A.Garajaýew

Wariasion hasaplamalar we optimallaşdyrma usullary

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

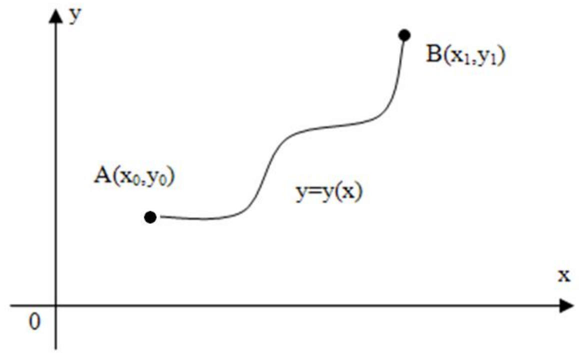
Türkmenistanyň Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

A ş g a b a t - 2 0 1 0

Giriş

Birnäçe max we min bahalary kesgitlenýän $z=f(x)$ funksiýa degişli meseleleri bilen bilelikde, köplenç birnäçe fiziki meselelerde hem max we min kesgitlemek meselesi ýüze çykýar. Bu ýagdaýlar aýratyn ululuklar bilen bagly bolup, ony funksional diýilip atlandyrylýar. Funksional diýilip näbellili ululygyň bahasyny bir ýa-da birnäçe funksiýalaryň üsti bilen kesgitlemegine aýdylýar.

Meselem: Funksional diýip egri çyzygyň L dugasynyň uzynlygyna aýdylýar. Ol duga $A(x_0,y_0)$ we $B(x_1,y_1)$ (1-nji surat)



1-nji surat

nokatlaryň birikmegi bilen emele gelýär. Eger egriniň deňlemesi $y=y(x)$ bolsa, onda L aşakdaky ýaly kesgitlemek bolýar:

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Eger S giňişlikde üstüň meýdany bolsa, onda ol hem funksionaldyr, sebäbi ol hem üstüň aýlanmagynyň esasynda kesgitlenýär, ýagny $z(x,y)$ funksiýanyň saýlanmagy bilen $z=z(x,y)$ üstüň deňlemesiniň içinde $z(x.y)$ ýerleşendir. Belli bolşy ýaly:

$$S\,[z\,(x\,,\;y\,)] = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

D-üstüň *Oxy* tekizligine bolan proýeksiýasy.

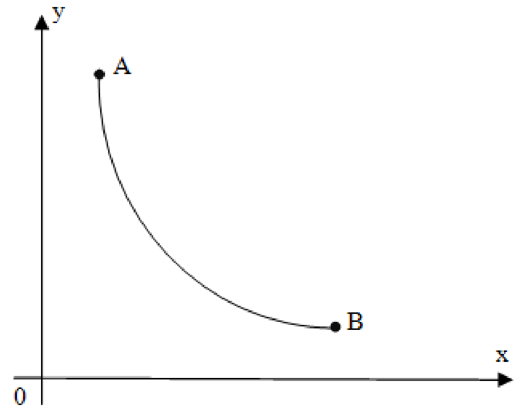
Inersiýa momenti, statiki momenti, haýsy hem bolsa bir jynsly egriniň ýa-da üstüň agyrlyk merkezininiň koordinatalary we şuňa meňzeş meseleleriň funksionalynyň bahalaryny kesgitlemäni öwredýän usulýete wariasion hasaplamalar diýilýär.

Funksionalyň max we min meselelerini derňeýän meselelerine wariasion meseleler diýilýär.

Mehanikanyň we fizikanyň birnaçe kanunlaryny seredilýän proseslerde max ýa-da min bahalara eýe bolmaly bolýar. Bu bolsa ol meseleleriň funksional meselä getirýär. Şu görnüşdäki kanunlara wariasion prinsipli mehanikanyň we fizikanyň kanunlary diýilýär. Olardan: energiýanyň saklanmak kanuny, impulsyň saklanmak kanuny, hereket sanynyň saklanmagynyň kanuny, Fermanyň optikadaky kanuny, maýyşgaklyk nazarýetinde kastiliýanyň prinsipi we ş.m. Wariasion hasabyň ösüp başlan wagty 1696 ý. Eýleriň (1707-1783ý) düýpli işlerinden soňra ol özbaşdak ussully matematiki ders hökmünde hasaplanyp başlapdyr. Wariasion hasabyň ösmegine aşakdaky 3 sany meseleler uly täsir ýetirdi.

1) **Brahistohrone barada mesele**. 1969-njy ýylda Iogann Bernulli brahistrihone baradaky meselesini çap eden hatynda matematiklere hödürleýär. Bu meselede A hem B nokatlary birikdirýän, bir dik çyzykda ýatmaýan, berlen material nokadyň egri çyzyk bilen A nokatdan B nokada eňnitdigini kesgitleýän egri çyzygy tapmaly. A we B nokatlaryň iň ýakyn arasy göni çyzyk hem bolsa iň çalt egri çyzyk bolýar. Sebäbi göni çyzykda tizlik, näçe çalt osýän bolsa hem, ol egri çyzykdakydan pes tizlik bilen hereket edýär (2-nji surat).

Mazmuny

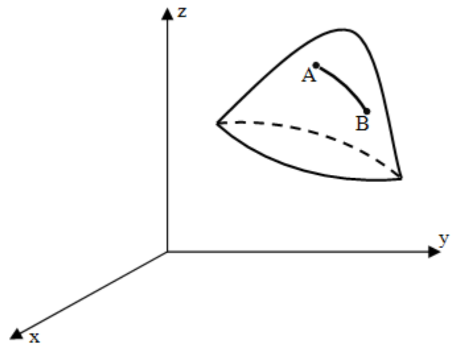


2-nji surat

Ýoly uly (uzyn) hem bolsa, esasy ýoly ýokary çaltlyk bilen geçýär. Bu meseläniň çözlüşini I.Bernulli, Ý.Bernulli, G.Leýbnis, I. Nýuton, G.Lopital iň çalt eňňit sikloitdir diýip tapypdyrlar.

<u>2) Geodeziki çyzyklaryň meselesi.</u>

Berlen $\varphi(x, y, z) = 0$ üstde berlen A we B nokatlary birikdirýän iň gysga çyzygy kesgitlemeli. Şolar ýaly çyzyklara geodeziki çyzyklar diýilýär. (3-nji surat)



3-nji surat

Meselem, şäherleriň köçelerini geçirende, demir ýollar geçirlende we şuňa meňzeşler bu mesele wariasion meseleleriň tipinden bolýar we olara şertli ýa-da baglanşykly ekstremum diýilýär. Berlen funksiýanyň min kesgitlemeli.

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\, dx$$

ýöne $y(x)$ we $z(x)$ funksiýalar $\varphi(x, y, z) = 0$ şerte bagly bolmalydyr. Bu mesele 1698-nji ýylda Ý.Bernulli tarapyndan çözülip, onuň umumy usuly L.Eýleriň, J.Lagranžyň işlerinde seredilendir.

3) Izoperimetrik mesele.

Berlen uzynlygy L max meýdany S-(çäklendirilen)-bolan ýapyk çyzygy kesgitlemeli. Köne Gresiýada belli bolşy ýaly, ol çyzyk töwerekdir. Bu mesele S funksionalyň maksimumyny kesgitlemeli. Eger özboluşly goşmaça şerti bar bolsa, ýagny egri çyzgyň uzynlygy hemişelik bolmaly. Ýagny, funksional

$$l = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt$$

özüniň hemişelik bahasyny saklaýan bolsa şular ýaly şertli görnüşdäki meselelere izoperimetriki mesele diýilýär.

Izoperimetriki şertler bilen umumy çözüliş usuly L.Eýler tarapyndan işlenip kesgitlenen. Indi biz birnäçe wariasion meseleleriň çözüliş usullary bilen tanyşalyň. Olaryň hemmesem esasan ekstremumy kesgitlemäge getirýär, iň köp gabat geljek funksionallar:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

12. Полунин И.Ф. Курс математического программирования, "Высшая школа", 1970, стр. 317

13. Акулич И.Л., математичсекое программирование в примерах и задачах., Москва "Высшая школа" 1986 г., стр. 317.

14. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации., Москва МАИ 1995г.,341 стр.

15. Эддоус М., Стэнсфилд Р.Методы принятия решения. Москва "Аудит","Юнити" 1997г.,590 стр.

16. Под редакцией В.Ф Кротова, Основы теории оптимального управления, Москва " Высшая школа" 1990г. 430 стр.

17. Васильев Ф.П., Численные методы решения экстремальных задач.,Москва, "Наука" 1980г, 550 стр.

18. Garajaýew A., we başgalar. Käbir ykdysady meseleleriň matematiki modelleri we olary optimal çözmekligiň Simpleks usuly. Aşgabat-2001 ý., 63-64 sah.

19. Garajaýew we başgalar. Amaly meseleleri derňemekde ýasama usulynyň ulanylyşy. Aşgabat-2007ý.

20. Garajaýew we başgalar. Kesgitsizlik şertli matematiki modelleriň düzülişi we optimal çözülişi. Aşgabat-2007ý.

21. Garajaýew we başgalar. Köpçülige hyzmat ediş ulgamyň ykdysady matematiki modeli.Türkmenistanda ylym we tehnika, Aşgabat-2008 ý.№6

22. Эльсгольц Л.Э Дифференциальные уравнения и вариационное исчесление., Москва, "Наука",1969г., 424стр.

