Bu ýerden Ω_i güberçek köplük. Onuň ýapyklygy ýerlikli (2) deňsizlikler ulgamyna ýa baş ýa-da ýapyk we güberçek bolan $\Omega = \bigcap_{i=1}^{m}\Omega_i$ köplük degişli. Eger Ω boş bolsa, onda (2-3) meseläniň ýolbererlik çözüwleri ýokdur. Eger Ω çäkli bolsa, onda meseläniň çözüwi bar, sebäbi üznüksiz funksiýa ($f_i(x)$ güberçek funksiýa üznüksiz) ýapyk çäkli köplükde minimal baha eýe bolýar. Eger Ω çäkli däl bolsa, onda optimal çözüw bolman hem biler. Güberçek programmirlemäniň meseleleri olaryň çäklendirmeler ulgamy bolsa islendik G ýaýlada

$$G\sum_{j=1}^{n} x_j \le C \qquad (6)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (7)$$

(5)-(7) x_j-baglylykda çyzykly ýa-da çyzykly däl programmirlemäniň meselesi bolýar. Ýene bir meselä seredeliň, ýagny goý gurluşyk guramasy n-dürli senagat gurluşuk binalaryny galdyrmak üçin tabşyryklary ýerine ýetirýän bolsun. Gurluşygyň binalarynyň j-nji görnüşi islendik bir tehnalogiki shemada ýerine ýetirilýän bolsun. Eger l-nji binany s-nji tehnalogiki shemada ýerine ýetirilýän bolsa onda serişdeleriň çykdajylarynyň ululygy - a_{ls}, netijede gurluşygyň guramasy C(x_{ls})-ululykda girdeýji almaga mümkinçilik berýän bolsun. Şeýle bir shemany saýlap almaly, haçan galdyrylan senagat binalary gurluşyk max girdeýji berýän bolsa, onda onuň max modeli

$$F(x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} C(x_{ls}) \to \max$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{k} a_{ls}^{j} x_{ls} \le b_j \qquad (j=\overline{1,m})$$

$$x_{ls} = \begin{cases} 1, \text{ eger } (l=\overline{1,n}) \\ 0, \text{ eger } (s=\overline{1,k}) \end{cases}$$

$$F(x)=\sum_{l=1}^{n} F_a(x)$$

görnüşde alynýar.

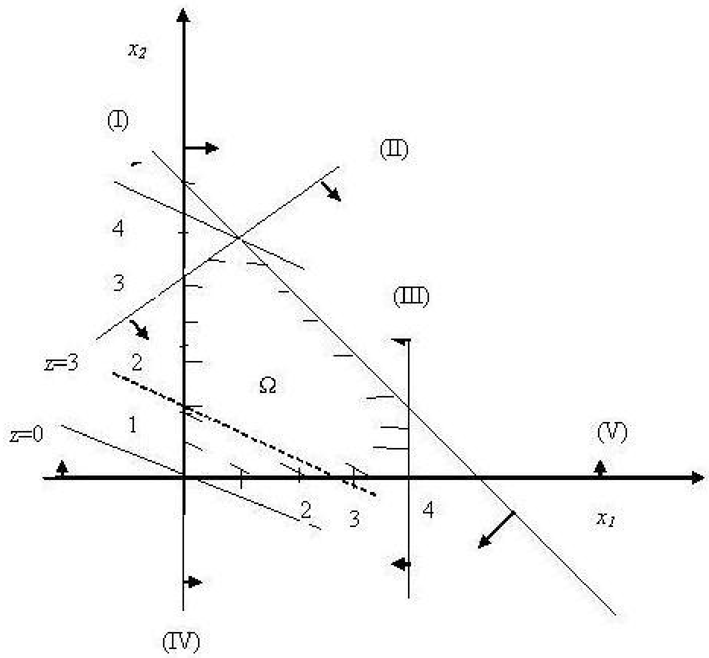
Görşümiz ýaly çyzgylaryň her birinde dürli görnüşler görkezilen. Ω- köpburçlugyň çäklendirilen ýapyk görnüşinde maximum hem minimum kesgitlenilýär. Haýsy hem bolsa bir tarapy çäklendirilmedik görnüşinde ýa maksimum kesgitlenilýär minimum kesgitlenilmeýär. Tersine minimum kesgitlenilýär maksimum kesgitlenilmeýär.

Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň grafik usul bilen çözülişi

Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň grafiki taýdan çözmeklik üçin ýokarda seredilen meselä görä grafik usul bilen çözmeklik üçin biz z=0 şertini maksat funksiýa görä goýup aýdyňlaşdyrmaklyk üçin tekizlikde E^2 Ω- köpburçluga seredip, onuň depelerini kesgitläliň we max, min bahalaryny tapalyň. Goý bize aşakdaky görnüşde mesele berlen bolsun.

$$z_{\max} = x_1 + 3x_2$$

$$\left.\begin{array}{lr} (I) & x_1 + x_2 \le 5, \\ (II) & -x_1 + x_2 \le 3, \\ (III) & x_1 \qquad \le 4, \\ (IV) & x_1 \qquad \ge 0, \\ (V) & x_2 \ge 0, \end{array}\right\}$$



1-nji surat

Eger-de biz $z=p_1x_1+p_2x_2$ deňlemä görä $z=p_1 \cdot p_2$ diýip alsak $p_1p_2=p_1x_1+p_2x_2$ bolup alsak.

$$\frac{p_1x_1}{p_1p_2}+\frac{p_2x_2}{p_1p_2}=\frac{p_1p_2}{p_1p_2}$$

$$\frac{x_1}{p_2}+\frac{x_2}{p_1}=1.$$

$$\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{5}=1$$

$$\frac{x_1}{-3}+\frac{x_2}{3}=1$$

bahany tapmak üçin (1)-(2) deňsizliklere hem-de (4) şerte (2)-(3) göz öňüne tutmak bilen tapmak bolýar. (1)-(2) degişlidir: biz bazis usulyny ulanyp, we goşmaça (2-3) şertler göz öňünde tutup, tükenikli ädimden soňra bu meseläniň optimal çözüwiniň bardygyny ýa-da ýokdugyny kesgitläp bilýäris. Şeýlelikde kwadrat programmirlemäniň meselesiniň çözüliş prosesi aşakdaky tapgyrlardan durýar:

1) Lagranžyň funksiýasyny düzmeli;
2) (1)-(2) görnüşde hökmany we ýeterlik şertini Lagranžyň funksiýasy üçin eýer nokatlaryň bardygyny görkezmeli;
3) Täzeden goşmaça girizilen bazisleriň üsti bilen onuň usulyny ulanyp, Lagranžyň funksiýasy üçin eýer nokatlaryň bardygyny hem-de onuň koordinatalaryny görkezmeli, eger-de ýok bolsa, onuň ýokdugyny görkezmeli.
4) Netijede meseläniň optimal çözüwini kesgitlemeli we maksat funksiýany tapmaly.

Separabel meselelere gelýän amaly meseleler.

Ykdysadyýetde wajyp meseleleriň içinde pudaklaryň kärhanalaryň olaryň bölümleriniň we bölümçeleriniň arasynda maýa goýumlaryň optimal bölünişiniň meselesi örän gyzykly meseledir.

Goý, bize aşakdaky görnüşde mesele berlen bolsun. Goý n dürli pudaklaryň ozone mahsus bolan önümleri öndürýän bolsun, maýa goýumlaryň peýdalylygy j-njy pudagyň girdeýjisiniň q_j-ulülyga baglylykdaky funksiýasy bilen kesgitlenilýär. C-ululygy ýagny serişdeleri pudaklar arasynda şeýle bölünmeli, netijede jemi alynýan peýda max bolmaly, eger bu funksiýa çyzykly bolsa, onda biz çyzykly programmirlemäniň meselesini alýarys, ýagny bize belli bolan:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} q_j(x_j) \to \max \qquad (5)$$

§6. Şekillendirilen kwadrat programmirlemäniň meselesi üçin Lagranžyň funksiýasy

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_k x_j + y_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

eger-de

$$L = (y_0, x_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$$

eýer nokatlary bolsa, onda bu nokatlarda ýokardaky gatnaşyklar ýerine ýetýär. Egerde biz goşmaça täze näbelliler girizsek, ýagny V_j, W_i deňsizlikleri deňlemä öwürip kwadrat programmirlemäniň meselesiniň matematiki modellerini aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + V_j = 0 \quad (j = \overline{1,m}) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} - W_i = 0 \quad (i = \overline{i,m}) \qquad (2)$$

$$x_j^0 V_j = 0 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$y_i^0 \; W_i = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$

$$x_j^0 \geq 0, \; V \geq 0, \; W_i \geq 0, \; y_i^0 \geq 0$$

Ýokarda berlen kwadrat programmirlemäniň meselesini çözmek üçin (1)-(2) ýerine täzeden alynan (1) we (2) sistemanyň oňyn çözülişini kesgitlemeli. Ol bolsa (3) we (4) şertleriň kanagatlandyrýan ýagdaýynda kesgitlemeli. Bu çözüw bolsa goşmaça näbellilerini ýagny bazisi girizip, onuň usulyny peýdalanyp bu meseläniň çözüwini peýdalanyp bolýar, egerde maksat funksiýa

$$F = \sum M y_i - \max$$

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$-x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_2 = 8$$

Bu ýerden

$$x_2 = 4, \;\; x_1 = 1.$$

Şeýlelikde

$$z_{\max} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 13.$$

§6. Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň Simpleks usuly bilen optimal çözülişi

Goý, bize başlangyç mesele ýa-da çyzykly z funksiýa

$$z = p_1 x_1 + ... + p_n x_n \quad (1)$$

we oňa degişli çäklendirmeler ulgamy berlen bolsun:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le a_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m \end{array}\right\} \quad (2)$$

bu ýerde $x_1, x_2, ..., x_n$ önümleriň görnüşleri; $p_1, p_2, ..., p_n$ önümleriň bir birligini ýerleşdirmegiň bahalary islendik belli hakyky sanlar (bahalar).
p_j koeffisiýentler ***n*** ölçegli ýewklid giňişliginde baha $\overline{p}(p_1,..., p_n)$ wektoryny, x_j - üýtgeýänler $\overline{x}(x_1,...,x_n)$ wektory kesgitleýänligi üçin *z* funksiýa $\vec{p}$ baha wektory bilen gözlenýän $\vec{x}$ wektoryň skalýar köpeltmek hasyly görnüşinde

$$z = \overline{p} \cdot \overline{x}$$

ýaly hem aňladylyp biliner. Bu funksiýa maksatlaýyn ýa-da baha funksiýasy – meseläniň funksionaly diýip atlandyrylýar.

Ulgamdaky $a_1, a_2, ..., a_m$ – sanlar resurslaryň görnüşlerini aňladýarlar; a_{ij} – ykdysady-tehnologik koeffisiýent bolup ***j*** önümi öndürmekde sarp edilýän ***i*** görnüşli resursy kesgitleýär.

§5. Kwadrat programmirleme meselesi we onuň matematiki modeli

Kesgitleme 1. $x_1, x_2, ..., x_n$ näbellilere görä kwadrat görnüşli diýlip, ol näbellilere göräsan funksiýasyna aýdylýar we aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$F(x) = C_{11}x_1x_1 + C_{12}x_1x_2 + C_{13}x_1x_3 + ... + C_{21}x_2x_1 +$$
$$+ C_{22}x_2x_2 + ... = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_k x_{x_j}$$

Kesgitleme 2. F(x) kwadrat görnüş oňyn däl diýlip aýdylýar, eger islendik $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlanan näbellileriň bahasy üçin hemme näbellileriň bahasy bir pursatyň özünde 0-a deň däldir.

Teorema. *Kwadrat görnüş güberçek funksiýa bolýar, eger ol oňyn ýarym kesgitlenen bolsa we oýuk funksiýa bolýar, eger ol oňyn däl ýarym mesele bolsa.*

Kesgitleme: F(*x*) funksiýanyň bahasynyň max hem-de min bahasyny kesgitlemekden durýar, eger ol aşakdaky şertleri ýerine ýetirýän bolsa:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_k x_j \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (3)$$

wektor bar bolup, $y_i^0 \ge 0$ *bolsa,* (X_0, Y_0)*-Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokatlary bolsa.*

Eger f(x), g(x) funksiýalar üznüksiz differensirlenýän bolsalar onda teorema 2 analitik aňlatmalar bilen doldurylan bolmagy mümkin, ol bolsa öz gezeginde Lagranžyň funksiýasynyň (X_0, Y_0) nokatlarda eýer nokatlaryň bolmagyny kesgitlenen hökmany şertidir hem ýeterlikdir.

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0 \ (j = \overline{1,n}) \tag{6}$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \tag{8}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} \ge 0 \ (i = \overline{1,m}) \tag{9}$$

$$y_i \frac{\partial L_0}{\partial_i} = 0 \tag{10}$$

$$y_i^0 \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}) \tag{11}$$

Çyzykly maksatnamalaşdyrma umumy goýluşda $a_1, a_2, \ldots, a_m$ çäklendirmeler bilen alynýar. Emma ykdysady meseleler çözülende üýtgeýänlere

$$x \ge 0 \tag{3}$$

şert goýulýar. Şeýle hem bolsa meseleler çözülende üýtgeýänler otrisatel bahany hem alyp bilerler.

(1), (2), (3) şertler bilen kesgitlenýän meselä çyzykly maksatnamalaşdyrmanyň meselesi, formulalara bolsa ol meseläniň modeli diýilýär.

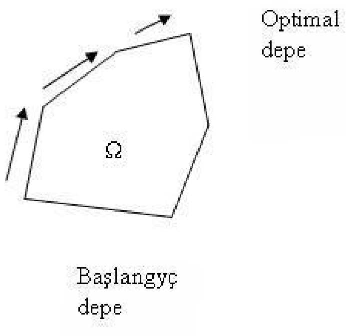
Biziň esasy meselämiz Z funksionala min ýa-da max baha berýän we (2) deňsizlikleri ýerine ýetirýän $\overline{x}(x_1, \ldots, x_n)$ wektory kesgitlemekden ybaratdyr.

Deňsilikleriň (2) ulgamy E^n giňisliginde Ω güberçek köpgranlygy kesgitleýär we ol köpgranlygyň bir depesinde Z funksional minimum ýa-da maximum baha eýe bolýar.

Eger-de bu köpgranlyk boş bolsa, ýagny bir nokady hem özünde saklamasa, onda meseläniň çözüwi ýok.

Eger-de bu köpgranlyk boş bolmasa we diňe bir nokatdan durmaýan bolsa, onda bu köplük (2) şerti kanagatlandyrýar we Z funksionaly belli bir baha eýe edýän nokatlaryň tükeniksiz sanysyny özünde saklaýar. Olaryň içinden Z funksionalyň min ýa-da max bahasyny kesgitleýän nokadyny tapmaly Z funksionalyň min we max bahalarynyň bu köplügiň araçäklerinde kesgitleýänligi üçin önümleri ulanyp bolmaýar). Bu ýagdaý hem bize köpgranlygyň hemme nokatlaryny optimallyga derňemän, eýsem diňe onuň depelerinde bu işi ýerine ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde simpleks usul bilen meseläni çözmekligiň esasy ideýasy aşakdakydan ybaratdyr: köpgranlygyň haýsy hem bolsa bir depesini alyp ondan bize gerek bolan depä çenli gidýäris.



Bu ideýany amala aşyrmak üçin başlangyç depäni almaklygy öwrenmeli, soňra ondan başlap depeden-depä geçip, her gezek optimuma ýakynlaşmagyň usulýetini tapmaly.

Ilki bilen (2) ulgamdaky her bir deňsizligi -1 sana köpeldip, olaryň garşylykly alamatyny alarys. Azat agzalary deňsizligiň çep bölegine geçirip, olary $\mathbf{y_i}$ bilen belgiläliň:

Tablisa 1

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	a_m
$Z=$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Bu tablisada çyzykly maksatnamalaşdyrma başlangyç meselesiniň hemme şertleri ýerleşdirilendir. Eger-de x_j üýtgeýänlere $x_j \geq 0$ şertler goýulan bolsa, onda soňraky işleri 1-nji tablisa bilen başlamaly. Eger-de x_j ululyklara otrisatel bolmazlyk şert goýulmadyk bolsa, onda 1-nji tablisa 2-nji tablisa özgerdilýär.

Goý, x_j-ler üçin $x_j \geq 0$ şert goýulmadyk bolsun we (2) ulgamda **m>n** hem-de deňlemäni $(a_{ij})_{m\times n}$ matrisasynyň rangy **n**

Netije. (10-12)-ä güberçekligi ýa-da oýuklygy dine $g_i(x)$ görä, haçan f(x) bilen, $g_i(x)$ funksiýalar bir wagtyň özünde oýuk hem-de güberçek bolmasa.

Teorema1. *islendik lokal max(min) güberçek programmirlemäniň meselesi bolsa onda ol şol bir wagtyň özünde global hem bolýar. Teoremanyň subudy güberçekligiň hem oýuklygyň üsti bilen ýönekeýje subut edilýär.*

Kesgitleme 5: (1-3) programmirlemäniň meselesinde Lagranžyň funksiýasy diýlip, aşakdaky funksiýa aýdylýar:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} y_i[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

Nirede $y_1, y_2, ..., y_m$ - Lagranžyň köpeldijisi.

Kesgitleme 6: $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ nokatlara Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokatlary diýilýär.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \leq L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \leq$$
$$\leq L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, ..., y_m)$$

Eger aşakdaky şertler ýerine ýetýän bolsa:

$$x_j \geq 0 \quad we \quad y_i \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m})$$

Teorema 2. *(Kun-Tekkeiň) (10-12) üçin mümkin bolan (rugsat edilen) çözüwleriň köplügiň kadalaşdyrma häsiýetine eýe bolýan bolsa, onda* $X_0 = x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ *nokatlaryň optimal nokatlar bolýar, ýagny optimal meýilnamasy bolýar, haçan* $Y_0 = y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0$

§4. Güberçek programmirlemäniň meselesi

Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň meselesi berlen bolsun, ýagny

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \qquad (1)$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m}) \qquad (2)$$
$$x_j \ge 0 \qquad (3)$$

Bu meseläni çözmek üçin belli bir ýol ýokdur.ýöne f(x), g(x)-goşmaça çäklendirmeler goşulyp, birnäçe deňlemeler synpyna görä örän oňat çözmek bolýar. Meselem, f(x) funksiýa güberçek we çözüwi bar bolan ýaýlasy güberçekdir (oýukdyr).

Kesgitleme1: x güberçek köplükde berlen f(x)-güberçek diýilýär, eger islendik nokatlar şol x-dan bolup, islendik λ üçin aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetýän bolsa

$$(0 \le \lambda \le 1)$$
$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1) \qquad (4)$$

Kesgitleme2: Eger x güberçek köplükde berlen f(x) funksiýa oýuk diýilýär, eger islendik 2 nokatlar şol x-dan bolup, islendik λ üçin aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetýän bolsa, $(0 \le \lambda \le 1)$

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \ge \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1) \qquad (5)$$

Kesgitleme3: (1-3) deňligiň mümkin bolan (rugsat edilen) çözüwi kadalaşdyrma şerti kanagatlandyrýar diýilýär, eger iň bolmanda ýeke-täk x_i nokat bar bolup, mümkin bolan ýaýlasyna degişli bolsa we $g_i(x) \le b_i$ deňsizligi ýerine ýetýän bolsa, onda ol kadalaşdyrylandyr.

Kesgitleme4: (10-12)-ä güberçek meselesi diýlip aýdylýar, eger f(x) funksiýa anyk (güberçek), g(x) tersine güberçek (oýuk) bolsa.

bolsun. Onda **n** – yzygiderlikli ädimiň kömegi bilen 1-nji tablisa 1a tablisa özgerdiler (ýokarky setire **n** sany $\mathbf{y_i}$ –leri geçireris).

Tablisa 1a

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
$x_n=$	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}	b_n
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}	b_m
$Z=$	q_1	q_2	...	q_n	Q

Bu tablisada çepde ***n*** sany ***x***-ler, **(*m*-*n*)** sany ***y***–ler, ýokarda bolsa ***n*** sany ***y***-ler ýerleşer. ***Z*** setir hem özgerer: täze ***q*** koeffisiýentler we ***Q*** azat agza emele geler.

1a tablisada ýokarda ***n*** setiri alyp ***y***-leriň üsti bilen aňladarys:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - ... - b_{1n}y_n + b_1; \\ x_2 &= -b_{21}y_1 - b_{22}y_2 - ... - b_{2n}y_n + b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 - ... - b_{nn}y_n + b_n; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Eger-de **y** –leriň bahasyny hasaplap, olary (4) ulgamda ornuna goýsak, onda **x** –leriň gözlenýän bahalaryny alarys. Şonuň üçin hem tablisanyň bu bölegi meseläniň çözüwiniň soňunda peýdalanylýar. Ýokardaky **n** setiri 1a tablisadan aýyrsak 2-nji tablisany alarys:

Tablisa 2

	$-y_1$	...	$-y_j$	...	$-y_s$	...	$-y_n$	1
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	...	$b_{n+1,j}$	...	$b_{n+1,s}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{is}	...	b_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	b_{r1}	...	b_{rj}	...	b_{rs}	...	b_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$Z=$	q_1	...	q_j	...	q_s	...	q_n	Q

Bu tablisada çyzykly maksatnamalaşdyrma meselesi täze görnüşde alynýar:

$$z = q_1 y_1 - q_2 y_2 - \ldots - q_n y_n + Q \qquad (5)$$

funksiýa we çäklendirmeleriň ulgamyndan şzgerdilip alynan deňsizlikleriň ulgamy alynýar:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = -b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \ldots - b_{in}y_n + b_i \geq 0 \\ (i = n+1, n+2, \ldots, m) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$$

Şeýlelikde (6) şertleri kanagatlandyrýan we (5) funksiýa min (ýa-da max) bahany berýän ***y***–leriň $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ toplumyny tapmak talap edilýär. Ähli ***m*** –lerden ***n*** sany ***y***–leri kesgitlemek gerek bolýar, galan ***m-n*** sany ***y***–ler öňküleri çyzykly baglydyrlar.

Meseläniň bu täze görnüşe getirilişiniň sebäbi y_j üýtgeýänler üçin otrisatel bolmazlyk şertiň alynmagydyr, başlangyç ***y*** –ler üçin bolsa bu şert aýdylmadykdyr.

2) Näbellilerden x we L köpeldijilerden λ_i hususy önümleri alyp, o-a deňläp almaly;
3) Emele gelen (8-9) çözüp, tapylan nokatlaryň meseläniň ekstremumyny kesgitlemeli. Tapylan nokatlaryň içinden max(min) nokatlary kesgitläp, optimal çözüwini tapmaly.

Bellik: Lagranžyň köpeldiji usulyny haçan

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$

$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m})$

ýagny näbellileriň, baglanyşyk häsiýeti şerti deňsizlik bolanda maksat funksiýany f(x) hiç hili şertsiz ekstremumyny kesgitleýäris, sonar bolsa 0-a deňläp hususy önümine görä onuň nokatlaryny kesgitläp şolaryň içinden g(*x*) g(*x*)<b koordinatalary tapyp, soňra

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n} \\ g(x) = b \end{cases}$$

Ýokardaky şerti kanagatlandyrýan nokatlary kesgitleýäris.
Deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlary tapyp, g(x)<b bolsa, şol deňsizligi kanagatlandyrýan edil şertsiz ekstremumy tapylyşy ýaly, soňky deňsizlige görä tapylan nokatlary derňemeli.

§3. Lagranžyň köpeldiji usuly

Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň esasy meselesiniň görnüşi berlen bolsun:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}) & (2) \\ x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}) & (3) \end{cases}$$

Bu meseläniň çözüwini kesgitlemek üçin täze näbelliler girizeliň: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Girizilen näbellilere Lagranžyň köpeldijileri diýilýär, onda ol näbellileri köpeldip, alynan funksiýa bolsa Lagranžyň funksiýasy diýilýär.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot [b_i - g_i(x_i, x_2, ..., x_n)] \quad (4)$$

Egerde biz Lagranžyň funksiýasynda degişlilikde hususy önümleri kesgitlesek onda biz (n+m) sany deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (5) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)] = 0 & (6) \end{cases}$$

Emele gelen (n+m) näbellilerden durian islendik sistemanyň (5-6) çözülişini kesgitlesek, onda f(x) funksiýanyň $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözülişi Lagranžyň usuly bilen optimal çözüwi bolýar. Lagranžyň köpeldijisiniň usuly bu optimal çözüwi bolýar. L köpeldijisiniň usuly bilen ekstremal nokatlary kesgitlemek aşakdaky punktlardan durýar.

1) Lagranžyň funksiýasyny düzmeli;

III Bap. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin we ulag meselesi

§1. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesi we onuň matematiki modeli

Bize belli bolşy ýaly islendik kärhana önüm öndürmek üçin özüne gerek bolan serişdeleri üpjün edýär. Soňra şonuň esasynda dürli görnüşli önümleri öndürip, gerek bolan ýa-da soralýan islegleri kanagatlandyrýar,

Biz ýokarda bu meselä görä çyzykly programmirlemäniň esasy görnüşine seredipdik. Ol degişlilikde,

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \quad (1)$$

Şeýle hem çäklendirmeler ulgamy:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (3)$$

Ýagny bar bolan *m* sany serişdäniň esasynda *n* dürli önümi öndirip çykarmaly diýen çyzykly programmirlemäniň meselesiniň umumy modeli.

Birnäçe ýagdaýlaryň esasynda kärhana öndürmeli bu önümleri öndürmän, özünde bar bolan serişdeleri ýokary bahada başga bir kärhana ýerleşdirip edil önümiň öndürilip çykarylan bahasyny talap edýär. 2-nji kärhana bolsa, bu serişdeleri mümkin boldugyça arzan almak isleýär.

Ykdysady tarapdan seredeniňde çyzykly programmirlemäniiň esasy meselesi, hojalygy meýilnamalaşdyrmakdan durýandyr. Hojalykda a_1, a_2, …, a_n serişdeleri bolsun. Olary onda *n*-dürli önümi çykarmak üçin ulanmaly. Her görnüşiň önüminiň x_1, x_2, …, x_n öndürijiligiň göwrümini kesgitlemeli. Şunlukda önümiň umumy bahasy

$$Z=p_1 x_2+p_2 x_2+\ldots+p_n x_n \qquad (4)$$

maksimal bolmaly. Çäklendirmeler ulgamy

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n \le a_m \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Bu yerde p_j j-nji önümiň birlik bahasy, a_{ij}-ykdysady tehnologiki koeffisiýent i-nji serişdäniň ulanmak bilen j-nji önümi öndürmekligiň normasy.

Ykdysady many boýunça ahli näbelliler otrisatel däl.

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n} \qquad (6)$$

Indi bolsa başdaky mesele boýunça başga ykdysady meselä seredeliň. Mysal üçin, haýsy hem bolsa bir kärhana satyn almakçy bolýar, hojalykda bar bolan ähli serişdeleri. Bu $u_1, u_2, \ldots, u_m$ optimal bahalary kesgitlemek zerur, bu şertden ugur alyp:

1) Serişdeleriň umumy bahasyny satyn alýan edara minimumlaşdyrmaga ymtylýar;
2) Ýöne her bir serişde üçin hojalyga bolmanda onuň taýyn önümi hökmünde aljak girdejisini tölemeli. Eger-de bolmanda hojalyga serişdeleri satmasa girdejili bolýar, ol öz öndürijiligini gurnap biler;
3) w-serişdelerň umumy bahasy öndürijilik bahasy bilen ýüze çykýar, olaryň bolan a_i we başga bahalar u_i

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_mu_m \qquad (7)$$

Alnan bütewi funksiýany minimallaşdyrmaly. Ikinji talap şu çäklendirmelere getirýär. Birinji önümiň birligine a_{11}

Emma $\varphi_i(x)$-iň kiçelmesi (3) şertleriň sygyşmazlygyna getirmeýär. Şeýlelikde, biz x^* nokada minimum alynýandygyna garşy geldik.

Teorema 3. Eger (2-4) meseläniň x^* lokal minimum nokadynda $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}, i \in \{1,\ldots,k\} \cup I(x^*) \equiv R(x^*)$ wektorlar ulgamy çyzykly bagly däl bolsa, onda şeýle gatnaşyk adalatly:

$$\nabla\varphi_0(x^*) + \sum_{i\in R(x^*)} \lambda_i \nabla\varphi_i(x^*) = 0, \qquad \lambda_i \ge 0, i \in I(x^*)$$

Deňsizlikler görnüşli çäklendirmeleriň ýagdaýynda „Teorema 3“ aňsat umumylaşdyrylýar.

Teoreme 4. $\lambda_0^* = 1, i < 0$ $\varphi_i(x^*) < 0$ bolanda $\lambda_i^* = 0$; $i < 0, \varphi_i(x^*) = 0$ bolanda $\lambda_i^* = 0$ bolan kesgitli $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}_{i=-m}^k$ üçin (8) deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan x^* nokadyň (2-4) lokal minimum nokady bolmagy üçin $L(x, \lambda^*) = \sum \lambda_i^*(\varphi_i(x))$

Lagranž funksiýanyň gessiýany x^* nokada položitel kesgitlenen matrisa bolmagy ýeterlik. Güberçek programmirlemäniň meselesiniň ýagdaýy üçin minimumyň ýeterli we zerur şertleri hakyndaky subut eden teoremalarymyz indiki paragrafda subut ediljek Kun-Takker teoremada has içgin seredilýär.

$$y=(y_{-m},...,y_{-1}); \lambda=(\lambda_{-m},...,\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_k).$$

$$L(x,y,\lambda)=\sum_{i=-m}^{-1}\lambda_i[\varphi_i(x)+y_i^2]+\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\varphi_i(x).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\sum_{i=-m}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=0,\ j=1,...,n. \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}=2\lambda_i y_i=0, i=-m,...,-1.$$

Hemme i üçin, $-m<=i<=-1$, ýa-da $y_i=0$ ýa-da $\lambda_i=0$. $y_i=0$ bolýan i indeksleriň $I(x)$ köplügine garaly, ýagny $i\in I(x)$ bolanda x nokada $\varphi_i(x)=0$. (5-7) mesele üçin minimumyň zerur şertleri aşakdaky mesele üçin minimumyň zerur şertleri bilen deň geler : $i\in\{1,...,k\}\cup I(x^*)$ üçin $\varphi_i(x)=0$ çäklendirmede $\min\varphi_0(x)$. Goý, x^* lokal minimumyň nokady bolsun. Eger $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}, i\in\{1,...,k\}\cup I(x^*)$ wektorlaryň ulgamy çyzykly bagly däl bolsa, onda $\lambda_0=1$ bolanda $i\in I(x^*)$ üçin otrisatel däl λ_i - leri almalydygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, goý $\bar{i}\in I(x^*)$ üçin $\lambda_{\bar i}<0,$` bolsun $\{\nabla\varphi(x^*)\}$ ortogonal bolan we şeýle bir $(\nabla\varphi_{\bar i},\eta)<0$ üçin η ugry saýlap alalyň, bu ýerde i-$\bar i$ - den başga $\{1,...,k\}\cup I(x^*)$ hemme bahalary kabul edýär. Onda şu ugur boýunça süşmede $\varphi_0(x)$ we şol bir wagtda $\varphi_{\bar i}(x)$ kiçelýär. Dogrudanda

$$(\nabla L(x^*),\eta)=\sum_{i\in\{1,...k\}\cup(I(x^*)/\bar i)}\lambda_i(\nabla\varphi_i(x^*),\eta)+(\nabla\varphi_0(x^*),\eta)+$$

$$+\lambda_{\bar i}(\Delta\varphi_{\bar i}(x^*),\eta)=(\nabla\varphi_0(x^*),\eta)+\lambda_{\bar i}(\nabla\varphi_{\bar i}(x^*),\eta)=0$$

we $\lambda_i<0$ sebäpli $(\Delta\varphi_0(x^*),\eta)<0$.

harajatlamaýan, birinji serişdäniň birliginiň u_1 bahasy bilen, a_{21} ikinji serişdäniň birliginiň u_2 bilen we ş.m., u_m m serişdäniň a_{mn} bahasy bilen. Ähli serişdeleriň bahasy *1,2,...,m* önüminiň birliginiň öndürijiligine gidip, şu aşakdaka deň bolar:

$$a_{11}u_1+a_{21}u_2+...+a_{m1}u_m\geq p_1.$$

Şuňa meňzeşlikde pikir ýöretsek, 2-nji, 3-nji we ş.m. önümiň görnüşleri üçin getirip bolar. Netijede deňsizlikleriň toparyny alýarys

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1+a_{21}u_2+...+a_{m1}u_m\geq p_1, \\ a_{12}u_1+a_{22}u_2+...+a_{m2}u_m\geq p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+....+a_{mn}u_m\geq p_n. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Ykdysady many boýunça gözlenilýän bahalar otrisatel däl:

$$u_1\geq 0, u_2\geq 0,...,u_m\geq 0. \qquad (9)$$

Deňsizlikleriň umumylygy (8), (9) we meseleleriň sistemasyny emele getirýär.

Matematiki formulany deňeşdireliň (1)-(3) formulasy bilen birinji mesele (4)-(6) ikinji.

1) Bir meselänin näbellileriniň sany beýleki deňsizlikleriň sanyna deňdir.
2) Çäklendirilmeler ulgamynyň koeffisiýentiniň matrisalary biriniň beýlekisinden transponirlemegi bilen bolýar.
3) Deňsizlikler ulgamynda çäklendirmleriň gapma-garşy manylary bar. (≤çalyşýar ≥) näbellileriň otrisatel dälligi bolsa saklanýar.
4) Çäklendirmeler ulgamynyň erkin agzalary bir meseläniňki beýlekiniň funksionalynyň koeffisiýenti bolýar, funksionalyň koefisiyenti bolsa çäklendirmeleriň erkin agzasyna öwrülýärler.

5) Bir meselede funksional maksimumlaşýar, beýlekide minimallaşýar. Çyzykly programmirlemegiň meselesini görkezilen häsiýetlere eýe bolan özara ikileýinlik diýilýär.

Olaryň biri esasy ya-da göni bolup durýar, beýleki oňa çatrymly ýa-da ikileýin. Göni mesele diýip biz birinjini hasap ederis. Göni meseläniň çäklendirmeler ulgamyna goşmaça näbellileri y_i girizmeli we şu aşakdaky görnüsde alarys:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + a_1 \ge 0, \\ y_2 &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n + a_2 \ge 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots. - a_{mn}x_n + a_m \ge 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Ikileýin meselede goşmaça näbellileri v_j (y) üsti bilen belläris:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{m1}u_m - p_1 \ge 0, \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{m2}u_m - p_2 \ge 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots. + a_{mn}u_m - p_n \ge 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Žordan jedweline göni meseläni alýarys.

Tablisa 1

Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	*1*
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Z=	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	*0*

Sebäbi ikileýin mesele şol bir öňki berilenler boýunça formirlenen, ony şol bir jedwelde girizip bolýar. (4), (5), (8)

$$\varphi_0 = (x^* + \eta) = L(x^* + \eta, \lambda^*) = \varphi_0(x^*) + (\nabla\varphi_0(x^*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^* \nabla\varphi_i(x^*), \eta) + \frac{1}{2}(H_{L(x,\lambda)}(x^*)\eta, \eta) + o(\|\eta\|^2). \qquad \nabla L(x^*) = 0,$$

$$(H_{L(x,\lambda^*)}(x^*)$$

položitel kesgitlenen matrisa bolany sebäpli,

$$\varphi_0(x^* + \eta) - \varphi_0(x^*) \ge \frac{1}{2} m\|\eta\|^2 + 0(\|\eta\|^2)$$

bu ýerde $m>0$ $(H_{L(x,\lambda^*)}(x^*)$ matrisanyň minimal hususy sany. Bu ýerden teoremanyň subudy gelip çykýar. Indi käbir çäklendirmeleriň deňsizlikler görnüşinde berilýän ýagdaýa geçeliň.