23. И.М.Гельфанд, С.В.Фомин, Вариационные исчисление, Физматгиз, 1961.

24. В.И.Гюнтер, Курс вариационные исчисление, Гостехиздат, 1941.

Edebiýat

1. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedow (gysgaça terjimehal). Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 128 sah.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistanda saglygy goraýşy ösdürmegiň ylmy esaslary. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 96 sah.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 44 sah.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 416 sah.
5. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Umumy milli “Galkynyş” Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdan daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 48 sah.
6. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – Saglygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 175 sah.
7. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň daşary syýasaty. Wakalaryň hronikasy. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 64 sah.
8. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Mälikgulyýewiç Berdimuhamedowyň Ýurdy täzeden galkyndyrmak baradaky syýasaty. Aşgabat, Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2007. 133 sah.
9. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984, 293 с.
10. Монахов В.М, и другие, Методы оптимизации. Москва " Просвешение",1978г,172 стр.
11. Под редакцией Ляшенко И.Н., Линейное и нелинейное прогромирование, Киев "Вышая школа" 1975,370 стр.

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x),\dots, y^{(n)}(x)\right)dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1(x),\dots, y_n(n), y'(x)_1\dots, y'_n(x)\right)dx,$$

$$\iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\ , dy\ .$$

F funksiýanyň $y(x), y_1(x)\dots y_n(x), z(x,y)$ funksiýalaryň argumenti bolany üçin oňa funksional diýilýär.

I Bap. Wariasion hasaplamalar, onuň maksady we meseleleri

§1. Wariasiýa we onuň esasy häsýetleri

Wariasion meseleleriň çözüliş usullary we funksiýalaryň max we min meseleleriň derňelişi, funksiýalaryň max we min meseleleriň derňelişine örän meňzeşdir. Şoňa görä funksiýanyň max we min kesgitlenilişiniň gysgaça nazaryýetini ýatlamak gerek, şonuň bilen bilelikde ol düşünjeleri funksionallar üçin getirip, birmeňzeş teoremalaryň subutlaryna seredeliň.

1. *z* üýtgeýän ululyk, *x* üýtgeýän ululygyň funksiýasy diýilip aýdylýar *z=f(x)*, eger x haýsy hem bolsa, bir ýaýladaky her bir bahasyna *z* bahasy degişli bolsa, onda onuň üýtgemesine *x* degişlilik emele gelýär: *x* sana *z* san degişlidir. Edil şonuň ýaly hem köp näbellili funksiýalar kesgitlenilýär.

$1^{/}$. υ-üýtgeýän ululyga funksional diýilip aýdylýar, eger ol *y(x)*- funksiýa bagly bolýan bolsa şeýle hem $\upsilon=\upsilon[y(x)]$-diýilip bellenilýän bolsa: eger her bir funksiýa *y(x)* synpdan bolup υ funksionalyň bahasyna degişli bolsa, ýagny degişlilik emele gelýär: *y(x)*- funksiýa υ-sana degişli.
Edil şonuň ýaly hem birnäçe bir näbellili funksiýalara we birnäçe köp nähilli funksiýalara degişli bolýan funksionallar hem kesgitlenilýär.

2. *f(x)* - funksiýasynyň argumenty *x* artdyrmasy Δx üýtgeýän ululygyň 2-bahasynyň tapawudy $\Delta x = x - x_1$ aýdylýar. Eger x- erkin üýtgeýän

$2^{/}$. $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň *y(x)* argumentiniň artdyrmasy ýa-da wariasiýasy δy diýilip 2 funksiýa-synyň arasyndaky $\delta y = y(x) - y_1(x)$ tapawuda aýdylýar. Şeýle hem *y(x)*-

x_3 x_1	0 1	$-\frac{5}{2}$ -2	1 0	$\boxed{\frac{3}{2}}$ 1	-5 -3	(-3;0;-5;0)
x_4 x_1	0 1	$-\frac{5}{3}$ $\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	1 0	$-\frac{10}{3}$ $\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};0;0-\frac{10}{3}\right)$
x_4 x_2	-5 -3	0 1	4 $\boxed{2}$	1 0	-5 -1	(0;-1;0;-5)
x_4 x_3	1 $-\frac{3}{2}$	-2 $\frac{1}{2}$	0 1	1 0	-3 $-\frac{1}{2}$	$\left(0;0;-\frac{1}{2};-3\right)$

	1	-2	0	1	-3	
	0	5	$\boxed{5}$ -2	-3	10	
	0	5	-2	-3	10	
	0	5	-2	-3	10	
	1	-2	0	1	-3	
	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	2	
x_1	1	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	(1; 2; 0; 0)
x_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	2	

Deňlemäniň bazis çözüwi $C_4^2 = 6$ deň. Galan bazis çözüwler bolsa aşakdaky ýaly tapylýar.

Bazis üýtgeýänler	x_1	x_2	x_3	x_4	Azat aggzalar	Bazis çözüwler
x_1	1	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	(1; 2; 0; 0)
x_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	2	
x_3	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\left(0;\frac{3}{2};-\frac{5}{4};0\right)$
x_2	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	

ululyk bolsa, onda $dx = \Delta x$.	funksiýa erkin üýtgeýär diýilip hasap edilýär, birnäçe funksiýa-laryň synpynda.
3. *f(x)* funksiýa üznüksiz diýilip aýdylýar, eger *x*–iň kiçijik üýtgemesine *f(x)*–funksiýanyň kiçijik üýtgemesi degişli bolsa	3′. $\upsilon[y(x)]$ - funksionala üznüksiz diýilip aýdylýar, eger *y(x)*-funksiýanyň kiçijik üýtgemesine $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň kiçi-jik üýtgemesi degişli bolsa

Iň soňky kesgitleme takyklyk we düşündirişi talap edýär, sebäbi şeýle bir soraglar ýüze çykýar, nähili üýtgemeler argument *y(x)*-funksiýa funksional üçin kiçi diýlip atlandyrylýar. Şeýle hem *y= y(x)* we *y=* $y_1(x)$ biri-birinden örän az tapawutly ýa-da biri-birine örän ýakyn diýilip hasap edilýär, haçan olaryň modullarynyň tapawudy hemme *x* üçin örän kiçi diýilip hasap edilse, onda ol berlen funksiýalar ýakyn egriler ordinatalar boýunça ýakynlaşýarlar. Bular ýaly ýakynlaşýan egriler durmuşda aşakdaky funksional görnüşde gabat gelýär.

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x} F(x, y(x), y'(x))dx$$

Ýöne bu integralyň aşagynda y' -argumentiň barlygy üçin aýratyn ýagdaýlarda funksional üznüksiz bolup bilýär. Şoňa görä köp ýagdaýlarda bu egriler hakykatdan ýakyn bolup bilýärler, diňe ordinatalara görä ýakyn bolan egriler we galtaşmalara tarap ugrukdyrylan degişli nokatlarda. Egrileriň diňe özara tapawudynyň modullary däl-de eýsem bolsa, olaryň önümleriniň tapawudynyň modullarynyň hem örän kiçi bolmagyny talap etmeli. Kä hallarda diňe şeýle bir funksiýalarýakyn diýilip hasap edilýär, haçan ol funksiýalaryň hökman hemme tapawutlarynyň modullary örän kiçi bolsalar.

$$y(x) - y_1(x),\ y'(x) - y_1'(x),\ y''(x) - y_1''(x), \ldots, y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)$$

Şeýlelikde, *y= y(x)* we *y=* $y_1(x)$ egrileriň ýakynlygy barada aşakdaky kesgitlemäni girizmeklik gerek bolýar.

Kesgitleme 1. $y= y(x)$ we $y= y_1(x)$ egriler nul tertipli ýakynlykda diýlip aýdylýar, eger olaryň tapawutlarynyň moduly $y(x)$- $y_1(x)$ örän kiçi bolsa.

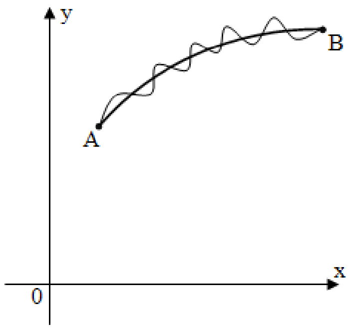
Kesgitleme 2. $y=y(x)$ we $y=y_1(x)$ egriler birinji tertipli ýakynlaşma diýilýär, eger $y(x)$- $y_1(x)$ we $y^{/}(x)$- $y^{/}_1(x)$ modullarynyň tapawudy örän kiçi bolsa.

Kesgitleme 3. $y=y(x)$ we $y=y_1(x)$ egriler k-nji tertipli ýakynlaşma diýilýär, eger

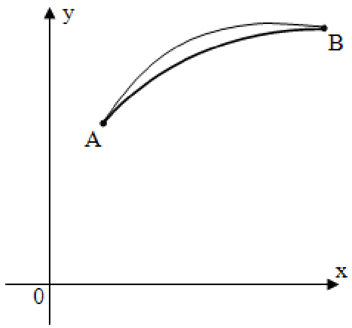
$$y(x)\text{- } y_1(x),$$
$$y^{/}(x)\text{- } y^{/}_1(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(k)}(x)\text{- } y^{(k)}_1(x)$$

modullarynyň tapawudy örän kiçi bolsa.