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1,\ldots,k; \qquad (2)$$

$$\varphi_i(x) \le 0, i = -m,\ldots,-1 \qquad (3)$$

çäklendirmelerde

$$\min\ \varphi_0(x) \qquad (4)$$

tapmaly. Täze $y_{-m}, \ldots, y_{-1}$ üýtgeýän ululyklary girizýäris we (19-21) meseläni şeýle ýazýarys:

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1,\ldots,k; \qquad (5)$$

$$\varphi_i(x) + y_i^2 = 0, i = -m,\ldots,-1 \qquad (6)$$

çäklendirmede:

$$\min \varphi_0(x) \qquad (7)$$

tapmaly. Lagranž umumylaşdyrylan düzgünine laýyklykda $L(x,y,\lambda)$ Lagranž funksiýasyny we (1) görnüşli deňlemeleri ýazarys. Bu ýerde:

biz $\varphi_{\upsilon}(x)$, $\upsilon = 0,1,...,k$ funksiýalaryň 2 gezek üznüksiz differensirlenmegini we aşakdaky kesgitleýjiniň noldan tapawutly bolmagyny talap etmeli:

$$
\begin{array}{l}
n\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x^*(h),\lambda(h))...\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*(h),\lambda(h)) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^*(h))...\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(x^*(h)) \\
:: \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(x^*(h),\lambda(h))...\frac{\partial^2 L}{\partial x^2{}_n}(x^*(h),\lambda(h)) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x^*(h))...\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(x^*(h))
\end{array}\right. \\
k\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^*(h))...\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x^*(h)) \\
::::::::::::::::::::::::::::::::::::: \\
\quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(x^*(h))...\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(x^*(h))
\end{array}\right.
\end{array}
$$

$n \times n$ ölçegli matrisanyň merkezi blogy x-e bagly bolan funksiýa görnüşinde seredilýän $L(x,\lambda)$ Lagranž funksiýanyň gessiýany bilen laýyk gelýär. Bu gessiýan minimumyň ýeterlik nyşanlarynda esasy rol oýnaýar. Indiki teorema adalatly:

Teorema 2. *(Şertli lokal minimumyň ýeterlik şerti). Kesgitli* $\{\lambda^*{}_i\}_{i=1}^{k} = \lambda^*$ *bahalarynda we 2 gezek üznüksiz differensirlenýän* $f^{\upsilon}(x)$ *funksiýalaryň* $(\upsilon = 0,1,...,k)$ *bahalarynda (1) deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan* x^* *nokadyň lokal minimumyň nokady bolmagy üçin* $L_{\lambda^*}(x) = L(x,\lambda^*)$ *funksiýanyň* x^* *nokatdaky gessiýanynyň položitel kesgitlenen matrisa bolmagy ýeterlikdir.*

Subudy: M_0 köplükde $\varphi_0(x) = L(x,\lambda)$ we hususy ýagdaýda $\varphi_0(x) = L(x,\lambda^*)$ deňlik adalatly. x^* nokadyň etrabynda $L(x,\lambda^*)$ funksiýany 2-nji tertipli kiçiler takyklykda dagydaly. Goý, $x^* + \eta \in M_0$ bolsun. Alarys:

aňlatmalary derňemek bilen bu maksat üçin ikileleýin meseleleriň garaşsyz u_i näbellilerini setir bilen ýazmaly däl-de, topbak edip ýazmaly. Her topragyň jedweliniň esasy böleginiň ýokarsynda bolsa mahsus bolan ikileýin meseläniň v_i näbellilerini goýaly, erkin agzalaryň topbagyny bolsa w funksionala geçireliň. Topbakda iň soňky kletkada garaşsyz näbelliler birlige goýýarys (jedwel z). Şonda ikileýin mesele jedweli şu aşakdaky yaly okalýar:

Tablisa 2

Ikileýin mesele		$v_1=$	$v_2=$	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	*1*
u_1	$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
....	...	...	...	...	...	...
u_m	$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
1	$Z=$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Topbagyň yokarsynda durýan koeffisiýentiň topbagynyň önünmleriniň summasyna deňdir, çepde durýan topbakdaky üýtgeýjilere mahsus bolan. Bu çäklendirmelere hem bitewi funksiýalara degişlidir.

Şu hili jedwelde iki hili mesele ýazylan-esasy hem ikileýin, şeýle hem ikileýin diýilýär.

Tablisa3

Ikileýin mesele		$v_1=$	$u_m=$	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-x_1$	$-y_2$	...	$-x_n$	1
u_1	$y_1=$	b_{11}	$-\frac{a_{12}}{a_{m2}}$	...	b_{1n}	b_1
u_2	$y_2=$	b_{21}	$-\frac{a_{22}}{a_{m2}}$	...	b_{2n}	b_2
....	...	...	...	...	...	...
v_2	$x_2=$	$\frac{a_{m1}}{a_{m2}}$	$\frac{1}{a_{m2}}$	...	$\frac{a_{mn}}{a_{m2}}$	$\frac{a_m}{a_{m2}}$
1	$Z=$	q_1	$-\frac{p_2}{a_{m2}}$	...	q_n	Q

güman edeliň. Goý, $F(h)$ – $\check{Z}_h$ meseläniň minimum nokadynda funksiýanyň bahasy bolsun. Onda

$$F(h)=\varphi_0(x^*(h))+\lambda_1(h)\left[\varphi_1(x^*(h))+h\right]+\sum_{i=2}^{k}\lambda_i(h)\varphi_i(x^*(h));$$

$$\frac{dF}{dh}(h_0)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}(x^*(h))+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x^*(h_0))\right]\frac{dx_j^*(h_0)}{dh}+$$

$$+\frac{d\lambda_1(h_0)}{dh}[\varphi_1(x^*(h_0))+h]+\lambda_1(h_0)+\sum_{j=2}^{k}\frac{d\lambda_j(h_0)}{dh}\varphi_j(x^*(h_0))=\lambda_1(h_0)$$

bu ýerde h_0 – käbir *0* etrapda erkin nokat. Şeýlelikde $\frac{dF}{dh}(0)=\lambda_1(0)=\lambda_1$. Ýokarda getirilenlerden biz indiki netijäni çykaryp bileris. Eger $\varphi_i(x)-h_i,\quad i=1,\dots,k$ çäklendirmelerde $\min\varphi_0(x)$ meseläniň funksiýasynyň optimal bahasy deňlikleriň ($h=\{h_1,\dots,h_k\}$ wektoryň) sag böleginden alnan $F(h_1,\dots,h_k)$ differensirlenýän funksiýa bolsa onda bu funksiýanyň $\hat{h}=\{\hat{h}_1,\dots,\hat{h}_k\}$ nokatdaky gradiýenti Lagranž köpeldijileriň $\{\lambda_1(h),\dots,\lambda_k(h)\}$ wektory bilen deň gelýär. Haýsy ýagdaýda teoremanyň şertleri ýerine ýetirilýär?

$\{\lambda_1(h),\dots,\lambda_k(h)\}$ we $x^*(h)$ baglylykda – aşakdaky deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan anyk däl funksiýalardyr:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}(x)=0;\ j=1,\dots,n. \qquad (1)$$
$$\varphi_i(x)+h_i=0; i=1,\dots,k.$$

Anyk däl funksiýalar baradaky teorema esasynda berlen nokada anyk däl funksiýa boýunça önümleriň bar bolmagy üçin deňlemeleriň çep bölegininiň hemme üýtgeýän ululyklary boýunça üznüksiz differensirlenmegi we baglanyşdyrýan üýtgeýän ululuklary boýunça ýakobiýan noldan tapawutly bolmagy zerur. Şeýlelik bilen, (1) – iň formal differensirlenme mümkinçiligi üçin

§2. Çyzykly däl programmirlemede Lagranjyň köpeldijileriniň umumylaşdyrylan düzgüni

Teorema1. Eger $\varphi_0(x)$ funksiýanyň $\varphi_i(x)=0$ giperüstüň kesişmesinde x^* minimum (maksimum) nokady bolsa, E_n-de $\varphi_v(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýalar, $v=0,1,\ldots,k$, onda

$$\sum_{v=0}^{k}\lambda_v\nabla\varphi_v(x^*)=0$$

kanagatlandyrýan ählisi nola deň bolmadyk $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sanlar bardyr. Eger $x_0\neq 0$ bolsa onda $\overline{\lambda_i}=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}$ ululyklara meseläniň Lagranž köpeldijileri diýilýär.

$$L(x,\lambda)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i(x)$$

funksiýa Lagranž funksiýasy diýilýär. M_0 ýaýlasynda Lagranž funksiýanyň bahasy $\varphi_0(x)$-iň bahasy bilen deň gelýär. Z_n meseläniň maşgalasyna garaly:

$$\min\varphi_0(x),$$
$$\varphi_1(x)+h=0,$$
$$\varphi_i(x)=0; i=2,\ldots,k,$$

Z_0 mesele bilen x deň gelýär. Z_0 mesele Lagranžyň köpeldijilerine eýe diýip, şeýle hem $\lambda(h)$ Lagranž köpeldijileri we z_n meseläniň $x^*(h)$ çözüwi käbir O etrapda h boýunça differensirlenýän diýip

§2. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň optimal çözülişi barada teoremalar

Teorema 1. *Eger ikileýin meselelerinden biriniň optimal çözgüdi bar bolsa, onda onuň beýlekisiniň hem ekstremal aňlatmalary olaryň funksionaly gabat gelýär. max z = min w.*

Eger-de bir meselede funksional çäklendirilmedik bolsa, onda oňa ikileýin mesele gapma-garşydyr.

Subudy. Ikileýin tablisa göni we ikileýin meseläni ýazalyň we modifisirlenen žordan aýyrmalarynyň ädimini edeliň, tä göni meseläniň optimal meýilnamasyny alýançak. Netijede birinji tablisa geleris, onda b_i-niň ähli erkin agzalary we z setiriň ähli koeffisiýentini q_j otrisatel däl $b_i\geq 0,\ q_j\geq 0;$ meýilnama

$y_1=\ldots\ y_s=x_{s+1}=\ldots=x_n=0$ optimal $z=Q$ maksimal aňlatmasy.

Tablisa 1

Ikileýin mesele		$u_1=$	...	$u_s=$	v_{s+1}	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-y_1$	…	$-y_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$	*1*
v_1	x_1	b_{11}	...	b_{1s}	$b_{1,s+1}$	...	b_{1n}	b_1
....	...	...	...	....		...	...	...
v_s	x_s	b_{s1}	...	b_{ss}	$b_{s,s+1}$	...	b_{sn}	b_s
u_{s+1}	y_{s+1}	$b_{s+1,1}$	...	$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	...	$b_{s+1,n}$	b_{s+1}
....	...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	y_m	b_{m1}	...	b_{ms}	$b_{m,s+1}$	...	b_{mn}	b_m
1	*Z=*	q_1	…	q_s	q_{s+1}	...	q_n	Q

Indi bolsa ikileýin meselä ýüzleneliň. Oňa degişli näbellileri nola deňläliň, topbagyň çepinde durýanlar.

$$v_1=\ldots=v_s=u_{s+1}=\ldots u_m=0.$$

Onda ýokarky bäş setirdäki üýtgeýjilere deň bolar.

$$u_1=q_1,\ldots,\ u_s=q_s,\ v_{s+1}=q_{s+1}\ldots\ v_n=q_n$$

q_i ähli koeffisiýentleriniň otrisatel däldigi sebäpli şu hili meýilnama bolup biler. Ikileýin meselede garaşsyz üýtgeýjileriň nula deňleşdirilen. Ýagny bu meýilnama (opornyý) berk, geometrik çözgütleriň köptaraplylygynyň depesini görkezýär. Şunuň ýaly meýilnamalaryň içinde optimalyny gözlemeli.

1-nji tablisadan ikileýin meseläniň funksionalyny ýazyp alalyň:

$$w=b_1v_1+\ldots+b_s\ v_s+b_{s+1}\ \ u_{s+1}\ldots+b_mu_m+Q$$

1-nji tablisada erkin agzalaryň otrisatel däldigi alnypdyr. $b_i\geq 0$ v we u üýtgeýjiler bolsa ikileýin meseläniň manysy boýunça otrisatel däl $b_{is}\ v_i$ we $b_{js}\ u_j$ görnüşlerin ugaşmalary otrisatel däl we olaryň ähli jemi

$$b_iv_i+\ldots+b_sv_s+b_{s+1}\ u_{s+1}+\ldots+\ \ b_m\ u_m$$

dürli goýberilýän meýilnama üçin otrisatel däl. Bu jem erkin Q agzasyna goşulýar we w minimumy gazanmak üçin mümkin boldugyça azaltmaly. Otrisatel däl sanlaryň içinde iň azy nul. Bizi gyzyklandyrýan jem nula deň bolar ýaly her bir goşmaçalara girýän v we u üýtgeyjileri deňleşdirmek ýeterlikdir.

Şeýlelikde, ikileýin meseläniň meýilnamasy 1-nji tablisadan alnyp gyraky üýtgeýän nula deňeşdirmek arkaly ol funksionala minimumy berýär, ol optimal. Eger-de b_i-niň erkin agzalarynyň arasynda nul bar bolsa, onda oňa gabat gelýän gyraky üýtgeýjiler nuldan ulaldylyp biliner, belli bir aňlatma çenli we funksionalyň

seredeli. Bu funksiýa üznüksiz differensirlenýän we $t=0$ bolanda minimuma öwrülýär. Minimumyň zerur şertinde (6)-y kanagatlandyrýan erkin

$$\left\{\frac{\partial x_j}{\partial t_l}\right\}$$

üçin

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t_l}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j}(x^*)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_l}(0)=0, l=1,\ldots,n-k,$$

gelip çykýar. Bu ýerden:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(x^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^*),\ j=1,\ldots,n$$

ýa-da wektor formulada:

$$\nabla\varphi_0(x^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla\varphi_i(x^*) \tag{7}$$

kanagatlandyrýan $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ tapyljakdygy gelip çykýar. Bu Logranž köpeldijileriniň belli düzgünidir. Ol $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}_{i=1}^{k}$ wektorlaryň çyzykly bagly dälligi esasynda subut edilen. Eger şeýle bolmasa, onda

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla\varphi_i(x^*)=0 \tag{8}$$

kanagatlandyrýan ählisi nola deň bolmadyk $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ bardyr.

tapmaly. M_0 bilen (5) kanagatlandyrýan nokatlaryň toplumyny belgileýäris. Goý, $\varphi_\nu(x), 0 \le \nu \le k$ üznüksiz differensirlenýän x^* - minimum nokady , $k<=n$,

$$\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^*) \right\|_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,k}$$

matrisanyň rangy k deň bolsun. Onda M_0 köpgörnüşlilik x^* nokadyň etrabynda anyk däl funksiýalar hakyndaky teorema laýyklykda aşakdaky görnüşde bolup biler.

$$x_J = x_J(t_1,\dots,t_{n-k}),$$

bu ýerde

$$x_j(t_1,\dots,t_{n-k})$$

üznüksiz differensirlenýän funksiýalar we

$$x_J^* = x_J(0,\dots,0), \ \ (j=1,\dots,n)$$

bolýandygyny hasap etmek bolar.

$$x_J = x_J(t_1,\dots,t_{n-k})$$

üçin aňlatmany (5)-de goýaly.

$$\Phi_i(t_1,\dots,t_{n-k}) = \varphi_i(x(t_1,\dots,t_{n-k})) \equiv 0;$$

$$x(t_1,\dots,t_{n-k}) = \{x_1(t_1,\dots,t_{n-k}),\dots,x_n(t_1,\dots,t_{n-k})\}$$

bu ýerden

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x^*) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_l}(0) = 0, \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,k; \\ l=1,\dots,n-k. \end{matrix} \qquad (6)$$

soňra

$$\Phi_0(t_1,\dots,t_{n-k}) \equiv \varphi_0(x(t_1,\dots,t_{n-k}))$$

ululygy we ýagdaýda üýtgemeýär. Bu ýagdaýda ikileýin meselede optimal meýilnamalar köp we minimum we maksimum şol bir Q erkin agzasyna deň dolup durýar. Bu gutarnykly teoremanyň birinji bölegini subut edýär.

Goý indi göni meselede z funksional çäklenen däl.

Algebraik bu aňladýar, daýanç meýilnamaýň 1-nji tablisasynyň sütünleriniň, topbaklaryň birinde bolmaly, s ütunde q_s koeffisiýent otrisatel , beýleki koeffisiýentler bolsa položitel däl.

$b_{is} \le 0$, $i=1, 2, \dots, m$. Sütün s çözgütli, ýöne onda aýgytly l element saýlap bolmaýar we meýilnamanyň gowulaşmagy üçin hasabatdaky ädim etmek bolanok.

Ikileýin meselede ýagdaýa seredip geçeliň. Munuň üçin u_s üýtgeýjiniň aňlatmasyny ýazalyň. Şeýle şowsuz sütüne baş bolýar, gyraky üýtgeýjileriň üstünden:

$$u_s = b_{is} v_1 + \dots + b_{ss} v_s + b_{s+1,s} u_{s+1} + \dots + b_{ms} u_m + q_s.$$

Bu aňlatmanyň sag böleginde v we u üýtgeýjileri otrisatel däl, b koeffisiýenti z bolsa položitel däl. Şeýle ululyklaryň köpeltmesi, ýagny b_{is}, v_i ýa-da b_{js}, u položitel däl, şeýle kopeltmegiň jemi

$$b_{1s} v_1 + \dots + b_{ss} v_s + b_{s+1,s} u_{s+1} + \dots + b_{ms} u_m \le 0.$$

Şeýle hem bu jemi nula getirip bolýar, onuň üçin nula degişli v we u üýtgeýjileri deňlemeli.

Ýöne şonda hem üýtgeýji u_s otrisatel bolar, sebäbi $u_s=q_s$, $q_s \le 0$ bolar. Sag bölekde nuluň ýerine dürli bir üýtgeýjiniň berilmegi položitel aňlatmagy diňe ýagdaýy ýaramazlaşdyrýar. Meseläniň şertine görä bu üýtgeýjiler şol sanda üýtgeýjisi otrisatel däl ýokarky u_s üýtgeýjini alyp bolmaýar:

s-ikileýin meseläniň çäklendirmeler sistemasynyň deňsizligi kanagatlandyrmaýar, sistema gapma-garşy, meseläniň ýolbererlik çözgüdi ýok. Teorema doly subut edildi.

Eger-de göni mesele gapma-garşy bolsa, onda oňa ikileýin çäkli däl funksional bolmak hökman däl. Ol hem gapma-garşy bolup biler.

Mysal. Bu teoremany aşakdaky ýaly mysal bilen görkezeliň.

Goý, göni meseläniň görnüşi bar bolsun: funksiýanyn maksimumyny tapmaly.

$$z= 12x_1+6x_2-7x_3$$

Şu sertlerde

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 \le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 \le 11, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3 \end{array}\right\}$$

Ikileýin mesele şeýle formulalaşdyrylýar: fuinksionalyň minimumyny tapmaly

$$w=5u_1+12u_2+8u_3+11u_4$$

Çäklendirilmelerde

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 \ge 12, \\ u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 \ge 6, \\ -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 \ge 7, \\ u_i \ge 0, \; i = 1,2,3,4. \end{array}\right\}$$

Meselelerde goşmaça üýtgeýjileri girizeliň:

IX Bap. Lagranjyň köpeldijileri we kwadrat programmirleme meselesi

§1. Lagranjyň köpeldijileriniň häsiýetleri

Goý, E_n – n ölçegli ýewklid giňişligi,

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1,...,x_n), i \in j - M \subseteq E_n$$

bölek köplükde kesgitlenen üznüksiz funksiýalar bolsun. Adatça biz $\varphi_i(x)$ endiganlygyň belli bir şertlerini kanagatlandyrýar, meselem M köplügiň hemme içki nokatlarynda üznüksiz differensirlenýär diýip güman ederis. Bu paragrafda çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesini aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$\varphi_i(x) \le 0; i = -m,...,-1 \quad (1)$$

$$\varphi_i(x) = 0; i = 1,...,k \quad (2)$$

şertlerde

$$\min_{x \in M} \varphi_0(x) \quad (3)$$

tapmaly.

$$M \equiv E_n, m = 0$$

ýagdaýa seredeliň. Ýönekeý meseläni alarys:

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1,...,k \quad (4)$$

$$\min \varphi_0(x) \quad (5)$$

z_1 daýanç nokada seredeliň $\int(O(z_1)) \le k$ onda induksiýanyň mümkinçiligi bilen:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i z^i, \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1, \qquad \beta_i \ge 0$$

$z^{(i)}$ –grany nokatlar. w_1

$$x = \sum_{i=0}^{k+1} \beta_i^1 z^i, \beta_i^1 \ge 0, \sum_{i=0}^{k+1} = 1$$

teorema subut edildi.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \ -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \ge 0, \\ y_2 &= -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \ge 0, \\ y_3 &= \ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \ge 0, \\ y_4 &= -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Şeýlelikde

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \ge 0, \\ v_2 &= u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \ge 0, \\ v_3 &= -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \ge 0. \end{aligned}\right\}$$

Ilki meseläni ikileýin tablisa ýazalyň (2-nji tablisa) we göni meselä modifisirlenen žordan aýyrmasyndan iki ädim etmeli, optimumyny almak üçin (3-nji, 4-nji tablisa).

Tablisa 2

Ikileýin mesele		*v_1=*	*v_2 =*	*v_3=*	*W=*
	Göni mesele	*-x_1*	*-x_2*	*-x_3*	*1*
u_1	*y_1=*	$\boxed{1}$	*1*	*- 1*	*5*
u_2	*y_2=*	*2*	*4*	*-5*	*12*
u_3	*y_3=*	*1*	*-3*	*1*	*8*
u_4	*y_4=*	*2*	*8*	*-1*	*11*
1	*z=*	*-12*	*-6*	*7*	*0*

Tablisa 3

Ikileýin mesele	Göni mesele	$u_1=$ $-y_1$	$v_2=$ $-x_2$	$v_3=$ $-x_3$	$w=$ 1
v_1	$x_1=$	1	1	-1	5
u_2	$y_2=$	-2	2	-3	2
u_3	$y_3=$	-1	-4	2	3
u_4	$y_4=$	-2	6	$\boxed{1}$	1
1	$z=$	12	6	-5	60

Tablisa 4

Ikileýin mesele	Göni mesele	$u_1=$ $-y_1$	$v_2=$ $-x_2$	$u_4=$ $-y_4$	$w=$ 1
v_1	$x_1=$	-1	7	1	6
u_2	$y_2=$	-8	20	3	5
u_3	$y_3=$	3	-16	-2	1
v_3	$x_3=$	-2	6	1	1
1	$z=$	2	36	5	65

4-nji tablisada ýokarky üýtgeýänleri göni meseläniň nuluna deňleşdirýäris we onuň optimal meýilnamasyny ýazyp alarys:

$$x_1=6,\ x_2=0,\ x_3=1,\ z_{max}=65,\ w_{min}=65.$$

Ikileýin mesele üçin nula gyraky üýtgeýjileri deňleýäris we iň soňky setirde tablisada ýokarkylaryň aňlatmasyny okaýarys. Esasy üýtgeýjilerin optimal aňlatmalary şu aşakdaky ýaly bolar:

$$u_1=2,\ u_2=u_3=0,\ u_4=5;$$

Munda funksionalyň aňlatmasy minimal we göni meseläniň

w_{min}=65 funksionalyň aňlatmasyna deň.

§10. Çyzykly däl programmirlemede güberçek köplükler teoremasy

Teorema1: *x nokadyň w köplügiň ahyrky nokady bolmaklygy üçin* $x \in w$*, hökmany we ýeterlik şerti, x – nokat aşakdaky görnüşde ýazmak bolmaýar.*

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 :\ x_1, x_2 \in w;\ \ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_{\mathrm{x}} \neq x;$$
$$0 < \alpha < 1; \qquad (1)$$

Subudy:

Goý *x (1)* görnüşde ýazmak bolýan bolsun. Onda onuň daýanjy *[x_1,x_2]* özünde ol kesimi saklaýar, onda ol bolsa *x* nokadyň ahyrky nokat däldigini görkezýär. Hökmany subudy ýerine ýetdi. Ýeterlik bolsa *w*-niň induksiýa möçberi bilen subut edilýär. Möçberiň *x* nokatdaky daýanjy iň bolmanda $\rho(w)$ haçan $\rho(w) \geq 1$ birlik kiçidir. Eger *x*-içki nokat bolsa onda ony *(1)* görnüşde ýazmak bolýar, eger *x* – gyraky bolsa onda *(1)*-de ýazmak bolmaýar.

Teorema2: *Güberçek ýapyk kesgitlenen w köplükde* $\forall\ x \in w$ *güberçek kombinasiýasy görnüşde* $\rho(w)+1$ *gezekden köp bolmadyk w köplügiň ahyrky nokady görnüsde ýazmak bolýar.*

Subudy: Induksiýanyň üsti bilen geçirmek bolýar. $\rho(w)=1$ teorema üçin aýdyň görünýär. Hakykatdan

$$\rho(w)=k+1$$

subut edip bolýar. Goý $x \in w$, z^0 gyraky nokat *w*. eger $x \neq z^0$, onda z^0 –dan *x* –üstünden şöhle geçirsek, onda ol *w* –nyň araçägini *z*, nokatda kesip geçýär. *X* nokat z^0, z_1 nokadyň arasyndan geçýär, ol bolsa aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$x = \alpha z^0 + (1-\alpha) z_1 \quad 0 \leq \alpha < 1$$

Teorema3: *Islendik içki x_0 nokat kesgitlenen ýaýlasy M güberçek funksiýa f(x) islendik ugur boýunça önümi bar bolmak* η. *Bu önüm aşakdaky formula boýunça hasaplanyp bolar.*

$$f'_{\eta}\ (x_0) = \max_{\nabla \in G(x_0)} (\nabla, \eta)$$

Hakyky funksiýa seredeliň.

$$u(t) = f(x_t + \eta t) - f(x_0)$$

Teorema4: *f(x) funksiýa güberçek bolmaklygy üçin E_n hökman we ýeterlik ugur boýunça önüm hemme nokatlarda bar bolsa özem* $f'_{\eta}(x + 1t\eta)$ *manoton kemelmeýän funksiýa t görä.*

Teorema 2. *Eger-de meseläniň optimal çözgüdi onuň çäklendirilmesini deňsizlige öwürýän bolsa, onda optimal meýilnamada ikileýin meselede gabat gelýän üýtgeýji nula deň.*

Eger-de optimal meýilnamaýň haýsyda bolsa bir komponenti položitel bolsa, onda ikileýin meseläniň gabat gelýän çäklendirme onuň optimal meýilnamasy bilen deňlige öwrülýär.

Şu getirilen mysalda göni meseläniň optimal meýilnamasy ikinji gezek üçünji şertlerini (*Q*) deňsizlige öwürýär.

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 < 12$$

$$6 - 3 \cdot 0 + 1 < 8.$$

§3. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň simpleks usuly bilen optimal çözülişi

Goý, çyzykly programmirleme meselesi bar bolsun: funksionalyň minimumyny tapmaly

$$z=p_1x_1+\ldots+p_jx_j+\ldots+p_sx_s+\ldots+p_nx_n+p \quad (1)$$

Çäklendirmeler ýerine ýetirilende:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = a_{11}x_1+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1s}x_s+\ldots+a_{1n}x_n+a_1 \geq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_i = a_{i1}x_1+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{is}x_s+\ldots+a_{in}x_n+a_i \geq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_r = a_{r1}x_1+\ldots+a_{rj}x_j+\ldots+a_{rs}x_s+\ldots+a_{rn}x_n+a_r \geq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_m = a_{m1}x_1+\ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{ms}x_s+\ldots+a_{mn}x_n+a_m \geq 0,\\
&x_j \geq 0, \quad j=1,2,\ldots,n.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

1-nji tablisada meseläni ýazalyň. Meseläniň meýilnamasyny öň bolşy ýaly, ýokarky üýtgeýji nula deňeşdirmek bilen gyrakylary bolsa erkin agzalary bilen. Bu funksionala degişli hem şonun üçin 1-tablisada

$$z=P \quad (3)$$

Goý

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \qquad \alpha_1+\alpha_2=1.$$

1-njini α_1, *2*-njini α_2 köpeldip alarys.

$$(\alpha_1+\alpha_2)[f(\varphi-f(x_0)]=f(x)-f(x_0)\geq$$
$$\geq(\alpha_1\overline{\nabla}_1+\alpha_2\overline{\nabla}_2, x-x_0), \Big|\overline{\nabla}_3=\alpha_1\overline{\nabla}_1+\alpha_2\overline{\nabla}_2$$

umumylaşdyrylan gradiýent. Bu bolsa $G(x_0)$ güberçekdigini aýdyňlaşdyrýar. Teorema subut edildi.

Teorema2: *Güberçek funksiýa M köplügiň hemme içki nokadynda üznüksiz we M köplükde kesgitlenendir.*
Hakykatdan: Goý x_0 nokat M köplügiň içki nakady bolsun. K ýokary kuba seredeliň x_0 içki nokat. $M_0 \in M$. $\bar{x}$ azat nokat $\in \mu$ ony äsakdaky görnüşde

$$\bar{x}=\sum_{j=1}^{s}\alpha_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{s}\alpha_j=1$$

$$\alpha_j \geq 0$$

f(x)–güberçekliginden gelip çykýar

$$f(\bar{x})\leq\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f(y_j)\leq\sum_{j=1}^{s}\alpha_j \max_{1\leq j\leq s} f(y_j)=\max_{1\leq j\leq s} f(y_j)$$

§9. Çyzykly däl programmirlemede güberçek funksiýalaryň häsiýetleri we teoremalary

I-Häsiýet: Eger güberçek köplügiň üstünde kesgitlenen güberçek funksiýa bolsa, onda ol güberçekdir.

Hakykatdan: Goý, $x_1 \in \mu$, $x_2 \in \mu$ onda

$$z_1 = \{f(x_1)x_1\} \in \mu_j, \qquad z_2 = \{f(x_2), x_2\} \in \mu_j ,$$

μ - kesgitlemesi boýunça μ_j güberçek köplük $\alpha \in [0,1]$, onda

$$\{z_\alpha = (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2), (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\} + \mu_j$$

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in \mu$$

onuň güberçekdigini subut edýär.

II-Häsiýet: $\forall \quad x_1, x_2 \in \mu \quad \alpha \in [0,1]$ üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr.

$$(1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) \geq f[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2]$$

Teorema1. *f(k) güberçek funksiýanyň G(x_0) umumylaşdyrylan gradiýent köplüginiň, x_0-nokatda boşdäl, kesgitlenen, güberçek we ýapyk islendik içki nokatlarynyň köplügi μ üçin.*

Hakykatdan: $\overline{\nabla}_1, \overline{\nabla}_2$ – umumylaşdyrylan gardiýent x_0 nokatda, onda islendik $x \in$ M üçin

$$f(x) - f(x_0) \geq (\overline{\nabla}_1; x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq (\overline{\nabla}_2; x - x_0)$$

Tablisa 1

Ikileýin mesele	x_1 ... x_j ... x_s ... x_n	*1*
$y_1=$	a_{11} ... a_{1j} ... a_{1s} ... a_{1n}	b_1
....	....	...
$y_i=$	a_{i1} ... a_{ij} ... a_{is} ... a_{in}	b_j
....	....	...
$y_r=$	a_{r1} ... a_{rj} ... a_{rs} ... a_{rn}	b_r
....	....	...
$y_{m=}$	a_{m1} ... a_{mj} ... a_{ms} ... a_{mn}	b_m
z =	p_1 ... p_j ... p_s ... p_n	p

Meýilnama goýberilip bilner, eger-de ähli erkin agzalar otrisatel bolmasa

$$a_i \geq 0, \ i=1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

Hasaplaýjy operasiýa hökmünde bu meseläni çözmek üçin žordan aýyrmalaryny peýdalanarys.

Meýilnamanyň optimal kriteriýalaryny kesgitleýäris

$$z' = P' = P - \frac{a_r}{a_{rs}} \cdot p_s$$

ýa-da

$$z' = z - \frac{a_r}{a_{rs}} \cdot p_s. \qquad (5)$$

Adaty žordan kesgitlemelerde başga tablisa geçmek üçin çözülýän setiriň elementleri çözülýän elemente bölünýärler we belgileri üýtgedýärler. a_r položitel erkin agzanyň ýerinde täze tablisada $\left(-\frac{a_r}{a_{rs}}\right)$ san bolup durýar. Alynýan meýilnamada bu san şeýle hem položitel bolmaly: $\left(-\frac{a_r}{a_{rs}}\right) > 0$ (bu bolsa öz gezeginde $a_{rs} < 0$ bolmagy talap edýär). Bu ýagdaýda $p_s > 0$ azalýar, $p_s=0$ üýtgewsiz galýar.

Mesele çözlende eger p_j ähli koeffisiýentleri položitel bolsa, bu ýagdaýda funksional beýgelýär. Ýagny tablisada funksionalyň aňladylyşy minimal, meýilnama bolsa optimal. P_j koefisiýentiň arasynda nuluň bolmagy bilen meýilnamany täze tablisa geçirilende üýtgedip bolýar, ýöne funksional öňki bolup galar. Bu ýagdaýda optimal meýilnamalar köpdür. Eger-de nuluň üsünde otrisatel elementler ýok bolsa, meýilnama ýeke-täk bolup galýar. Şeýlelik bilen minimum meselede optimal goýberilýän meýilnamanyň kriteriýasy bolup galýar. Şeýlelikde minimum meselede optimal goýberilýän meýilnamanyň kriteriýasy bolup, z setiriň koeffisiýenti otrisatel däldigi bolup durýar, erkin agzalardan başgasy.

$$p_j \geq 0, \quad j=1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

Ikileýin simpleks usulda meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlikde ýerine yetirilýär. Ilki bilen z setiriň koeffisiýentleriniň otrisatel däldigi alynýar, soňra bolsa erkin agzalaryň otrisatel däldigi alynýar. Munuň ýaly tertip üçin çözülýän elementiň saýlamynyň düzgünini esaslandyrmak gerekdir.

z-setirde p_s-nyň otrisatel koeffisiyentini kesgitlemeli. Eger-de a_{rs} elementi çözülýän diýip hasaplasak, onda adaty Žordan

$$\left(a, x - \bar{x}\right) = 0, \qquad \left(a \neq 0\right)$$

ýokary tekizlik bar bolup:

$$(a, k - \bar{x}) \leq 0 \text{ haçan } x \in w_1$$

$$(a, x - \bar{x}) \geq 0 \text{ haçan } x \in w_2.$$

$$\frac{x^{(k)}-x^{(*)}(k)}{\left\|x^{(k)}-x^{*}(k)\right\|}, x-x^{*}(k)\leq 0,$$

$$\{a_k\}=\left\{\frac{x^{(k)}-x^{(*)}(k)}{\left\|x^{(k)}-x^{*}(k)\right\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$a=\lim_{i\to\infty}\frac{x^{(k)}(i)-x^{*}(k_i)}{\left\|x^{(k_i)}-x^{*}(k_i)\right\|}$$

gözlenýän $(a, x-\overline{x})=0$ daýanç ýokary tekizlik diýip görkezeris.

$$\begin{array}{ll} x\in w & (a, x-\overline{x})\leq 0 \\ \overline{y}\in w & (a, \overline{y}-\overline{x})>0 \\ & (a, x-\overline{x})=0. \end{array}$$

onda

$$((a,\overline{y})-\overline{x})=\lim_{i\to\infty}(a_{k_i},\overline{y}-x^{*}(k_i))\leq 0.$$

III–Häsiýet: Goý, w_1 we w_2 iki sany ýapyk kesişmeýän güberçek köplükler, biri kesgitlenen bolsa onda ýokary tekizlik tapylýar

(a,x)+b=0.

Şeýle

(a,x)+b<0 haçan $x\in w_1$

(a,x)+b>0 haçan $x\in w_2$.

IV–Häsiýet: Goý w_1 we w_2 iki sany ýapyk güberçek köplükler bolsun. Goý olaryň umumy içki nokatlary ýok bolsun. Goý w_1 köplügiň içki nokatlarynyň köplügi boş däl bolsun. Onda eger $\overline{x}$ - iki köplügiň hem araçäginde ýatýan nokat bolsa, onda

çykarmasynyň (aýyrmasy) ädiminden soň $p_s<0$ ýerinde $\frac{p_s}{a_{rs}}$ sany alarys, ol položitel bolmaly. Bu ýerden hem $a_{rs}<0$ bolup jemi çykar. Eger-de $p_s<0$ koeffisiýentli topbakda ýöne dürli a_{rs} otrisatel elementi saýlasaň we ony çözgütli diýip hasaplasaň, onda netijede edilen ädimden soň *z*-setirde bir minusyň ýerine başga biri peýda bolup biler. Saýlawy tertiplesdirmäge şu aşakdaky teorema kömek edýär.

Çözülýän setiriň elementlerine z setiriň koeffisiýentleriniň gatnaşyklaryny düzeliň (z nomer bilen):

$$\frac{p_j}{b_r}; \qquad j=1, 2, \ldots, n$$

Alnan sanlardan položitelleri saýlalyň:

$$\frac{p_j}{a_{rj}}>0,$$

olara ikileýin gatnaşyklar diýeliň.

Teorema 1. *Eger-de çösülýän elementi iň* a^z *ikileýin gatnaşyklar boýunça saýlansa, onda adaty Žordan aýyrmalaryň ädiminde soň, z-setiriň koefisiýenti çözülýän topbakda hemişe položitel galan z-setiriň koefisiýentleri bolsa öz belgilerini saklaýarlar.*

Subudy. Goý,

$$\frac{p_s}{a_{rs}}=\min\left(\frac{p_j}{a_{rj}}>0\right) \qquad (7)$$

Bu topbak *s* nomerli çözülýär.