1-nji suratda nul tertipli ýakynlaşma egrileri şekillendirilendir. 2-nji suratda birinji tertipli ýakynlaşma egrileri şekillendirilendir.



4-nji surat



5-nji surat

Bu kesgitlemelerden görnüşi ýaly k-njy tertipli ýakynlaşma eýe bolsa, onda olar islendik kiçi tertipli ýakynlaşma manysynda ýakynlaşandyrlar.

$3^{//}$. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin $\delta>0$ saýlap bolýan bolsa, ýagny $|x-x_0|<\delta$ bolanda $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bolsa, onda $x=x_0$ nokatda $f(x)$

$3^{///}$. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin $\delta>0$ saýlap bolýan bolsa we $|\upsilon[y(x)]-\upsilon[y\ (x)]|<\varepsilon$

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1
0	1	0	-3
0	0	1	2

Şeýlelikde, bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi (1; -3; 2) deňdir.

Mesele 11. Deňlemeler ulgamynyň hemme bazis çözüwlerini tapyň.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3 \\ 3x_1-x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4 \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Azat aggzalar	Bazis çözüwler
	$\boxed{1}$	-2	0	1	-3	
	3	-1	-2	0	1	
	2	1	-2	-1	4	
	1	3	-2	-2	7	

x_1	x_2	x_3	
1	$-\frac{5}{2}$	-3	$\frac{5}{2}$
0	$\boxed{-\frac{11}{2}}$	-4	$\frac{17}{2}$
0	0	3	-21

Hasaplamalary geçirip alarys.

x_1	x_2	x_3	
1	0	$-\frac{13}{11}$	$-\frac{15}{11}$
0	1	$\frac{8}{11}$	$-\frac{17}{11}$
0	0	$-\frac{13}{11}$	$-\frac{26}{11}$

x_3 näbellini birinji we ikinji deňlemelerden aýyryp alarys.

funksiýa üznüksizdir. Şeýlelikde, x-argument $f(x)$ funksiýa kesgitlener ýaly bahalara eýe bolýar.

$$\left|y'(x)-y_0'(x)\right|<\delta,$$

....

$$\left|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)\right|<\delta$$

bolsa, onda $\upsilon[y(x)]$-funksional k-tertipli ýakynlaşma manysynda $y=y_0(x)$ bolanda üznüksizdir.

Şeýlelikde, $y(x)$-funksiýa, $\upsilon[y(x)]$-funksionaly kesgitleýän funksiýalar synpyndan alynan diýilip düşünilýär.

Eger $y=y_1(x)$ we $y=y_2(x)$, $(x_0\le x\le x_1)$ egri çyzyklaryň aralygyny $\rho(y_1,y_2)$- kesgitlemekligiň düşünjesi ol egrileriň ýakynlaşmasy, aralygyň kiçiligi bilen kesgitlenilýär.

Eger

$$\rho(y_1,y_2)=\max_{x_0\le x\le x_1}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|,$$

hasap etsek, ýagny C_0 giňişlikde metrikany girizsek, onda nul tertipli ýakynlaşma düşünjesine getirýär.

Eger

$$\rho(y_1,y_2)=\sum_{p=1}^{k}\max_{x_0\le x\le x_1}\left|y_1^{(p)}(x)-y_2^{(p)}(x)\right|$$

hasap etsek (y_1,y_2-funksiýalaryň k-tertibe çenli üznüksiz önümleri bar diýip hasap edýäris), onda egrileriň ýakynlaşmasy k-tertipli diýen manyny berýär.

4. Çyzykly funksiýa diýilip $l(x)$-funksiýa aýdylýar, eger ol aşakdaky şertleri ýerine

4′. Çyzykly funksional diýilip $L[y(x)]$- funksionala aýdylýar, eger ol aşakdaky şertleri ýerine ýetirýän bolsa

$$l(cx) = cl(x),$$

bu ýerde c-erkin hemişelik we

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2).$$

Bir üýtgeýänli çyzykly funksiýa aýakdaky görnüşe eýedir: $l(x) = kx$

bu ýerde k-hemişelik san.

ýetirýän bolsa:

$$L[cy(x)] = cL[y(x)],$$

bu ýerde c-hemişelik san we

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$$

Çyzykly funksionala mysal bolup

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (p(x)y + q(x)y')dx$$

biler.

5.Eger $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ funksiýanyň artdyrmasy

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

bu ýerde *A(x)* Δx-e bagly däl, $\Delta x \to 0$ bolanda $\beta(x, \Delta x) \to 0$ bolýar, onda funksiýa differensirlenýän diýilýär. Δx-e görä $A(x)\Delta x$-artdyrma funksiýanyň differensialy diýilýär we *df* bilen belgilenýär. Δx-e bölüp we $\Delta x \to 0$ bolanda predele geçip $A(x) = f'(x)$ we $df = f'(x)\Delta x$ alarys.

5'.Eger funksionalyň artdyrmasyny

$$\Delta \upsilon = \upsilon[y(x) + \delta y] - \upsilon[y(x)]$$

aşakdaky görnüşde ýazmak bolýan bolsa

$$\Delta \upsilon = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max[\delta y]$$

bu ýerde $L[y(x), \delta y]$, δy - funksionala görä çyzyklydyr, $\max|\delta y|$, $|\delta y|$- maksimal bahasy we $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ haçan $\max|\delta y| \to 0$, onda δy - görä funksionalyň çyzykly bölegi, ýagny $L[y(x), \delta y]$, funksionalyň wariasiýasy diýilýar we $\delta \upsilon$ -bilen bellenilýär.

Şeýlelik bilen wariasiýa funksionala-funksionalyň artdyrmasynyň δy görä esasy çyzykly bölegi. Funksionalyň wariasiýasynyň

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 = \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 \end{cases}$$

Şeýlelikde x_1, x_2-bazis üýtgeýänler, x_3, x_4, x_5-bolsa azat üýtgeýänler. Diýmek, bu deňlemäniň bazis çözüwi $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0; 0\right)$ bolar.

Mesele 10. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -16 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{2}$	-5	-6	5
-3	2	5	1
2	4	-3	-16

Birnji deňligi iki bölege bölüp, ikinji we üçünji deňliklerden x_1-i aýyryp alarys.

Mesele 9. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	-2	0
0	3	-3	-3	5	1
0	6	-6	-6	10	2
0	9	-9	-9	15	3

x_2 -ni üçünji we dördünji deňlemelerden aýyryp aşakdaky tablisany alarys.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-1	1	1	-2	0
0	3	$\boxed{-3}$	-3	5	1

Bu ýerden bolsa alarys:

derňemeklikde, funksiýany derňemeklikdäki differensialyň oýnaýan roluny oýnaýar. Differensial funksiýa we wariasiýa funksionala, başga ekwiwalent kesgitleme hem bermek bolar. $f(x+\alpha\Delta x)$ funksiýasynyň bahasyna seredeliň.

Goý, $x, \Delta x$ fiksirlenen üýtgemeýän α perimetriň bahasy üýtgeýän bolsun.

Haçan $\alpha = 1$ bolanda, biz funksiýanyň bahasynyň artdyrmasyny $f(x+\Delta x)$-alarys, haçan $\alpha = 0$ bolanda *f(x)*-funksiýanyň başdaky bahasyny alarys. $f(x+\alpha\Delta x)$-yň α görä önümi, haçan $\alpha = 0$, ol differensiala deňdir $f(x)$-funksiýa *x*-nokatda. Hakykatdan çylşyrymly funksiýanyň differensialy

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x\Big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

Edil şonuň ýaly hem köp näbellili funksiýalar üçin: $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

α -görä, soňra $\alpha = 0$. Hakykatdan

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2 ... x_n+\alpha\Delta x_n)\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = df.$$

Şeýle hem $\upsilon[y(x)]$-görnüşli funksionallar üçin ýa-da örän çylşyrymly, ýagny köp näbellili funksiýalar ýa-da köp näbellili funksiýalar üçin wariasiýany kesgitlemek bolar, haçan $\upsilon[y(x)+\alpha\delta y]$, α boýunça haçan $\alpha = 0$ bolanda funksionalyň önümi hökmünde.