Onda *z* setiriň täze koeffisiýentlerinde $\frac{p_s}{a_{rs}}>0$ deň bolar we teoremanyň birinji bölümi subut edildi.

Özbaşdak (*j* nomerli) topbagy alalyň we *z*-setiriň p_j täze koeffisiýenti üçin ýüzlenme düzeliň

$$p'_j = p_j - \frac{p_s}{a_{rs}} a_{rj} = a_{rj}\left(\frac{p_j}{a_{rj}} - \frac{p_s}{a_{rs}}\right). \qquad (8)$$

Teoremadan görnüşi ýaly *z*-setirde minuslaryň sanynyň köpelmezligi üçin çözülýän topbagy az ikilik gatnaşyklar boýunça düzmeli.

Ähli ýokarda ýazylanlar mesele çözülende birinji etabynda çözülýän element sanlarynyň tertibini kesgitleýär.

1) *z*-setirde otrisatel koeffisiýent ýerleşýär;
2) Saýlanan topbakda otrisatel san gözlenýär we ony düzýän setir çözgüde alynýar;
3) Ikileýin gatnaşyklar saklanýar we olardan azy çözýän elemente görkezýär.

Goy $p_s<0$, ýöne topbakda başga otrisatel sanlar ýok.

$$a_{is} \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

Bu ýagdaýda *s* topbagyň haýsy bir elementini biz alanymyzda we näçe ädim etsekde koeffisiýent p_s otrisatel bolup galar, topbagyň beýleki hemme elementleri bolsa položitel bolar.

Şert (6) ýerine ýetirip bolmaýan bolar.

Üýtgeýji x_s, $x_s>=0$ manyny bereliň. Beýleki hemme ýokarky üýtgeýjileri bolsa nula deň edeliň. Onda

$$y_i = a_{is}t + a_i, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (9)$$

$a_{is} > 0$ şertde *t* parametri islendikçe ulaldyp bolýar we a_i belgä garamazdan $y_i>0$ alarys, ýagny çäklendirmeler sistemasy (2) kanagatlandyrylýar.

Funksionalyň manysy bu ýagdaýda azalýar:

$$z = p_s t + p \to -\infty.$$

Eger-de $a_{is} = 0$ we $a_i < 0$ bolsa, onda (9) görnüşi ýaly dürli *t* gutarnyklydyr. $p_s<0$ şerte salgylanyp üýtgeýji x_s ulaltmaly, ýöne dürli *i* nomerli deňsizlige onuň položitel aňladylyşy kanagatlandyrmaýar. Bu bolsa meseläniň çäklendirmesiniň gapma-garşysyny görkezýär.

§8. Çyzykly däl programmirlemede güberçek köplükleriň häsiýetleri

Biz ilki bilen güberçek köplüklere we funksiýalara kesgitleme bereliň, soňra bolsa olaryň häsiýetlerine seredeliň. $w \subseteq E_n$ köplük güberçek diýilip aýdylýar, eger $x \in w$ we $y \in w$ deň

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in w, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Geometriki, eger iki nokat *w* köplüge degişli bolsa onda, bitin kesim, şol iki nokady birikdirýän şol köplüge degişlidigini aňladýar. Ýagny bitin kesim şol iki nokady birikdirýän hem şol *w* köplüge degişlidir.

I–Häsiýet: Goý *w* – ýapyk güberçek köplük $x_0 \overline{\in} w$ nokat. Onda $(\bar{a}, x) + b = 0$ ýokary tekizlik (giperploskost) tapylyp $\forall x \in w$ üçin $(\bar{a}, x) + b > 0,$ we $(\bar{a}, x) + b < 0.$

Subudy: Goý $x^* \in w$, gysga arasy x_0 bilen ýerleşen. Eger

$$x_0 - x^* = a, \ -(x_0 - x^*, x^*) - c = b$$

$$L(x) - c = (x_0 - x^*, x) - (x_0 - x^*, x^*) - c = b.$$

II-Häsiýet: Güberçek köplügiň (ýapyk) araçäkdäki nokadynyň her biriniň üstünden bolmanda bir daýanç ýokary tekizligi geçirmek bolýar.

Subudy: Goý $\bar{x} \in w$ - araçäk nokady I-nji häsiýete görä $x^{(k)}$-her bir nokada

$$(x^{(k)} - x^*(k), x - x^*(k)) = 0$$

ýokary tekizligi goýmak bolýar. $\forall x \in w$ deňsizlik adalatly. $x^*(k) \in w$ iň ýakyn aralyk $x^{(k)}$ yzygiderlik

Çyzykly däl ulgam çyzykly bolanda ýol berilýän ýaýlanyň güberçekligi saklanmaýar. Eger-de ýol berilýän ýaýla güberçek däl bolsa, onda çyzykly maksat funksiýasynda hem global lokal optimumlaryň tapawudy bolup biler

Lokal optimum bar bolan ýagdaýynda globaldan tapawutlulykda bir depeden goňşy depä geçmegine esaslanýan simpleks tipli hasaplanyş usulyny ulanmaga mümkinçilik ýok.

Çyzykly däl programmirleme meseleleri üçin (global lokal optimumy tapawutly bolan) köp hasaplanyş usullary lokal ekstremum nokady tapmaga mümkinçilik berýär. Umumy ýagdaýlarda olar global optimum bilen gabat gelip gurmaga mümkinçilik berýär. Bu usul bilen lokal optimumy tapmak praktikada köplenç peýda berýär.

Çyzykly programmirleme teoriýasynda funksiýanyň güberçekligine we oýuklugyna aýratyn gyzyklama bildirýärler. Şeýle kesgitlemeler adalatlydyr.

Goý *f(x)* galtaşýan *X* güberçek köplükde güberçek köplük bolsun. Onda islendik lokal minimum *X* –da global minimum bolýar.

Eger-de *f(x)* galyaşýan güberçek *X* köplükde oýuk funksiýa bolsa, onda *X*-da *f(x)*-yň islendik lokal maksimumy global minimumy bolar.

§4. Ulag meselesiniň goýluşy we onuň matematiki modeli

Bize belli bolşy ýaly, çyzykly programmirlemäniň meselesini optimal çözmek üçin biz Simpleks usuly ulanyp, ony biz optimal çözüp bilýäris. Ỳokarda görkezişimiz ýaly bu usul hemme çyzykly programmirlemäniň meseleleri üçin uniwersal usul bolup hyzmat edýär.

Çyzykly programmirlemäniň hususy çözüwleriniň birine ulag meselesi diýilýär Ol aşakdaky görnüşdedir.

Goý, *m*-sany punktlarda degişlilikde $a_1, a_2, ..., a_m$ serişdeler bar bolsun. Goý, *n*-sany punkda şol serişdelere bolan islegler bar bolsun $b_1, b_2, ..., b_n$. *m*-punktda bar bolan serişdeleri *n*-punktdaky isleglere ulag bilen daşamaklygyň minimum çykdaýjysyny kesgitlemeli.

Degişlilikde meseläniň çykdaýjylaryny çözmek üçin biz onuň ýoluny c_{ij} bilen belgiläris $i \to j$. Edil şonuň ýaly onuň meýilnamasyny X. Ỳöne $(c_{ij})_{mxn}$; $X = (x_{ij})_{mxn}$.

Biz ýokarda belleşimiz ýaly, ulag bilen daşamaklyk çykdaýjy minimum harajat bolmaly. Onda biz meseläniň şertine görä X meýilnamasyny kesgitlemeli. Onda maksat funksiýamyz

$$F = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min. \qquad (1)$$

görnüşde bolar. Onda meseläniň şertine görä aşakdaky tablisany düzeris.

Tablisa 1

Barmaly / Ugratmaly	*1*	*2*	…	*j*	…	*n*	Bar bolan serişdeler
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1j} x_{1j}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2j} x_{2j}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	… …	c_{ij} x_{ij}	… …	c_{in} x_{in}	a_i
…	… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mj} x_{mj}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Islegler	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

K nokat $y = \frac{3}{5}x$ deňlemeli çyzygyň OO_1 merkezinde we $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36$ töwerekde ýatýar. Sistema geçeliň:

Onda

$$\begin{cases}(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36 \\ y = \frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}17x^2 - 170x - 25 = 0 \\ y = \frac{3}{5}x\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x = 5 + \frac{30}{\sqrt{34}} \\ y = 3 + \frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \quad ya-da \quad \begin{cases} x = 5 - \frac{30}{\sqrt{34}} \\ y = 3 - \frac{18}{\sqrt{34}} \end{cases} \right)$$

Diýmek $K\left(5 + \frac{30}{\sqrt{34}} \; ; \; 3 + \frac{18}{\sqrt{34}} \right)$

Şeýlelikde $Z_{\min} = 43 - 12 \cdot \sqrt{0,5}$; $Z_{\max} = 40 + 12\sqrt{34}$

F nokat lokal maksimum bolýar, çünki z funksiýanyň bahasy goňşy B we C depelerdäki bahalaryndan uludyr. Onda C lokal minimum nokat bolýar.

Seredilen mesele çyzykly däl meseleleriň hatarynyň aýratynlyklary çyzykly meselelere garanyňda kyndygyna göz ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Eger-de çäkli meseleler ulgamy çyzykly, maksat funksiýasy çyzykly däl bolsa, onda maksat funksiýanyň ýol berilýän planyň gyrky nokatlarynda optimuma ýetmegi zerur däl. *a* eger ol ekstremuma çäk nokadynda ýetýän bolsa, onda bu nokadyň gyraky bolmagy hökman däl. Şeýlelikde ýol berilýän çözüwler köplüginiň depeleri bilen çäklenen şeýle tipli meseleleri çözmek üçin hasaplanyş usuly bolup bilmez. Şeýle tipli meseleleriň käbirinde lokal optimum global bilen gabat gelmeýär.

§7. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-3)^2 \geq 9 \\ (x-5)^2+(y-3)^2 \leq 36 \\ x+y \geq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde $z = x^2 + y^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözüwi: Ýol berilýän çözüwler köplügi garaldylyp görkezilen. Görnüşi ýaly ol güberçek däl. Funksiýa iň kiçi bahany B nokatda, iň uly bahany bolsa K nokatda alýar.

B we K nokatlaryň koordinatalaryny tapalyň. B nokat $x+y=8$ gönide we $(x-5)^2+(y-3)^2 = y$ töwerekde ýatýar. Şonuň üçin onuň koordinatalaryny aşakdaky ulgamdan taparys:

$$\left\{(x-5)^2+(y-3)^2 = y \right. \quad \begin{cases} (x-5)^2+(y-3)^2 = y \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-y)^2+(y-3)^2 = 9 \\ x = y-8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2y^2-12y+9=0 \\ x=y-8 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y = 3+3\sqrt{0.5} \\ x = 5-3\sqrt{0,5} \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} y = 3-3\sqrt{0.5} \\ x = 5+3\sqrt{0,5} \end{cases}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n} = a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in} = a_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots x_{mn} = a_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

2) Serişdeler ähli punktlara dagadylmaly

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1} = b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj} = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots x_{mn} = b_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Hemme islegler kanagatlandyrylmaly.

Bu mesele çyzykly programmirlemäniň meselesine görä

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

şerti kanagatlandyrmaly. Meseläniň şertine görä

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

hemme bar bolan serişdeler hemme gerek bolan islegleri kanagatlandyrmaly. Bu ýagdaýda düzülen model ýapyk model diýilip meseläni çözmek üçin hökmany we ýeterlik şerti diýilip hasaplanýar.

Mesele açyk diýilip hasap edilýär, eger-de

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (6)$$

Eger-de (6)-nyň esasynda barmaly punktymyzda isleg az bolsa, onda ugradýan punktlaryň serişdeleriniň üstüne ýetmeýän bölegi goşup, onuň eltmesiniň bahasyny 0-hasap edýäris.

Edil şonuň ýaly hem haçan islegler az bolup serişde köp bolsa, onuň eltilmeli bahasyny 0-diýip hasap edip, açyk modeli ýapyga öwürip meseläni çözýäris.

Çözüwi: $z=(x-3)^2+(y-2)^2$ funksiýanyň dereje çyzygy merkezi A(3,2) (52-nji surat) nokatda bolan töwerek bolýar. A(3,2) nokatda ýetýär, global maksimuma bolsa B(0;6) nokatda ýetýär.(16-njy sur)

$z_{\min}=0 \quad z_{\max}=25$

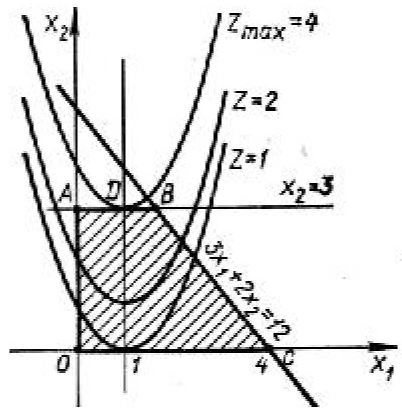
Aýdylanlary mysallarada düşündireliň:

Mesele 2

Çäkli $\begin{cases} x_2 \le 3 \\ 3x_1+2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z=2x_1-x_1^{\,2}+x_2$ funksiýanyň maksimumyny tapmaly.

Çözülişi: $z=2x_1-x_1^{\,2}+x_2$ funksiýanyň dereje çyzygy parabola bolar. (3-nji surat).



3-nji surat

z funksiýa iki sany oýuk

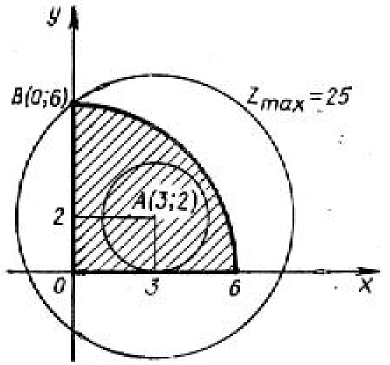
$f_1(x_1)=2x_1-x_1^{\,2}$ *we* $f_2(x_2)=x_2$ funksiýalaryň jemi ýaly garamak bolar. Şeýlelikde *z* funksiýanyň lokal maksimumy global bolar. $z_{\max}=4$ baha *D(1;3)* nokatda ýetýär.

§6. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

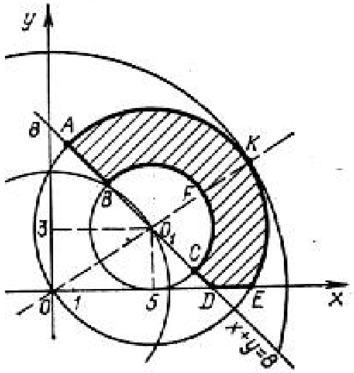
Mesele 1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-3)^2 + (y-2)^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.



1-nji surat



2-nji surat

§5. Ulag meselesiniň optimal çözüliş usullary

Ỳokarda görkezilen Simpleks usuly bilen ulag meselesini hem çözmek bolýar. Ỳöne ýerine ýetirmeli ädimleriň köp sanly bolýandygy üçin biz ony Demirgazyk-Günbatar, Potensiallar, Kiçijik kwadratik usullary bilen optimal we gysga ýollar bilen çözüp bolýandygyny göreris.

Goý, bize takyk bir mysal berlen bolsun, ýagny

Tablisa 1

Barmaly / Uratmaly	1	2	3	4	Bar bolan serişdeler
1	2	4	6	10	90
2	1	3	7	4	100
3	4	8	13	7	140
Islegler	110	100	80	40	330

Bellik. Ỳokarda seredilen ulag meselesiniň matematiki modeli 4 görnüşde düzülmeli bolmagy mümkin. Olar aşakdaky görnüşlerde seredilýär:

1) Ulag meselesi ýeke-täk bir ulag bilen ýeke-täk bir ýük bilen ýagdaýda;
2) Düri ulaglar ýeke-täk bir ýüki ertmeli;
3) Dürli ýükler ýeke-täk bir ulag bilen eltilmeli;
4) Dürli ulaglar bilen dürli ýükleri daşamaly.

1-punktda seredilýän hususy hal iň ýönekeý . 2-nji we 3-nji hususy hal 1-njiden çylşyrymly, ýöne 4-nji hususy hal has çylşyrymlysy bolup hyzmat edýär. Şonuň üçin 2-nji, 3-nji we 4-nji ýagdaýlar birnäçe tapgyrda ýerine ýetirilýär.

Ỳokarda belleýşimiz ýaly ulag meslesiniň çözülişi ilki bilen Demirgazyk-Günbatar soňra Potensiallar usuly bilen dowam etdirilýär.

Ỳokardaky meslelä görä biz aşakdaky tablisalary düzeris.

Tablisa 2

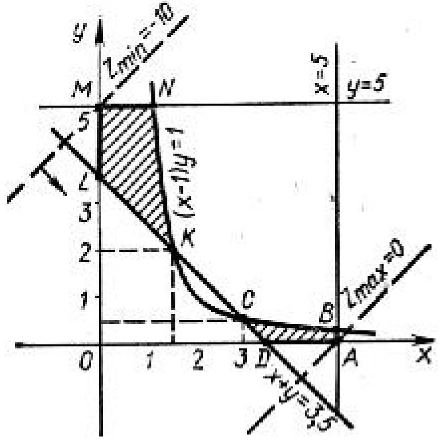
2	4	6	10	90	0
1	3	7	4	100	100
4	8	13	7	140	140
110	100	80	40	a_i / b_j	
20	100	80	40		

$x_{21} = \min\{100; 20\} = 20$

$x_{22} = \min\{80; 100\} = 80$

Tablisa 3

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
1 20	3 -	7 -	4 -	100	100	80
4	8	13	4	140	140	140
110	100	80	40	a_i / b_j		
20	100	80	40			
0	100	80	40			



2-nji surat

z=x-y-5 maksat funksiýanyň *A,B,C,D,K,N,M,L* nokatlardaky bahalaryny hasaplalyň. Bu nokatlaryň koordinatalary şeýle bolar:

$A(5;0)$, $B(5;\frac{1}{4})$, $C(3;\frac{1}{2})$, $D(3{,}5;0)$, $K(1\frac{1}{2};2)$,

$L(0;3{,}5)$, $N(1\frac{1}{5};5)$, $M(0;5)$

Onda $Z_B = -\frac{1}{4}$, $Z_C = -2{,}5$, $Z_D = -1{,}5$, $Z_K = -5{,}5$,

$Z_L = -8{,}5$, $Z_N = -8{,}8$, $Z_A = 0$, $Z_M = -10$

Global maksimuma *(5;0)* nokatlarda ýetýär we ol *0* –a deň, global minimuma bolsa *(0,5)* nokatlarda ýetýär we *-10*-a deň.

Funksiýa *C* nokatda *-2,5*-e deň bolan globaldan tapawutlanýan lokal minimuma ýetýär. Şonuň üçin *K* nokatda hem globaldan tapawutlylykda lokal maksimuma ýetýär.

üstünden geçýär we $k_1 = \frac{1}{2}$ burç koeffisiýente eýe bolýar. Şonuň üçin onuň deňlemesi $y = \frac{1}{2}x$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$ ulgamy çözüp

$x = \frac{12\sqrt{5}}{5}$, $y = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ bahalary alarys.

Şeýlelikde *O(o;0)* nokatda global minimuma ýetýär. Ol nula deňir, global maksimum *A(2,4)* nokatlarda ýatýar we $6\sqrt{5}$ - e deň. Lokal ekstremumlaryň globallardan tapawudy funksiýa ösmeýär.

Mesele 2

z=x-y-5 funksiýanyň
$$\begin{cases} (x-1)y \le 1 \\ x + y \ge 3{,}5 \\ 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 5 \end{cases}$$
deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde global ekstremumlaryny tapmaly.

Çözülişi: Ýol berilýän çözüwler köplügi her biri güberçek bolan (2-nji surat) iki aýratyn bölekden ybarat.

Tablisa 4

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0		
1 20	3 -	7 -	4 -	100	100	80	0
4	8	13	7	140	140	140	140
110	100	80	40	a_i b_j			
20	100	80	40				
0	100	80	40				
	20	80	40				

Tablisa 5

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0					
1 20	3 80	7 -	4 -	100	100	80	0			
4 -	8 20	13 80	7 40	140	140	140	140	120	40	0
110	100	80	40	a_i b_j						
20	100	80	40							
0	100	80	40							
	20	80	40							

	0	80	40							
		0	40							
			0							

$$V_j - U_i \le C_{ij}$$

Soňky tablisanyň esasynda biz meseläniň çözülişiniň 1-nji tapgyryny ýerine ýetirdik. Demirgazyk-Günbatar usulyny ulandyk.

$$V_j - U_i = C_{ij}.$$

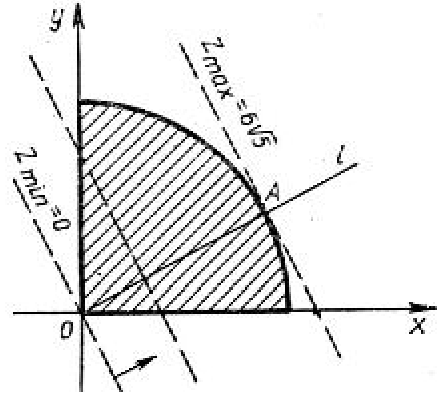
§5. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele 1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde $z = 2x + y$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi: 6-njy suratda ýol berilýän çözüwler köplügi garaldylan. Bu köplük güberçek $z = 2x + y$ funksiýa *n=-2* burç koeffisentli gönä parallel. Görnüşi ýaly global minimum *O(o,o)* nokatda, *a* glabol maksimum $x^2 \pm y^2 = 36$ töwerege *A* galtaşma nokatda bolýar. *A* nokadyň koordinatasyny tapalyň. Onuň üçin l gönüniň deňlemesini düzmek we göniniň we töweregiň deňlmesini özünde saklaýan ulgamy çözmek ýeterlikdir.



1-nji surat

l göni dereje çyzygyna perpendikulýar, şeýlelikde onuň burç koeffisiýenti $k_1 = \dfrac{1}{2}$ $(k_1 \cdot k = -1)$ bolar. l göni *O* nokadyň

Mesele 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

çäkli $z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ maksat funksiýasynyň global maksimumyny we minumymyny tapmaly.

Çözülişi: Ýol berilýän köplügiň çyzgysyny guralyň (surat 51). Optimum koordinatalar başlangyjynyň töwereginde gönüniň aýlanmasynda ýerleşýär, onda ekstremal nokatlar A we B depeler bolar.
Ýokardaky ýaly edip aňlatmadan maksat funksiýa üçin x_2-ni bölüp çykararys: $x_2 = \dfrac{3-z}{z+1} \cdot x_1$

Indi aýgytlaýjy gönüniň burç koeffisiýentini tapalyň: $k = \dfrac{3-z}{z+1}$

Önüm alsak $\dfrac{dk}{dz} = \dfrac{-4}{(z+1)^2}$

Bu önüm z-iň islendik bahasynda otrisatel, onda $k = \dfrac{3-z}{z+1}$ funksiýa kemelýär. Bu bolsa gönüniň aýlanmasynyň sagat strelkasy boýunçadygyny aňladýar. Şeýlelikde A depede maksat funksiýasy iň kiçi, B depede iň uly bahany alar.

Praktiki ekstremal nokatlary ýönekeý gurmak mümkin. Degişli deňlemäni çözüp A we B depeleriň koordinatalaryny kesgitläris. $A(2;3)$, $B(4;1)$
$z_A < z_B$ bolýandygyny belläris, sebäbi A depede global minimuma, B depede bolsa global maksimuma ýetýär.

§6. Ulag meselesiniň potensiallar usuly bilen optimal çözülişi

Umumy ýagdaýda optimallaşma meselesi simpleks usuly bilen çözülýär. Ýöne bu usul bilen ulag meselesini çözmeklik örän uly hasaplamalary talap edýär. Şonuň üçin hem bu mesele potensiallar usuly ý-da paýlaşdyrma usuly bilen çözülýär. Ulag meselesiniň islendik çözüwi maketlerde amala aşyrylýar. Potensiallar usulyny ulanmak üçin maket aşakdaky görnüşdedir;

Tablisa 1

Kabul edilýän / Ugradylýan		*1*	*2*	…	*j*	…	*n*	Ätiýaç-lyklar
	v_j / u_i	v_1	v_2	…	v_j	…	v_n	
1	u_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…..	c_{1n}	a_1
2	u_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	u_j	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	α_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	u_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	α_m
Islegler		*b1*	*b2*	…	b_j	…	b_n	$\Sigma\alpha_j=\Sigma bj$

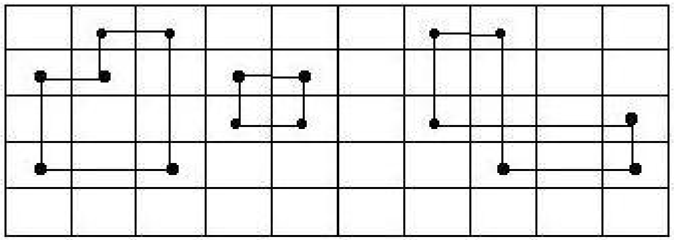
Maketiň esasy bölegi iki sany çyzyk bilen belgilenendir. Ol *mxn* öýjükden durýandyr. Bu bölege degişli her bir öýjük (i,j) belgi bilen bellenendir. Mysal üçin (2,1) belgi ikinji setirdäki birinji sütündäki öýjügi aňladýar. Maket özünde tarifleriň matrisasyny hem saklaýar. v_1 setiriň we u_i sütüniň näme aňladýandygyny soňra düşündireris.

Elektrik torundaky potensiallara meňzeşlikde sanlara degişli bolan potensiallar usuly ady girizýär. Elektrik torundaky bir düwünden beýleki düwüne tok haçanda olardaky potensiallaryň tapawudy simiň gar garşylygyndan köp bolsa tok geçýär. Ulag meselesinde garşylygyň rolyny her marşrutyň tarifi oýnaýar.

Käbir kömekçi düşünjelere seredeliň;

Maketdaky öýjükleriň islendik köplügine toplum diýilýär. Eger-de topluma girýän iki goňşy öýjük bir hatarda (setirde, sütünde) ýerleşýän bolsa şunlukda hiç bir üç öýjük bir hatarda ýerleşmese, onda öýjükleriň beýle toplumyna yzygiderligine zynjyr diýilýär. Zynjyryň mysaly hökmünde tablisa 2 alynýar. Alnan öýjükler gönüler bilen birikdirilen, kesimleriň kesişýän öýjükleri alynmaýar. Eger-de zynjyryň soňky öýjügi birinji öýjük bilen bir hatarda ýerleşse, onda beýle ýapyk zynjyra sikl diýilýär.Onuň görnüşleri 2-nji tablisada berlen.

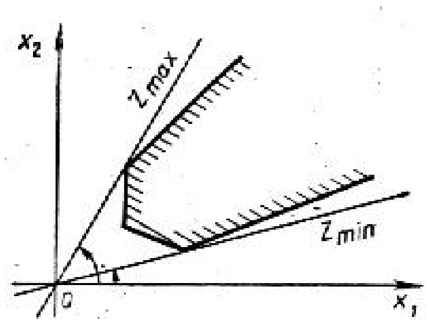
Tablisa 2



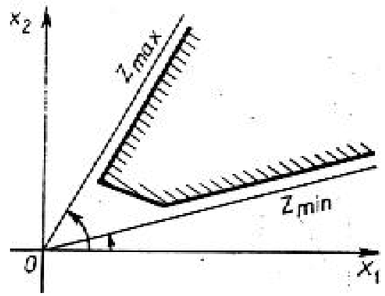
Teorema 1. *Goý m setirli we n sütünli maketde (matrisada) m+n öýjük islendik ýagdaýda belgilenen bolsun we goý* $m+n \le mn$. *Bu ýagdaýda depeleri belgilenen öýjükde (hemmesi bolmazlygy hem mümkin) ýerleşen sikli elmydama gurup bolar.*

Bellik. *m* we *n* bitin sanlar, şonuň üçin $m+n \le mn$ deňsizlik elmydama ýerine ýetýän däldir. Mysal üçin bu sanlaryň haýsy hem bolsa biri birlik bolsa, onda deňsizlik ýerine ýetmeýär. Mysal üçin, *m*=3. *n*=1 bolsa $3+1>3\cdot 1$. Ýöne *m*=2, *n*=2 bolsa $2+2=2\cdot 2$ deňligi alarys. *m* we *n* birwagtda ikiden uly bolsa deňsizlik elmydama ýerine ýetýär.

Subudy. *m*=2, *n*=2 ýagdaýa seredeliň. Maketde *m*+*n*=4 öýjügi almaly. Bu ýagdaýda teorema dogry, alnan öýjükler sikl emele getirýär. Goý indi m>2, n>2. Subudyny matematiki induksia usuly bilen geçirýäris.

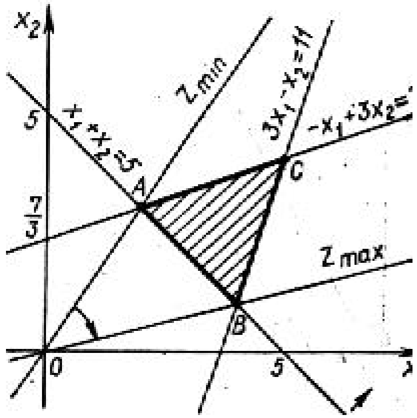


3-nji surat



4-nji surat

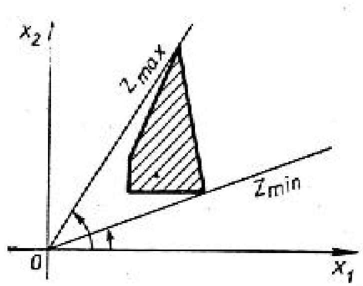
4. Köplik çäkli däl, ekstremumyň ikiside asimptotiki (5-nji surat).



5-nji surat

$$\frac{dk}{dz}=\frac{-q_1(zq_2-p_2)-(p_1-zq_1)q_2}{(zq_2-p_2)^2}=\frac{-zq_1q_2+p_2q_1-p_1q_1-zq_1q_2}{(zq_2-p_2)^2}=$$

$$=\frac{p_2q_1-p_1q_2}{(zq_2-p_2)^2}$$



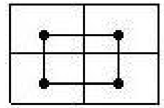
2-nji surat

Önümiň maýdalawjysy mydama poloitel, sanawjysy bolsa *z*-e bagly däl. Şeýlelikde önümiň hemişelik alamaty bolar, *z-iň* ösmegi bilen burç koeffisiýenti diňe artýar ýa-da kemelýär, *a* göni bolsa bir tarapa öwrülýär. Tersine gönüniň bir ugra öwrülmegi bilen *z* diňe ösýär ýa-da kemelýär, *z*-iň ösmegi bilen göniniň aýlanyş ugruny kesgitläliň:

Şeýle dürli ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1. Köpburçlyk çäkli, global maksimumy we minimumy bar (2-nji surat).
2. Ýol berilýän planyň köplügi çäkli däl, ýöne funksiýa global ekstremuma ösýär (3-nji surat).
3. Ýol berilýän planyň köplügi çäkli däl we global ekstremumlardan biri ösmeýär.(4-njy surat)

Tablisa 3



Goý, (*m*+*n*) öýjük aýlanyp alnyp setirleriň we sütünleriň jemi (*m*+*n*-1) bolan maket üçin teorema dogry bolsun. Teoremanyň subudy (*m*+*n*) üçin alarys.

Birinji ýagdaý; Belgilenen öýjükleriň içinde bir hatarda ýeke özi bar bolan öýjük bar bolsun. bu öýjügi taşlap onuň ýerleşen setirini hem ullanmaýarys. Şeýlelik-de setirleriň sany bir birlik kemelen sütünleriň öňküligine galan makede geleris.
Bu ýagdaýda setirleriň we sütünleriň bilelikdäki jemi (*m*+*n*-*1*) bolar we bellenen öýjükleriň bir-birlik kemeler. Diýmek, matematiki induksiýa görä bu ýagdaý üçin teorema dogrydyr.

Ikinji ýagdaý; Goý indi her bir hatarda sütünde birden köp bellenen öýjük bar bolsun ýa-da öýjükleriň hiç biri bolmasyn. Bir öýjügi “+” bilen belgiläp beýleki sütündäki öýjüge düşýäris, indi sütün boýunça hereket edip beýleki setire düşeris we şuňa meňzeşlikde dowam edýäris. Käbir etapdan soňra biz öňki belenen öýjüge geleris, ýapyk zynjyr alarys ol bolsa sikldir. Ýokarda görkezilişi ýaly teorema *m*=2, *n*=2 (*m*+*n*=4) üçin dogrudyr. Onda ýokarda görkezilen ýagdaýa görä *m*+*n*=5 (*m*+*n*>4); *m*+*n*=6 (*m*+*n*>5) we şuňa meňzeş ýagdaýlar üçin teorema dogrudyr.

Eger-de komponentleriniň meýilnamalary $x_{ij}>0$ bolan öýjükleriň toplumy özünde hiç bir sikli saklamaýan bolsa, onda $X(x_{ij})$ ýol bererlik meýilnama sikli däl (asikliki) diýilýär. Onuň mysaly aşakdaky tablisada berlen.

Tablisa 4

•	•			
	•	•		
		•	•	
			•	
				•
				•

Bu ýerde nokatlar $x_{ij}>0$ bahalary alýan öýjükleri aňladýar ($x_{ij}<0$ meseläniň setirine görä bolup bilmez).

Asiklik meýilnamalaryň içinde optimal meýilnamalaryň hem boljakdygyny görkezeris.

Eger-de asiklik $X(x_{ij})$ meýilnamada položitel komponentleriň sany

$$N = m + n - 1$$

(beýleki komponentler nula deň) bolsa, onda öýjükleriň toplumyndaky $x_{ij}>0$ bahalaryň ýerleşen tarifleriň matrisasyndaky c_{ij} elementlere X-belgilenen elementler diýilýär.

Eger-de položitel komponentli meýilnamanyň sany

$$N < m + n - 1,$$

bolsa, onda öňki alnan öýjükleriň üstüne ($m+n-1$) sana ýeter ýaly we öňküler bilelikde sikli emele getirmez ýaly nul bahaly öýjükleri goşmaly. Şunlukda ähli alnan öýjükleriň c_{ij} tarifleri X belgilenen diýip hasap edilýär.

Asiklik meýilnamanyň komponentleriniň sany ($m+n-1$) sandan uly bolup bilmez, sebäbi $N=m+n-1$ bolanda subut edilen teorema görä saýlanyp alnan öýjüklerde sikl gurup bolar.

Teorema 2 (esasy teorema). Eger-de ulag meselesiniň käbir $X=(x_{ij})_{m+n}$ meýilnamasy üçin ähli i=1,2,..,m; j=1,2,…,n üçin

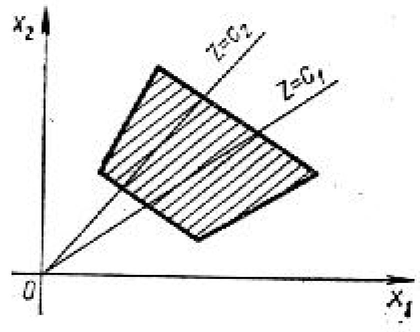
$$v_j - u_i \le c_{ij} \qquad (1)$$

deňsizligi kanagatlandyrýan $x_{ij}>0$ $(x_{ij}(-X))$ üçin bolsa

$$v_j - u_i = c_{ij} \qquad (2)$$

deňligi kanagatlandyrýan $u_1, u_2,…,u_i,...,u_m$; $v_1, v_2,…, v_j,...,v_n$ sanlaryň içinde $m+n$ sany ulgamyny saýlap alyp bolsa, onda X meýilnama optimaldyr. u_i, v_j sanlara ugradyjylaryň we kabul edijileriň potensiýalary diýilýär. (1) we (2) şertlere X meýilnamanyň potensiallaşdyrma şerti diýilýär.

Her bir (i,j) öýjüge iki potensial degişlidir; i-u we j-v degişlidir. Potensialaşma şerti aşakdaky ýaly aýdylýar:



1-nji surat

Drob çyzykly maksat funksiýaly meseläniň üýtgeýän ululygyny çyzykly programmirlenen meselere getirip, soňra simpleks usuly bilen çözeris. Bu nähili edilýär, munuň bilen soňurrak tanyşarys. Ilkibada drob çyzykly progammirlenen meseleleriň geometrik manysyny we grafiki usullary bilen tanyşalyň.