Hakykatdan hem, eger funksionalyň wariasiýasy bar bolsa, onda onuň artdyrmasy aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$\Delta\upsilon = \upsilon[y(x)+\alpha\delta y] - \upsilon[y(x)] = L(y_1\alpha\delta y) + \\ + \beta(y_1\alpha\delta y)\cdot|\alpha|\max|\delta y|.$$

$\upsilon[y+\alpha\delta y]$ önümi α -görä haçan $\alpha = 0$ bolanda

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\alpha\delta y)+\beta[y(x),\alpha\delta y]\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\alpha\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=L(y,\delta y)$$

çyzyklylygyň şertine görä

$$L(y,\alpha\delta y)=\alpha L(y,\delta y),$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\delta y|=0$$

$\beta[y(x),\alpha\delta y]\to 0$ haçan $\alpha\to 0$. Şeýlelikde, eger $\exists$ wariasiýa, funksionalyň artdyrmasynyň esasy çyzykly bölegi hökmünde, onda $\exists$ wariasiýa perimetriň önümi manysynda, perimetriň başlangyç bahasy. Bu kesgitlemeleriň ikisi hem öz aralarynda ekwiwalentdirler. Wariasianyň ikinji kesgitlemesi birinjiden has giňdir, sebäbi $\exists$ meseleler funksionallar, artdyrmadan esasy çyzykly bölegi aýyryp bolanok, ýöne wariasiýa ikinji kesgitleme $\exists$.

6. $f(x)$ -funksiýanyň differensialy $\frac{\partial}{\partial a}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}$ deňdir.

6'. $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň wariasiýasy $\frac{\partial}{\partial a}\upsilon[y(x)+a\delta y]\Big|_{\alpha=0}$ deňdir.

Kesgitleme 4. Funksional $\upsilon[y(x)]$, $y=y_0(x)$ egride max eýe bolýar, eger $\upsilon[y(x)]$- funksionalyň bahasy, $\forall$ $y=y_0(x)$- golaý egri uly däldir, $\upsilon[y_0(x)]$- görä ýagny $\Delta\upsilon=\upsilon[y(x)-y_0(x)]\le 0$. Eger $\Delta\upsilon\le 0$, güýçlenen max, $\Delta\upsilon=0$, haçan $y(x)=y_0(x)$. Edil şonuň ýaly $y=y_0(x)$ min eýe bolýar, $\Delta\upsilon\ge 0$ güýçlenen min.

7.Teorema. Eger differensial *f(x)* funksiýanyň kesgitleniş

7'.Teorema. Eger funksional

Mesele 8. Funksiýanyň minimum bahasyny tapyň.

$$F=4x_1-x_2-5x_3$$

$$\begin{cases} x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2-x_3=1\\ x_i\ge 0\quad (i=1,2,3)\end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany guralyň.

	x_1	x_2	x_3	
	0	1	$\boxed{1}$	2
	3	2	-1	1
	0	1	1	2
	3	3	0	3
x_3	-1	0	1	1
x_2	1	1	0	1

Onda alarys:

$$\begin{cases} x_3=1+x_1\\ x_2=1-x_1\\ x_i\ge 0\quad (i=1,2,3)\end{cases}$$

$$F=4x_1-(1-x_1-5(1+x_1))=-6+0\cdot x_1$$

Diýmek, bu deňlemeler ulgamynyň bazis çözüwi (0;1;1) deňdir. funksiýanyň minimum bahasy bolsa-6-a deňdir ýagny, $F_{\min}=-6$

x_1-iň artmagy bilen F funksiýa şonça-da kemelýär. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 7. Funksiýanyň maksimumyny tapyň.

$$F_{\max} = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,\dots,4 \end{cases}$$

Çözülişi

Otrisatel däl bazis çözüwini tapalyň.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_3 + x_4 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1,\dots,4) \end{cases}$$

Onda

$$F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 =$$
$$= (x_3 - x_4) - (1 - x_3 + x_4) + 2x_3 - x_4 =$$
$$= -1 + 4x_3 - 3x_4$$
$$F_Б = -1$$

Täze deňlemeler ulgamyny alarys:

$$F = 3 - 4x_2 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_3 = 1 - x_2 + x_4 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1,\dots 4 \end{cases}$$

Şeýlelikde, biz bazis çözüwi alarys ýagny, (1; 0; 1; 0) $F_Б = 3$

ýaýlasynyň içki $x=x_0$ nokadynda maksimuma ýa-da minimuma ýetýän bolsa, onda bu nokatda $df = 0$ bolýar.	$\upsilon[y(x)]$ wariasiýasy bar bolsa, max (min) haçan $y = y_0(x)$, nirede $y(x)$ içki nokady funksionalyň kesgitlenen ýaýlasynda, onda haçan $y = y_0(x)$ bolanda $\delta\upsilon = 0$.

Funksionallar üçin teoremanyň subudy.

Eger $y_0(x)$ we δy fiksirlenen(const)-bolsa, onda $\upsilon[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$, α - görä funksiýa.

Haçan $\alpha = 0$, şerte görä max we min eýe bolýar, onda degişlilikde önümler.

$$\varphi'(0) = 0 \text{, ýa-da } \frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[y_0(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0 \text{, ýagny } \delta\upsilon = 0 .$$

Şeýlelikde, egrilerde funksionalyň ekstremuma eýe bolmagy, onuň wariasiýasynyň nula deň bolmagyna getirýär.

Ekstremum düşünjesi – kesgitlilik talap edýär. Iň uly we iň kiçi bahalar bilen baglydyr, funksionalyň ýakyn egrilere görä bahasynyň max, min gatnaşygy.

Funksional $\upsilon[y(x)]$, $y = y_0(x) \to \max(\min)$ galan egrilere görä $|y(x) - y_0(x)\| < \delta$ kiçi, ul modl max,min$\to$güýçli diýilýär.

Funksional $\upsilon[y(x)]$, $y = y_0(x) \to \max(\min)$ $y = y(x)$ görä golaý $y = y_0(x)$ $|y'(x) - y_0{}'(x)| < \delta$ diňe bir ordinata görä däl eýsem galtaşmanyň ugry boýunça hem gowşak diýilýär.

1. $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[y_0(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0} = 0$$

2. $\frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[y(x,d)]\Big|_{\alpha=0}=0$ -egriler maşgalasy.

Diňe 1 däl 2 hem ýerine ýetýär. $\leftrightarrow \alpha=0, \alpha=1$ $y(x,\alpha)$ $y_0(x)$ we $y_0(x)+\delta y$ $\upsilon[y(x,\alpha)]$- funksiýa.

$$\delta\upsilon=0$$

$$\upsilon[y_1(x), y_2(x),...., y_n(x)]$$

$$\upsilon[z(x_1, x_2,....., x_n)]$$

$$\upsilon[z_1(x_1, x_2,...., x_n), z_2(x_1, x_2,...., x_n),......, z_m(x_1, x_2,...., x_n)]$$

Mysal üçin, $\upsilon[z(x,y)]$ funksionalyň $\delta\upsilon$ wariasiýasykesgitlenilip biliner ýa-da δz görä çyzykly bolup artdyrma

$\Delta\upsilon=\upsilon[z(x,y)+\delta z]-\upsilon[z(x,y)]$, $\frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[z(x,y)+\alpha\delta z]_{\alpha=0}$ ý

aly bolar. Perimetriň başlangyç bahasynda perimetr boýunça önümi

$\frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[z(x,y)+\alpha\delta z]$ bolup, eger υ-funksional $z=z(x,y)$ bolanda ekstremuma eýedir, onda $z=z(x,y)$ bolanda wariasiýa $\delta\upsilon=0$ bolar, şeýle hem $\upsilon[z(x,y)+\alpha\delta z]$ funksiýa α-nyň funksiýasy bolýar. Ýagny $\alpha=0$ bolan halatynda ektremuma eýedir we α boýunça $\alpha=0$ bolan ýagdaýynda funksiýa nula deň bolýar:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\upsilon[z(x,y)+\alpha\delta z]\Big|_{\alpha=0}=0$$

ýa-da $\delta\upsilon=0$.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=4 \\ -x_1+2x_2-x_3=-1 \\ x_i\ge 0 \ (i=1,2,3) \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany aşakdaky görnüşde düzeliň.

	x_1	x_2	x_3	Azat agza
	-2	1	1	4
	-1	2	-1	-1
	-2	1	1	4
	-1	-2	1	1
	-3	3	0	3
	1	-2	1	1
x_2	-1	1	0	1
x_3	-1	0	1	3

Doly funksiýa aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$F=-x_1-(1+x_1)-(3x_1)=-4-3x_1$$

$$\begin{cases} x_2=1+x_1 \\ x_3=3+x_1 \\ x_i\ge 0 \ \ (i=1,2,3) \end{cases}$$

Çözülişi

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	2	-1	3
5	0	3	2
2	-1	2	1
5	0	3	5
5	0	3	2
-2	1	-2	-1
0	0	0	3
$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$

Birinji deňlemäniň hemme agzalary nola deň emma onuň azat agzasy 3-e deň. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 6. Funksiýanyň min bahasyny tapyň.

$$F = -x_1 - x_2 - x_3$$

§2. Eýleriň deňlemesi we onuň integraly.