$O_{x_1x_2}$ tekizlikde $z = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2}{q_1x_1 + q_2x_2}$ maksat funksiýa garalyň.

x_2 –ni bölüp cykarsak

$$zq_1x_1 + zq_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_2\,; \quad x_2 = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}$$

$$\text{ya – da} \quad (zq_2 - p_2)x_2 = (p_1 - zq_1)x_1$$

$$x_2 = kx_1 \quad \text{bu yerde} \quad k = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}$$

$x_2 = kx_1$ deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän gönini berýär. z-iň käbir fiksirlenen z bahalarynda gönüniň k burç koeffisiýenti hem fiksirlenen a göni kesgitlenen. z-iň bahasynyň üýtgemegi bilen $x_2 = k \cdot x_1$ göni koordinatalar başlangyjynyň daşynda öwrülýär. (1-nji sur.)

z-iň monoton artmagy bilen k burç koeffisiýentiniň üýtgemegine garalyň. Munuň üçin k –dan z boýunça önüm alarys.

§4. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele 1.

Kärhana bir dürli önüm goýberýär we dört tehnologik usul bilen taýýarlanylýar. Bu usullarda işlenende wagt birliginde q_1 , q_2 , q_3 q_4 önüm alynýar, bu önümleriň gymmaty p_1 , p_2 , p_3 , p_4 ybarat. Berlen meseläniň matematiki modelini düzmeli. Önümleriň gymmaty iň kiçi bolar ýaly we her bir usulda kärhana degişlilikde t_1 , t_2 , t_3 , t_4 sagatdan köp bolmadyk wagtda işlener ýaly önüm goýberilişiň planyny kesgitlemeli.

Çözülişi: Goý x_1 birlik kärhana birinji tehnologiýa boýunça işleýän bolsun, x_2 -ikinji, x_3 –üçünji, x_4 –dördünji. Onda önümiň umumy goýberilişi $q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4$ bolar, a önümiň umumy çykdaýjysy bolsa $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$ deň bolar.

Umumy çykdaýjinyň umumy önümiň goýberilişine bolan gatnaşygyna önümiň gymmaty diýilýär.

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}$$

Indi $0 \le x_1 \le t_1$ $\quad 0 \le x_2 \le t_2$ $\quad 0 \le x_3 \le t_3$ $\quad 0 \le x_4 \le t_4$ çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}$$

maksak funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

Ähli öýjükler üçin potensiallaryň tapawudy tarifleriň sanyna deň ýa-da ondan kiçi bolmalydyr, *X* belgilenen öýjükler üçin bolsa ol san tarifleriň sanyna deň bolmalydyr. Bu şertleri kanagatlandyrýan meýilnama potensial meýilnama diýilýär. Şeýlelik-de esasy teoremany aşakdaky ýaly aýdyp bolar; eger-de ulag meselesiniň käbir meýilnamasy potensial bolsa, onda ol meýilnama optimaldyr.

Subudy. Goý käbir X(Xij) meýilnama üçin potensiallyk şerti ýerine ýetirýän bolsun, yagny (1) we (2) şertleri kanagatlandyrýan U_i we V_j sanlaryň ulgamy bar bolsun.

Tablisa 5

	v_1	v_2	v_j	v_n	
u_1	c_{11}	c_{12}	c_{1j}	c_{1n}	a_1
u_2	c_{21}	c_{22}	c_{2j}	c_{2n}	a_2
u_i	c_{i1}	c_{i2}	c_{ij}	c_{in}	a_i
u_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{mj}	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	b_j	b_n	Σ

Başga söz bilen aýdanyňda goý *X* meýilnama potensial bolsun. Bu meýilnamanyň optimal boljakdygyny subut edeliň.

X meýilnama:

$$z_X = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \qquad (3)$$

Funksionala baha berýän bolsun. Bize *X* meýilnamanyň optimallygy ýa-da däldigi belli däl, şonuň üçin hem optimal $X'(x'_{ij})$ meýilnamany alyp onuň:

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} \qquad (4)$$

Funksionala nähili baha berýändigini seredeliň (ulag çykdajylary iň az). X' meýilnama üçin onuň potensiallyk şerti kanagatlandyrýanlygy belli däl, ýöne X meýilnamanyň potensiallygy üçin maketiň her bir (i,j) öýjügine (1) deňsizlik

$$v_j - u_i \le c_{ij}$$

degişlidir ýa-da tersine

$$c_{ij} \ge v_j - u_i. \tag{5}$$

Maketiň her öýjüginden degişli x'_{ij} element alyp ony bu deňsizligiň iki bölegine-de köpeldip jemläp alarys:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(v_j - u_i)x'_{ij}. \tag{6}$$

Bu deňsizligiň san bölegini gysgalygy üçin S bilen belleýäris:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(v_j - u_i)x'_{ij}, \tag{7}$$

Bu jemi tapawut görnüşde hem ýazyp bolar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x'_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_i x'_{ij}. \tag{8}$$

(8) jemi aşakdaky ýaly özgerdeliň. Ol jemleriň birinjisi açyk ýagdaýda

Şeýlelikde y bir üýtgeýänli funksiýa ýaly bolar.

$$y = 2\sqrt{x_1\frac{12-3x_1}{4}} = \sqrt{x_1(12-3x_1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x_1(12-3x_1)}$$

$3x_1$ we 12-$3x_1$ otrisatel däl köpeldijileriň jemi hemişelik. Şonuň üçin *$3x_1(12$-$3x_1)$* köpeldiji bilen y *$3x_1(12$-$3x_1)$* bolsa iň uly bahany alýar. Alarys:

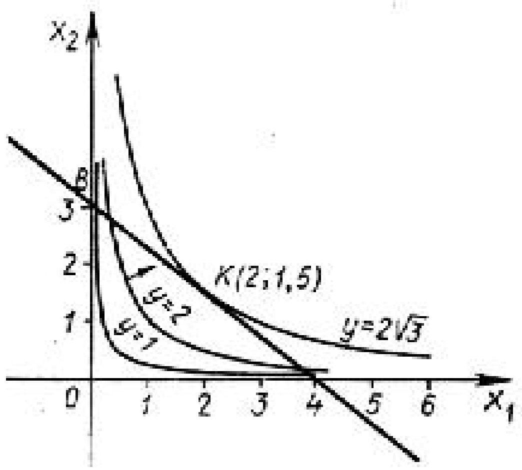
$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{12-6}{4} = 1{,}5 \qquad y_{\max} = 2\sqrt{3}$$

Garalýan çyzykly däl meseläniň tipi drob çyzykly maksat funksiýa meselä meňzeşdir.

$$z = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n}$$

Görnüşli funksiýalara drob çyzykly funksiýa diýilýär.

Mesele 4. (2 meseläniň şertine seret.)
Çözülişi: Ýol berilýän planlarköplügi *AB* kesimiň nokatlar köplügi (4-njy surat), dereje çyzylgy bolsa giperboladyr.



4-nji surat

Eger-de *y=1* onda $x_2 = \frac{1}{4x_1}$ giperbola, eger-de $y = 2\sqrt{3}$ bolsa, onda $x_2 = \frac{3}{x_1}$ giperbola bolar.

$x_2 = \frac{3}{x_1}(y = 2\sqrt{3})$ giperbola *AB* kesim bilen bir umumy *K(2;1,5)* nokady bolar. Şeýlelikde $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$ bolanda iň uly baha ýetýär we ol $2\sqrt{3}$ -e deň.

Bu mesele aňsat çözülýär we analitiki $3x_1 + 4x_2 = 12$ deňlemeden x_2-*ni* x_1-*iň* üsti bilen aňlatmak bolar.

$$x_2 = \frac{12 - 3x_1}{4}.$$

$$\begin{aligned} & v_1(x'_{11} + x'_{21} + \ldots + x'_{m1}) + \\ & + v_2(x'_{12} + x'_{22} + \ldots + x'_{m2}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & v_n(x'_{1n} + x'_{2n} + \ldots + x'_{mn}) \end{aligned}$$

ýa-da

$$\sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij}\right).$$

Şuňa meňzeşlikde ikinji jemi hem

$$\sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\right).$$

görnüşde alarys. Onda (8) deňlik aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\right) \qquad (9)$$

$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij}$ jem *j* sütün boýunça meýilnamanyň komponentleriniň jemi deňdir we ol *j* kabul edijiniň isleglerine deňdir:

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_{j.}$$

Şuňa meňzeşlikde jem *i* setir boýunça alynan meýilnamanyň komponentleriniň jemine deňdir we ol *i* ugrudyjydaky harytlaryň sanyna deňdir.

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i.$$

Bu setirler we sütünler boýunça alnan jemler islendik ýol bererlikli meýilnama üçin dogry bolar we şol sanda *X(x_{ij})* meýilnama üçin hem dogrydyr:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j,\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Şonuň üçin hem islendik ýol bererlikli meýilnamalar üçin alarys.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} x_{ij},\\ \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

we x'_{ij} ýazylan (9) deňlik x_{ij} üçin hem dogry bolar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right). \qquad (12)$$

Indi (9) deň özgertmeleri tersine geçirip

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij}.$$

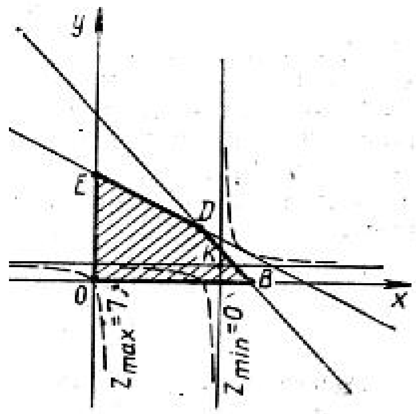
alarys we (8) deňliklerde hem şeýdip (7) deňlige meňzeş deňlik alarys:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (v_j - u_i) x_{ij}. \qquad (13)$$

Mesele 3

$$\begin{cases} x + 2y \le 12 \\ x + y \le 9 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-7)(y-1)$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.



3-nji surat

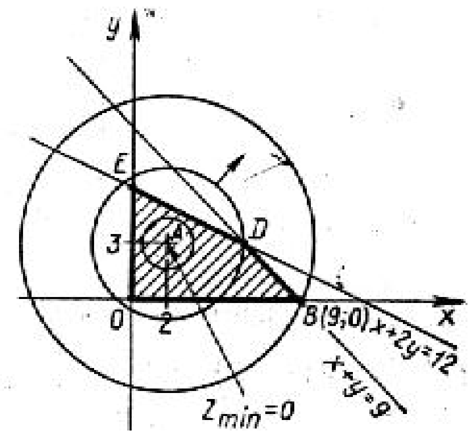
Çözülişi: Ýol berilýän plan köpburçlugy biz eýýäm 7.3.2 meselede gurduk, *a* dereje çyzygy bolsa osimtotalary *x=7, y=1* (9-nji surat) bolup hyzmat edýän deňtaraply giperboladyr. *z* ululygyň boýuna *z* giperbola asimtota kesiginiň nokadyndan başlap kiçelýär. *z* –iň iň uly bahasy degişli *O(o,o)* nokatdan geçýän giperbolada, iň kiçi bahany bolsa funksiýa *K(7,1)* nokatda alýar. Şeýlelikde *O(o,o)* nokatda $Z_{max}=7$, *K(7;1)* nokatda $Z_{min}=0$

alarys. Goý $c=1, 2, 3, ...$ bolan töwerekleri çyzalyň. 8-nji suratdan görnüşi ýaly $z=\sqrt{x^2+y^2}$ funksiýa $A(8;0)$ nokatda iň uly baha ýetýär. $r_{max}=8$.

Mesele 2.

$$\begin{cases} x+2y\le 12 \\ x+y\le 9 \\ x\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z=(x-2)^2+(y-3)^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.
Çözülişi: Ýol berilýän köpburçlyklary we birnäçe dereje çyzyklary guralyň. (2-nji surat).



2-nji surat

$z=c$ dereje çyzygy $A(2;3)$ nokada merkezi bolan $r=\sqrt{c}$ radiusly töweregi berýär. 9-nji suratdan görnüşi ýaly $z_{min}=0$ baha $A(2;3)$ nokada ýetýär, z_{min} bolsa $B(9;0)$ nokatda ýetýär.
Şeýlelikde $z_{min}=0$; $z_{max}=(9-2)^2+(0-3)^2=58$.

$X(x_{ij})$ meýilnamanyň potensiallygy üçin her bir
$v_j-u_i=c_{ij}$.
deňlik ýerine ýetirilýär, beýleki komponentler nula deň, şonuň üçin hem degişli goşulyjylar nula öwrülerler. Şonuň üçin hem (13) deňligi

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}. \qquad (14)$$

görnüşde alarys. Bu bahany (6) deňsizlikde ornuna goýup

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x'_{ij}\ge\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij} \qquad (15)$$

deňsizlige geleris ýa-da (3) we (4) deňlikleri hasaba alyp

$$z_{\min}\ge z_X. \qquad (16)$$

deňsizlige geleris. Başga sözler bilen aýdylanda X meýilnama boýunça ulag çykdajylary minimum çykdajylardan kiçidir ýa-da deňdir.

Indi bolsa biz Potensiallar usulyny ulanmak üçin U we V potensiallary girizeliň (5). Onda biziň tablisamyz aşakdaky görnüşde ýazylar.

Tablisa 6

Ugratmaly \ Barmaly		1	2	3	4	Serişdeler
	V_i \ U_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 90	4 -	6 -	10 -	90
2	u_2	1 20	3 80	7 -	4 -	100
3	u_3	4 -	8 20	13 80	7 40	140
Islegler		110	100	80	40	330

$$v_1 - u_1 = 2,$$
$$v_1 - u_2 = 1,$$
$$v_2 - u_2 = 3,$$
$$v_2 - u_3 = 8,$$
$$v_3 - u_3 = 13,$$
$$v_4 - u_3 = 7.$$

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}$$
$$v_3 - u_1 = 9 > 6 = c_{13}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > c_{23}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

§3. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleler

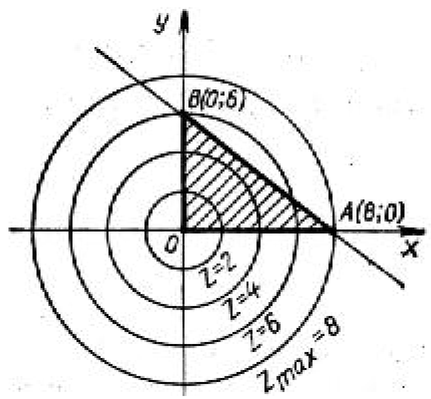
Şeýle meseleleriň ýol berilýän çözüwler köplügi mydama güberçek, çünki çyzyky çäklilik n ölçegli giňişlikde güberçek köpgyranlygy emele getirýärler. Çyzykly programmirlemeden tapawutlylykda çyzykly däl programmirlemelerde maksat funksiýanyň optimal çözüwleriniň bu köpgyranlygyň depelerinde ýerleşmegi hökman däldir.

Mesele 1.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 \le 0 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

şertlerde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Çözülişi: Çözüwleriň ýol berilýän köplügi 1-nji suratda garalanan.



1-nji surat

Eger-de maksak funksiýa fiksirlenen c nokady bersek, onda merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan c^2 radiýusly töwerek “global” termini hem ulanylýar. Gysgaça aýtsak funksýanyň global maksimumy onuň kesgitleniş ýaýlasyndaky iň uly bahalary, global minimumy bolsa iň kiçi bahalary. Global maksimum we global minimum bilelikde funksýanyň global ekstremumy diýilip atlandyrylýar. 39-njy suratda görkezilen funksýanyň grafiginde global minumum 2-ä deň we lokal minimumlaryň iň kiçisi bilen gabat gelýär. Global maksimum 9-a deň, funksiýa x_0=10 nokatda bu baha ýetýär we iň uly lokal maksimum bilen gabat gelýär.

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$
$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$
$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$
$$\delta_{ij} = V_j - U_i - C_{ij} > 0$$

Tablisa 7

U_i \ V_i	2	4	9	3	a_i
0	2 90	4 -	6 -	10 -	90
1	1 20	3 80	7 -	4 -	100
4	4 -	8 20	13 80	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Soňky tablisalara biz Potensiallar usulyny ulanyp, (5)-iň esasynda *U*-lary we *V*-leri kesgitledik. Soňra olary şol tablisalarda ýerine goýup, (5)-iň ýerine ýetirilişini barladyk. Netijede biz 3-kletkada
(5)-iň ýerine ýetmeýändigini gördük. Soňra ony (6)-nyň üsti bilen aňlatdyk.Indi bolsa, biz şol aňlatmalaryň ýerine ýetmegi üçin tablisalary täzeden dolduryp ýene-de bir gezek (5)-iň dogrulygyny barlarys. Şeýlelikde biz bu prosesi tä hemme kletkalarda (5)-iň (6)-nyň formulalary ýerine ýetýänçä dowam ederis. Haçan şol netije alynanda seredilýän mesele optimal çözüwe eýe bolar.

Tablisa 8

$U_i \backslash V_i$	2	4	9	3	a_i
0	2 90	4 -	6 -	10 -	90
1	1 20	3 80	7 -	4 -	100
-4	4 -	8 20	13 80= θ	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

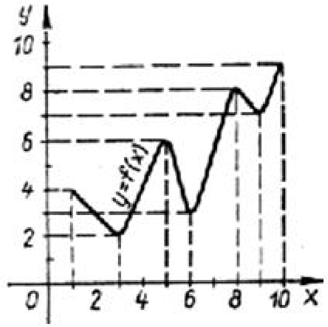
$$\min(x_{ij}) = \theta$$

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} \\ x_{ij} + \theta \\ x_{ij} - \theta \end{cases}$$

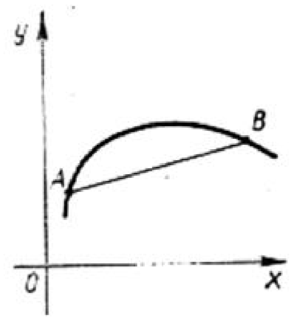
Tablisa 9

$U_i \backslash V_i$	2	4	9	3	a_i
0	2 10	4	6 80	10	90
1	1 100	3 + 0	7	4	100
-4	4 +	8 100= θ	13	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Ỳokarda görkezilen prosesi ýene bir gezek, iň soňky formulanyň esasynda barlap, deňligi barlap ýerine etýän bolsa,



4-nji surat



5-nji surat

Ýene-de geljekde talap edilek kesgitlemeleri ýatlalyň. Goý ýapyk Φ köplükde kesgitlenen $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiýa berlen bolsun. Φ köplügiň elementleri $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bolsun. Şonuň üçin $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiýany z=$f(x)$ görnüşde ýazarys.

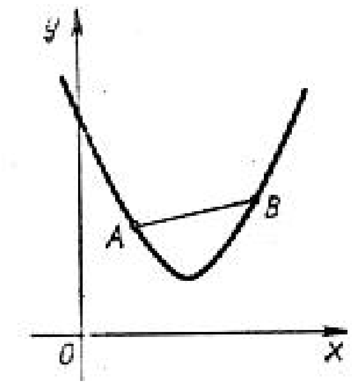
Eger-de $\varepsilon > 0$ san tapylyp $x - x_0 < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli x-lar üçin $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $z=f(x)$ funksýa kesgitlenen käbir ýapyk X köplükde $x_0 \in X$ nokatda lokal maksimuma (lokal minimuma) ýetýär diýilýär.

Funksýanyň lokal maksimuma (minimuma) ýetýän x_0 nokady lokal maksimum (minimum) nokady diýilýär.

Mysallara seredeliň:

5-nji suratda käbir bir üýtgeýänli *[1,10]* kesimde kesgitlenen funksýanyň grafigi şekillendirilen (bu funksýa oýuk hem däl güberçek hem). Funksiýa *[1;10]* kesimde lokal minimuma ($x_1=3$, $x_2=6$, $x_3=y$) we iki lokal maksimuma ($x_4=5$, $x_5=8$) eýedir.

Goý $z=f(x)$ funksiýa X ýapyk köplükde kesgitlenen bolsun. Eger-de $x_0 \in X$ we islendik $x \in X$ üçin $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ deňsizlik dogry bolsa, onda oňa bu funksýa x_0 nokatda absalýut maksimuma (minimuma) ýetýär diýilýär. “Absalýut” termini bilen bilelikde käwagtlar



3-nji surat

Gerekli kesgitlemeleri ýatlalyň. Eger-de köplük islendik A we B nokatlardan geçirilen AB kesimiň ähli nokatlaryny özünde saklaýan bolsa, onda bu köplüge güberçek diýilýär. 1-nji suratda nokatlar tekizliginde güberçek köplüge sfera, piramida, prizma we beýlekiler degişlidir.

2-nji suratda güberçek däl köplüge mysallar görkezilendir. Güberçek däl köplükde *AB* kesimiň ähli nokatlaryndan bu köplükde ýatmaýan iň bolmanda iki nokady görkezip bolar. Giňişlikde güberçek däl köplüge tory mysal getirip bolar.

Bir üýtgeýänli *y=f(x)* funksýanyň grafiginiň islendik iki nokadyny birleýşdirýän kesim grafikde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa bu funksýa güberçek diýilýär.(3-nji surat)

Birnäçe üýtgeýänli güberçek ýa-da oýuk funksýalar düşünjesine formulirlemek mümkin. Eger-de $z=f(x_{11;}x_{21}...x_n)$ giper üstiň islendik iki nokadyny birleşdirýän kesim onuň üstünde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa, onda oňa güberçek diýilýär.(4-nji surat) Giper üste $z=f(x_{11;}x_{21}...x_n)$ oýuk diýilýär, haçanda onuň iki nokadyny birleşdirýän kesim üstde ýa-da ondan aşakda ýatýan bolsa.

optimal çözüwe eýe bolarys. Eger ýerine ýetmese onda biz optimal çözüwi ýene barlarys.

$$(1,\ 2)\quad v_2-u_1=4-0=4=4=c_{12}$$
$$(1,\ 4)\quad v_4-u_1=3-0=3<10=c_{14}$$
$$(2,\ 3)\quad v_3-u_2=6-1=5<7=c_{23}$$
$$(2,\ 4)\quad v_4-u_2=3-1=2<4=c_{24}$$
$$(3,\ 1)\quad v_1-u_3=2-(-4)=6>4=c_{31}$$
$$(3,\ 3)\quad v_3-u_3=6-(-4)=10<13=c_{33}$$

Tablisa 10

U_i \ V_i	2	4	6	5	a_i
0	2 / 10	4 / -	6 / 80	10 / -	90
1	1 / 0	3 / 100	7 / -	4 / -	100
-2	4 / 100	8 / -	13 / -	7 / 40	140
b_j	110	100	80	40	330

$$(1,\ 2)\quad 4-0=4=4$$
$$(1,\ 4)\quad 5-0=5<10$$
$$(2,\ 3)\quad 6-1=5<7$$
$$(2,\ 4)\quad 5-1=4=4$$
$$(3,\ 2)\quad 4-(-2)=6<8$$
$$(3,\ 3)\quad 6-(-2)=8<13$$

$$z_{\min}=10\cdot 2+80\cdot 6+100\cdot 3+100\cdot 4+40\cdot 7=1480.$$

IV Bap. Bitinsanly cyzykly mesele

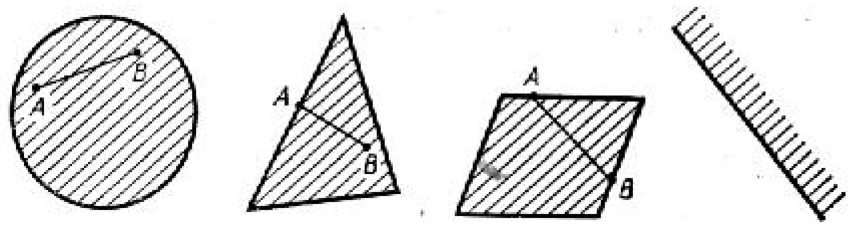
§1. Bitinsanly çyzykly meselä gelýän amaly meseleler

Durmuşda tejribede çyzykly funksiýanyň şertli ekstremumyny kesgitlemek haçan funksiýanyň hemme näbellileri bitinsanly diýip hasap edilende bu mesele örän wajyp meselesiniň biri bolup durýar. Meseläniň özüne bitinsanly mesele ýa–da birnäçe bölegi bitin sanly mesele diýilýär. Bu meseläniň ýüze çykmaklygyň esasy sebäpleriň biri öň ýokarda seredilýän “dürli tehnikalar” bilen dürli işleri ýerine ýetirmek we uçarlaryň üsti bilen degişli bolan ýerlere snarýadlary taşlamak meseleleri degişli bolup durýar. Wenger alymy E. Egerwar 1932 –nji ýylda özüniň iki sany ylmy wakalaryny çap etdi. Ol wakalar ýokarda agzalan ulag meselesine degişli bolan meselelerdir. Ol wakalaryň esasy çyzykly programmasynyň esasyň içinde emele gelýän bitin sanly meselelere degişlidir. 1955-nji ýylda ikinji matematikada programmirleme simpoziumynda uçarlara hem–de gämilere degişli bolan meselelere seredildi. Ol meseläniň bitin sanly çyzykly programmirleme meselesine
degişlidigini kesgitlärler. Eger biz aşakda degişlilikde 2 sany hususy meselä syn etsek, onda olar:

Içi zatly halatynyň meselesi. Goý bize *m* wektor çäklendirilen serişdeler berilen bolsun. Degişlilikde $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ serişdeler bolsun. Goý şu serişdeleriň üsti bilen $\overline{n}$ möçberindäki ýükleri daşamaklyk gerek bolsun. Bu ýerde daşalýan ýükleriň hemmesi islegler boýunça kanagatlanmaly, ýagny barmaly ýerine eltilmeli şeýle hem m görnüşli serişdeleri degişlilikde ýüküň möçberine görä ulanmaly. Olar aşakdaky şerte görä ýerine ýetirilmeli:

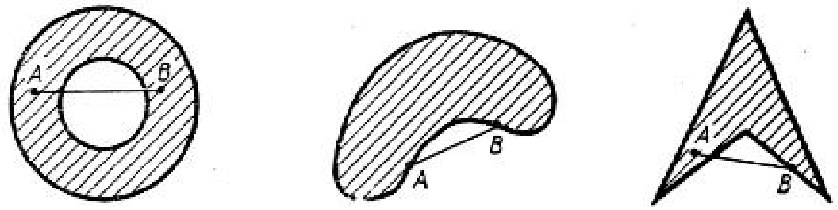
1) c_j ýüküň ertilmeginden emele gelen peýda (girdeýji);
2) Ertilýän ýüküň hemmesi bitin bolmaly;
3) i serişdeleriň kömegi bilen j ýüküň eltilmegi a_{ij} bilen belgiläris, ýagny onuň harajatyny aňladýar.

Eger biz her bir gezekde (reýsde) peýdalanylan ulag bilen ertilen ýüküň netijesi girdeýjili bola, onda umuman hemme



1-nji surat

Bu meselede ulgam çyzykly çäkli, *a* maksat funksiýaň çyzykly bolmaýar. Seredeliň 7.11 we 7.12 meseleler çyzykly däl programmirlenen meselä degişli.



2-nji surat

Şeýle meseleleriň käbir aýratyn çözüwleriniň üstünde durup geçeliň. Çyzykly däl programmirlenýän meseleleri çözmek üçin şulary bilmek zerurdyr:

1) Meseläniň ýol berilýän çözüwleriniň köplügi oýuk ýa-da güberçek:
2) Maksat funksiýa güberçekmi ýa-da oýuk

§2. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

Mesele 1. Önümçilikde käbir azyk iki görnüşde öndürülýär. Egerde birinji görnüşli resursyň bahasy 3 manat, ikinjiniňki bolsa 4 manat, ähli alnanda bolsa 12 manat bolsa resuslarynyň ululyklarynyň optimal paýlanyşygyny kesgitlemeli. Birinji resusyň x_1 mukdaryndan we ikinji resusyň x_2 mukdaryndan $2 \cdot x_1^{0,5} \cdot x_2^{0,5}$ önüm birligini almak mümkin.

Umuman işlenilip taýýarlanylan önümiň mukdary bilen onuň çykarylýan resuslaryny baglanyşdyrýan $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fumksiýa önümçilik funksiýasy diýilýär. Önüm üçin ýönekeýje önümçilik funksiýasy iki dürli resurs üçin şeýle bolar:

$$y = c\, x_1^{\alpha} \cdot c_2^{\,1-\alpha}$$

Bu ýerde c we α - hemişelik ululyklar, $0<\alpha<1$. y funksiýa diňe iki resurs bolan ýagdaýy üçin görkezilen: x_1 – zähmet, x_2 – baýlyk (kopital), bu ýerdäki α bu resuslaryň degişli paýlaryny aňladýar.

y funksiýa ýönekeý önümçilik funksiýasy, şeýle hem muňa iki resursyň we bir önümiň arasyndaky baglylyk ýaly garalýar. Bu funksiýa politekonomiki derňewlerde wajypdyr.

<u>Meseläniň matematiki modeli:</u> Goý x_1 – I görnüşli resursyň mukdary, x_2 – II görnüşli resursyň mukdary.

Çäkli ulgam
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Magnit funksiýasy $y = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$

(1) formulanyň çözüwler köplüginde (2) funksiýanyň iň uly bahasyny tapmak talap edilýär.

serişdeleriň kömegi bilen eltilen ýükleriň netijesinem girdeýjili bolar. Eger x bilen ertilýän ýükleriň sanyny belgilesek onda bu meseläniň matematiki modeli

$$x_j \geq 0, \quad x_j\text{-bitin}, \quad j=1,2,\dots,n \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,2,\dots,m \tag{2}$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{3}$$

görnüşinde ýazylýar.

Meseläniň şertine görä ertilýän ýük bitinsanly bolmaklygy üçin ol san ýaha 0 ýa–da 1 bolmaly.

Bize belli bolşy ýaly 0 hem–de 1 sifirlar bolanynda ýagny diňe şol kabul edilende ol funksiýa nulewaýa diýilýär. Şoňa görä (1) – (3) modeliň 1–nji şertini üýtgedip alarys:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \\ 1, & j = 1,2,\dots,n, \end{cases}$$

Bu meseläni optimallyga çözmeklik üçin bar bolan resurslaryň esasynda eltilmeli ýükleriň mukdary näçe köp bolsa onda şondan gelen peýda hem köp bolar, ýagny mesele maksimum çözülýär.

Gämileriň görnüşleri boýunça saýlamak meselesi (dürli ulaglary saýlamak meselesi). Bize belli bolşy ýaly ýylyň dowamynda sezon wagtlary deňizlerde we derýalarda gaýyklaryň kömegi bilen ýolagçylar barmaly ýerine suw ýoly bilen gatnalar. Eger gatnawlaryň her bir gezeginde girdeýjili bolsa, onda umumy ýylda gämileriň hereketinden maksimum girdeýji almak bolar. Ol esasan satylýan biletlarin sanyna bagly bolar. Şeýle hem şol herekete degişli çykdaýjylar hem emele gelýär. Ýagny komandanyň hyzmatlary, yag we ýangyç harçlamalary we şuňa meňzeşler. Meseläniň şertine görä maksimum girdeýji almak üçin ýolagçylary eltmekde olaryň isleglerini kanagatlandyrmaly. Şeýlelikde biziň öňümizde aşakdaky meseläni çözmeklik galýar.

Mesele: Her gezekgi gatnawa saýlanyp alynan gaýyklaryň görnüşinden hem–de olara ýerleşýän ýolagçylaryň sanyndan durýar. Ýagny hemme islegleri kanagatlandyryp gämileriň gatnawlaryny umuman girdeýjilikli bolar ýaly ýagny maksimum meselesini çözmeli. Eger biz $b_j^{(1)}$ diýip haýsy hem bolsa *j* gatnawuň bir sezonynda gatnadylan adamlaryň gatnawlarynyň sanyny belleýäris. Eger biz bu gatnawy m tipli gämiler arkaly ýerine ýetirilýän bolsa, onda her bir *i*–nji gämi (görnüsli) üçin aşakdaky häsiýetleri belläliň, ýagny:

1) a_{i1} – gäminiň ýük göterijiligi;
2) a_{i2} – hyzmat edilen adamlaryň sany;
3) a_{i3} – ýag we ýangyç harytlaryň sezondaky çykdaýjysy;
4) c_j–*j*-gatnawy boýunça i–transportyň ulanylmagyndan bir sezonda alynýan girdeýji.

Gämileriň parkyny saýlamakda her bir gatnawda gämiçiligiň girdeýjisiniň maksimum bolmagyny özi hem görkezilýän çäklendirmelerden çykmaýan bolmaly. Mysal üçin b_2 hyzmat edýänleriň çykdaýjysy, köp bolmaly däl.
b_3–den, ýagyň ýangyjy, köp bolmaly däl, gämileriň görnüşleri hem–de gatnawlary diýip x_{ij} $(i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n)$ bellesek onda onuň matematiki modelini aýry şertleriň esasynda ýazmak bolýar:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_{ij} \geq b_j^{(1)}, \qquad j=1,2,\ldots,n;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_{ij} \leq b_2;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m} a_{i3}x_{ij} \leq b_3;$$

$x_{ij} \geq 0$, *xij*-bitin san (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n). Bu ýaýlada funksiýany maximuma öwürýän $x=(x_{11}, x_{12},\ldots x_{1n}, x_{21}, x_{22},\ldots, x_{2n}, x_{m1}, x_{m2},\ldots, x_{mn})$bahany tapmak talap edilýär

$$f(x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*) \geq f(x_1,x_2,\ldots,x_n) - \max$$

$$[f(x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*) \leq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)] - \min$$

Eger biziň sereden (1)-(3) deňlemämiz çyzykly bolsa, onda ol meseläni belli bolan usullar bilen simpleks, tora, excel elektron tablisasy arkaly optimal çözülýär.

$$E^n = \text{çyzykly giňiňişl} + (\vec{a}\cdot\vec{b}) + \|x\|$$

Eger-de (1)-(3) çözemizde ol meseläniň esasynda emele gelen köpgrnalyk (köpburçluk) çyzykly däl bolan ýagdaýynda hemme wagt güberçek (oýuk) hem bolup duranok, onuň sebäbi gipertekizlik köpgranlygyň ýeke bir depelerinde däl-de, eýsem bolsa onuň içinden geçmegi hem mümkin

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň çözülişini kesgitlenilende onuň geometric manysyny peýdalanalyň:

1) giperüst (gipertekizlik);
2) meseläniň çözüwiniň bar bolan ýaýlasyny kesgitlemeli;
3) ýokarky we aşaky derejäni kesgitlemeli we onuň gipertekizlige görä ýerleşişini barlamaly. Eger onuň çözüwi ýok bolsa, onda ýaýlada boş köplük ýa-da ýeke täk çözüwi bar;
4) çäklendirilen ýaýlanyň esasynda max (min) nokatlaryň üsti bilen gipertekizlige görä egri çyzyk ýa-da göni çyzyk, ýagny şol nokatlardan geçýän çyzgyny kesgitlemeli.

VIII Bap. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesi

§1. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesiniň goýluşy

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň ykdysady geometriki manysy. Amaly meseleleriň köpüsi optimallyga çözmeklik üçin onuň matematiki modeli çözülende umumy görnüşde ol çyzykly däl bolýar.

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesi aşakdaky görnüşde berilmegi mümkin:

1) maksat funksiýasy çyzykly, çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl;
2) maksat funksiýasy çyzykly däl, çäklendirmeler ulgamy çyzykly;
3) maksat funksiýa hem-de çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl.

Biz bu meseläni dürli usullar bilen çözüp, ony optimaldygyny kesgitleýäris. Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesi aşakdaky görnüşde berlen bolsun:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ (i = \overline{1,k}) \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) > b_i\ \ (i = \overline{k+1, m}) \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0:\ (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

(1)-(3)-çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň matematiki modeli diýilýär. f, g_i -n sany näbellä degişli bolan b_i -berlen san (serişdäniň görnüşleri).

Eger-de meseläniň çözülişi bar bolsa we ol (2)-ni kanagatlandyrýan bolsa onda aşakdaky şertler ýerine ýetýändir.

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \max.$$

Umumy görnüşinde mesele aşakdaky ýaly berilýär. *n*-sany bölünmeýän ýükleriň toplumynyň çinde ber bir *j*-iň içinde *i*-häsiýetli görkeziji a_{ij} we peýdalylygy c_j-bolup şeýle bir ýükleri saýlap almaly netijede b_i-serişdäniň maksimum peýdalylyk berip ulanylar ýaly.

Bu meseläniň matematiki modeli aşakdaky ýaly berilip biliner:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le = \ge\} b_i, \quad i = 1,2,...,m;$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,n;$$

x_j- bitin, $j=1,2,...,n_1$

Funksiýany maksimuma (minimuma) öwürýän $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ çözüwi tapmaly

$$F(x) = \sum_{j-1}^{n} c_j x_j$$

Eger $n = n_1$-bitin sanly programirlemäniň matematiki modeli, eger $n_1 < n$-bölegi bitin sanly programirlemäniň matematiki modeli.

Bitin sanly programirlemäniň meselesiniň hususy haly bolup, bulewyý üýtgeýanli mesele mysal bolup biler. Onuň matematiki modeli aşakdaky görnüşde ýazylyp biliner:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le = \ge\} b_i, \quad i = 1,2,...,m;$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1, \quad j = 1,2,...,n; \end{cases}$$

Funksiýany maksimuma (minimuma) öwürýän $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ çözüwi tapmaly

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

§2. Bitinsanly çyzykly meselelerde matematiki model

Görüşimiz ýaly örän köp ykdysady meseler bitin sanly çyzykly programmirlemäniň meselesine gelýär we ýokarda sereden matematiki modeliň üsti bilen bean edilýär. *X*-maksimumlaşdyrýan *F(x)* kesgitlemeli nirede

$$c_j \geq 0 \quad \forall \ j = \overline{1, n}$$

hemme c_j bitin san diýip hasap edäris. Şeýle görnişli mesele üçin E.Balaş tarapyndan bölekligine saýlama (aýdyň däl) algoritim hödürlenildi ol algoritim additiw algoritim diýip at aldy, sebäbi

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

algoritim boýunça hasaplamalar geçirilende, diňe goşmak (aýyrmak) operasiýalar ulanylýar. Bu meseläniň çözüliş algoritimine geçmezden ozal, biz bu meselede haçan Bulewli näbelliler üçin, haçan çälendirmelerde >,=,< şertler hem ýerine ýetýär diýen tassyklamany belläp geçeliň.

Hakykatdan, Goý $(\mathrm{k})(\mathrm{k} \leq \mathrm{m})$ çäklendirme aşakdaky görnişe eýe bolsun

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{kj}} \mathrm{x}_{\mathrm{j}} = \mathrm{b}_{\mathrm{k}},$$

s-nomerli çäklendirme $(s \leq \mathrm{m})$

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{sj}} \mathrm{x}_{\mathrm{j}} = \mathrm{b}_{\mathrm{s}},$$

Goý, mundan başga hem c_j, c_j-köpligine degişli bolyp atrisatel (oňlydäl) bolsyn onda elementar özgertme ýerine ýetirip:

1) Täze ulgamlar näbellilerini girizeliň: t_i:t_i=x_i hemme $c_j \geq 0$, j-ler üçin: t_j=1-x_i hemme c_j<0: bolan j-ler üçin.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + x_1^{'} \\ x_2 &= \xi_2 + x_2^{'} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$z = \frac{p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 + p_0}{q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + q_1 x_1^0 + q_2 x_2^0 + q_0} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 + p_0 &= 0 \\ q\ x_1^0 + q_2 x_2^0 + q_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

$$z = \frac{p_1\xi_1 + p_2\xi_2}{q_1\xi_1 + q_2\xi_2} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 &\leq (a_1 - a_{11}x_1^0 - a_{12}x_2^0) \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 &\leq (a_m - a_{m1}x_1^0 - a_{m2}x_2^0) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$x_1^0, x_2^0, p_1^0, q_1^0, a_{11},\ldots, a_{m1}$-hakyky sanlar, bu soňky ulgamdan ξ_1 *we* ξ_2 görä simpleks usuly ulanyp, onuň optimal çözüwi tapylýar.

Çözüwi şu ýerde saklap maksimum meseläni aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$z = \frac{-p_1^{'}y_1 - \ldots - p_k^{'}x_k - \ldots - p_n^{'}x_n + P}{-q_1^{'}y_1 - \ldots - q_k^{'}x_k - \ldots - q_n^{'}x_n + Q} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1k}x_k + \ldots + b_{1m}x_n \le b_1, \\ b_{k1}x_1 + \ldots + b_{kk}x_k + \ldots + b_{km}x_n \le b_k, \\ -------------------- \\ b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mk}x_k + \ldots + b_{mn}x_n \le b_m, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$y_i \ge 0, \quad x_j \ge 0.$$

Ýokardaky mesele has çylşyrymly, sebäbi ol kysymly däl, onuň sanawjysyna P, Q goşulýar. Bu meseläniň çözülişiniň amatly ýoluny görkezmek üçin biz tekizlikde iki näbellili görnüşdäki kysymly däl meselä seredeliň we onuň geometriki manysyna üns bereliň.

Goý, bize tekizlikde kysymly däl ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesi berlen bolsun:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_0}{q_1x_1q_2x_2 + q_0} \qquad (3)$$

aşakdaky çäklendirmelerde:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_1 \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_m \end{array}\right\} \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Üýtgeýänleri çalşyralyň:

2) S-nji deňsizlige (-1) köpeldeliň (şeýle edip $\forall(\text{hemme})(\ge)$-çäklendirmeler bilen iş geçirmeli).
3) Deňlik (=) şertini iki sany $(\ge, \le)$ alamatlar bilen çalyşmaly, şondan soňra ikinjisini (-1) köpeldýäris.
1-3-özgertmeleriň netijesinde aşakdaky meseläni alarys:

$$\min F(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j t_j$$

Çäklendirmeler ýaýlasynda

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \le b_i, i \ne k, i \ne s$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-a_{sj}) t_j \le -b_s, \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \le b_k, \sum_{j=1}^{n} (-a_{kj}) t_j \le -b_k,$$

$$t_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \qquad c_j \ge 0.$$

Şeýlelikde ýokarda seredilen düşündirişleriň güýjüni çäklendirmän başda seredilen meseläniň Bulewli (meseleler) näbelliler üçin hem umumy mesele diýip hasap etmek bolar.
Biziň aşakda geçirjek hasaplamalar algoritimimiz ýa meseläniň optimal çözlüşini kesgitlemäge ýa-da hemme näbellileriň mümkin bolan bahalaryny saýlamazdan (çözülişiň ýoklygyny anyklamaga mümkinçilik berýär).

Goý, N, $j = \overline{1, n}$ elementleriň köpligi bolsyn. Goý N köpligiň kiçi köpligi bar bolup her bir j elementde degişlilikde x_j -bolup 0 ýa-da 1 kabul edip alyp, bölek çöziliş we $\Omega -$ bilen bellenip $\Omega \subseteq N$ X_j-iň $\Omega -$ kiçi köpligine girmeýänlerne bolsa azat näbelliler diýilýär. Şeýle azat näbelliler bolsa kiçi köpligi emele getirip $S = N / \Omega$. ýagny islendik alynan azat näbelliler bölek goşmaça çözüwler bilen bilelikde doly köpligi emele getirýär N.

Eger bölek çözüw (k) näbellileri saklaýan bolsa, $N=1,2,...n$, onda 2^{n-k} dürli goşmaça bölek çözüwler bardyr. Meselem n=5 a X_2=1, X_4=0, meseläniň bölek çözilişi bolup, ýagny

$$\Omega=(2,4), \text{onda } S=N/\Omega=(1,2,3,4,5)/(2,4)=(1,3,5)$$

bu ýerde 1, 3, 5 azat näbelliler. Eger X_1=1, X_3=0, X_5=1. onda ol goşmaça bölek çözilişi düzýärler. Dürli goşmaça bölek çözilişleriň sany X_2=1, X_4=0 bolýar $2^{5-2}=2^3=8$.

§4. Ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesiniň kysymly däl ekstremumy

Goý, aşakdaky meseläniň maksimumyny tapmak talap edilsin:

$$z=\frac{p_1x_1+...+p_nx_n}{q_1x_1+...+q_nx_n}=\frac{z_1(x)}{z_2(x)}$$

aşakdaky çäklendirmelerde:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n \le a_1, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n \le a_m, \\ x_j \ge 0, \quad j=1,2,...n. \end{array}\right\}$$

Aşakdaky tablisany düzüp we birnäçe žordan ädimini edip, şeýle tablisa geleris, ýagny sanawjy z_1 we maýdalawjy z_2 funksionalda P we Q azat agzalar peýda bolar (Tabl. 1).

	$-y_1$ .... $-x_k$ .... $-x_n$	1
$x_1=$ ... $y_k=$ ... $y_m=$	b_{11} .... b_{1k} .... b_{1n} .... b_{k1} .... b_{kk} .... b_{kn} .... b_{m1} .... b_{mk} .... b_{mn}	b_1 .... b_k .... b_m
$z_1=$ $z_2=$	p'_1 .... p'_k .... p'_n q'_1 .... q'_k .... q'_n	P Q

8) Eger min gözlesek, onda dj setiriň iň uly oňyn sanly sütünini saýlamaly, ýagny $z_{\max} = (-z_{\min})$.
9) Eger bu meseläniň optimal çözüwi bar bolsa, dj setiri optimallaşdyrmak şertini ýerine ýetirýär. Eger ýerine ýetirmeýän bolsa, onda meseläniň optimal çözüwi ýokdur.

§3. Bitinsanly çyzykly meseleler. R. Gomeriniň algoritmi

Kesme usulynyň umumy shemasyndan ugur alyp çyzykly programmirlemäniň umumy meselesini (G,F) we oňa degişli bolan (G^B,F) bitinsanly programmirlemäniň meselesini çözeliň. Goý $x(G,F)$ –onuň optimal çözülişi bolsun. $x(G,F)$ çözüwi bitinsanlylyga barlag geçireliň. Eger $x(G,F)$ hemme kordinantlary bitinsan bolsa onda

$$x(G,G) = x(G^B, F).$$

Eger bolmanda birisi goý x_i bitinsan bolmasa, onda biz aşakdaky shema boýunça hereket ederis. Bazis däl näbellileriň hemmesini N bilen belläliň we iň soňky simpleks – tablisanyň esasynda, x_i –iň dargadylmagyny x_j bazis däl näbellileriň üsti bilen ýazalyň. $j \in N$

$$x_i = x_{io} - \sum_{j \in N} x_{ij} x_j, \quad (i = 1,...,m) \tag{1}$$

ýokarda belleýşimiz ýaly x_i bitin san däl, şonuň üçin x_i den uly bolmadyk ýakyn bitin sany $[x_i]$ bilen belläliň we onuň tapawudyndan drob bölegini kesgitläliň

$$\{x_i\} = x_i - [x_i].$$

$\{x_i\}>0$ aýdyňdyr. (G,F) – meseläniň simpleks tablisasynyň i–nji setirinde goşmaça çyzykly çäklendirmäni kesgitläp bolýandygyny görkezip bolýar, ol bolsa dogry häsiýetlere eýedir.

Teorema 1. *Goý $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, (G^B,F) –meseläniň mümkin bolan çözüşleri, onda*

$$z_i \equiv z_i(x) = -\{x_{i0}\} - \sum_{j \in N} (-\{x_{ij}\}) x_j, \tag{2}$$

$z_i \geq 0,$ *z –bitinsan, gatnaşyklar dogry kesimi kesgitleýär.*

Netije. (G,F)–meseläniň, islendik $x(G,F)$ optimal çözülişi, (G^B,F) meseläniň çözülişi bolmasa, onda ol (2) dogry kesme şertini ýerine ýetirmeýär.

Şeýlelikde (G,F)–meseläniň, kömekçi meseleleriniň çözilmekligi bilen, goşmaça çäklendirmeleriň sanynyň köpeljekdigi aýdyňdyr, optimallaşdyrma meýilnamasynyň bolsa bitin san bolmadyk koordinatlary bolup möçber meselesi ýüze çykýar.

R. Gomeri tarapyndan kömekçi meseläniň simpleks tablisiýasynyň möçberi kiçeltmek meselesini kabul edip almany hödirlendi, (G,F) meseläniň, n näbellileriň sany, k–bazis däl näbellileriň sany, onda möçberi $(n+2)$x$(k+1)$ –deň.

Bu usulda bizi gyzyklandyrýan zat goşmaça çäklendirmeler bitin san däl, esasy goşmaça meseläniň optimal çözülişini kesmek usulyny ulanyp, bu ädimde emele gelen soňky meselä geçýäris. (G,F) – yzygiderli meseläniň indekslerini k=0,1,…, bilen, degişli iterasiýa nomerene görä (G^B,F) meseläniň yzygiderli ýakynlaşma çözülişini kesgitläp, ony (G_k,F) bilen belläliň. z_i näbellini, (2) goşmaça çyzykly çäklendirmäni kesgitleýän we (G_k,F) meseläniň, bir näçe bitinsan däl kordinantlarynyň optimal çözülişini gurýan x_{n+k+1} bilen belläliň. (G_k,F) yzygiderli meseläniň möçberi ulalmaz ýaly, gurulan goşmaça çyzykly çäklendirlen ulgamyň simpleks tablisasyndaky näbellini çyzmaly. Ýokarda görkezilen bellikleriň esasynda hasaplama shemasyna geçeliň.

1. (G_k,F)–meseläni (başda k=0) meýilnamany yzygiderli gowulama usuly bilen çözeliň.

Goý, optimal çözüwleriniň bazisine A_{s1}, A_{s2},…,A_{sm} wektorlar girýän bolsun. Iň soňky simpleks tablisiýanyň parametrini x_{ij} –bilen belläliň: onda

$$\Delta_j = x_{0j},\ (i=1,2,...,m;\ \ j=1,2,...,n).$$

Eger hemme bazisi düzýän x_{i0}, (G_k,F) meseläniň $x(G_k,F)$ optimal çözüşleri bitin bolsa, onda $X(G_k,F)=X(G^B,F)$. Eger x_{i0} bir

(5)-e görä biz aşakdaky derňewe seredeliň.

1) $$t=\frac{b_r}{b_{rs}}=\min(\frac{b_i}{b_{is}})>0 \quad onda \quad (-\frac{b_r}{b_{rs}})<0$$

2) eger

$$Q^{(I)}>0,$$

onda (5) sanawja baglydyr.

3) $$d_j=\begin{vmatrix} P_j^{'} & P^{(k)} \\ q_j^{'} & Q^{(k)} \end{vmatrix}=P_j^{'}Q^{(k)}-q_j^{'}P^{(k)}; \qquad z^{(k)}=\frac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}$$

bolýar, oňyn ýa-da oňyn däl.

4) $$d_j=d_s<0, \quad onda \quad z^{(k+1)}-z^{(k)}>0$$

diýmek (k+1)-nji ädim esasynda biz maximum (minimum) kesgitlemeklik üçin simpleks usulyň öňki düzgüni boýunça hereket edýäris.

5) eger-de biz çözýän meselämizde max gözlesek, onda biz $z^{(k)}=\dfrac{P^{(k)}}{Q^{(k)}}$ gatnaşygyň esasynda iň kiçi oňyn däl sütüni saýlaýarys. Edil şonuň ýaly min gözlesek onda ol elementiň hemmesini degişlilikde otrisatel bolmagyny gazanmaly.
6) Z(x) funksiýanyň alamaty kesgitleýjä baglylygy sebäpli biz geljekki derňewi max (min) gatnaşygy meseläni optimal çözmek üçin alamatyň esasynda gurmaly bolýarys.
7) Eger dj setiriň esasynda max gözlesek onda biz iň kiçi oňyn däl elementli sütüni saýlaýarys.

Simpleks usuly ulanyp, biz tablisada general elementi kesgitleýäris. Soňra k ädim simpleks usulyň esasynda täze ulgam alýarys. Ýöne simpleks usulyny ulanmazdan öň amaly meseleleriň goýulmagy şertiň esasynda daýanç meýilnamasyny gurýarys. Eger-de biziň netijämiz optimal bolmasa onda biz ony optimallyga derňemekligi dowam edýäris. General elemnti saýlaýarys we ýene bir ädim simpleks usuly ulanýarys. Ony aşakdaky görnüşde kesgitleýäris:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \frac{P_s^{'} b_r}{b_{rs}}; \quad Q^{(k+1)} = Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{P^{(k)} - \frac{P_s^{'} b_r}{b_{rs}}}{Q^{(k)} - \frac{q_s^{'} b_r}{b_{rs}}}; \qquad z^{(k+1)} = \frac{P^{(k+1)}}{Q^{(k+1)}}$$

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{P_s^{'} Q^{(k)} - q_s^{'} P^{(k)}}{Q^{(k)} Q^{(k+1)}} \left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right)$$

Bu tapawudyň maýdalawjysy iki sanyň köpeltmek hasylyndan ybarat bolup, onuň sanawjysy bolsa aşakdaky kesgitleýji görnüşinde ýazylýar:

$$ds = P_s^{'} Q^{(k)} - q_s^{'} P^{(k)} = \begin{vmatrix} P_s^{'} & P^{(k)} \\ q_s^{'} & Q^{(k)} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Indi bu meseläniň çözüwi esasan hem meseläniň sanawjysyna, ýagny ds we simpleks gatnaşyga bagly bolýar. Bu ýerde $b_{rs} \neq 0$ hem-de položitel, şeýle hem br daýanç meýilnamanyň esasynda otrisatel, položitel. Onda bu gatnaşyk umumy ýagdaýda drobyň sanawjysy ds görä kesgitlenilýär. Iň soňky kesgitleýjiden ds-i (4)-de goýup alarys:

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = \frac{ds}{Q^{(k)} Q^{(k+1)}} \left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right) \tag{5}$$

näçe kordinantlary, *x(G$_k$,F)* optimal çözüşleri bitin bolmasa, onda biz 2-nji punkta geçýäris.

2. Eger bir näçe *x(G$_k$,F)* optimal çözüwleriň toplumlarynyň içinde, ýeke täk bitin san däl nokat bar bolsa, onda goşmaça çyzykly çäklendirme (2) şol ýeke täk nokadyň kordinantlaryna görä gurulýar. Eger bitinsan däl kordinantlar *x(G$_k$,F)* birden köp bolsa onda, biz iň kicj nomerli sany saýlap alýarys we şoňa görä gurýarys. Goý şol x_{i0} bolsun. Onda goşmaça çyzykly çäklendirmäni düzýäris

$$x_{n+k+1} = -\{x_{i0}\} - \sum_{j \in N_k} (-\{x_{ij}\}) x_j \tag{3}$$

$$x_{n+k+1} \geq 0, k = 0,1,... \tag{4}$$

3. *(G$_k$,F)* meseläniň üstüne (3), (4) şertleri hem goşalyň. Onda täze *(G$_{k+1}$,F)* meseläni alarys. Belli bolşy ýaly *(G$_k$,F)* meseläniň *x(G$_k$,F)* optimal çözülişi, köpgranlygyň bir depesiniň şertini ýerine ýetirýär, onda ol nokat täze alynan mesele üçin başlangyç daýanç çözüwi hökmünde saýlap almaklyk mümkin, bu bolsa (G$_k$,F)–meseläniň iň soňky simpleks tablisasynda *(G$_{k+1}$,F)* meselesi üçin başlangyç diýip we (3) şert bilen dolduryp almak bolýar. Şeýlelikde *(G$_{k+1}$, F)* meselesi üçin, simpleks tablisasynda *(G$_k$,F)* meselesi üçin başlangyç diýip we (3) şert bilen dolduryp almak bolýar. Şeýlelikde *(G$_k$,F)* meselesi üçin simpleks tablisa *(G$_k$,F)* meseläniň iň soňky tablisasyndan (i+1)–nji şerti doňduryp elementleri

$$x_{i+1o} = -\{x_{1o}\},$$

x_{i+1j}=-{x_{lj}}, $j \notin N_k$. Nirede N_k, (G$_k$, F) meseläniň bazis däl näbellileri.

$$x_{i+1\,n+1} = 1,$$

$$x_{i+1j} = 0, \quad j \notin N_j$$

Onda biz täze meseläni alýarys, onuň näbellileri bolsa $x_1, x_2, ..., x_{n+k+1}$. Bu meseläniň şerti x_{s1}, x_{s2}, … , x_{sm} näbellilere görä rugsat edilen we $x_{n+k+1,}$ täze näbelliler (G, F) – meseläniň bazis däl näbellileriniň üsti bilen çyzykly görnüşde üsti bilen edilen. Belli bolşy ýaly biz *F(x)* maksat funksiýanyň maksimumyny kesgitlemek bilen meşgul bolýarys eger x^* (G_k,F) meseläniň optimal çözülişi bolsa onda hemme $\Delta_j \geq 0$. Şona görä (G_{k+1},F) meseläniň, täze çözülişine geçmäniň dogrylygyny barlamak usuly bilen ýerine ýetirip bolanok. Şol bir wagtda hem $x_{i+1,o} = -\{x_{io}\}$, şoňa görä A_0 wektor simpleks tablisasynda (G_{k+1}, F)–meseläniň daýanç çözülişi bolup bilmeýär, sebäbi çözülişi wektor diýilip, onuň hemme kordinatlary oňly däl bolman G_{k+1} ýaýlada ýerleşme şertini ýerine ýetirýär.

Şoňa görä, alynan $x = (x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, x_{i+1,0}^*)$ wektory (G_{k+1},F) – meseläniň galyp çözülişi diýip atlandyrylýar we simpleks tablisasynyň geljekki özgertmelerine geçýäris. (G_k,F) meseläniň galyp çözülişini k bilen belläliň, onda ugrykdyryjy setir $i+k+1$–nji setir bolup, k=0,1,2,…, . Şonuň üçin her bir etapda özgerdilen tablisada A_{i+k+1} wektor, tablisadan çykarylýar. Bir näçe kesgitli ädimden soňra ýa meseläniň bitinsanly çözülişini ýada, ony aňa getirip bolmaýandygyny (G^B,F) mesele üçin subut etmek bolýar.

Eger (G_k,F) meseläniň çözülişi bitinsanly x^* -yň optimal çözülişini gurmak bilen gutarsa onda m birinji komponentleriniň bitinsanly çözülişini kesgitlemek bilen; eger x* koordinantlaryň içinde drob sanlar bar bolsa, onda bir drob komponentiň (düzgün bilen önümden kesgitleýäris) goşmaça çäklendirmäni emele getirýär we çözüliş prossessi täze galyp çözüşler bilen ýagny setiri doňdurma bilen dowam etdirilýär.

Öňki doňdyrylan setir (ozal ulanylan) üsti çyzylýar we başga giňeldilen meseleler gurmak üçin täzeden dikeldilmeýär. (G_k,F) – meseläniň çözüliş prosedurasy we alynan çözülişi uly iterasiýa (gaýtalama) diýip atlandyrýarys. Onuň nomeri (G_k,F) meseläniň çözüliş nomeri bilen gabat gelýändir.

Uly iterasiýanyň netijesi täze (G_{k+1},F) meselä geçmek bolup ýa –da meseläniň çözüwiniň soňuna ýetmek.

§3. Ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesiniňoptimal çözüliş usullary

Bize belli bolşy ýaly çyzykly programmirlemäniň meselesi, onuň maksat funksiýasyna we

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (1)$$

çäklendirmeler ulgamyna görä

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad (2)$$

çyzykly bolan meselä aýdylýar.

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,...n. \qquad (3)$$

Biz ülüşli çyzykly däl meseläni çyzyklaşdyrýarys. Sebäbi berlen çäklendirmeler ulgamy çyzykly, maksat funksiýa çyzykly däl ülüşli, ýöne bi ony çyzyklaşdyrmak üçin haýsy hem bolsa amatly bellik girizýäris. Ýa-da onuň çözüwini gözlämizde maksat funksiýanyň sanawjysy $-z_1$, maýdalawjysy $-z_2$ aýratyn setiri ýazýarys. Soňra biz bu meseläni bize belli bolan simpleks usuly bilen çözýäris we onuň optimal çözüwini tapýarys. Goý, bize ülüşli çyzykly mesele berlen bolsun. Ol aşakdaky tablisada görkezilen.

Tablisa 1

	$-x_1 \quad -x_2 \quad ... \quad -x_n$	1
$y_1 =$	$a_{11} \quad a_{12} \quad ... \quad a_{1n}$	a_1
$y_2 =$	$a_{21} \quad a_{22} \quad ... \quad a_{2n}$	a_2
……	… … … … …. …	…
$y_m =$	$a_{m1} \quad a_{m2} \quad ... \quad a_{mn}$	a_m
$z_1 =$	$-p_1 \quad -p_2 \quad ... \quad -p_n$	0
$z_2 =$	$-q_1 \quad -q_2 \quad ... \quad -q_n$	0

Eger z monoton artýan bolsa onda onuň hereketi sagat diliniň tersine bolýar. Eger kemelýän bolsa onda sagat diliniň ugruna bolýar.

z funksiýanyň kemelýändigini ýa-da artýandygyny kesgitlemek üçin ýagny onuň monotonlygyny kesgitlemek üçin k-dan z-e görä önüm alýarys:

$$\frac{dk}{dz} = \frac{-q_1(zq_2 - p_2) - (p_1 - zq_1)q_2}{(zq_2 - p_2)^2} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2}$$

Görşümiz ýaly alynan önümiň netijesinde emele gelen gatnaşykda drobyň maýdalawjysy elmydama položitel, onda bu gatnaşygyň sanawjysyna bagly bolup sanawjyda bolsa, z näbelli bolmanlygy üçin oňa bagly däldir. Şoňa görä bu önümiň alamaty hemişelik bolup, z funksiýa artanda gatnaşyk artýar, kemelende bolsa kemelýär, we koordinatalar okunyň daşynda aýlanýar. Şonuň üçin biz z-iň diňe ertanda, diňe kemelende koordinatalar okuna görä onuň max ýa-da min depelerini kesgitleýäris. Diýmek z funksiýanyň bu max, min kesgitlemeklik onuň depelerini kesgitlemekligi esasy meseläniň özeni bolup durýar. Bu ýagdaýda aşakdaky ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1) eger Ω köpburçluk berlen bolsa, z funksiýa ösýän bolsa, artýan bolsa, onda biz koordinatalar okundan çykyp, göni çyzygy kesgitläp, onuň min hem-de max depelerini tapýarys.
2) birnäçe ýagdaýlarda Ω köpburçlugy çäklendirilmedik bolsa, ýöne onuň max hem-de min depeleri kesgitlenen bolup, onuň max hem-de min bahalary tapylýar.
3) eger-de z funksiýa haýsy hem bolsa bir depeden max, min kesgitlenen bolsa, onda onuň ikinji birisi kesgitlenmän Ω köpburçlugyň haýsy hem bolsa bir tarapyna görä ∞ barýan bolsa onda olar ∞ duşuşyp onuň max asimptotiki bahasy bar diýilýär
4) eger-de max, min bahasy kesgitlenen bolsa onda onuň max, min bahalary diňe asimptotiki bahalara eýe bolup, ∞ deň bolýar.

§4. Bitinsanly çyzykly meseleler. Ähtimal gözleg usuly

Bitin sanly meseläniň umumy shemalaryň kömegi bilen çözülende, ol usullaryň kynçylygy dürli görnüşdäki takmyn usullaryň ýüze çykmagyna getirdi we olaryň takyk meseleleriniň algoritmini düzmek üçin ulanylýar. Takmyn usullaryň arasynda esasy bolup 2-i ugur bellenilýär:

1) Tötän gözleg ýa-da tötän gözleg çäklendirilen (локальный) optimallaşdyrma bilen baglylykda.

2) Ýörite meselelerde ulanylýan, determirlenen ewristik algoritmleri bejermek.

I. **Tötän gözleg usuly.** Bitinsanly meselänin iteratiw usuly bilen çözmeklik, aşakdaky Bulewli näbellili mesele üçin hödürlenýär:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \tag{1}$$

G ýaýlada aşakdaky görnüş:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{2}$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1, \quad j = 1,2,...,n. \end{cases} \tag{3}$$

nirede a_{ij}, b_i, c_j–otrisatel däl diýip hasap edilýär. Wektor $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, (2) – (3) şertleri ýerine ýetirýär we (*T*) wagtda *F(x)* funksiýa iň uly bahany berýär. şonyň üçin ony wagta görä optimal (1)-(3) meseläniň çözülişi diýip atlandyrýarys. Görüşimiz ýaly Tötän gözleg usuly (1)–(3) meseläniň wagta görä optimal çözülişini kesgitlemäge getirýär, ol aşakdaky şertlerden durýar:

Haýsy hem bolsa bir z_0 sany fiksirläp, deňsizlikler ulgamyna seredeliň.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge z_0 \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \tag{5}$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1, \quad j = 1,2,\dots,n. \end{cases} \qquad (6)$$

Biri –birinden z_0 bilen tapawutlanýan (4)-(6) meseläniň görnüşine meňzeş (Tun), meseläniň iteratiw prosesiniň guramaçylykly çözülişini gurnalyň

$$z_k = z_{k-1} + \Delta z, \qquad k = 1,2.... \qquad .$$

Çözülişin netijesinde biz x_0, x_1,…, wektorlary alarys. T wagt aralykdaky çözüliş we degişlilikde iň soňky z_k, kesgitleme boýunça (1)-(3) meseläniň wagta görä çözülişi bolar. Indi bolsa (4)-(6) çyzykly deňsizlikler ulgamynyň çözüliş usulyna seredeliň. goý $x_0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Şeýle bir saýlanyn alynan çözüşler

$$x_J^0 = \begin{cases} 0 \\ 1, \quad j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

hasaplalyň

$$\Delta_0^0 = \max\left\{ z_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 ; 0 \right\} \qquad (7)$$

$$\Delta_i^0 = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i ; 0 \right\}$$

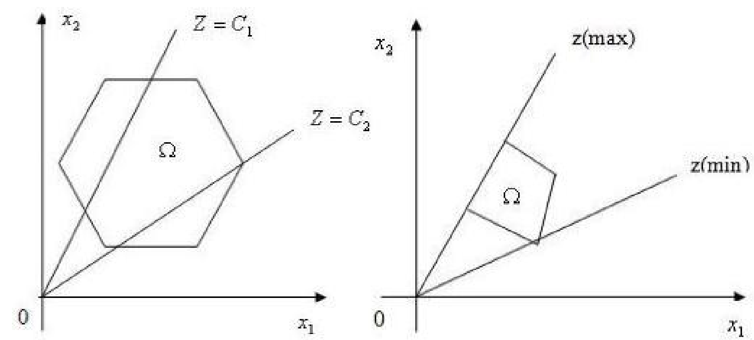
Eger hemme $\Delta_i^0 = 0$ onda berilen z_0, x_0 (4)–(5) ulgamyň çözülişi bolýar. Eger $\Delta_i^0 \neq 0$ bir näçe komponent üçin, onda tötänden üýtgemegine x_0 wektoryň üçin täze x, wektora gelýäris. Ol bolsa öňküden üýtgedilendir. Täze alynan x wektor üçin Δ_i^1 taparys we ýokarda görkezilen derňewi geçireris. X_k wektory gurmanyň Prosessi berilen z_0 üçin gaýtalanýar, tä bir m –nji ädimde hemme $\Delta_i^m = 0$, deň bolýança.

§2. Ülüşli çyzykly meseläniň grafiki usul bilen optimal çözülişi

Biz meseläniň grafiki usul bilen çözülişini kesgitlemek üçin Ω köpburçlugyna seredeliň. Ýagny tekizlikde x_1 *we* x_2 koordinatalaryna görä

$$x_2 (p_1 - zq_1) x_1 \quad ya - da \quad x_2 = kx_{1;} \qquad k = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}$$

Bize belli bolşy ýaly ýokardaky x_2 *we* x_1 görä deňleme koordinatalar okunyň başlangyjyndan geçýän bissektrisany aňladýar. Eger-de biz z funksiýanyň bahasyny fiksirlesek onda k-nyň takyk bahasyny alarys. Ol bolsa z funksiýanyň artmagynyň esasynda koordinatalar başlangyjyndan geçýän göni çyzyk saga ýa-da çepe koordinatalar başlangyjyna görä aýlanýar. Sebäbi burç koeffisiýenti k z-iň üýtgemegi bilen ol hem üýtgeýär.



2-nji surat

z-iň monoton üýtgemegi bilen *k* hem üýtgäp koordinatalar başlangyjyndan çykýan göni çyzyk tekizlikde ýerleşen Ω köpburçlugyň maximum hem-de minimum depelerini koordinatalar okunyň daşyndan aýlanmak esasynda kesgitlenilýär.

z(x) gatnaşykda ýokarda goýup aşakdaky gatnaşygy alarys:

$$z(x)=\frac{\lambda_1 z_{\max} z_2(x^{(1)})+\lambda_2 z_{\max} z_2(x^{(2)})+\ldots+\lambda_k z_{\max} z_2(x^{(k)})}{\lambda_1 z_2(x^{(1)})+\lambda_2 z_2(x^{(2)})+\ldots+\lambda_k z_2(x^{(k)})}=$$

$$=\frac{z_{\max}[\lambda_1 z_2(x^{(1)})+\lambda_2 z_2(x^{(2)})+\ldots+\lambda_k z_2(x^{(k)})]}{\lambda_1 z_2(x^{(1)})+\lambda_2 z_2(x^{(2)})+\ldots+\lambda_k z_k(x^{(k)})}=z_{\max}$$

Teorema subut edildi.

Netijede biz teoremany subut edip, seredilýän köpburçlugyň birnäçe depesinde optimala eýe bolýan bolsa, onda onuň gabygyndada maximuma ýetýändigini subut etdik. Indi bolsa teoremanyň 1-nji bölegi ýagny *z* funksionalyň artmagy ýa-da kemelmegi barada teoremanyň subudyny teorema1 we teorema2 esasynda subut etdik.

Eger *T* wagt mümkinçilik berýän bolsa onda z_0 köpelýär, ýagny

$$z_1=z_0+\Delta z$$

we täze girizilen tötän wektor üçin ýokarda görkezilen prosess gaýtalanýar.

§5. Bitinsanly çyzykly meselelerde determirleme usuly

Bu ýagdaýda ýörite mesele hökmünde “fiksirlenen goşmaça tölegli ulag meselesine” seredeliň.

Goý m punktlarda (ýerlerde) haýsy hem bolsa bir görnüşli önüm (serişde) öndürilýän bolsun we olary n punktlarda peýdalanylýan bolsun. Öndürmekligiň we peýdalanmaklygyň möçberi bolsa degişlilikde a_i $(i=1,\ldots,m)$, b_j $(j=1,\ldots,n)$ ululyklar bilen kesgitlenýän bolsun. x_{ij} möçberde -i-nji punktdan j-nji peýdalanylýan punkta ertmekligi kesgitlemeli, eger ulag tipli mesele görnüşde çäklendirmeler kanagatlandyrylmaýan bolsa.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum^{n} c_{ij}(x_{ij}) \tag{3}$$

nirede $c_{ij}(x_{ij})$ aşakdaky görnüşe eýedir.

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, x_{ij} = 0, \text{ bolsa} \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, x_{ij} \neq 0 \text{ bolsa} \end{cases} \tag{4}$$

$c_{ij} > 0$ birlik ýükiň i-nji punkdan j-nji punkta elmäniň birlik bahasy $d_{ij}>0$ goşmaça töleg eltmeklik bilen baglylykda d_{ij}-niň ykdysady manysy: ulag serişdeleriniň (arenda) peýdalanmagynyň, ýüklenilmegine bagly bolmadyk ýagny, ýol gurluşyklary we başgalara degişli goşmaça töleg. (1)-(4) mesele “goşmaça tölegli Fiksirlenen ulag meselesi ýa-da bir jynsly däl

ekstremuma eýe bolýar. Eger-de biz köpgranlylyga seretsek onda ol ekstremumyna gapdal gapyrgasynda eýe bolýar.

Teorema 1 esasynda biz z funksiýanyň monoton artýandygyny, ýa-da monoton kemelýändigini görkezdik. Indi bolsa teoremanyň 2-nji bölegine seredeliň.

Goý, $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ nokatlarda z funksiýa max ýetýän bolsun. Ol nokatlar güberçek köpburçlygyň ahyrky nokatlary diýlip hasaplanylýar. Meseläniň şertine görä biz

$$z_{\max}(x) = \frac{z_1(x')}{z_2(x')} = \frac{z_1(x^2)}{z_2(x^2)} = \ldots = \frac{z_1(x^n)}{z_2(x^n)} \tag{5}$$

Eger-de biz Ω köpburçlugyň gabygynda ýerleşýän erkin x nokatlaryny saýlasak onda ol nokatlaryň esasynda biz çyzykly kombinasiýasyny ýazyp bileris:

$$z(x) = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{q_1x_1 + q_1x_1 + \ldots + q_nx_n} \tag{6}$$

Eger-de biz deňligiň sag tarapyna hem-de çep tarapyna degişlilikde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ köpeldip aşakdaky netijäni alarys:

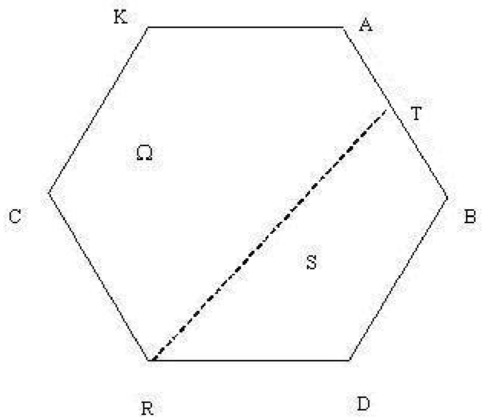
$$z(x) = \frac{\lambda_1 z_1(x^{(1)}) + \lambda_2 z_1(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k z_1(x^{(k)})}{\lambda_1 z_2(x^{(1)}) + \lambda_2 z_2(x^{(2)}) + \ldots + \lambda_k z_2(x^{(k)})}$$

Meseläniň şertine görä (5)-den alarys:

$$\begin{cases} z_1(x^{(1)}) = z_{\max} z_2(z^{(1)}) \\ z_1(x^{(2)}) = z_{\max} z_2(x^{(2)}) \\ ------------- \\ z_1(x^{(1)}) = z_{\max} z_2(x^{(k)}) \end{cases}$$

saklanýandygy üçin onuň onuň monotondygyny görýäris. Teorema subut edildi.