Berlen funksiýanaly ekstremuma deňläliň

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (1)$$

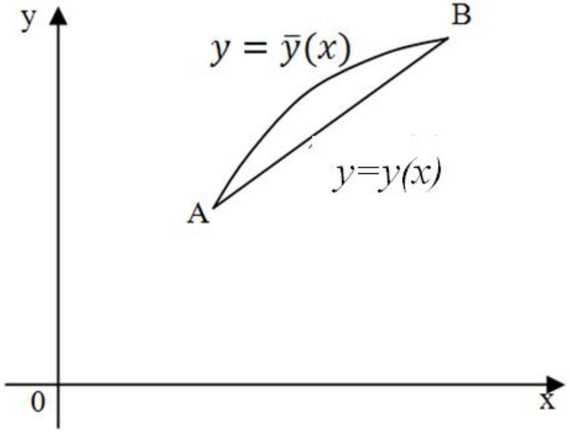
gyra nokatlaryň berkidilendigi belli: $y_0=y(x_0)$ we $y_1=y(x_1)$. $F(x,y,y')$ –üç gezek differensirlenýän funksiýa. Bize belli bolşy ýaly ekstremumyň hökmany şerti, wariasiýanyň funksiýanalynyň nula deň bolmagydyr. Indi biz esasy teoremanyň seredilýän funksionala ulanylşyna seredeliň. Goý ekstremuma iki (2-i) gezek differensirlenýän egri $y=y(x)$ eýe bolsun. Goý $y=y(x)$ egrä ýakyn $y = \overline{y}(x)$ bolsun, onda bir perimetrli egrileriň toplumunda seretsek $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha(\overline{y}(x) - y(x))$: haçan $\alpha = 0$, bolanda $y=y(x)$ $a=1$, $y = \overline{y}(x)$. Bize belli bolşy ýaly $\overline{y}(x) - y(x) = \delta y$ wariasiýa diýilip $y(x)$ aýdylýar we δy -bellenilýär. Wariýasiýa δy wariasion meselelerde, $f(x)$ funksiýada ekstremumy derňemekde artdyrma birmeňzeş rollary ýerine ýetirýärler. Wariasiýanyň funksiýasy $\delta y = \overline{y}(x) - y(x)$ x-funksiýasydyr.

Bu funksiýa bir ýa-da birnäçe gezek differensirlemek bolar.

$$(\delta y)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y',$$

$$(\delta y)'' = \overline{y}''(x) - y''(x) = \delta y'',$$

$$(\delta y)^{(k)} = \overline{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}.$$



1-nji surat

Eger biz $y = y(x,\alpha)$, nirede $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y$ maşgalalar toplumyna seretsek $\alpha = 0$ ýakyn bolan egri bilen deňeşdirip bolýan aralykda ýerleşýar. Eger (1) deňlemäni, ýagny funksionalyň bahasyna $y = y(x,\alpha)$ seretsek, onda funksional funksiýa öwrülýär α görä

$$\upsilon[y(x,\alpha)] = \varphi(\alpha).$$

Ol hem ekstremuma $\alpha = 0$ ýetýär, $y=y(x)$ $\varphi(\alpha)$ funksiýanyň şertli ekstremumy $\alpha = 0$ şeýle hem $\varphi'(0) = 0$, onda

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x,\alpha), y_x^{/}(x,\alpha)\alpha x$$

onda

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha)]dx,$$

nirede

0	-11	4	-10
0	11	-4	10
1	3	-1	2
0	0	0	0
0	1	$-\frac{4}{11}$	$\frac{10}{11}$
1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{8}{11}$

Şeýlelikde, bu ulgam tükeniksiz köp çözüwe eýedir. Onuň umumy çözüwi: $\left(-\frac{8}{1} - \frac{1}{11}x_3, \frac{10}{11} + \frac{4}{11}x_3, x_3\right)$ görnüşde bolar. Onuň bazis çözüwi bolsa: $\left(-\frac{8}{11}; \frac{10}{11}; 0\right)$ görnüşde bolar.

Mesele 5. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + \quad 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	0	0	1
0	1	0	-1
0	0	1	3

Soňky tablisadan deňlemeler ulgamynyň çözüwini alarys: (1; -1; 3)

Mesele 4. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisany aşakdaky görnüşde düzeliň.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
3	-2	1	-4
-2	5	-2	6
1	3	-1	2

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)),$$
$$F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)),$$

ýa-da

$$(\delta y)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y',$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial y}[y(x) + \alpha \partial y] = \delta y$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial y}[y'(x) + \alpha \partial y'] = \delta y'$$
$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\delta y +$$
$$+ F_{y'}(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)\delta y']dx,$$
$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x)\delta y +$$
$$+ F_{y'}(x, y(x), y'(x)\delta y']dx,$$

Belli bolşy ýaly, $\varphi'(0)$ -funksionalyň wariasiýasy diýilip aýdylýar we $\delta \upsilon$ bilen bellenilýär. υ-funksionalyň ekstremumynyň hökmany şerti onuň wariasiýasynyň nula deň bolmagy $\delta \upsilon = 0$. Bu şert şeýle ýazylýar:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y']dx = 0$$

Ikinji bölegini, bölekler böýunça integrirläp we $\delta y' = (\delta y)'$ göz öňünde tutup alarys.

$$\delta \upsilon = \left[F_{y'} \delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx = 0$$

Ýöne

$$\delta y\Big|_{x=x_0} = \overline{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \text{ we } \delta y\Big|_{x=x_1} = \overline{y}(x_1) - y(x_1) = 0\,,$$

onda

$$\delta \upsilon = \int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx\,.$$

Ekstremumyň hökmany şertine görä

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}] \delta y dx = 0 \qquad (2)$$

Özem $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ funksional *y=y(x)*egride ekstremuma eýe bolup, berlen üznüksiz funksionaldyr. Ikinji bölek $y = \overline{y}(x)$ azat agza görä deňeşdirilende azat funksiýa bolup, bu gyra nokatlarda nula deň bolýandyr. Ol üznüksiz we birnäçe gezek differensirlenýän funksiýadyr.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
$\boxed{-7}$	0	-13	-46
-3	1	-5	-19
19	0	24	91

Soňky deňlikden $a'_{21} = -7$ deň diýip alarys.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
1	0	$\frac{13}{7}$	$\frac{44}{7}$
0	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$
0	0	$\boxed{-\frac{79}{7}}$	$-\frac{237}{7}$

Indi bolsa mümkin bolan element hökmünde $a'_{33} = -\frac{79}{7}$ saýlap alalyň.

x_1	x_2	x_3	
1	-2	1	0
0	7	-5	0
0	20	0	100

Soňky deňlikden taparys $x_2 = 5$. Bu bahany birinji we ikinji deňliklerde goýup alarys, $x_3 = 7,\ x_1 = 3$. Bu ýerden bolsa deňlemeler ulgamynyň çözüwini
taparys (3;5;7)

Mesele 3. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_2 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 = -19 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Çözülişi
Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	x_3	Azat agza
2	-3	2	11
-3	$\boxed{1}$	-5	-19
4	5	-1	-4

$a_{22} = 1$ deň diýip alarys

§3. Wariasion hasabyň esasy lemmasy.

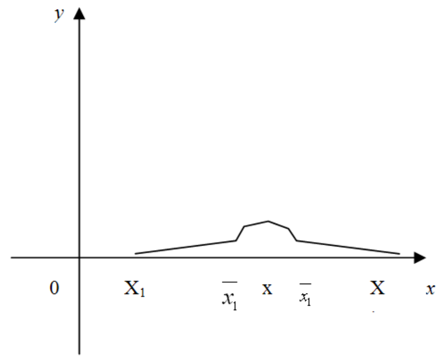
Lemma. Eger her bir üznüksiz *h(x)* funksiýa üçin

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)\,dx = 0 \qquad (1)$$

nirede $\Phi(x)$- funksiýa üznüksiz $[x_0,x_1]$ aralykda we şol aralykda $\Phi(x) \equiv 0$.

Bellik. Lemmanyň şerti we onuň subudy üýtgemeýär, eger $\eta(x)$ funksiýa aşakdaky çäklendirmeler goýulan bolsa hem $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, hem-de $\eta(x)$ üznüksiz we p-tertibe çenli üznüksiz önümi bar bolsa, $|\eta^s(x)| < \varepsilon$ $(s = 0,1,\dots,q; q \le p))$, hem lemmanyň subudy üçin hiç hili ütgeşiklikler bolanok.

Subudy. Goý, $x = \bar{x}$, kesimiň arasynda ýerleşen bolsun $x_0 \le x \le x_1$-kesimde ýatýar, ýagny, $\Phi(x) \ne 0$ ters şert bolýar. Hakykatdan bolsa onuň üznüksizliginden gelip çykýar, ýagny $\Phi(\bar{x}) \ne 0$, onda $\Phi(x)$-öz alamatyny saklaýar $(\bar{x}_o \le x \le \bar{x}_1)$. Eger $\bar{x}$-nokatda bolsa, onda $\eta(x)$ hem öz alamatyny saklaýar. Bu kesimiň daşynda bolsa *0* deň. Goý şeýle bolsun.



1-nji surat

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x)dx = \int_{\overline{x}_0}^{\overline{x}_1} \Phi(x)\eta(x)dx \neq 0$$

onda $\overline{x_0} \le x \le x_1$ alamaty üýtgänok, $\Phi(x)\eta(x)$ kesimiň daşynda *0* deň, ýagny biz tersine netije aldyk, diýmek $\Phi(x) \equiv 0$.