Teorema 2. *Ülüşli funksional Z, Ω köpburçlugy diňe depelerinde max hem-de min bahalara eýe bolup bilýär.*
Eger funksional z Ω-köpburçlugyň birnäçe depelerinde max hem-de min eýe bolup bilýän bolsa, onda şol köpburçlugyň gabygynda hem eýedir.
Subudy. Biz teoremanyň 1-nji böleginiň subudyny tersine subut edeliň. Goý bize Ω köpburçlugy berlen bolsun. Goý şol köpbuçlukda ýerleşen s nokatlarda z funksional maz baha eýe bolýan bolsun.



1-nji surat

Onda eger biz şol s nokatlardan aşaklygyna R depä çenli süýşsek onda z funksiýanyň bahasy artýan bolsun. Eger s nokatlardan ýokary T nokatlara çenli süýşsek, onda z funksiýanyň bahasy peselýär. Haçan T nokatlara baranda ol min baha eýe bolar. Onda biz ters tarapa hereket edenden soň funksiýanyň monoton artýandygyny görýäris. Ýagny R nokatlar T nokatlara tarap hereket edenden soňra onuň monoton kemelýändigini görýäris. Onda ekstremum elmydama köpburçlugyň çäkli nokatlarynda, depesinde

ulag meselesi” diýilýär. Ol belli bolşy ýaly çyzykly däl meseleleriň synpyna girýär. Sebäbi diýseň maksat funksiýa üzülýän ýa –da bölünýän funksiýadyr. Eger hemme d_{ij}=0 bolsa onda ol ýönekeý çyzykly meseleler (tipina) görnüşine degişli bolýar. Bizi haçan $d_{ij}\neq 0$ ýagdaýy gyzyklandyrýar. M. Balinskiý tarapyndan (1)-(4) meseläni bölekleýin bitinsanly çyzykly meseläniň görnüşine (tipina) getirmek, bolýandygyny görkezdi. Bellikler girizeliň. $M_{ij}=min(a_i,b_j)$ meselä seredeliň:

$$\min F(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij}+d_{ij}y_{ij}) \qquad (5)$$

aşakdaky şertlerde

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\qquad x_{ij}\geq 0 \qquad (6)$$

$$y_{ij}=\begin{cases}0,\\ 1\end{cases} x_{ij}\leq M_{ij}y_{ij} \qquad (7)$$

(1) – (4) we (5) –(7) meseleleriň ekwiwalentdigini görkezmek bolýar.

Teorema1. *Eger ulag meselesinde fiksirlenen gösmaça tölegleriň hemmesi d_{ij}=d=canst we şoňa degişli goşmaça tölegsiz c= $||cj_j||$ matrisasy bilen azmadyk onda iki meseläniň hem optimal çözüşleri gabat gelýär.*

Subudy. Hakykatdan hem azmaýan meselede x_{ij} san nula deň bolmadyk çözüwleri d_{ij} $m+n$–1 deň, şoňa görä

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

$$F_1(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}x_{ij}+d)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}+d(m+n-1),$$

olar biri –birinden hemişelik ululyk bilen tapawutlanýarlar, ýagny maksat funksiýalary.

Teorema 2. *Eger ulag meselesinde goşmaça fiksirlenen töleg d_{ij} dürli bolsa, onda onuň optimal çözülişini oňa degişlilikdäki ulag meselesiniň gosmaça tölegsiz daýanç çözülişiniň içinden gözlemeli, özem şol bir C matrisaly.*

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_1' + (1-\lambda)x_1' \\ x_2 = \lambda x_2' + (1-\lambda)x_2' \\ ------------ \\ x_n = \lambda x_n' + (1-\lambda)x_n' \end{cases}$$

Eger biz droby sanawjysyny kesgitlesek onda:

$$z_1(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = p_1(\lambda x_1' + (1-\lambda)x_1'') +$$
$$+ p_2(\lambda x_2' + (1-\lambda)x_2'') + \ldots + p_n(\lambda x_n' + (1-\lambda)x_n'') =$$
$$= \lambda(p_1x_1' + p_2x_2' + \ldots + p_nx_n') + (1-\lambda)(p_1x_1'' + p_2x_2'' + \ldots + p_nx_n'')$$
$$z_1(x) = \lambda z_1(x') + (1-\lambda)z_1(x'')$$

Edil ýokardaky ýaly drobyň maýdalawjysyny ýazýrys:

$$z_2(x) = \lambda z_2(x') + (1-\lambda)z_2(x'') \qquad (2)$$

$$z(x) = \frac{\lambda z_1(x') + (1-\lambda)z_1(x'')}{\lambda z_2(x') + (1-\lambda)z^2(x'')} \qquad (3)$$

Egerde biz (3)-de berlen x' hem-de x'' näbellileri ýagny, köpburçlukda berlen göni çyzykly kesimiň ahyrky nokatlaryny fiksirlenen diýsek, onda (3) görnüşdäki ülüşli funksiýalarymyz λ näbellä görä funksiýany emele getirýär. (3-den) λ görä önüm alyp funksiýanyň monotonlygyny kesgitläliň:

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{z_1(x')z_2(x'') - z_2(x'')z_2(x')}{[z_2(x)]^2} \qquad (4)$$

Netijede biz λ görä (4)-I aldyk, ol gatnaşyk esasan alamaty boýunça drobyň sanawjysyna bagly bolup durýar. (4)-ň esasynda biz ülüşli funksional z-ň alamatynyň şol bir görnüşde

Mundane başga hem ykdysady görkezmeleriň birisi, ýagny önümçilikden girýän arassa girdeýji ol önümiň bahasyndan harajady aýyrmakda emele gelýär. Egerde biz arassa girdeýjini harajada bölsek, ýagny onuň gatnaşygy ykdysadyýetde peýdalylyk düşünjäni berýär.
Netijede, biz ülüşli çyzykly däl meseläniň matematiki modelini aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$F = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\dots,n. \qquad (4)$$

2. Ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesine degişli esasy teoremalar.

Teorema 1. *Ω köpburçlyga degişli bolan $\forall$ göni çyzykly kesimde ülüşli z funksional monoton üýtgeýändir.*

Subudy. Goý bize Ω köplügiň içinde, ýagny köpburçlukda ahyrky nokatlara $x^{'}$ *we* $x^{''}$ bolan kesim berlen bolsun. Onda biz köpburçlygyň güberçek häsiýetine görä ahyrky nokatlaryň üsti bilen şol kesimiň islendik nokatlrynyň çyzykly kombinasiýasyny

$$x = \lambda x^{'} + (1-\lambda)x^{''}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

ýazmak bolar. Onda şol kesimiň içindäki ýerleşen nokatlary şeýle görnüşde ýazmak bolar:

§6. Bitinsanly çyzykly meseleler. Balinskiniň usuly

Bu usul aşakdaky teorema esaslanandyr.

Teorema 3. *Goý* $x' = \|x'_{ij}\|, y' = \|y'_{ij}\|$ *-ýokarda seredilen meseläniň optimal meýilnamasy bolsun, haçan* $x_{ij} \le M_{ij} y_{ij}$. *Onda*

$$x'_{ij} = M_{ij} y'_{ij} \qquad (1)$$

ýerine ýetýär.

Goý, $y'_{ij} > 0$, onda $x'_{ij} < M_{ij} y_{ij}$ bolanlygy üçin y_{ij} -kiçelderis tä (1) ýerine ýetýänçä. Ýagny $y'_{ij} = 0 \Rightarrow x'_{ij} = 0$

Ýönekeýlik üçin teoremany subut etmeýäris. y_{ij}-niň bitinsanlydygyny göz öňüde tutmazdan iň soňky deňlemeden kesgitläp alarys:

$$y_{ij} = \frac{x_{ij}}{M_{ij}}$$

bu gatnaşygyň esasynda, iň soňky meselede göz öňinde tutup, meseläni aşakdaky görnişde ýazmak bolýar:

$$\min F(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(C_{ij}x_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}}x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(C_{ij} + \frac{d_{ij}}{M_{ij}}\right)x_{ij}.$$

G-ýaýlada kesgitlenilen şertleriň esasynda

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, x_{ij} \ge 0.$$

Ỳagny ýönekeý ulag meselesine gelýäris, onuň çözülişi bolsa, takmyn fiksirlenilen goşmaça tölegli mesele höküminde çözülýär.

Goý, x_{ij}^{*}- ýokarky meseläniň optimal çözülişi bolsyn, onda gözlenýän meseläniň takmin çözülişi aşakdaky görnişe eýe bolýar.

$$x_{ij}^{0} = y_{ij}^{0} = 0, \text{eger } x_{ij}^{*} > 0:$$
$$x_{ij}^{0} = x_{ij}^{*}, y_{ij}^{0} = 1, \text{eger } x_{ij}^{*} > 0,$$

Bu ýerde x_{ij}^{0}, y_{ij}^{0} -takmyn çözülişiň fiksirlenilen goşmaça tölegli meseläniň koordinatalary. Biziň ýokarda görkezen usulymyz meseläni doly çozmeklikde ulanylýan usul hökmine ulanyp bolmaýar. Ol diňe bitin sanly meseleleriň takmyn çözlişiniň bir näçe görnişleriniň bardygyny görkezýär.

VII Bap. Ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesi

§1. Ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesi

1. Ülüşli çyzykly programmirlemä gelýän amaly mesele.
Goý, haýsy hem bolsa bir önümçilik kärhananyň önüm çykarylyşy n görnüşli tehnalogiýa arkaly bolsun. Eger-de önümiň çykarylyşynyň birlik wagtynda seretsek, we ony degişlilikde bellesek, ýagny $q_1, q_2, ..., q_n$ edil şonuň ýaly hem, şol birlik wagtda önümi öndürmäge çykarylýan harajady degişlilikde, $p_1, p_2, ..., p_n$ bilen belgilesek, şeýlede önümiň öndürilişiniň tehnalogiýalarynyň görnüşlerini $x_1, x_2, ..., x_n$ näbelliler bilen belläp, biz

$$z_2(x) = q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_nx_n = \sum_{j=1}^{n} q_jx_j$$

görňüşde önümiň umumy çykyşynyň n tehnalogiýa arkaly jemini kesgtläp bilýäris. Edil şonuň ýaly:

$$z_1(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{j=1}^{n} p_jx_j$$

Ykdysadyýetde belli bolan gymmat diýen görkezme ýkardakydan alarys:

$$F = \frac{z_1(x)}{z_2(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} q_jx_j} \qquad (1)$$

(1)- önümiň öndürilmek üçin düşýän gymmaty. (1)-iň netijesi gatnaşygyň kiçiligi we ululygy bilen kesgitlenilýär. Eger (1) örän kiçi bolsa, onda seredilýän kärhananyň girdeýjisi uly bolýar, tersine (1) uly bolsa, onda kärhananyň girdeýjisi kiçi bolýar.

Maksat funksiýanyň ülüşli bolmagy bilen bu mesele çyzykly däl programmirlemäniň meselesine öwrülýär.

bilen çalşyrylyp bilner. $]a[$ bellik a-dan kiçi bolmadyk iň kiçi bitin sany aňladýar.

2.Algoritmiň çäkliligi G köplügiň çäkliliginden gelip çykýar.

3.Biziň seçip alan algoritmimiz eger bitin sanly hasaplamanyň şertleri n sana dälde, eýsem bolsa $n_1<n$ näbellilere goýlanda bolsa has peýdalylygy aýdyňdyr.

§7. Bitinsanly çyzykly meseleleriň kesmek usuly

Bilşimiz ýaly bitin sanly programmirlemäniň esasy meselesi aşakdaky görnüşinde ýazylýar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1,...,n \tag{1}$$

Şeýle hem,

$$x_j \ge 0. \qquad j = 1,2,...,n, \tag{2}$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{3}$$

$$x_j \text{ – bitin san, } j=1,2,\ldots,n \tag{4}$$

Eger biz bu meseleleri aýratyn belgilesek (G,F) çyzykly programmanyň esasy meselesi ýagny (1) –(3) mesele.
(G^B,F)$\to$ (1) – (4) bitin sanly mesele.
Şu iki meseleleriň esasynda şeýle bir sorag ýüze çykýar: ýagny, haçan (1) – (3) meselesini çözenimizde nähili?.

Şol meseläniň optimal çözüwi (1)-(4) mesele bilen ýagny optimal çözüwini (G^B,F) bilen gabat geler ýaly ýagny optimal çözüwini kesgitläp bolar ýaly usuly kesgitlemeli. Bu soraga jogap edip aşakdan teorema esas bolup bolýar.

Teorema1. *Goý, G köpburçly (köpgranlyk) G^B –bitinsanly nokatlaryň köplügi bolsun. Şol köplügiň güberçek gabagyny R diýip belgiläliň. Onda*

1) *$R = R^B$, Yagny bitinsanly güberçek gabyk bilen gabat gelýär.*
2) *R^B=G^B ýagny bitinsanly gabak gabat gelýär.*
3) *R^* diýip (G^B,F) meseläniň daýanç çözülişiniň köplügi ol R^B köpburçlykda ýerleşýär.*

Ýokardaky teoremanyň esasynda şeýle netijä geldik.

Netije. Eger (G,F) meseläniň optimal çözüwi bar bolsa hem–de onuň çäklendirilen ýaýlasy güberçek çyzykly gabyk bilen örtülen bolsa. Onda onuň optimal çözüwe bitin sanly mesläniň hem çözüwine gabat geler.

Şeýlelikde biz umumy meseläniň (G,F), (G^B,F) meseläniň optimal çözüwini baglanyşdyryp bolýanlygyny ýakardaky netije bilen teorema esasynda gördük. Ýöne ony nähili ýagdaýda optimallyga getirip bolýandygyny bolsa tejribe taýdan belli däl. Muňa jogap edip san Dansig tarapyndan aşakdaky usulyýet hödürlenende, ýagny (G,F) meselesiniň optimallyga çözülişini gözlemeli soňra bolsa bitin san bilen barlamaly. Bu meseläniň optimallyga çözülmagiň algoritmini aşakdaky ýagdaýda suratlandyrylýar.

1) (G,F) we (G^B,F) meselesiniň ikisi üçin hem optimal çözüwi gözelnilýär;

2) Eger gözlenilip tapylan optimal çözüliş iki mesele üçin hem amatly bolsa ýagny onuň şertlerini kanagatlandyrýan bolsa onda bitin sanly meseläniň optimal çözüwini kesgitlänimiz bolar. Eger – de bitin sanly (G^B,F) kanagatlanmaýan bolsa, onda ol meseläniň optimal çözüwini gözlemeli bolar;

3) meseläniň hem optimal çözüwleri gabat gelmese, onda goşmaça çäklendirmeler girizmeli bolýar;

a) Goşmaça girizilen çäklendirme çyzykly bolmalydyr. Sebäbi çyzykly programmirlemäniň meselesi bilen çözmek üçin.

b) goşmaça girizilen çyzykly çäklendirme üçin (G,F) meselesinden bitinsanly (G^B,F) meselesini kesip almalydyr. Ýagny

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \le b_j \qquad (5)$$

şol kesilen bölegiň dogrudygyny ýa –da dogry däldigini kesgitleýär.

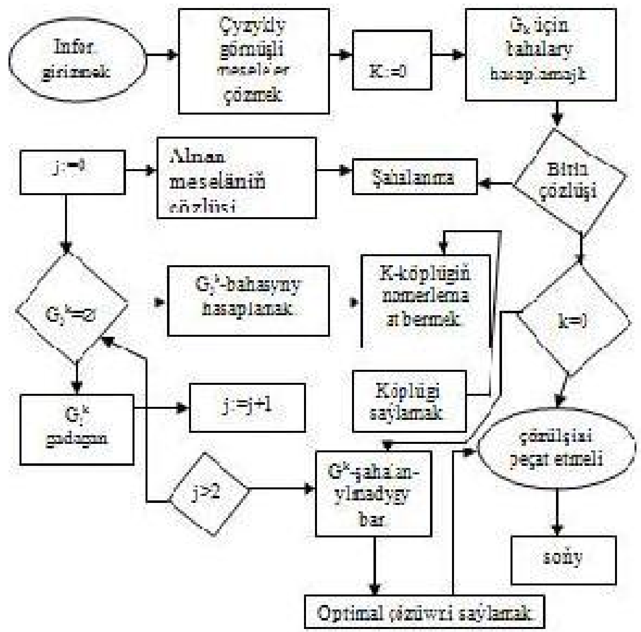
Şu prosesi (G^B,F) meseläniň optimal çözüwi bolýança yzygiderlikde her sapar goşmaça çyzykly çäklendirmäni goşup dowam edýäris.

düzgün boýunça şahalanma geçireris.

Bu ýerde l-uly bahaly köplügiň indeksi S, G_{i-1} ýaýladaky mesele üçin optimal çözüwiň bitin däl koordinatalarynyň nomeri .

Diýmek, Lend bilen Doýguň algoritmi her bir bölek köplügini simpleks usuly bilen tapmaklagy optimal meýilnamanyň bitin sanly hasaplamanyň koordinatalarynyň köplüginiň yzygiderli şahalanmasyndan ybaratdyr.

Usulyň blok shemasy getirilen.



1-nji surat

Bellik 1.Eger maksat funksiýanyň hemme koofisentleri C_j-bitin, haçan $j \le n_1$ we $j > n_1$-de 0-a deň, onda G_i köplük üçin baha ondan has güýçli baha

$$\xi(G_i) = \xi\ (G_i) = \left[F(x_i^*)\right]$$

diýmek onda, $G_0 = \bigcup_i G_i$ *we* $\bigcap_i G_i \neq \varnothing$ bolan G_i bölek köplükleri gurmak düzgünine görä alynandyr.

Bu ýerde G_0 hemme çözüwleri kanagatlandyrýan hem-de öz içinde saklaýan köplükdir we (2-4) şertleri ýerine ýetirýändir. G_1 we G_2 –leri guralyň :

$$G_1 = \{ x | x \in G_0, x_k \leq [x_k^*] \} \quad (5)$$
$$G_2 = \{ x | x \in G_0, x_k \geq [x_k^*] + 1 \}$$

Diýmek , (1-4) meseläniň çözüwiniň prosesi 2-sany çyzykly programmirleme meseläniň çözüwleri bilen çalşyrylýar .Olaryň 1-njisinde $j=k$ bolanda (4) şert (5) talap bilen 2-njisinde bolsa (6) şert bilen çalşyrylýar.

$$\begin{cases} 0 \leq x_k \leq [x_k^*] \\ x_k \geq [x_k^*] + 1 \end{cases}$$

Ỳene alnan meseleleri çözeliň Eger olaryň çözülmesi mümkin bolmasa onda degişli bölek köplügiň bahasy tükeniksizlik bolýar .Bu bölek köplük indiki şahalanma üçin gadagan .Eger bütin hasaplamaň hemme şertleri ýerine ýetse ,meselem, (1-4) mesele üçin onda onuň amatly çözüwi bolup (1-4) mesele üçin çözüw ýolbererliklidir. Eger bütin hasaplamaň şertleri 2-gurlan meseleler üçin ýerine ýetýän bolsa, onda başky (1-4)meseläniň amatly çözüwi bolup durýar. Eger bitin hasaplamaň şertleri gurlan meseleleriň amatly çözüwleriniň koordinatalarynyň iň bolmanda biri üçin hem ýerine ýetmeýän bolsa onda

$$G_i = \{ x | x \in G_{i-1}, x_s \leq [x_s^*] \}, \quad (6)$$

$$G_{i+1} = \{ x | x \in G_{i-1}, x_s \geq [x_s^*] + 1 \},$$

V BAP. Parametrik çyzykly meseleleriň görnüşleri

§1. Parametrik maksat funksiýaly parametrik däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

Goý, bize berlen köplügiň içinde her bir λ üçin $\overline{X}_\lambda$ wektory kesgitlemeklik gerek bolsun. Goý maksat funksiýasynyň maksimumyny kesgitlemeli bolsun:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (C'_j + \lambda C''_j) x_j \quad (1)$$

Seredilýän maksat funksiýany kesgitleýän ýaýlasy

$$\begin{cases} Ax = b \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

formuladan alynýar. (1) formuladan daýanç meýilnamasynyň meselesiniň bazisi birnäçe λ-lar üçin optimaldyr. Eger bu bazisiň hemme şertleriniň bahasy berlen λ ululykda hasaplananda oňly bolsa λ parametriň doly bahasynyň toplumy, haçan bazis optimal bolanda, onda oňa bu bazisyň optimallaşdyrmasynyň toplumy diýilýar. λ parameter baglylykda (2)-(1) meseläniň çözülişi hususy hallaryna seredeliň. Goý $\lambda = \lambda_0$ bolsun we meseläniň yzygiderlikde meýilnamasyny gowlamak usuly bilen çözeliň. Netijede tükenikli sanly meýilnamanyň esasynda aşakdaky iki hususy hallara seredeliň.

1) Haçan λ_0 berleninde gözlenýän ýa-da barlygyny berýän meýilnama optimaldyr.

2) Haçan λ_0 berlende barlanýan meýilnama optimal däldir ýagny (1)-nji formula bilen berlen maksat funksiýa kesgitsizdir. Onda olara degişlilikde seredeliň.

a) $\Delta_j(\lambda_0)$- $\vec{A}_j$- wektoryň esasynda optimal bazisleri bolan $A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{im}$ bahasy bolsun şol bahany Hasaplamak gerek bolsun, onda

$$\Delta_j(\lambda_0) = \sum_{s=1}^{m} C_{is}(\lambda_0) X_{isj} - C_j(\lambda_0) =$$

$$= \sum_{s+1}^{m} C_{is} X_{isj} - C_j + (\sum_{s+1}^{m} C_{is} X_{isj} - C''_j)$$

onda

$$\Delta_j(\lambda_0) = \Delta'_j + \lambda_0 \Delta''_j \qquad (2)$$

Eger bir $\lambda=\lambda_0$ meýilnamanyň optimallygyna görä $\Delta_j(\lambda_0)$ bahasyny hasaplamak üçin $\Delta_j(\lambda_0)\geq 0$ islendik λ_0 üçin soňky deňsizlik ýerine ýeteninde alnan optimal çözülişiň bolşy bizi gyzyklandyrýar. Eger λ_0 üýtgeýän mahalynda, onda biz soňky şertiniň ýerne

$$\Delta_j + \lambda_0 \Delta''_j \geq 0 \qquad (3)$$

diýip çalşmak hem bolýar. (3)-den haçan $\Delta''_j < 0$ bolsa, $\forall \lambda$ üçin açyk görnüşinde meseläniň optimal çözülmegi üçin dogrudyr, (adalatlydyr). Bu ýerden λ kesgitlesek

$$\lambda \leq -\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j},\ \Delta_j > 0,\quad \forall\lambda \geq -\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}$$

şonuň üçin aşakdaky bellikleri girzeliň

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\left(-\dfrac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{Eger } \exists\ \Delta''_j > 0 \\ -\infty, \text{hemme} & \Delta''_j \leq 0 \end{cases} \qquad (4')$$

§7. Diskret programmirlemede Lend we Doýguň agoritimi

Agzalan bu algoritm bitin sanly hasaplamany we bölekleýin bitin sanly hasaplaýyş meseläniň çözüwi üçin ulanylýar. Ýöne onuň shemasy wariantlary yzygiderli derňemek usulyna her ädimde simpleks usulynyň şahalanmasynyň ulanylyşy bilen degişlidir. Umumy meseläni bitin hasaplanyşyň üýtgeänleriň iki tapgyrlaryny çäklenmesiniň program-mirlemesini ýazalyň:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

şu ýaýlada

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_j} x_j \leq b_{i,}\quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \qquad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j,\quad \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}, \qquad (3)$$

$$x_j - \text{bitin},\quad \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}. \qquad (4)$$

(2), (3), (4) ýaýlada (1) –yň maksat funksiýany maksimumyny almaly . d_j sanlary käbirleri tükeniksiz uly bolmagy mümkin.

(1)-(4) meselesine çözülmesi mümkin we hemme x_j –lar optimal çözüwleri bütin sanly bolsa , onda hem (1-3) meselesiniň çözüwi hem-de (1-4) meseläniň çözüwiniň optimal bolup durýar. Eger haýsy hem bolsa bir optimal çözüwiniň wektorynyň koordinatasy bitin sanly däl bolsa,onda şahalanma prosedurasyny ulanmaly bolýar. Ony aşakdaky görnüşde gurnamak bolýar.

Goý, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ -lar (1-3) meselesiniň optimal çözüwi bolsun. Goý $z_0 = F(x^*)$ (1-4) meseläniň şertleri bilen kesgitlenen başdaky köplügiň z0 bahasy hökmünde alalyň .Goý , x_k^* -bitin däl bolsun ,$(1 \leq k \leq n)$.

Optimal bitin sanly hasaplanşyň meýilnamasynda x_k^*-nyň bolmanda $\lfloor x_k^* \rfloor$ çenli kiçeldilmeli ýa-da $\lfloor x_k^* \rfloor + 1$ çenli ulaldylmaly. Bu pikir şahalanmaň shemasyna şertine görä goýlan üçinji ädimde D_2^1-köplik iň az (minimum) baha eýe bolup, olaryň arasynda tapawutlanýar, onda onuň dargydylmasy.

$$D_3^2 = \{(2,1),(1,3) \cup (1,2),(3,1),(3,2)\} = \{P_4\}$$
$$D_3^1 = \{(1,3) \cup (1,2),(3,1),(2,1)\} = \{P_3\}$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min\left(-\dfrac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right), & \text{Eger } \exists\, \Delta_j < 0 \\ \infty \text{ hemme } & \Delta'_j \geq 0 \end{cases} \qquad (4'')$$

seredilen barlaglaryň esasynda λ-nyň aşaky hem-de ýokarky kesgitleýjileri şeýle netije berýär:

Bize belli bolşy ýaly basizler $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{im}$ bazisler berlen kesgitleme boça optimaldyrlar, haçan (2)-ýerine ýetýän bolsa, diýmek bazisiň optimallygynyň köplügi hemme bahalardan durýandyr. Bu ýerden hemme λ –lar, ýagny $\lambda > \bar{\lambda}$ üçin, (2)-(1) meseleler üçin derňäliň. Goý $\bar{\lambda} < \infty$, bu bolsa $(4'')$ esasynda $\Delta''_j(\bar{\lambda}) = 0$ ýagny Δ'' içinde onuň oňlydälleriniň barlygyny aňladýar.

Goý

$$\min_{\Delta''_j < 0}\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right) = -\frac{\Delta'_k}{\Delta''_k} = \lambda, \quad \Delta''_k < 0 \qquad (5)$$

diýmek

$$\Delta''_j(\bar{\lambda}) \geq 0$$

Şeýlelikde

$$\bar{\lambda} = -\frac{\Delta'_k}{\Delta''_k}, \quad \Delta_k(\bar{\lambda}) = \Delta'_k + \bar{\lambda}\Delta''_k$$

nirede k sütüniň elementleriniň degişli simpleks tablissa görä derňesek onda biz aşakdaky λ mümkinçiliklerini görkezýäris.

a) X_{ik}-nyň kompanentleri wektorlar dargydylanda şertli A_k wektorlaryň bazisine onda olar oňat däldirler.

b) Goý hemme $X_{ij} \leq 0$ bolsun, onda

$$\Delta_k(\lambda)=\Delta'_k+\lambda\Delta''_k,\ \bar{\lambda}=-\frac{\Delta k}{\Delta''_k},\ \Delta_k(\bar{\lambda})=0$$

$$\Delta_k(\lambda)=\Delta_k(\bar{\lambda})+(\lambda-\bar{\lambda})\Delta''_k x_{in}\le 0$$

$$\lambda>\bar{\zeta}\ \text{we}\ \Delta''_k<0,\ \Delta_k(\lambda)<0$$

$\lambda>\bar{\zeta}$ we $\Delta''_k<0$ onda $\Delta_k(\lambda)<0$ bolýar onda *b* deňsizlik $X_{ik}\le 0$ şerti bilen bilelikde hemme *i*-ler üçin rugsat edilmeýändigini aňladýar.

ç) Berlen şerte görä hemme X_{ik} näbellileriň içinde bolmanda bir bir oňly kompanent bardyr. Hakykatdan hem, eger biz çözüliş prosesini dowam etsek onda biz täze A_k bazisi girizýäris, şoňa göräde $\Delta k(\bar{\lambda})\ge 0$ we $\Delta''_k\le 0$ bolýar. şoňa görä-de A_z bazisi çykarýarys.

$$\frac{x_{z0}}{x_{zk}}=\min_{x_{ik}>0}\frac{x_{ik}}{x_{ik}}$$

belli bolşy ýaly iň bolmanynda $\forall\lambda=\bar{\lambda}$ üçin täze alnan bazisiň optimaldygyny almak bolýar. Bir bazisden beýleki bir bazise geçmegiň formulasyndan, yzygiderli gowulamak meýilnamasynyň usulyndan alarys. ýagny

$$\tilde{\Delta}_j(\lambda)=\Delta_j(\lambda)-\frac{x_{zj}}{x_{zk}}\Delta_k(\lambda)\left(j=\overline{1,n}\right),\ \lambda=\bar{\lambda}$$

şertleri göz öňüňde tutup $\bar{\Delta}_j(\bar{\lambda})=\Delta_j(\bar{\lambda})\ge 0$ alarys. Eger biz şeýle bir λ-ny tapsak, onda biz bahasyna görä

$$\tilde{\Delta}_j(\lambda)=\overline{\Delta'_j}+\lambda\,\Delta''_j\ge 0 \qquad (6)$$

Eger $\Delta''_j<0$ bolsa onda (6)-dan $\lambda\ge\bar{\lambda}$ kesgitlenen şerti öz özünden gelip çykýar. Hakykatdan $\overline{\Delta'}_j$ we $\overline{\Delta'_j}$ bazislere geçilende olar aşakdaky görnüşe özgerýärler/

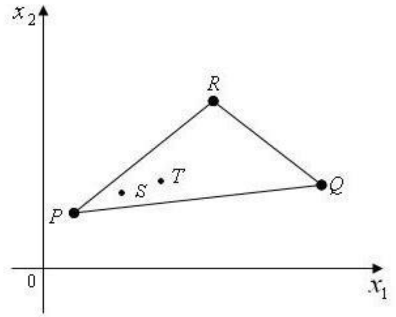
$$\overline{\Delta'_j}=\Delta'_j-\frac{x_{zj}}{x_{zk}}\Delta'_k \qquad \overline{\Delta'_j}=\Delta''_j-\frac{x_{zj}}{x_{zk}}\Delta''_k$$

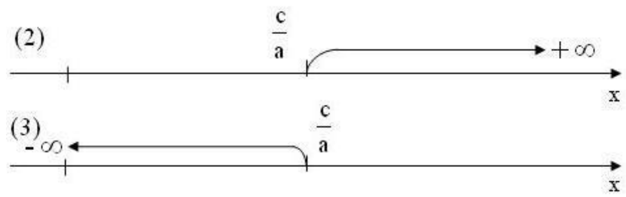
onda matrisalar

$$C_1^1=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 3 & 4\end{matrix}\\ \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}\infty & 0 & 0\\ 1 & \infty & 0\\ 0 & 4 & \infty\end{bmatrix}\end{array},$$

Ikinji ädimde D_1^0-köplik $D_2^1=\{(1,3)\cup(1,2),(3,1)\}=\{P_3,P_4\}$ we $D_2^0=\{\text{Ø}\cup(1,3)\}=\{P_5,P_6\}$ köpliklere dargaýar. Olaryň bahasy degişlilikde $W(D_2^1)=15,\quad W(D_2^0)=18.$

Soňky köplikler bolup ikinji ädimde D_1^1,D_2^1,D_2^0 köplikler bolýar.





2-nji surat

Mesele 1. Kommiwoýažoryň meselesine seredeliň.

$$P_1 = (1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1), \qquad P_2 = (1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1)$$
$$P_3 = (1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1), \qquad P_4 = (1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1)$$
$$P_5 = (1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1), \qquad P_6 = (1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1)$$

Goý

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 4 & 8 \\ 6 & \infty & 6 & 7 \\ 5 & 2 & \infty & 5 \\ 3 & 2 & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

C-matrisanyň getirmesiniň sany 13-e deň ([1]=2, u[2]=6, u[3]=2, u[4]=2, u[1]=V[2]=V[3]=0 V[4]=1. Başlangyç baha W(D)=13, getirlen matrisa.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \infty & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \infty & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Birinji ädimde D-köplik iki köplige dargydylýar.

$$D_1^1 = D\{(1.2)U(2.1)\} = \{P_1, P_2\} we\ D_1^0 =$$
$$= D\{u(1.2)\} = \{P_3, P_4, P_5, P_6\}$$

Bu soňky köplikler birinji ädimde olaryň degişli bahalary $W(D_1^1) = 16 : W(D_1^0) = 15$

ýokarda belleýşimiz ýaly A_z köne bazise degişlidir şonuň üçin bolsa,

$$\Delta'_z = \Delta''_z = 0$$

$$\overline{\Delta'_z} = -\frac{\Delta'_k}{x_{zk}} \qquad \overline{\Delta''_z} = -\frac{\Delta'_z}{x_{zk}} \tag{7}$$

Hemme λ-laryň bahasy üçin (6)-ň dogrulygynyň esasynda aşakdaky deňsizlikler ýerine ýetirilýär.

$$\tilde{\Delta}'_z + \lambda\overline{\Delta''_z} \geq 0 \qquad -\frac{\Delta'_k}{x_{zk}} - \lambda\frac{\Delta''_z}{x_{zk}} \geq 0$$

$$x_{zk} \geq 0$$

oňlylygynyň güýjine görä

$$\Delta'_k + \lambda\Delta''_k \leq 0 \qquad \Delta'_k < 0$$

onda hemme λ-lar üçin (6)-nyň ýerne ýetmeginiň esasynda aşakdaky deňsizlik ýerne ýetýändir. Şeýlelikde alnan netijäni aşakdaky teorema görnüşde ýazmaklyk bolýandyr.

Teorema 1. *Goý λ çäklendirilen bolsun $\overline{\lambda} < \infty$ we (5) şerte görä görä kesgitlenýän bolsun onda*

a) $x_{ik} \leq 0, \left(i = \overline{1,m}\right)$ onda (5) çyzykly görnüş (3)-(4) köplükde hemme λ-lar üçin kesgitlenýändir λ > I

b) eger birnäçe x_{ik}>0 bolsa, onda bar bolan wektor bazis A_k ýönekeý simpleks usul bilen optimal köpligiň içine salyp goý täze bazisi ýerne salyp optimallygyň çep gyrasy $\overline{\lambda}$ bilen gabat gelýär.

Şeýlelik bilen parametr meselesiniň derňemek prosesi $\lambda > \lambda'$ bolanynda, bazis x_j goňşy ýa-da gapdal meýilnamalarynyň üstünde (süýşmegine) hereket etmegine getirýär. Özem degişlilikde sag araçäge optimallygyň köplügiň köne (öňki) bazise görä ol bolsa öz gezeginde köne (önki) bazise görä çep araçägiň opyimallygynyň köplügi bolup durýar. Şeýle proses üzülýär, aşaklamanyň gurulmagy bilen ol ýa öňki bazisiň optimallygynyň köplüginiň bolmagy bilen ýene-de her nokatda meseläniň çözülmeýäniniň köplügi bilen şeýle-de bazisden çykarlan we bazise girizilen yzygiderli gowulanýan meýilnamasy boýunça, wektorlaryň düzgünnmasyna degişlilikde seredeliň. Hakykatdan goý, Δ_s we Δ_{s+l} meseläni derňemekliginiň dowamynda alnan gawat gelýän we goý λ we $\overline{\lambda}$ optimallygyň kopliginiň araçägi bolsun, onda teoremanyň şertine görä $\underline{\lambda} \geq \overline{\lambda}$ gelip çykýar, ýagny optimallygyň köpligi ýeketäk bir nokatdan durýar. Ol bolsa $\overline{\lambda} = \lambda = \underline{\lambda}$. Onda $\overline{\lambda}$ optimallygyň köpliginiň $\forall$ bazisiniň aralygy üçin degişlilikde $\Delta_{s+1}, \Delta_{s+2}, ..., \Delta_{s+l-1}$ şonuň üçin A_n bazis wektory saýlamanyň şerti (kriteriýasy) bazise salmanyň şerti bilen

$$\Delta_{s+t} < 0 \leq t \leq l-1$$

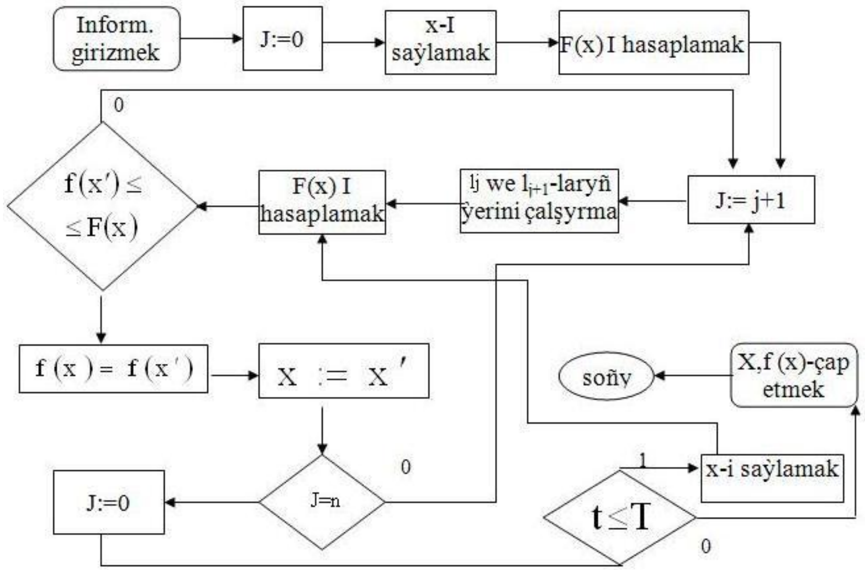
$$\Delta_k^{(s+t)}(\lambda) = 0 \quad \Delta_k''^{(s+t)} < 0.$$

Şeýlelikde seredilýän bazis boýunça $\Delta_s, \ldots, \Delta_{s+l}$ meýilnamany gowulamak usuly boýunça ýerne ýetýär, onda biz çyzykly görnüşiň kömekçi maksimum meselesinde ýokarda alnan netijäniň esasynda

$$\sum_{j=1}^{n} C'' x_j \to \max \tag{8}$$

meselesine getirýäris. Onda $A_k = b, x_j \geq 0$ şertler bilen bilelikde kömekçi meselesini alýarys. Eger biz $j \in I$ bolsa, ýagny indeksler onda $\Delta_j^{(s)}(\overline{\lambda}) = 0$ deňlik üçindir. Soňky deňlemäniň esasynda biz seredýän meýilnamamyzdan tapawutlanýan şerte gelýäris. Diýmek biziň şertimiz $\Delta_s = \Delta_{s+l}$ netijä gelýäris, bu bolsa biziň seredýän şertimiziň tersidir. Bu ýerden parametrik programmirleme meselesiniň derňelmeginiň netijesinde biziň gözleýän sikiline gelmän ol tükenikli bolup durýar. Edil şonuň ýaly hem

Algoritimiň shemasy.



1-nji surat

Diskret programmirleme meselesiniň algoritmleriniň derňewi.Şahalanma we araçäk usuly n ädimden optimal bolmanam bilýän käbir ýapyk sikly almaga mümkünçilik berýär. Hasaplama prosesiniň kynçylyklary şulardan durýar: her ädimde matrisanyň elementleriniň derňewini geçirmeli; her ädimde nol elementleri saýlamaly, şahalanma we gurma bahalaryna dalaşgäri saýlamagyň ýönekeý usuly. *n* uly bolanda wagtyň sarp edilişine görä çözüw agajynyň şahalarynyň köpelmegi sebäpli meseläniň çözüwi optimallyga getirilmänem bilinýär.

Belmanyň usuly *n* ädimde optimal ugruny almaga mümkinçilik berýär. Emma $2 \leq k < n$ ädimleri geçirmegiň kynçylyklary uly *n* üçin bu usulyň amatly däldigine netijä gelýäris.

Lokal optimizasiýaly tötän gözleg algoritmi çözüwi almak üçin sarp edilen wagt berilen *T* ululykdan uly bolmaly däl şertli *n* uly bolanda meseläni maşynda çözmekligi maslahat berilip biliner.

degişli bolar ýaly. Alnan bar bolan çözüwde 2 we 3 elementleriň ýerini çalşyp, şeýle hem şäheriň aýlanýanlygynyň yzygiderliginiň ýerini çalşyp aşakdaky netijäni alarys: ýagny täze emele gelen yzygiderlige x''-bilen belläp onuň yzygiderligine geçiş ýoluny $f(x'')$-diýip maksat funksiýany belläris. Öňki *n-1* *f(x)* maksat funksiýa bilen täze alnan x''-i ýatda saklanan ýaçeýkada deňeşdirip haýsy birisi az bolsa şony ýatda saklap $\in$-likdäki yzygiderligi ýagny oňa *x* -da bahasyny kesgitläris. Şeýlelik bilen *n-1* çalşyrmadan uly bolmadyk şondan soňra biz onuň iň oňadyny tötän başlangyç ýerini çalşmadan, ýagny $(i_1,i_2,...,i_n)$ onuň kesgitlejekdigi aýdyňdyr. Eger biz *x*-i yzygiderlik geçmişiniň gatnaşyklarynyň yzygiderliklerne degişli diýip hasap etsek we ony *f(x)*-ň ýerleşen ýaçeýkasynda ýazsak netijede bahasy gatnowyň (marşrut) uzynlygyna bagly bolup durýar. Eger meseläni çözmeklikde harç edilen *t* wagt haýsam bolsa berilen *k* ululukdan artykmaç bolmasa, onda tötän ýerini çalşmany biz saýlap bileris we proses şu yzygiderlikde gaýtalanýandyr ýokarda gorkezilen prosedura haýsy hem bolsa bir ädimden alnan gözlenen optimallaşdyrmanyň çözülişine ýakyndygyny we ýakynlaşdyrmanyň derejesiniň bahalanmaga mümkinçilik beränini görmek bolýar. Şeýle hem optimallyga çözülşiniň derňemekligiň düzgine düzgininiň başga ýollary kesgitli däldir. Şol berilen wagtda bu usul we onuň modellenşi (bir wagtda ýerini çalşma bir şäherden köp şäher üçin ýerine ýetýär.) $\forall$ -wagtda momentde haýsy hem bolsa bir yzygiderlikde şäheri aýlanmak we olara degişli bolan *f(x)*-kesgitlemek üçin mümkinçilikler döredýär. ýokarda görkezilen algoritimleriň shemasy aşakdaky görnişde şekillendirilýär.

$\lambda < \underline{\lambda}$ hususy haly üçin ýokarda seredilen netijäni almak bolýar. Bunuň üçin saýlama düzginini hökman çalşmalydyr.

$$\underline{\lambda} = \max_{\Delta''_j > 0}\left(-\frac{\Delta'_j}{\Delta''_j}\right) = -\frac{\Delta' k}{\Delta'' k} \qquad (9)$$

3) Haçan seredilýan meseläniň çözüwiniň ýok bolan ýagdaýy ýagny $\lambda = \lambda_0$ bolanda (2)-(1) meseläniň bazisini gurmaklygyň prosesi, rugsat edilmeýän şertler bilen gutarýar. Onda

$$\Delta_k = \Delta'_k + \lambda_0 \Delta''_k < 0, x_{ik} \le 0 \qquad (i = \overline{1,m}) \qquad (10)$$

ýagny $\vec{A}_k$ wektoryň bazisa girizip bolmaýanlygyny görkezýär. Eger $\Delta''_k = 0$ bolsa, onda $\forall\lambda$ üçin ýerine ýetýär ýöne (2)-(5) mesele rugsat edilmeýär. Bu şert λ onunyň hemme ýerinde ýerine ýetýär. Eger $\Delta''_k > 0$ bolsa, onda (14) şert $\lambda < \lambda_1 = -\frac{\Delta'_k}{\Delta''_k}$, eger $\Delta''_k < 0$ bolsa onda $\forall\lambda$ üçin $\lambda > \lambda_1$ şert ýerine ýetýär. Haçan $\Delta''_k < 0$ bolsa, onda (2)-(1) λ_1-dan sagda rugsat edilýär, eger $\Delta''_k > 0$ bolsa, onda λ_1-dan çepde rugsat edilýär. Onda meseläniň ýagdaýynda ony derňemek üçin hokman $\lambda -$ nyň $(\lambda \to \lambda_1)$-ýerine λ_1-alyp onuň çözülşine geçirmeli. Eger biz optimal meýilnama alsak, onda indiki barlagda ony birinji hususy hala getirýär. Ýagny optimal çözüwiniň bar ýagdaýy eger $\forall\lambda_s$ üçin $\Delta''_k > 0$ bolsa, onda ýene biz meseläniň barlygyna gelýäris, ýöne $\lambda -$ nyň ýerne λ_z -i alýarys. Eger $\tilde{\Delta}_k < 0$ bolsa onda (2)-(1) meseläniň rugsat edilmeýän netijesinde sag tarapdan λ_2 ýagny

$$\lambda \geq \lambda_2 \geq \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_s''} \lambda_1 > \lambda_2$$

alarys. Ozal bolsa biz λ-nyň çepden rugsat edilmeýändigini görüpdik. Onda onuň hemme ýerinde rugsat edilmeýändigini görýäris. Edil şonuň ýaly netijäni $\Delta_s'' \geq 0$ bolanda hem alýarys.

Netije. Maksat funksiýa parametrli meselesiniň çözülişi simpleks usul bilen ýerine ýetirilýär. Ýöne bir setiriň bahasynyň ýerine aşakdaky setirler girizilýär. Ýagny 3-setir girizilýär.

1) $\Delta_j', \Delta_j'', -\frac{\Delta_j'}{\Delta_j''}$ setir hem girizilýär.

2) 2-setir ýagny $\Delta_j'', \Delta_j' + \lambda_s \Delta_j''$,

Meseläni derňemek prosesi aşakdaky ýagdaýlara getirýär. Haçan $\lambda = \lambda_0$ bolanynda meseläni çözýäris. Onda 1-nji we 2-nji hususy hallaryň bolmagy mümkin. Özem 3-niň drob bolmagy setirde ýerleri degişlilikde doldurýarlar. $\Delta_j'' \geq 0$

Iň soňky bazisiň hemme ýerleri minimum elementleriň bahalary bolup sag araçägiň häzirki bazysyň optimallygynyň köplügi bilen gabat gelýär. 2-nji ýagdaýda $\Delta_k'' < 0$ bolup meseläniň rugsat berilmeýänligini görkezýär hem-de fiksirläp $\lambda \geq \lambda_0$, $\Delta_k'' > 0$ şol setirleri doldurýar.

§6. Diskret programmirlemede lokal optimallyk algoritmi we meselesiniň algoritmleriniň derňewi

Bu usul kombiwiýažor meseläniň takmyn çözülişini gözlemek bilen ideýalara esaslanýas: Başlangyç tötän gözlegiň çözülişini kesgitlemek (başlangyç yzygidrli şäherlere aýdylýar) aşakdaky ýaly geçýär. Bu çözüwiň töwereklerini tapawutlandyrmak we nokatlaryň töwereginde maksimum funksiýanyň lokal optimallygy kesgitlenýär, ýagny tapawutlaryň köplenç ýagdaýda lokal optimallygy gözlenende ýönekeý saýlama esasynda gözlenýär. Sebäbi töweregi köp bolamdyk nokatlaryň sanyndan durýar. Soňra tötän saýlow başga bir çözüliş üçin ýerine ýetýär we onuň töwereginde tötän lokal optimal gözlenýär ýa-da kesgitlenýär. Bu prosesiň özi yzygiderlikde köp gezek gaýtalanýar. Optimal çözülşiň hili hökmünde diýip şeýle bir şäherleriň üstinde aýlananlaryň yzygiderli yzygiderligi göz öňüde tutulýar. Netijede maksat funksiýa hemme serdeilenler bilen deňeşdirilende iň kiçi baha eýe bolýar. Mümkin bolan şäherleriň köpüsini G diýip bellesek hem-de $x=(i_1,i_2,...,i_n)$ ýerini çalşmalaryň $1,2,...,n$ görnişleriniň üsti bilen maksat funksiýa $f(x)$ x ýerini çalşandan $\sum - n$ düzülen ýoluň uzynlygynyň geçmelisini görkezýär. Onuň algoritmi aşakdakydan durýar.

Eger yerine çalşmanyň tötän saýlowyny $X^0=(i_1,i_2,...,i_n)$ bilen belgilesek we i_1 bilen i_2 ýerini çalşyp täze alnan ýerni çalşmany x' bilen belläliň we yzygiderlikde maksat funksiýany $f(x')$ we $f(x_0)$hasabyň $f(x)$ maksat funksiýa ýa-da $f'(x')$ -we $f(x^0)$ ýerini çalşmalar yzygiderliginde bahalaryny kesgitläp alalyň içinden iň azyny minimumny ýatda saklarys. ýagny

$$f(x) = \min\{f(x'), f(x^0)\}$$

ýagny biz x-de şeýle bir şähere yzygiderligeaýlanylýanlygyny ýatda saklarys şonuň netijesinde $f(x)$ maksat funksiýanyň bahasyna alnan matrisanyň getirilmesi amala aşyrylýar we $h^{(k+1)}$ hasaplanylýar. Ondan saň

$$w(Y) = w(X) + h^{(k+1)}, k = k+1$$

alynýar we 4 bölümçä geçil-ýär.

11. Amatlygyň şertiniň barlanşy: Eger ýapyk sikliň bahasy geljeki hemme mümkin köplükleriň şahalanmasynyň bahasynda köp bolmasa, onda alnan ýapyk gatnow amatly. Eger-de haýsy hem bolsa bir köplügiň ondan kiçi bahasy bar bolsa, onda alnan ýapyk gatnow ýatda saklanýar. Şeýle hem şahalanma prosesi kiçi bahaly köplükden dowam etmeli.

Käbir bellikler: "matrisa 2x2" bolan ýapyk şäherler jübüti üçin ýapyk gatnowy emele getirmesiniň alnyş momentini kesgitlenýär. "Gaýtadan almak" bloga geçişiň diňe geljeki şahalanma üçin $\overline{Y}$ degişli köplük perspektiw bolanda bolýar. Bu ýagdaýda indiki şahalama üçin dalaşgärleri saýlama prosesi başdaky C matrisany öňki ýagdaýny getirmek talap edilýär, $\overline{Y}$ -san

$$q = \sum_{(i,j)\in x} c_{ij}.$$

gurlan x köplük üçin öň gurlan gatnow q çykdaýjylaryny hasaplamaly. Ondan soň X-a girýän jübütler üçin setirleri we sütünleri çyzmaly we dalaşgärleri saýlamak üçin alnan matrisany şahalama getirmeli.

§2. Parametrik däl maksat funksiýaly parametrik çäklendirmeler ulgamly meseleler

Goý biz $\vec{x}$ kesgitlemeklik gerek bolsun onda çyzykly maksat funksiýa maksimum baha eýe bolýar.

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i + \mu b_i'' \quad \left(i = \overline{.m}\right) \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Bu meseläni derňemeklik üçin hem-de çözmeklik üçin bize belli bolan ikileýin meselä getirip çözmek bolýar. Ikileýin mesele aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$\min L(n) = \sum_{i=1}^{m} \left(b_i' + \mu\, b_i''\right) U_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, u_i = c_j$$

Ilki bilen biz $(1)-(3)$ meseläni ikileýin meselä getirmän çözmekligiň ýollaryny we usullaryny derňejekdiris. Biziň serdeýän parametri sag tarapda meseläni derňemeklik ýzygiderli bahasyny anyklamaklyk usulyna esaslanyp, şoňa görä biz bir näçe kesgitlemelere seretjekdiris.

Kesgitleme 1. Çyzykly baglanşyksyz μ wektorlaryň ulgamyna psewdo bazis diýip aýdylýar, eger hemme wektorlara görä meseläniň şerti otrisatel däl bahalara eýe bolsa. Eger haýsy hem bolsa bir μ üçin wektorlary dargytmak şerti meseledäki wektorlar üçin psewdo bazisler, otrisatel däldirler. Onda psewdo meýilnama berlen μ görä optimal psewdo meýilnama diýilýär

Kesgitleme 2. μ-laryň köplüginiň bahasyna berlen psewdo meýilnamanyň optimallyklaryna psewdo meýilnamanyň optimallyklarynyň köplügi diýilýär.

Goý $\mu=\mu_0$ bolsun, nirede μ_0 haýsy hem bolsa bir hemişelik ululyk. Onda (1)-(3)-nji meseleler üçin bahasyny anyklamak usulyny ulansak netijede biz 2 ýagdaýa gelmegimiz mümkin:

1) $\mu=\mu_0$ bolanda optimal çozüliş alynýar;
2) $\mu=\mu_0$ bolanda berlen meseläniň bilelikdäki çözülişi ýok.

Bu ýagdaýlara aýratynlykda seredeliň:

1) Goý tapylan optimal bazis A_{i1}, A_{i2},…, A_{im}, wektorlardan durýan bolsun, ýagny

$$b' + \mu_0 b'' = \sum_{s+1}^{m} A_{is} x_{is}(\mu_0) \qquad (4)$$

$$X_{is}(\mu_0) = X'_{is} + \mu_0 X''_{is} = X'_{so} + \mu_0 X''_{so} \qquad (s=\overline{1,m}).$$

(4)-den soňky deňlemä görä $X_{is}(\mu_0)$ otrisatel däldir.

$$X_{so}(\mu) = X'_{so} + \mu X''_{so} \qquad (5)$$

A_j wektoryň bahasyny Δ_j diýip belläliň, onda ol μ bagly däldir. Şonuň üçin optimallygyň ýeterlik we hökman şerti (5)-ň ýerine ýetmeginiň şertidir. Tapylan psewdo meýilnamanyň optimal köplügini kesgitläliň. Onda (5)-iň s-nji nomeriniň gatnaşygyny aýratynlaşdyralyň. Ýagny

$$X_{so}(\mu) = X'_{so} + \mu X''_{so}, \qquad X_{so} > 0;\; X_{so}(\mu) > 0,$$

3. Hemme (i,j)-lar üçin $C_{ij}^{k} = 0$ bolan X köplüge girmek üçin dalaşgärleri saýlalyň. $i \neq j$, i=1,2,..., j=1,2,....,
4. Y-a girmek üçin saýlanan dalaşgärler üçin

$$\theta(i,\, j) = \min_{j' \neq j} c_{i,j'} + \min_{i' \neq i} c_{i',j}.$$

hasaplalyň.

5. Hemme i,j-den $c_{ij}^{k} = 0$ bolan

$$\theta(k,l) = \max \theta(i,\, j)$$

saýlalyň. (k,l) jübüt Y köplüge girziýär we $\overline{Y}$ köplük bilen gadagan bolup durýar.

6. $\overline{Y}$ köplük üçin bahany hasaplalyň.

$$w(\overline{Y}) = w(X) + \theta(k,l).$$

X köplük we $\theta(k,l)$ üçin öňedilen çykdaýjylara deň.

7. Her şäherden diňe gezek çykmak bolany üçin, k-njy setiri geljeki seretmelerimizden aýyrmaly. Her şähere deň bir gezek girmek bolany üçin, j-nji sütin aýrylýar.
8. Käbir şahalanma ädimlermizde alnan kesilen martisa $2^{x}2$ ölçegli bolany üçin we diňe 2 sany mümkin şäherler jübütini özünde saklaýandygyny aýdyňdyr. Bu jübütler halkasyz käbir gatnow üçin soňlaýjy jübütjer bolýar.
9. Diýmek, 2x2 gatnow emele gelmesiniň aýratynlygy eýe şonuň ücin 9 bolanda kesilen martisanyň ölçegi 2x2 ölçegidigi barlanýar. Eger "Hawwa" bolsa, onda 11-e geçilýär. Eger "Ÿok" bolsa, onda 10-a geçilýär.
10. Alnan matrisa getirlen bolýarmy? Eger "Hawa" bolsa, onda Y köplügiň bahasy Y-iň $w(Y)=w(x)$ alynmasyna sebäp bolsa şeýle bir köpuge deň. Eger "ýok" bolsa, onda ýaňy

şahalanma üçin şäherleriň jübütiniň saýlanyş prosedurasyny şekilendireliň. Şahalanma üçin şäherleriň jübütiniň saýlanyş prosesini guralyň. Iki adamyň arasyndaky oýnalýan oýun hökmünde $\overline{Y}$ we Y köplükleri guralyň. Goý Y oýunçynyň aşakdaky artykmaçlyklary bar bolsun. Ol oýlanma üçin öň saýlanmadyk islendik şäherler jübütini saýlap bilýän bolsun. Ol minimal uzynlykly sikli gurmak maksady bilen degişli getirýän matrisanyň degişli nul elementi bolar ýaly şäherleriň jübütini saýlamalydygy aýdyňdyr. Emma getirlen matrisanyň her bir setirinde we her sütininden iň bolmanda bir nul element bardyr. Diýmek, *Y*-oýuna girmegiň birinji ädiminde *n*-den az bolmadyk sanly dalaşgär bolar.

Jübütleriň saýlowynyň bir dälligi birinji oýunçy üçin meseläni çözmekligi kynlaşdyrýar, şonuň üçin strategiýanyň bir bahalylygy saýlowyň ikinji $\overline{Y}$ oýuçynyň oýunda özüni alyp barşyna çäklilik şertlerni talap edýär. Has takygy ol çäklendiriň şertleri:

Eger Y oýunçy *(i,j)* jübüti saýlap alan bolsa, onda $\overline{Y}$ oýunçy üçin *i*-de şäherden çykmaklyk zerur ýöne *j*-şähere dälde islendik başga şähere. *j*-e girmek gerek ýöne *i*-den dälde islendik başga şäherden. Bu geçişde $\overline{Y}$-iň *i*-den *j*-e göni geçişe görä has köp ýitgileri boljak. $\overline{Y}$ ýitgileri minimirlemek üçin şeýle mümkin bolan geçişi saýlamak maksady bolar. Şonuň üçin *i*-nji setirde ol *j*-iň ýok bolan getirlen matrisadaky iň kiçi aralykdaky şäheri saýlar.Şulary bilip Y oýuçy hemme mümkin şäherler jübütiniň içinden $\overline{Y}$-üçin iň köp çykdaýjylary ertjek jübüti saýlap alar ýaly edýär. Aýlanyp sowdalaşmak baradaky meseläniň çözüwi üçin şähalanma we araçäkleme usulynyň umumy ideýasy şeýledir.

Algoritimini ýazalyň:

1. Goý $k=1$.
2. C^k getirlen matrisany emele getirýän setirlerden we sütünlerden C matrisanyň getirmesini amala aşyralyň. X köplük üçin baha bolan h^k getirilýän kanstantalaryň jemini hasaplalyň. Ony *w(X)* bilen belläliň.

$$X''_{so} > 0 \quad \mu \geq -\frac{X'_{so}}{X''_{so}}$$

Bellikleri girizeliň:

$$\underline{\mu} = \begin{cases} \max\left(-\frac{X'_{so}}{X''_{so}}\right) \exists\ X''_{so} > 0, \\ -\infty \quad eger\ hemme\ \ X''_{so} \leq 0. \end{cases}$$
$$\overline{\mu} = \begin{cases} \min\left(-\frac{X'_{so}}{X''_{so}}\right) \exists\ X''_{so} < 0, \\ +\infty \quad eger\ hemme\ \ X''_{so} \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

ýokardaky belligiň esasynda (5)-iň bilelikdäki çözülişiniň şertine görä $\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}$ $\underline{\mu} \leq \overline{\mu}$ onda psewdo meýilnama optimal bolýar.

Eger $\mu > \overline{\mu}$ bolsa onda biz optimal meýilnamany alýarys. Eger $\mu > \mu$ bolsa onda optimallygy kesgitlemek üçin biz derňemeli bolýarys.

$$\mu > \overline{\mu} \Rightarrow \overline{\mu} < \infty$$

Bu bolsa x''_{so} -laryň arasynda oňly bahalaryň bardygyny görkezýäris. Eger biz ol öňly däl diýsek, onda

$$x_{ro}(\mu), \mu \geq \overline{\mu} \quad eger\ \ \mu = \overline{\mu} - den \quad \mu > \overline{\mu}$$

diýsek, onda

$$x''_{ro} < 0 \quad \overline{\mu} = \min_{x''_{so} < 0} \left(-\frac{x'_{so}}{x''_{so}}\right) = -\frac{x'_{ro}}{x''_{ro}} \tag{7}$$

geleris. Haçan $\mu > \overline{\mu}$ bolanda, onda $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$ wektorlar optimal bazisleri düzmeýär, ýöne $x(\mu), \Delta_j \geq 0$ şerti ýerne ýetirýär, şoňa göräde μ parameter bagly bolup seredilýän meseläniň psewdomeýilnamasy optimallygyna galandyr. $x(\mu)$ psewdomeýilnamany özgertmek üçin $x(\mu)$ bazisden A_{ir} wektory çykarýarys onuň ýerine bolsa, A_k-wektory girizýäris.

$$-\frac{\Delta_k}{\Delta_{rk}} = \min_{X_{rj}<0}\left(-\frac{\Delta_j}{x_{rj}}\right) \qquad (8)$$

bu bolsa bolmanynda bir A_k wektor bar diýip hasap edýäris. Şonuň üçin $X_{rj}<0$. Eger-de ol tersine bolsa, onda olar ýaly wektor ýokdur diýip hasap edýäris. Onda olar ýaly meseläniň çözülişi ýokdur. Haçan biz bir bazisden başga bir bazise geçmekçi bolanmyzda, ol bazisiň kompanentleriniň psewdo meýilnamasynyň özgerdilişini aşakdaky görnüşde ýazýarys.

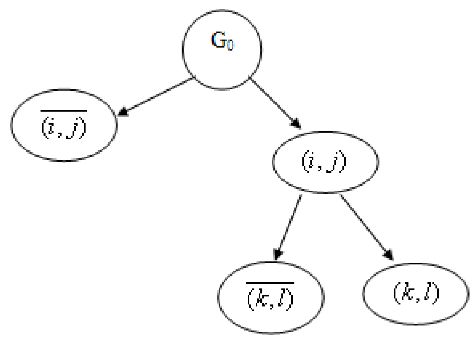
$$\overline{x}_{so}(\mu) = \overline{X'_{so}} + \mu\overline{x''_{so}} = x'_{so} + \mu x''_{so} - \frac{x_{sk}}{xrk}\left(x'_{ro} + \mu x''_{so}\right)s \neq r$$

$$\overline{x}_{ro}(\mu) = \overline{X'_{ro}} + \mu\overline{x''_{so}} = \frac{x'_{ro} + \mu x''_{ro}}{x_{rk}} \qquad (9)$$

şeýle hem

$$\tilde{\Delta}_j = \Delta_j - \frac{x_{rj}}{x_{rk}}\Delta_k \qquad (10)$$

Täze emele gelen psewdo meýilnamanyň haçan $\overline{\mu}$ şeýle hem mümkin $\mu > \overline{\mu}$ optimallygyny, hemde $\mu < \overline{\mu}$ optimaldäldigini görkezmek bolýar.



1-nji surat

Şahalanma prosedurasyny düşündirmek, suratlandyrmak we şekilendirmek üçin bu usulyň geometiriki iterpretasiýasynyň ulanalyň. Hemme sikleri özara kesişmeýän bölekköplükleri bolup biljekleriniň jübütlerini (i,j) bilen gadagan $\overline{(i,j)}$ bilen belläp agaçlaryň şahalarynyň bolan depeleriniň jübütlerini şekillendireliň. Onda (i,j) depeden geçýän şaha i-den j-ýe geçýän hemme gatnowlary öz içinde saklaýar. $\overline{(i,j)}$ depeden geçýän şaha bolsa i-den j-e geçilme gadagan bolan hemme gatnowlary öz içinde saklaýar. Meselem, $\overline{(k,l)}$ depeden geçýän şaha i-şäherden j-e geçilme we k-dan l-e gadagan bolan geçilmäniň hemme gatnowy özünde saklaýar. Şol bir wagtyň özünde bolsa (k,l)-den geçýän şaha i-şäherden soň j-şähere, k-şäherden sönra bolsa l-e şähere barylmasynyň hemme gatnoey özýnde saklaýar. Käbir X-depeden agajyň ýokarlygyna çykylsa X-e degişli sikla girýän hemme depeleri hem-de sikla girip bilmeýänleri aýdyp bolýar. Bu ýerde şahalanma prosesiniň depeleriň uçlarynda şekillenýän köplükleriň birikmesiniň islendik etabynda hemme sikleriň köplügini emele getirýändigini belläliň. Şahalanmanyň geçilýän depesini X-iň üsti bilen belgilenmegi şertleşeliň. Iň uly ähtimaly bar bolan depesini Y-iň üsti bilen, gadagan şäherleriň jübütiniň depesini bolsa $\overline{Y}$ bilen belgiläliň. X-depä degişlilikde $w(x)$ aşaky çägi h^k bolan getirilýän konstantalaryň jemini belgiläliň we

Goy $c_{i,j(i)} = \min\limits_{j} c_{ij}$ bolsun, onda

$$c'_{ij} = c_{ij} - c_{i,j(i)} \qquad (1)$$

alarys. Goý $c^{*}_{i(j),j} = \min\limits_{i} c^{'}_{ij}$ bolsa, onda

$$c^{''}_{ij} = c^{'}_{ij} - c^{*}_{i(j),j} \qquad (2)$$

bolar. Şeýle oňly ýa-da nul C matresadan

$$h' = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j(i)} + \sum_{j=1}^{n} c^{*}_{i(j),j}.$$

deň bolan getirilýän konstantlaryň jeminden ybarat oňly ýa-da nul getirlen C'' matrisany almaklyga mümkinçilik berýär.
Eger *z(t)*-getirmeden öňki matrisanyň üçin *t* sikliň çykdaýjylary;
a $z^1(t)$-getirmeden soňky matrisanyň üçin *t* sikliň çykdaýjylary; *a*,*h*-getirme konstantalaryň jemi bolsa, onda

$$z(t) = h^1 + z^1(t)$$

bolar.
Getirlen matrisa diňe oňly ýa-da nul elementlerden ybarat bolsun h^1 önki köne matrisada t sikliň çykdaýjysynyň aşaky çägi bolýar.

$$\bar{x}_{so}(\mu) = x'_{so} + \mu x''_{so} - \frac{x_{sk}}{x_{rk}}\left(x'_{ro} + \mu x''_{ro}\right); \rightarrow \bar{\mu} = -\frac{x'_{ro}}{x''_{ro}}$$

$$\bar{x}_{so}(\mu) = x'_{so} - \frac{x_{ro} * \mu x''_{so}}{x''_{ro}} - \frac{x_{jk}}{x_{rk}}\left(x'_{ro} - \frac{x'_{ro}}{x''_{ro}} x''_{ro}\right) = X_{so}(\mu) \geq 0$$

(9)-ä görä $\bar{x}_{so}(\mu)$ psewdomeýilnama ol meýilnamanyň dogry bolmaklygy üçin aşakdaky şert ýerne ýetmelidir.

$$\frac{x'_{ro} + \mu x''_{ro}}{x_{rk}} \geq 0; \quad x''_{ro} < 0; \quad x_{rk} < 0;$$

şeýlelikde $x(\mu)$ meýilnama dogrydyr ýagny $\bar{\mu} = -\frac{x'_{ro}}{x''_{ro}} \leq \mu$

şeýlelikde goý $\bar{\mu} < \infty$, we x_r (9)-dan ýa-da (7)-den berlen gatnaşyklardan kesgitlenýän bolsun; onda aşakdaky ýagdaýlaryň bolmagy mümkindir:

1) Eger $x_{rj} \geq 0$ bolsa, onda (2) we (3) mesele $\mu > \bar{\mu}$ şert ýerine ýeteninde;

2) Eger birnäçe X_{rj} oňlydäl bolsa, onda A_{ir} wektory bazisden çykarýarys, degişlilikde bahalary hasaplamak usulynyň düzgininiň esasynda, biz täze bir psewdomeýilnama alýarys, ýagny çepki gyra μ' diýip bellesek, onda $\mu' = \mu$

Eger biz

$$X_{so}(\mu_0) = X'_{so} + \mu_0 x''_{so} < 0 \qquad (11)$$

diýip bellänimizde onuň degişlilikde öňly däl kompanentleri bolup olaryň. Hemmejesi $X_{sj} \geq 0.$ onda biz ony 0-dan kiçi diýip hasap etsek, ýokarda bolsa uludyr ýa-da deňdir diýip hasap etdik, olar öz aralarynda. Ters bolup (11)-nji formula şerti aýdynlaşdyrýan haçan $x''_{so} = 0$ bolan ýagdaýynda . şeýle hem $(1') - (3')$ meseleler ýerne ýetmeýär, hem-de çözülmäne rugsat bermeýär. Eger-de

$x''_{ro} > 0$ bolsa , ýöne $x_{ro}(\mu_0) < 0$ bolsa onda bu şert hemme μ -ler üçin çepdäki granyň optimallygyň köpdigini görkezýär.

$$\mu < -\frac{x'_{ro}}{x''_{ro}} = \mu_1$$

Şeýlelikde seredilýän meselämiziň dogrylygyny ýöne μ_1 nokatdan çepligine geçeninden soň onuň çözülmeýändigini görkezýär. Eger-de

$$x''_{ro} < 0, x''_{ro} = (\mu_0) < 0$$

onda olar μ_1 nokatdan saga geçirsek şol şertiň çözüwi ýok. Şeýlelikde ýokarda görkezilen shemanyň esasynda μ_1 nokatdan çepde bolsa onuň optimal çözüwiniň barlygyny, sagda bolsa optimal çözüwiniň ýoklygyny görkezýär.

§5. Diskret programmirlemede şahalanma we araçäk usuly

Kommu Woýajoryň meselesine seredeliň. Şahalanma we araçäk usuly.

Goý $C = \|c_{ij}\|$ matrisanyň elemeti c_{ij}, *i*-şäherden *j*-şähere geçmeginiň harajaty bilen kesgitlenilýän bolsun. Şeýle hem *(i;j)* şäherleriň jübütini emele getirýän. *t* sikl diýip, *n* sany yzygiderli şäherleriň jübütlerini toparynyň, her bir şäherden diňe bir gezek girip çykmasyny

$$t = [(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{n-1}, i_n)(i_n, i_1)].$$

gatnow marşurudyny (ýoly) emele getirmesine aýdalyň. Her *(i,j)* jübit gatnow kommikasiýasyny emele getirýär. Onda degişli *c* matirissa *t* sikli üçin *z(t)* umumy harajatlaryň jemi bolup bu

$$z(t) = \sum_{(i,j)\in t} c_{ij},$$

gatnow boýunça kommikasiýasy matrisanyň elementleriniň jemidir. Her bir setirde we her bir sütünde siklda diňe bir element saklanýar. Getirme matrissasyny we getirme prossesini girizeliň. Eger *C* matrisanyň käbir *i*-nji setirinden we *j*-nji sütünden hemme elementlerden minimal kiçilerini aýyrsak, onda her setirde we her sütünde iň bolmanda bir nul bar bolan matirisany alarys. Alnan matrisa getirlen diýilýär, nullary emele getirme prosesi bolsa getirme diýilýär. Getirme elementler prosesinde aýyrmalaryň jemine getirilýän konstantalar diýilýär we h^k bilen belgilenýär. Bu ýerde *k*-getirmäniň tertip nomeri. Başlangyç *C* matrisa oňly däl elementlerden ybaratdygy aýdyňdyr. Getirme matrisa geçilme onuň hemme elementleri oňly bolar ýaly gurnalan. *C* matrisa bilen gabat gelýän başlangyç meseläniň amatly gatnow bilen getirme matrisa üçin optimal gatnow gözleg prosesini guralyň. Getirme prosesini has giň şekillendireliň.

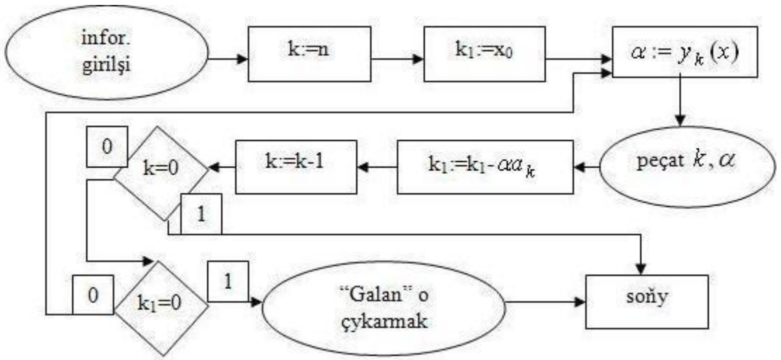
3. $y_k(x)$ çapa goýbermek. Çapa goýberlen $y_k(x)$-i α -da ýatlalyň.