$\eta(x)$-funksiýany meselem şeýle $\eta(x) \equiv 0$ saýlamak bolýar ($\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1}$) kesimiň daşynda:

$\eta(x) = k(x - x_0)^{2n}(x - \overline{x_1})^{2n}$, ($\overline{x_0} \le x \le \overline{x_1}$)-kesimde k=const köpeldiji, n-bitin san. $\eta(x)$-funksiýa üznüksiz we üznüksiz (2n-1)-tertibe çenli önümleri bardyr, x_0, x_1 – nokatlarda nula deňdir.

Bellik. Edil ýokardaky ýaly*(x,y)* -tekizlikde, D-ýaýlada $\Phi(x, y)$-üznüksiz funksiýanyň D-ýaýlada

$$\iint_D \Phi(x, y)\eta(x, y)dxdy = 0$$

$\eta(x)$-funksiýanyň erkin saýlanan ýagdaýynda diňe birnäçe umumy şertleri ýerine ýetirmeginde. Edil şonuň ýaly hem n-gat integrallar üçin hem subut etmek bolýar.

$$\eta(x, y) = k[(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2 - \varepsilon_1^2]^{2n},$$
$$|h| < \varepsilon,\ |\eta_x^1| < \varepsilon,\ |\eta_y^1| < \varepsilon,\ \Phi(x, y) \equiv 0$$

Indi bolsa esasy lemma ekstremumyň hökmany şertiniň alnan (2) formula ulanyp, hökmany şertli ýönekeý funksionaly almak üçün ýönekeýleşdireliň.

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \qquad (2)$$

x_1 x_2	
1 $\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$
0 0	$-\frac{7}{4}$

Ikinji setiriň hemme agzalary nola deň emma azat agza noldan tapawutly boldy. Şonuň üçin bu deňlemeler ulgamynyň çözüwi ýokdur.

Mesele 2. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 100 \end{cases}$$

Çözülişi

Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	x_3	
$\boxed{1}$	-2	1	0
3	1	-2	0
7	6	7	100

Bu ýerden iň oňaýly koeffisiýent hökmünde 1-i saýlap almak bolar. Birinji setirden galanlaryny özgerdip alarys.

Meseleler

Mesele 1. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24 \\ -3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Çözülişi:

Bu deňlemeler ulgamyndaky x_1-näbellini x_2-niň üsti bilen aňladalyň.

$$\begin{cases} x_1 = 24 - 3x_2 \\ -3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Tablisa düzeliň.

x_1	x_2	
$\boxed{12}$	16	-1
3	4	-2

Soňky özgertmeleri göz öňünde tutup alarys.

x_1	x_2	
1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$
3	4	-2

Birinji setiri -3-e köpeldip ikinji setir bilen jemläp alarys:

Eger lemmanyň şerti ýerine ýetýän bolsa: *y(x)* egride ekstremum ýerine ýetýän bolsa ($F_y - \frac{d}{d_x}F_{y'}$)- üznüksiz funksiýa, a wariýasia δy -erkin kesgitlenen funksiýa, şonuň üçin $F_y - \frac{d}{d_x}F_{y'} \equiv 0$, $y = y(x)$ (2) egri çyzykda ekstremum ýerine ýetýän bolsa, ýagny $y = y(x)$-ikinji tertipli differensial deňlemäniň çözülişi bolup $F_y - \frac{d}{d_x}F_{y'} = 0$, aýdyň görnüşde

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

Şu deňlemä Eýleriň deňlemesi diýilýär. Onuň çözülişi bolan Eýleriň deňlemesiniň integralyna $y = y(x_1 c_1, c_2)$ <u>ekstremaly</u> diýilýär. Ekstremala diňe funksionalyň ekstremumy ýetip bolar.

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

Gyra meselesine seredeliň

$$F_y - \frac{d}{d_x}F'_{y'} = 0, \quad y(x) = y_0, y(x_1) = y_1$$

Hemişe meseläniň çözlülişini tapmak bolanok, eger tapylsa hem ol ýeke- täk däldir. Wariasion meseleleriň birnäçesiniň geometriki ýa-da fiziki manysynyň esasynda çözüwini kesgitlemek bolar. Eger gyra şertlerini ýerine ýetirýän <u>Eýleriň</u> deňlemesiniň ýeke -täk çözülişi bar bolsa, onda ol ýeke -täk <u>ekstremal</u>, ol hem seredilýän wariasion meseläniň çözülişi bolar.
Mysal 1. Haýsy egrilerde

$$\upsilon[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left[(y')^2 - y^2\right] dx;\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$$

funksional ekstremuma ýeterlik eýe bolýar.
Çözülişi. Eýleriň deňlemesi $y'' + y = 0$ görnüşe eýedir. Umumy çözüwi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ bolar. Gyra şertlerini peýdalanyp alarys: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$. Şeýlelikde ekstremum $y = \sin x$ egride bolar.
Mysal 2. Haýsy egrilerde

$$\upsilon[y(x)] = \int_0^1 \left[(y')^2 + 12xy\right] dx;\ y(0)=0,\ y(1)=1$$

funksional ekstremuma ýeterlik eýe bolýar.
Çözülişi. Eýleriň deňlemesi $y'' - 6x = 0$ görnüşe eýedir. Umumy çözüwi $y = x^3 + C_1 x + C_2$ bolar. Gyra şertlerini peýdalanyp alarys: $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$. Şeýlelikde ekstremum $y = x^3$ egride bolar.

$$\psi(t) = (\nabla f(x_k - t\nabla f(x_k)), \quad \nabla f(x_k) \le \|\nabla f(x_k - t\nabla f(x_k))\| \bullet$$
$$\bullet \|\nabla f(x_k)\| \le (\|\nabla f(x_k)\| - tM\|\nabla f(x_k)\|)\|\nabla f(x_k)\|$$

onda

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \le \alpha \|\nabla f(x_k)\|^2 \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2}\right) = ac\|\nabla f(x_k)\|^2 \quad (1)$$

nirede

$$c = 1 - \frac{\alpha\mu}{2} > 0;$$

bu ýerde monoton toplanmak gelip çykýar

$$f(x_k) \to \min f(x).$$

Şeýlelikde hemişelik M apriori näbelli. α iň kiçi bilen hem işlemekligiň ahjaty ýok (peýdasy) α bilen (regulirlemek) amatlaşdyrmak iş gidip durka hasaplamak işlenip düzildi. Olaryň iň ýönekeýi (1) formula bilen baglanşykly. Ýagny $\mu = \mu_0$ diýip

$$\alpha = \frac{1}{\mu}$$

saýlaýarys.

Eger şonda hem (1) formula ýerine ýetmese, onda $\mu = 2\mu_0$ bilen $\alpha = \frac{1}{2\mu_0}$ saýlap alýarys, ýenede (1) formulany barlaýarys.

§10. Çyzykly däl programmirlemäniň şol bir ädimli gradiýent usuly

Funksiýanyň minimumyny gözlemekligiň özi örän ullakan işdir, şonuň üçin antigradiýente tarap hereket edende hemişelik ädimli gradiyent usuly, aşakdaky shema boyunça ulanylýar:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k)$$

$\alpha > 0$, san. teorma seredeliň.
Teorema 1.
Goý, *f(x) – 2* gezek üznüksiz differensirlenýän güwerçek funksiýa; ýaýlasy

$$\mathrm{R}(x_0) = \{x | f(x) \le f(x_0)\}$$

çäklenen we şu ýaýlada gessian H(x) aşakdaky şerti ýerine ýetirilýär.

$$(H(x)\eta,\eta) \le \mu$$

eger

$$0<\alpha<\frac{2}{\mu}$$

onda usul funksional boýunça toplanýar.
Subudy. Seredeliň

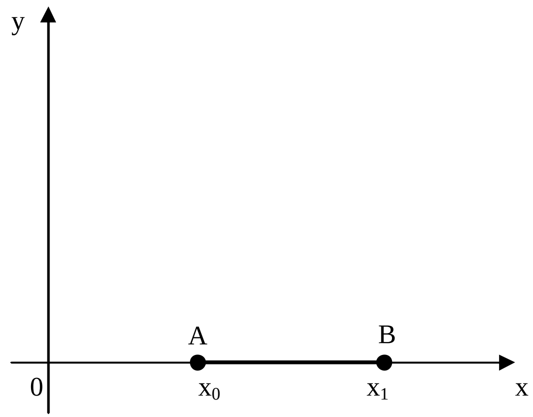
$$\mathrm{F}(x_k) - \mathrm{f}(x_{k+1}) = \mathrm{f}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)) = \int_0^\alpha \psi(t)dt,$$

nirede

§4. Eýleriň deňlemesiniň hususy hallary

1. Eýleriň deňlemesiniň ýönekeý hallarda integrirlenşine seredeliň: 1) F, y'-e bagly däl ýagdaýynda *F=F(x,y)* Eýleriň deňlemesi $F_y(x,y)=0, F_{y'}\equiv 0$ şoňa görä gyra şertleri $y(x_0)=y_0$ we $y(x_1)=y_1$ ýerine ýetirilmeýär. Şoňa görä seredilýän wariasion meseläniň çözülişi ýok. Diňe aýratyn ýagdaýda haçan $F_y(x,y)=0$ (x_0,y_0) we (x_1,y_1) nokatlardan gerek bagly, şonda emele gelen egri ekstremuma ýetip biler.

Mesele 1. $\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2dx,\ \ y(x_0)=y_0,\ \ y(x_1)=y$ Eýleriň deňlemesi $F_y=0$ ýa-da *y=0*. Ekstremal *y=0* gyra nokatlarynyň üstünden geçýär haçan $y_0=0,\ y_1=0$.



1-nji surat

Eger $y_0=0;$ $y_1=0$ bolsa, onda *y=0* min funksionala $\upsilon = \int_{x_0}^{x_1} y^2dx$, ýagny $\upsilon[y(x)]\ge 0$ haçan $y=0;$ $\upsilon=0$ bolýar. Eger iň bolmanda biri y_0, y_1 nula deň bolmasa, onda üznüksiz funksiýalarda funksional minimuma eýe bolmaýar, sebäbi şeýle bir $y_n(x)$-yzygiderligi saýlap (üznüksiz funksiýalar)onuň grafigi gik düşýän nokatlardan (x_0,y_0) (x_0,x_1), (x_1,y_1) durýandyr.

$$\int_{x_0}^{x_1} y_2 dx > 0$$
$$y(x_0) = y_0,$$
$$y(x) = 0, \qquad x_0 < x < x_1$$
$$y(x_1) = y_1$$

2. F- funksiýa y'-e çyzykly baglanşykly

$$F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)y'$$
$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}\left[M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx$$

Eýleriň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylýar.

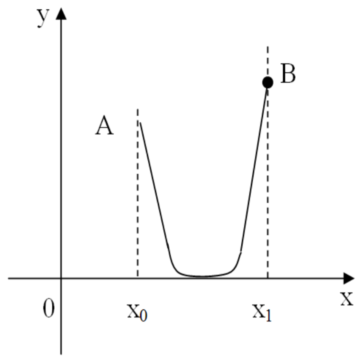
$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{d}{dx}(N(x,y)) = 0$$

ýa-da

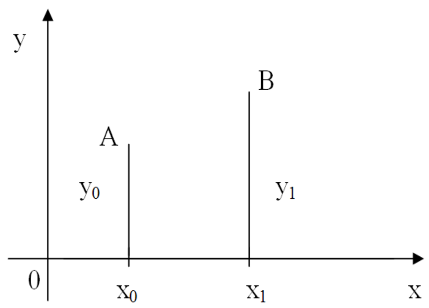
$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}y' = 0$$

ýa-da

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$$



2-nji surat



3-nji surat

iterasyýany geçirmeli, $\left(\frac{m^*}{M^*} = 0{,}01\right)$ bolsa onda bolmanda 100 iterasiýany geçirmeli. Şonuň üçin matematikler onuň üstinde işlediler hem-de işleýärler iň oňat minimumlaşdyrma usullary bilen şol usullaryň iň oňadynyň biri hem “çatyrymdaş gradiýent usuly” ol ýönekeý, ýylmanak funksiýalaryň minimumlaşdyrma usuly.

Belli bolşy ýaly her-bir ädimde çaltlaşdyrylan aşaklama usuly bilen minimum meselesini bir näbelli funksiýa üçin çözmeli bolýar

$$\varphi(\mathrm{h}) = \mathrm{f}(\mathrm{x} - \mathrm{h}\nabla\mathrm{f}(\mathrm{x})).$$

Şu alynan netije hakykatdan hem dogrydyr sebäbi bu netijäni ýokarda getirilen kwadratik görnişdäki shema boýunça subut edip bolýar. Dargydylan hem (9) formuladan X^* nokadyň töwereginden hem-de

$$\lim_{k\to\infty} \nabla f\left(x_k\right) = 0,$$

bilelikde (3)-formula bilen bilelikde alarys.

$$f\left(x_{k+1}\right) - f\left(x^*\right) = \left[f\left(x_k\right) - f\left(x^*\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[1 - \frac{\left\|H\left(x^*\right)\left(x_k - x^*\right)\right\|^2}{\left(H^2\left(x^*\right)\left(x_k - x^*\right) H\left(x^*\right)\left(x_k - x^*\right)\right)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{1}{\left(H\left(x^*\right)\left(x_k - x^*\right), \left(x_k - x^*\right)\right)} \right] + +0\left\|x_k - x^*\right\|^2$$

Edil şonuň ýaly (4) formula bilen ýerine ýetirip, hem-de 2-nji lemmanyň esasynda alarys: Bu işi talyplaryň özüne tejribe üçin tabşyrýaryn. Şeýlelikde toplanmanyň tizligi çaltlaşdyrylan aşaklama usuly bilen, minimum nokadyň ýakynynda geometric progresiýanyň maýdalowjysy bilen häsiýetlendirilýär.

$$q = \frac{M^* - m^*}{M^* + m^*} = \frac{1 - \dfrac{m^*}{M^*}}{1 + \dfrac{m^*}{M^*}}$$

belli bolşy ýaly $\left(\dfrac{m^*}{M^*} = 0{,}1\right)$ minimumy kesgitlemek üçin, onuň tertibiniň dogrylygynyň ösýänligini kesgitlemek üçin, bolanda 10

Edil 1-nji häsiýet ýaly tükenikli ýöne differensial deňleme däl, sebäbi iň soňky deňleme gyra şertlerini ýerine ýetirmeýär. Eger $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ bolsa, onda $Mdx + Ndy$ dogry differensial bolýar. Şeýle hem $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$ umuman aýdanda gyra şertlerini ýerine ýetirmeýär. Diýmek wariasion mesele üznüksiz funksiýalar synpynda çözüşe eýe bolmaýar.

$$\vartheta = \int_{x_0}^{x_1} \left(M + N\frac{dy}{dx}\right) dx = \int \left(Mdx + Ndy\right)$$

Wariasion mesele öz manysyny ýitirýär (integrirlemäniň ýoluna bagly bolmaýar, ýagny υ--funksional rugsat edilen egrilerde onuň bahasy hemişelikdir).

Mesele 2.

$$\vartheta\left[y(x)\right] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right) dx,\ y(0) = 0;\ y(1) = a$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0;\ \ y - x = 0,\ \ y(0) = 0$$

birinji gyra şert ýerine ýetýär, ýöne ikinji gyra şerti bolsa a=1 ýerine ýetýär. Eger $a \neq 1$ bolsa, onda gyra şertini kanagatlandyrýan ekstremallar ýokdur.

3. F diňe y' bagly: $F = F(y')$

Eýleriň deňlemesi $F_{y'y'} y'' = 0$. Sebäbi $F_y = F_{xy'} = F_{yy'} = 0$. Eger $y'' = 0$, onda $y = C_1 x + C_2$ -göni çyzyklaryň ikiperimetriki maşgalasy. Eger $F_{y'y'}(y') = 0$ deňlemäniň bir ýa-da birnäçe hakyky $y' = k_i$ kökleri bar bolsa, $y' = k_i x + C$, we ýokarda alnan ikiperimetrli maşgalada saklanýan gönileriň birperimetrli maşgalasyny alarys. Şeýlelikde, $F = F(y')$ ýagdaýynda ekstremallar bolup ähli mümkin bolan $y = C_1 x + C_2$ göni çyzyklar bolup durýar.

Mesele 3.

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

duganyň uzynlygyny kesgitlemeli

Çözülişi.

$y=C_1x+C_2$ ekstremala eýedir.

4. F-funksiýa diňe x we y baglydyr. $F(x, y')$, Eýleriň deňlemesi $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y')=0$ görnüşe eýe bolar, onda birinji integral $F_{y'}(x, y')=C_1$ eýedir. y-ýoklugy sebäpli ýa y'-görä deňleme alynyp ýa-da haýsy hem bolsa bir perimetriň üsti bilen (ony girizmeli).

Mesele 4.

Funksional

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{x}}\,dx$$

$y=y(x)$ bir nokatdan başga bir nokada süýşmeginiň wagty t, onda tizlik $\vartheta = x\frac{ds}{dt} = x$, $dt = \frac{ds}{x}$ we $t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$

Eleriň birinji deňlemesi $E_{y'}=C_1$ ýa-da $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=C_1$. Eger $y'=tgt$ diýip perimetr girizsek, onda deňleme integrirlenýär

$$x = \frac{1}{C_1}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1}\sin t$$

ýa-da $x=\overline{C_1}\sin t$, bu ýerde $\overline{C_1}=\frac{1}{C_1}$ alarys.

Teorema 2: Tizleşdirilen aşaklamausulu, only kesgitlenen kwadratik görnişe ulanylanda, ol norma boýunça toplanýar, özem maýdalowjysy geometric progressiýasyndan haýal däldir.

$$q = \frac{M-m}{M+m} = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}$$

şeýle hem funksional boýunça maýdalowjysynyň geometrik progressiýasyndan haýal däldir.

Goý $f(x)$ 2-gezek üzüniksiz differensirlenýän funksiýa bolsun. Onda $\overline{x}$-azat nokadyň töwereginde ol funksiýa aşakdaky görnişe eýe bolup biler.

$$f(x_0+f\eta) = f(x_0) + (\nabla f(x_0), h)t + \frac{1}{2}(H(x_0)h\cdot h)t^2 + 0(t^2)$$

$H(x_0)$ –simmetrik matrisa

$$H(x_0) = \{h_{ij}(x_0)\}_{i,j=1}^{h}, h_{ij}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial k_i \partial x_j}(x_0)$$

gessian diýilip atlandyrylýar. Goý tizleşdirilen aşaklama usuly *f(x)*-funksiýanyň *x**-nokada minimumlaşmagy toplanmaklygy üçin ulanylýan bolsun, şeýle hem *max M**, *min m** hususy bahaly bolmaklygy ücin, *H(x*)* gessian oňly kesgitlenen matrissadyr.