4. $k_1 := k_1 - a_k y_k(x)$; k := k -1.

5. Derňewi (seljermesi) : Eger $k \neq 0$ bolsa, onda k_1 nulynjy deňligi barlamaly.

$$k_1 = \begin{cases} \neq 0, \text{bolsa 2 - a gecmeli.} \\ = 0, \text{bolsa galan hemme gornusler nollar.} \end{cases}$$

Eger $k=0$ bolsa, onda çap etmek prosesi tamam. 2 bölümiň blok-shemasy 1-nji suratda getirilen.



1-nji surat

§3. Parametrik çyzykly meseleleriň matematiki modelleri

Amaly meseleleri matematika usuly bilen optimallaşdyrmaklyga çözlende onuň yzygiderli aşakdaky etaplara bölünip kesgitleýär:

1. Öwrenilýän obýektleriniň meselesiniň üştünde onuň iň wajyp kanunlaryny ýüze çykarmak üçin barlaglar geçirilen (meseläniň goýulyşy);
2. Matematiki modeli düzmek;

Düzülen model hakynda meselelerden alnanda gaty bir ýönekeý däl çýlşyrymly hem däl çözülişi şeýle bir aňsadam däl örän kyn hem däl;

3. Şol obýekt barada dogry we doly informasiýany tapmaly;
4. Modeli ýerine ýetirmeklik üçin onuň algoritmini gurmaly ýa-da saýlamaly;
5. Programma algoritmini haýsy hem bolsa bir dilde ýa–da haýsy hem bolsa bir dilde dälde algoritm dilde gurmaly ýa–da bar bolan amaly programmadan saýlap almaly.
6. Meseläni P hususy K çözmeli we netijäni amatly tarapdan derňemeli.

Netijäni amatly tarapdan derňäp optimaldygyny ýa–da birnäçe şertleriň ýerine ýetýändigini ýa–da ýetmeýändigini kesgitlemekden soňra ýene öwrülip model düzülendäki informasiýalara degişli üýtgeýänleri girizmeli bolýar. Şonuň üçin bu etaplaryň içinde iň kyny dogry we doly informasiýany toplamak bolup durýar. Bu ýagdaýlary derňemeklik hem prametrik programmirleme diýip atlandyrylýan böleginiň meselesi bolup durýar. Eger–de biz çyzykly programmirlemäniň umumy meselesine onuň maksat funksiýasyny we çäklendirme ulgamyny wektor görnüşinde ýazsak onda

$$F(x) = (c, x) \rightarrow \max(\min) \qquad (1)$$

görnüşinde ýazsak bolýar. Goý ol funksiýa G ýaýlada kesgitlenen bolsun. Onda

$$Ax \le b \qquad (2)$$

$$x \ge 0 \qquad (3)$$

(1)–(3) meselä çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň modeli diýilýär. Şu meseläniň üsti bilen biz parametrik meselesiniň modelini onuň elementleriniň üstünden aňladalyň. Şonuň üçin aşakdaky meselä seredeliň.

Goý bize haýsy hem bolsa bir hojalygyň ýa –da kärhananyň onümçilik meýilnamasyny kesgitlemeklik gerek bolup dursun. Şeýle hem ol meýilnamanyň esasynda maksat funksiýa önümçilikden *max* girdeýjiniň gelmeginiň şertini talap edýän bolsun. Eger –de (1) - (3) meseleden *A* matrisanyň ykdysady tehniki şertini ýerine ýetirýän hem –de olary kesgitleýän bolsa, *B* wektor önümçilikde önümleri öndürmek üçin harç edilýän resurslar, gerek bolýan harytlar bolsun. Ýagny öndürilýän önümiň harç edilmekligine çäklendirilýän resurslar. Eger biz *i* diýip resursy, *j* diýip önüm üçin harç edilýän diýip bellesek, onda ol $\lfloor a_{ij} - a_{ij}, a_{ij} + a_{ij} \rfloor$ aralykda üýtgäp bilerler. Onda emele gelen mesele (1) – (3) –den has takyk hem–de hakykata golaý hasap edeli ň diýip bolýar. Onda mesele bilen soňky meseläni çalşyryp biz $(A + \lambda A')x \le b$, (2)-nji şerti täzeleýäris. Bu ýerde *A=(aij)*, $A' = (a'_{ij})$ λ -parametr edil şonuň ýaly edip maksat funksiýany hem

$$F_t(x) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + a_j t)(-x_j) \to \max(\min) \qquad (1')$$

soňky emele gelen mesele başdakydan λ hem –de t parametrlere görä çylşyrymly. Şonuň üçin bu meselä parametrik mesele diýilýär. Sebäbi saklanýan ulgamda λ parametr bar. Hem–de maksimum funksiýada *t* parametr bar. Bu meselede aýry – aýrylykda λ parametirde bagly bolmagy mümkin:

1) *t* parametr. Maksat funksiýasynda bolup $\lambda = 0$ bolsa.
2) Çäklendirme parametrli, maksat funksiýa parametrsiz. *t=0* şeýlede şu meseläni 3 tarapdan öwrenip bolýar.

9. $y_k(x) > \frac{x}{a_k}$ bolýarmy? Eger hawa bolsa, onda $0 \le y_k(x) \le \frac{x}{a_k}$ $y_k(x)$ üýtgetmämiz bolanok we 10-a geçeris. Eger $y_k < \frac{x}{a_k}$ bolsa, onda 5-e geçeris.
10. $y_k(x)$-iň başdaky *x* resursy tükelensoň girdeýjä getirýän degişli öýjük üçin ýatlama $f_k(x)$ we $y_k(x)$-iň ýeten iň ulusyny ýatlalyň. Bu -seredilen resurslsryň toplumyny amatly çözüwi.
11. Başdaky *x* resurslaryň toplumyny Δ sanly *k* görnüşli täze resurslar toplumy boýunça täze mesele alarys.
12. Eger $x + \Delta \le d$ bolsa, onda 5-nji bölümçä geçeris. Eger $x + \Delta > d$ bolsa, onda *k* görnüşli resurslary ulanmak üçin çözüwleriň prosesi tamamlanýar. (k-sany dürli abzallar bilen doldurlan rans).
13. $f_{k-1}(x)$ massiwiň ýerne $f_k(x)$ massiwi geçireliň.
14. *k:=k+1 (k+1* abzal üçin meseläniň çözüwi*)*.
15. $k \le n$ bolanda eger "Hawa"bolsa, onda x_i=0 we 5-e geçeris. Eger $k > n$ bolsa, onda hasap tamamlanýar.

Geçirlen hasaplamalaryň netijesinde biz n sany tablisa aldyk Olaryň hersi umumy girdeýjini we fiksirlenen sanlaryň resurslarynyň ulanmaklugy üçin bu girdeýjilere ýetmegiň amatly görnüşlerini kesgitleýär. Çözüwiň 2-nji bölümi-gurlan tablisalardan amatly çözüwlisini saýlamak. Bu aşakdaky shema boýunça amala aşyrylýar.

1. Resusy ulanmagyň *n* sany görnüşini we x_0 başdaky resuslar toplumyny özünde saklaýan meselä seredeliň. Öýjükdäki *k*-görnüşleriniň sanyny, k_1-resurslaryň toplumuny ýatlalyň.
2. Öýjüklerde görkezilen *k* we k_1 ululyklar üçin *k*-nji tablisadan girdeýjä ýetmegiň amatly görnüşini kesgitläliň. Goý ol ululyk $y_k(x)$ bolsun.

Şoňa görä ýazmak bolýar

$$f_n(d) = \max_{0 \le x_n \le [\frac{d}{a_n}]} [c_n x_n + f_{n-1}(d - a_n x_n)]. \qquad (4)$$

Diýmek, (4) görnüşinde ýazyp bolýar. Eger $f_0(a)=0,\ 0 \le a \le d$ -de goýsak onda $n=1,2,\ldots$. Üçin (4) adalatlydyr. (4)-deňlige esasy rekurent gatnaşyk diýilýär. Ol n näbellili funksiýany iň uly bahasyny tapmak prosesinibir näbellili funksiýanyň yzygiderli maksimumy tapmak alamaty görnüşinde garamaga mümkinçilik berýär.

Hasaplanyş algoritimini aşakdaky görnüşde ýazalyň :

1. k bilen biziň eýýam seredip geçen görnüşimizi belläp geçeliň. (ilki başdan k=1).
2. Bitin interwaly üýtgeýänleriň reseslary, boýunça maglumatlary sany Δ uzynlykly interwallar böleliň. Olaryň hersi üçin $f_k(l\Delta)$ funksiýany ýatda saklap ýaçeýkalary girizeliň. $(l=0,1,2,\ldots,m)$.
3. Işjeň β öýjük alnan iň uly girdeýjini ýazalyň. (başdakysy nula deň).
4. x resursly k-ädimde amaly çözüwi $y_k(x)$-iň üsti bilen belläliň.
5. $y_k(x)$, $f_k(x-y_k a_k)$ ulanyp $c_k y_k - f_k(x-a_k y_k)$ hasaplalyň we α öýjükde ýazalyň.
6. α bilen β öýjüklerdäki sanlary deňeşdireliň. Eger β öýjükdäki sanlar köp bolsa, onda 8-e geçeris. Eger $\alpha \succ \beta$ bolsa, onda 7-ä geçeris.
7. $\beta := \alpha,\ \ \gamma := \mathrm{y_k}(x).$
8. $y_k(x)$-i δ ululyk bilen çalşalyň. $y_k(x) = y_k(x) + \delta$.

Öndürilen önümiň aýap saklaýyş meýilnamasy maksat funksiýanyň kooffisiýentiniň üýtgemeginiň bilen baglanyşykly bolup parametrik programma meselesine getirilýär.

Goý bize haýsy bolsa hem kärhananyň öndüren önümiň hem –de aýap saklamaklygyň meýilnamasyny düzmeklik gerek bolsun ol hem haýsy bolsa hem T wagta bagly bolsun, T wagt aralygynda çykdaýjynyň harajaty mümkin boldugyça kärhana üçin az (minimum) bolar ýaly aýap saklamaly. Şonuň üçin biz aşakdaky bellikleri girizeliň, S_t –diýip t başlangyç wagtda ($t=0,1,2,\ldots T$) bar bolan harajatlar, r_t –soralýan islegler. x_t –önümiň t wagtdaky öndürilmesiniň möçberi d–birlik aralyk wagtda birlik önümiň aýap saklamaklygynyň çykdaýjysy, l–birlik önümiň öndürilmegi üçin ykdysady tehniki çykdaýjylar.

Goý k aralykda öndürilen önümiň doly harçlanypdyr onda islendik k aralykda önümiň öndürilmeginiň möçberi bilen onuň aýap saklamaklygyň gatnaşygy aşakdaky ýaly bolýar.

$$S_k = S_0 + \sum_{j=1}^{k} x_j - \sum_{j=1}^{k} r_j \ge 0$$

Eger $N[0,1]$, $x_j>=0$, $r_j>=0$, $S_j>=0$, islendik $N=1,\ldots,N$.
Onda harajat şeýle kesgitlener

$$\sum_{j=1}^{N} S_j d + \sum_{j=1}^{N} e y_i$$

$$y_j - z_j = x_j - x_{j-1} \qquad y_j \ge 0, \qquad z_j \ge 0.$$

nirede y_j berilen aralykda önümiň öndürijiliginiň giňelmek we gysgaltmak j –nji aýyň j-1 aý bilen deňeşdirmekde şoňa görä netije alynýar.

Egerde d – hem –de l –öňünden belli bolsa $\lambda = \frac{\bar{l}}{a}$ bu meseläni ýönekeý çyzykly programmanyň meselesi ýalak edip çözüp bolýar.

Haçan l, d – constantalar. Eger d we l üýtgeýän ululykly bolsa, onda olar başlangyçly bolup dürli bahalara eýe bolup berilen şoňa görä. Onün üýtgeýän aralyklaryna görä maksat funksiýa degişlilikde kesgitlenip biler. Ýagny onuň kooffisiýentiniň üýtgeýän ululyklaryndan durýandyr.

$$F(S,y) = \sum_{j=1}^{N} (S_j + \lambda y_j)$$

Netijede biz L we D elementleriň üýtgeýän ululyklar bolanda λ parametrüýtgeýän ululyk bolýar. Şoňa görä biziň seredýän meseleler parametriň programmasynyň meselesi bolup onuň maksat funksiýasy kooffisiýentine görä berilen aralykda üýtgäp durýar. Eger biz 2 ýagdaýa görä meselä seretsek. Alynan köp burçlugyň max we min depeleri ugrukdyryjy $\vec{c}$ wektor bilen bilelikde λ -ň bahasyna bagly bolup degişli wektordan geçýär. Goý λ $=0$ onda c ugrudyryjy wektoryň başlangyjyndan MN çyzykly geçirilýär. Edil şonuň ýaly haçan $\lambda = \lambda'$ bolanda onda M_1N_1 gegeçirilýär haçan $\lambda_1 = \lambda_2$ bolanda M_2N_2 edil şonuň ýaly edip A nokadyň üstünden M' we N' göni çyzyk geçirilýär. Ol bolsa şol köp burçlugyň

$$\max C = c' + \lambda c''$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_n x_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j$$

onda

$$\max F(x) = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max \left(c_n x_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j\right).$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ (2)-(3) ýaýlada saýlanylýar:

a) $x_n=0$ diýenimizde fiksirlenen x_n üçin

$$\max F(x) = \max \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j,$$

ýazyp bolýar. Bu ýerde $x_j \in [0; d]$.

b) $x_n=1$-deň bolsa onda

$$\max F(x) = c_n + \max \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j,$$

alarys. Bu ýerde $x_j \in [0; d - a_1]$.

Bu iki ýagdaýda-da $x_j \geq 0$. $j = 1, 2, \ldots, n-1$. x_n saýlap alşymyza baglylykda $F(x)$ funksiýamyz hem üýtgeýär ol bolsa $(n-1)$ näbellilerden ybaratdyr, funksiýanyň çözüwiniň maksimumyny tapmak prosesi bilen kesgitli $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ýaýlalardan x_n -de çözüwni alary. Ýöne biz ýük göterijiligi n-sanly näbellili funksiýany $f_n(d)$ bilen belgiläliň

$$\max \sum_{j=1}^{n-1} c_j x_j = f_{n-1}(d - a_n x_n).$$

ýazmak bolar. $x_j \geq 0$ üçin

$$0 \leq x_n \leq [\frac{d}{a_n}] - de \quad 0 \leq \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq d - a_n x_n.$$

§4. Diskret programmirlemede R. Belmanyň algoritmi

R.Belmanyň algoritmine seredeliň. Birölçegli ranes baradaky meseläniň goýulşyny aşakdaky görnüşünde ýazalyň:Ýük göterijiligi d-den bolan ranes bar bolsun. Ol *n*-sany dürli agramdaky ýüklerden doldurlyp bilner ýükleriň degişlilikde gymmatlygy *(j=1,2,…,n)* bilen. j-nji ýükiň birlik agramy a_j bilen belläliň gymmatlygy c_j. Şeýle bir ýükler toplumyny saýlanmaly ol ranesyň ulanylyşyndan *max* girdeýji getirmeli. Bu meseläniň goýulşynyň matematiki modeli aşakdaky ýaly:

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

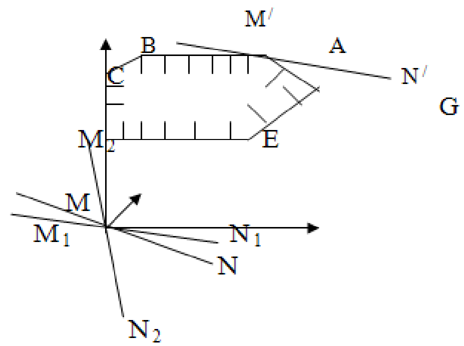
G-ýaýlada aşakdaky şertler ýerne ýetýän bolsun

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le d, \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ \text{bitin},\ \ j=1, 2, \dots, \text{n}. \qquad (3)$$

(2),(3) şertlerde kesgitlenen (1)-i *G*-ýaýlada maksimum girdeýjini kesgitlemek gerek balsun. Bu meseläniň çözülişi dinamiki programmirlemäniň usulnyň üsti bilen ýagny wariantalary yzygiderli derňemek usulynyň algoritminiň esasynda kesgitlenilýär. Onuň manysy aşakdakydan durýar:

Çözüwleriň gözleg ýaýlasy nul ölçegli ýaýla çenli biri-biriniň içinden ýerleşen ýaýlalarynyň yzygiderligine seredelýär. *n*-sany näbellileri funksiýanyň maksimum kesgitlemek prosesi *n* ädimden ybarat bolan bir näbellili funksiýanyň maksimum kesgitlemek prosesi bilen çalşyrylýar. *k* ädimde *a* ýükgöterjini doldurylýan ranesyň maksimum bahasynyň effekti alynmaklygy $f_k(a)$ bilen belläliň. Her ädimde meseläniň çözüwi bir üýtgeýänli funksiýanyň maksimumyny tapmakdan ybarat bolandan soň ädimimiziň nomerini biz seredip geçen üýtgeýänleriň soňyna toždestwalaýyn alyp bolar. Hakykatdan-da



1-nji surat

ýokardaky şert meseläniň koeffisiýenti *F(x)* maksat funksiýasy üçin $C=c'+\lambda c''$.

§4. Parametrik çyzykly meseleleriniň grafiki çözülişi

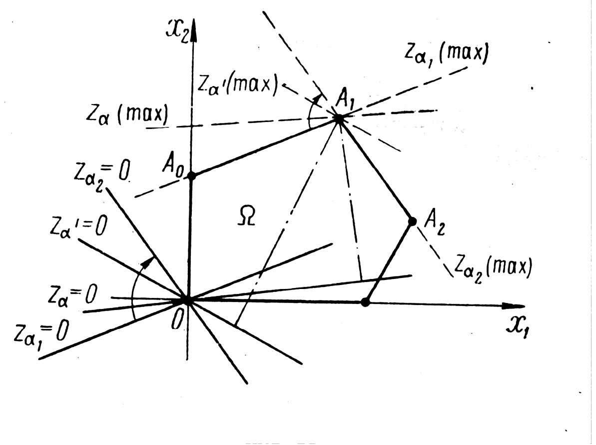
Meseläniň çäklendirmeler ulgamy güberçek köpgranlyk kesgitleýär.

Goý bize deňleme berilsin:

$$z_t = 0 \quad \text{ýa-da} \quad \sum_{j=1}^{n}(c_j + d_j t)(-x_j) = 0.$$

Goý käbir koordinatalar başlangyjyndan giper (ýokary) tekizlik geçýän bolsun we şol tekizligi ýokarky deňleme kanagatlandyrýar bolsyn.

Parametre $t=\alpha$; Giper (ýokary) tekizlik belli bir orna eýe bolar.Ony koordinata başlangyjyndan mümkin boldugyça daşlaşdyryp, meseläniň A_1 nokatdaky çözüwi alarys.



2-nji surat

α deregine $t=\alpha$ bahany goýup parametriň ululygyny üýtgederis. Onda gipertekizlik öz ornuny üýtgeder, ýöne öňkisi ýaly koordinata başlangyjyndan geçer. Bu gipertekizligi başlangyçdan daşlaşdyryp $z_{\alpha'}=0$ şol öňki A_1 nokada bararys. Emma funksionalyň maksimal bahasy eýýam başga ulululyga eýe bolar, sebäbi ol A_1

Diýmek,

$$\Delta = F(x') - \zeta$$

ýakynlaşmanyň takyk bahasy. Ony şeýle şekillendirmek mümkin: Eger $\Delta > \varepsilon$ (ε - gerek bolan takyklykda) ýöne çözüwi almak wagtymyz berlen wagtymyzdan artýan bolsa, onda çözüwi tapmak prosesi gutaryldy. Şahalanma we araçäkleme usulyň shemasyny derňewinde (seljermesinde) şeýle soraglar ýüze çykýar: bölek köplügi, olaryň bahalaryny nähili gurmaly? Bu soraglaryň jogaplary algoritimiň hasaplanşy bilen we adatça çözülýän meseläniň aýratynlygy bilen kesgitlenýär.

Bu başlangyç meseläniň çözüwini yzygiderli gurmak prosedurasy aşakdaky ýaly düşinilýär: Eger $G_2 \subset G_0$ we

$$z^2 = \min_{x \in G_2} \mathrm{F(x)}$$

$$z^{\circ} = \min_{x \in G_0} \mathrm{F(x)}$$

bolsa, onda

$$\min_{x \in G_2} \mathrm{F(x)} \geq \min_{x \in G_0} \mathrm{F(x)}$$

Şonuň üçin, käbir G_i köplükleri bölek köplüklere bölenimizde biz bölek köplüklerimiziň bahalary bölýän köplügimizden az däldigini alýarys. Indi optimal çözüwi kesgitlemek mümkin. Wariantalarynyň çözüwlerini optimal diýip, biz bölek köplügiň bahasy entek, şahalanmadyk köplügiň bahasyndan uly bolmalydygyny alarys. Goý $x^* \in G_v$

$$F(x^*) = z(G_v) \leq z(G_i), \quad \bigcup_i G_i = G$$

onda x^* meseläniň optimal čözüwi. Bu ýerde bolýar. Wariantalary yzygiderli derňew usulymyz optimal çözüwimiz yzygiderli ýakynlaşmasy bilen baglanşykly bolany üçin wariantyň optimal çözüwe ýakynlaşmasyny derejesi baradaky soragy ýüze çykýar. Goý

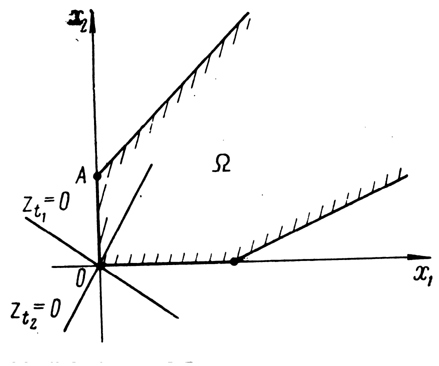
$$G = \bigcup_{i=1}^{s} G_i, \ \zeta = \min \ \mathrm{z(G_i)}$$

bolsun. Eger x-başlangyç meseläniň käbir çözüwi bolsa, onda

$$\zeta \leq \min \mathrm{F(x)} \leq \mathrm{F(x')}.$$

nokadyň başlangyç gipertekizlikden üýtgetmesine deň.Bu gipertekizlik bolsa öwürlip üýtgedi.

t başga bahalary berip $t = a''$, biz ýenede A_1 nokatdaky çözüwi alarys. Bu özgertmeleri dowam edip A_1A_0 gapyrga gipertekizlik parallel bolýança etmeli.



3-nji surat

z_t bu çyzgyda çäklendirlen daldir we ol maksimal bahalaryny A nokatda alýandyr.

Ýokarda aýdylan zatlara görä parametrik programmirlemäniň meselesini grafigi çözüp bolýandygyny aýdýarlar. Bu çözüwiň yzygiderligini aşakda seredeliň.

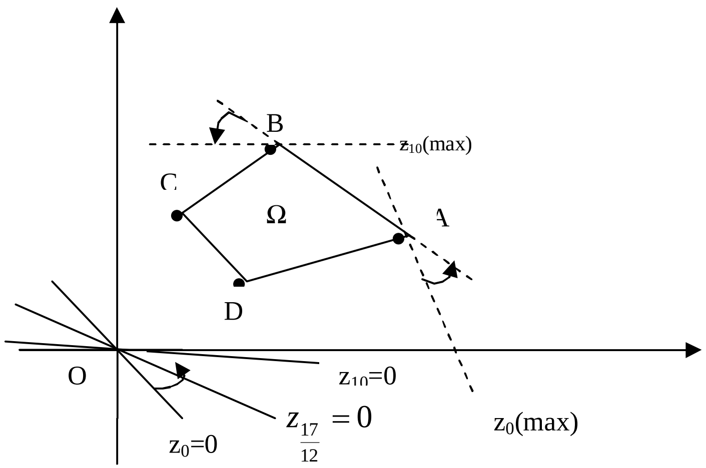
Goý bize maksimum tapmak gerek bolsun.

$$z_t = 5x_1 + (3 + 3t)x_2 \quad (t \in [0, 10])$$

aşakdaky şertlerde

$$-x_1 + x_3 \le 3,$$
$$4x_1 + 5x_2 \le 51,$$
$$2x_1 - 5x_2 \le 3,$$
$$x_1 + x_2 \ge 5,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Çözüwiň köpburçlygyny düzýäris we parametre iň kiçi bahany *t=0* berip we $z_0 = 5x_1 + 2x_2$ funksional üçin *A* nokatdaky maksimumy tapalyň (4-nji surat).

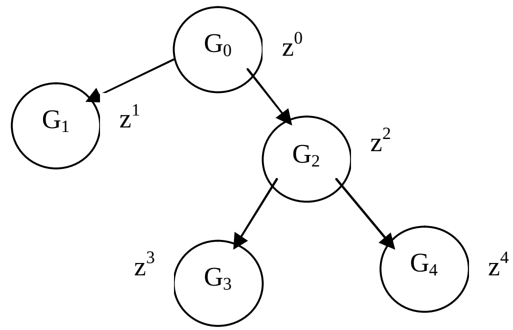


4-nji surat

z_t-ni nola deňleýäris we aşakdaky deňligi alýarys:

$$x_2 = -\frac{5}{2+3t}x_1.$$

Bu göniniň burç koeffisiýentinini k_z bilen belgileýäris:



1-nji surat

Haçan $x \in G$ -kopligininiň toplumynda *F(x)* funksiýa iň kiçi baha eýe bolanda onuň manysyny kesgitlemeli. Ýagny *z=F(x)* funksiýanyň *G*-niň erkin gurluşynyň sanyndaky ýaýlada iň kiçi bahasyny tapmak talap edilýär. Usulyň iterasionlylygyny göz öňünde tutup başdaky köplügiň *x*-iň alyp bilýän bahalaryny G_0 bilen belläliň. G_0 köplügiň aşakgy çägine bitin *F(x)* funksiýany goýalyň. Goy ol z^0 bolsun. (Meselem, z^0 –diýip *F(0)* bahasyny saýlap bolýar.) almak mümkin G_0 köplügi tükenikli kiçi böleklere böleliň: ýagny

$$\bigcup_{i=1}^{k} G_i = G_0, \qquad \bigcap_{i=1}^{k} G_i = \varnothing .$$

bolýan kesişmeýän $G_1, G_2, \ldots, G_k$ bölek köplüklere böleliň. Her bir $G_i (i=1,2,\ldots,k)$ bölek köplügi käbir z^i bahalandyrma bilen kesgitläliň we geljeki şahalama üçin saýlan bölek köplüklerimiziň barlagyny hem-de çözüwiň ahyrky netijesini almak maksady bilen guralyň. Ýokardaky çyzgyda bölek köplüklere şahalanma prosesi gurlan. Ol çyzgyda her bir ädimde şahalanma prosesi üçin saýlanlan bölek köplüklerimiziň öz gezeginde 2 sany kesişmeýän bölek köplükleri böünen. Diýmek köplik G_0-lere bölünen we olar bahalandyrylan . Goy olar z^1, z^2 bolsun. Eger $z^1 < z^2$ bolsa onda indiki şahalanma üçin G_2 bölek köplükde çözüwiň bolmaklygynyň ähtimallygy uludyr diýip alalyň.

§3. Diskret programmirlemede wariantlaryň yzygiderli derňew usuly

1) **Usulyň nazary esaslary we hasaplamanyň shemalary**. Kesme usuly öwrenenimizde biz amaly meseläniň çözüwini alyp bolmazlygana getirýän ýetmezçiliklerine üns beripdik. Bu 1-nji bilen, we köp gezek, yzygiderli bahalary kesgitlemek usulynyň ulanylmagy hasaplamalarda ýalňyşlygynyň barlygy, ikinji bir tarapdan

$$\gamma_0^k \geq \sum_{j\in N_k} \gamma_j^k x_j,$$

formula bilen goşmaça çyzykly çäklenmeleriň gurulmagy bilen düşinilýär. Bu ýerde γ_j^k-baglanşykly dälliginiň bahasy. Bu ýetmezçilikler wariantalary yzygiderli derňemek usullarynda ýokdyr. Wariantalary yzygiderli derňemek usulynyň shemasyna R. Belmanyň ady bilen bagly dinamiki programmirleme usuly, Littla, Suini, Karel ady bilen bagly bolup şahalama we araçäkleme usulyna girýändir.

Kesme usulyndan tapawutlylykda wariantalary yzygiderli derňemek usuly, çyzykly programmirlemäniň aparatlaryny ulanylmaýar we hasaplama ýalňyşlyklaryna sezewar bolmaýar. Aşakdaky mesele üçin şahalama we araçäkleme usulynyň umumy shemasyna seredip geçeliň:

$$k_z = -\frac{5}{2+3t}$$

Başlangyç t=0-da bu koeffisiýentiň bahasy

$$k_{z_0} = -\frac{5}{2}.$$

t-parametre görä burç koeffisiýentden önüm alyp, tapýarys:

$$(k_z)'_t = \left(-\frac{5}{2+3t}\right)'_t = \frac{15}{(2+3t)^2}.$$

t-niň islendik bahasynda önüm položitel bolany üçin burç koeffisiýenti t-niň ulalmagy bilen artýar. Bu artmanyň predelini tapalyň:

$$\lim_{k\to+\infty} k_z = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{5}{2+3t}\right) = -0;$$

t-niň çäksiz artmagy bilen bilen k_z burç koeffisiýenti otrisatel tarapdan nola ymtylýar. $k_{AB} = -\frac{4}{5}$ bolany üçn

$$-\frac{4}{5} = -\frac{5}{2+3t}; \quad t = \frac{17}{12}.$$

Şeýlelikde, $0 \le t < \frac{17}{12}$ aralykda optimal çözüw A depede bolar, $\frac{17}{12} < t \le 10$ aralykda çözüw B depede bolar, $t = \frac{17}{12}$ bolanda bolsa optimal depe bu depeleriň ikisinde-de bolar.

$$u_i - u_j + nx_{ij} = k - (k+1) + n = n - 1.$$

Ýagny u_i, u_j – tükenikli bahalary bar bolup, gatnaw üçin, n-şäher bar bolup (4) şerti ýerine ýetirýär, deňsizlik hökmünde, takyk bolanda bolsa deňlik ýerine ýetýär.

Diýmek (2)-(5) mesele Kommi Woýajaryň meselesini suratlandyrýandygyny görýäris.

Bu meseläniň amaly mesele hökmünde örän uly ähmiýeti bardyr.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots n, \qquad (4)$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1, \; i, j = 1,2,\ldots, n, \; i \ne j \qquad (5)$$

(2)-(5) matematiki modelirlemäniň gezimli söwda agentiniň (kommiwoýažoryň) meselesini suratlandyrýar. Biz şu meseläniň GSA-niň meselesidigini görkezeliň.

Bu ýerde u_i, u_j – erkin hakyky bahalar, (3) şert G S A her bir şähere bir gezek girýär, her bir şäherden bir gezek çykýar, (5) şert n şäheriň gatnawlarynyň ýapyklygyny kanagatlandyryp, petläniň bolmazlygyny görkezýär.

Onda hemme (5) şertleri goşup kiçi sikiliň ugruna, biz aşaky deňsizligi alarys

$$\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{j=1}^{k} u_j + nk \le (n-1)k.$$

Sebäbi

$$\sum_{i=1}^{k} u_i - \sum_{j=1}^{k} u_j = 0,$$

şerte görä

$$nk \le (n-1)k, \quad \text{nirede} \quad k < n, \; k \ne 0.$$

Diýmek ýapyk kiçi sikl, n-den az sanly şäherleriň ýoklygy görkezýär. Şeýle hem u_i üçin, haýsy hem bolsa bir başlangyş punktdan başlap, ýapyk sikliň bardygyny görkezmek bolýar we (5) şerti ýerine ýetirýär.

Hemme $x_{ij}=0$ (j-nji şäher i-nji şäherden soň barylmandyr) (4)-den $u_i - u_j \le n-1$ alarys, u_i, u_j – niň erkinliginiň esasynda.

Goý, haýsy hem bolsa, bir k-nji ädimde i-nji şähere j-nji şäherden öň barylýar, ýagny $x_{ij}=1$. u_i bilen u_j-iň erkinliginiň esasynda $u_i=k$, $u_j=k+1$ bilen belläp (5) – den alarys.

VI Bap. Diskret programmirlemäniň meselesi

§1. Diskret programmirlemä gelýän amaly meseleler

Bitin sanly meseleleriň içinde, näçe belli meselelere seredilýär, ýagny ýerini çalşyrma arkaly ekstremal meseläniň çözüşini gözlemek örän uly gyzyklanma döredýär. Bu görnüşdäki meseleler kombinator görnüşli meseleler diýen ada eýe boldylar. Bu görnüşli meselelere, bellemek meselesi degişli bolup (персонала), olaryň çözülişi bolsa $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $1, 2, \ldots, n$-sanyň ýerini çalyşma görnüşinde berilýär. Her bir bellenen P_i degişlilikde $(i=1,2,\ldots,n)$ –niň üsti bilen aňladylýar. Bize belli bolşy ýaly belleme meselesi çyzykly programirlemäniň ulag meselesiniň hususy haly bolup, ol meseläniň çözüliş usulsy hiç hili kynçylyk döretmeýär. Şoňa görä bu meselä üns bermän biz, umymy meseleleriň kombinator görnüşine seredeliň, olar bolsa ozal seredilen belli usullara gelmeýär.

Örteme barada mesele. Goý graf G–berilen bolsun. Grafyň gapyrgalarynyň saýlowlarynyň minimumyny kesgitlemeklik gerek bolsun, haçan grafyň her bir depesi onuň gapyrgalaryna degişlilikde şol bir örtüge getirýän bolsa. Onda

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, (i = 1,2,\ldots,m, \; j = 1,2,\ldots,n). \qquad (1)$$

bu matrisa insident matrisiýasy diýilýär, eger onuň elementleri aşakdaky görnüşde kesgitlenýän bolsa:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ depesi } j \text{ gapyrga degisli bolsa.} \\ 0, & i \text{ depesi } j \text{ gapyrga degili bolmasa} \end{cases} \qquad (2)$$

Bu meseläniň matematiki modelini düzeliň. Goý G graf – A insidens matrisasy bilen häsiýetlendirilýän bolsun; x_j — bulewli näbelli $j=\overline{1,n}$ aşakdaky görnüşde kesgitlenilýär:

$$x_j=\begin{cases}1, \text{ eger } j \text{ gapyrga ortüge girýän bolsa.}\\ 0, \ j-\text{örtüge girmeýän bolsa tersine}\end{cases} \quad (3)$$

Minimumlaşdyrmak gerek

$$F=\sum_{j=1}^{n} x_j \to \min \quad (4)$$

aşakdaky şertlere görä:

1) Her bir depäniň degişlilikde bolmanda bir gapyrganyň örtügine degişli bolsa.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 1 \quad (5)$$

2) x_j – näbelliniň bulewliligi, $j=1,2,\ldots,n$.

§2. Diskret programmirlemäniň matematiki modeli

Gezimli (aýlanma) söwda agenti meselesi (Kommiwoýažer, agenti). Goý, n-sany şäher bar bolsun. Gezimli söwdegär agenti haýsy hem bolsa birinden çykyp, hemme şäherleri aýlanyp, ýene başdaky şähere aýlanyp gelmeli. Her bir şähere birje gezek girmek bolýar. Şonuň üçin gezimli söwdagäriň gatnawy ýapyk petlesiz sikli emele getirýär. Her bir şäher beýleki şäherler bilen birikdirilip olaryň ulag ara matrisasy bellidir.

Gatnawlaryň ýapyk ugurlarynyň minimumyny tapmaly. Bu mesele hususy bellenme meselesini ýada salýar, sebäbi gezimli söwdagär her şähere diňe bir gezek baryp bilýär (her bir talapgär diňe bir wezipä bellenip biler), ondan tapawudy bolsa, ol ýapyk gatnawy gurmaklygy kesgitlemeklik talap edilýär. Meseläniň matematiki modelini düzeliň:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \ i-nji\ şäherden\ j-nji\ şähere\ geçýän\ bolsa\\ 0, \ geçmeýän\ bolsa\end{cases} \quad (1)$$

nirede $i \neq j \quad i,j=1,2,\ldots,n$ minimumlaşdyrmany talap edýär.

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \quad (2)$$

Aşakdaky şertlerde
Girmek

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=1,2,\ldots n, \quad (3)$$

Çykmak