Onda tizleşdirilen aşaklamanyň netijesini göz öňünde tutup, kwadratik görniş üçin, asimptotiki toplanmanyň tizligine, (аналогично) bir meňzeş (edil şonuň ýaly) bahalanmasyna garaşmak bolar.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|x_k - x^*\|} \le \frac{M^*-m^*}{M^*+m^*}$$

$$\frac{(Ax_0, x_0)}{\|Ax_0\|\|x_0\|} \geq \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2} \qquad (7)$$

deňlik emele gelýär haçan

$$\alpha_1^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}; \qquad \alpha_2^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

(7) deňsizlikden alarys

$$\min_{\|x\|\neq 0} \frac{(Ax, x)}{\|Ax\|\|x\|} = \frac{2\sqrt{mM}}{M+m} S_2$$

S_1,S_2, A-operatoryň hususy normirlenen wektorlary, olar degişlilikde max, we min hususy sanlardyr.
Lemmanyň subudyndan we (3) formuladan alarys:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k)\left[1 - \frac{4Mm}{(M+m)^2}\right] = f(x_k)\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2$$

Şeýlelikde

$$f(x_k) \leq f(x_0)\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{2k} \qquad (8)$$

Bu ýerden $\|x_k\|$ üçin bahany kesgitlemek bolar.

$$\|x_k\| \leq \sqrt{\frac{(Ax_k, x_k)}{m}} = \sqrt{\frac{2f(x_k)}{m}} \leq \sqrt{\frac{2f(x_0)}{m}}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k =$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_0, x_0)}{m}} \cdot \left(\frac{M-m}{m+M}\right)^k \leq \sqrt{\frac{M}{m}}\|x_0\| \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k,$$

$$\|X_k\| \leq \|X_0\|\sqrt{\frac{M}{m}} \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^k$$

şeýlelikde aşakdaky teoremany aldyk:

$$\frac{dy}{dx} = tgt, \ dy = tgtdx = tgt \cdot \overline{C}_1 \cos tdt = \overline{C}_1 \sin tdt.$$

Integrirläp alarys:

$$y = -\overline{C}_1 \cos t + C_2, \ x = \overline{C}_1 \sin t, \ \ y - C_2 = -\overline{C}_1 \cos t$$

t-ni ýok edip $x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^2$ -töwerekleriň maşgalasyny alarys.

5. F –funksiýa diňe y we y' bagly bolsa

$$F = F(y, y')$$

Eýleriň deňlemesi $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$ sebäbi $F_{xy'} = 0$. Eger hemmesini y' agzalaryny köpeltsek $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$ dogry önüm bolýar.
Hakykytdan hem:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' =$$
$$= y'(F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'')$$

Eýleriň deňlemesi $F - y'F_{y'} = C_1$ birinji integrala eýedir. x-ýok bolmagy sebäpli y' görä deňleme ýa-da näbellileri bölmek düzgünini hem ulanyp bolýar.

Mesele 5. Aýlanma üstüň iň kiçi meselesi hakynda. Berlen gyra şertlerine görä Ox –lar okunyň daşynda aýlanmagyndan emele gelýän iň kiçi meýdanly üsti emele getirýän egri çyzygy kesgitlemeli.

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

onda

$$F - y'F_{y'} = C_1$$

ýa-da

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1-y'^2}} = C_1$$

ýönekeýleşdirip alarys.

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1; \quad y' = sht; \quad y = C_1 cht$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 shtdt}{sht} = C_1 dt; \quad x = C_1 t + C_2; \quad y = C_1 cht$$

t –ni ýok edip:

$$y = C_1 ch\frac{x - C_2}{C_1}$$

zynjyrly çyzyklaryň maşgalasy ýa-da katenoidlar diýilýär.

min

$$\frac{(\mathrm{Ax}, \mathrm{x})}{\|\mathrm{A}\|\|\mathrm{x}\|} = \frac{2\sqrt{\mathrm{Mm}}}{\mathrm{M} + \mathrm{n}} \qquad (5)$$

$$\|\mathrm{x}\| \neq 0$$

Subudy: Goý X_0-fiksirlenen (belleninen) azat hususy däl wektor. Onda x_0, Ax_0 wek-torlar bilen emele gelen, $E(x_0)$ 2-ölçegli kiçi giňişlige seredeliň. $E(x_0)$ kwadratik görnişli $K(y)=(Ay,y)$ $\mathrm{y} \in \mathrm{E}(\mathrm{x}_0)$ kesgitläliň bu kwadratik görnişe, 2 ölçegli $E(x_0)$kiçi görnişlikde kesgitlenen $\overline{\mathrm{A}}\mathrm{x}_0$ oňly, kesgitlenen simmetrik operatiw de-gişlidir. Eger λ_1, λ_2(kemelmeýän tertipde) Ol operatoryň hususy sanlary bolsa, hemde $\mathrm{m} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \mathrm{M}$ ýerine ýetýän bolsa. Onda ol, $\forall \mathrm{y} \in \mathrm{E}(\mathrm{x}_0)$ netijesi bolup durýar.

$$m\|y\|^2 \leq (\overline{A}x_0, y, y) = A(y, y) \leq A\|y\|^2$$

Goý $E(x_0)$-kiçi giňişligiň içinde $\overline{A}x_0$-operatoryň $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$ hususy wek-torlary ortanormirleşdirýän ulgam we $\|\mathrm{x}_0\| = 1$ bolsun.

Onda x_0 –aşakdaky görnişde ýazalyň:

$\mathrm{x}_0 = \alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2$, özem $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ onda:

$$\frac{(Ax_0, x_0)}{\|Ax_0\|\|x_0\|} = \frac{\alpha_1^2\lambda + \alpha_2^2\lambda_2}{\sqrt{\alpha_1^2\lambda_1^2 + \alpha_2^2\lambda_2^2}} \qquad (6)$$

sag tarapyny minimumlaşdyryp (6) deňlemeden $\alpha_1^2\lambda_1^2 = 1$ şertine görä alarys:

$$\varphi(h_k)=\frac{1}{2}\left(Ax_{k+1}(h_k),X_{k+1}(h_k)\right):$$

$$2\varphi(h_k)=\left(Ax_k-h_kA^2X_k,X_k-h_kAx_k\right)=$$

$$=\left(Ax_k,x_k\right)-2h_k\left(Ax_k,Ax_k\right)+h_k^2\left(A^2x_kAx_k\right)$$

$$\varphi'(h_k)=-\left(Ax_k,Ax_k\right)+h_k\left(A^2x_k,Ax_k\right)=0$$

$$h_k=\frac{\left(Ax_k,Ax_k\right)}{\left(A^2x_k,Ax_k\right)}$$

yzgiderli ýerinde goýup alarys

$$x_{k+1}=x_k=\frac{\left(Ax_k,Ax_k\right)}{\left(A^2x_k,Ax_k\right)}Ax_k$$

Göniden hasaplamanyň esasynda alarys:

$$f\left(x_{k+1}\right)=f\left(x_k\right)*\left[1-\frac{\left(Ax_k,Ax_k\right)}{\left(A^2x_k,Ax_k\right)\left(Ax_k,x_k\right)}\right] \qquad (3)$$

A-operatoryň häsiýetlerine görä: only kesgitlenen, simmetrik bolýanlygynyň esasynda $B=\sqrt{A}$ bilen belläp, (3) formulany $Bx_k=y_k$ Kabul edip, aşakdaky görnüşde ýazmak bolar.

$$f\left(x_{k+1}\right)=f\left(x_k\right)\left[1-\frac{\left(B^2x_kB^2x_k\right)^2}{\left(B^3x_kB^3x_k\right)\left(B^2x_kB^2x_k\right)}\right]=$$

$$=f\left(x_k\right)\left[1-\frac{\left(By_kBy_k\right)^2}{\left(B^2y_kB^2y_k\right)\left(y_k,y_k\right)}\right]= \qquad (4)$$

$$=f\left(x_k\right)\left[\frac{\left(Ay_k,y_k\right)^2}{\left(Ay_k,Ay_k\right)\left(y_k,y_k\right)}\right]$$

Kwadrat skopkanyň içindäki aňlatmany bahalamak üçin aşakdaky lemma seredeliň.

Lemma 1:

Goý A-oňly, kesgitlenen, simmetrik operator M_1 *m-max, min* hususy bahalary onda:

§5. Ekstremumyň hökmany şerti.

Ekstremumyň hökmany şertini V funksionaldan almak üçin öňküden umumy görnüşe seredeliň.

$$v\left[y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)\right]=\int_0^{x_1}F\left(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots y_n'\right)dx \qquad (1)$$

hemme funksiýalaryň gyra bahalarynyň şerti bilen

$y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(0)=y_{20},\dots,y_n(x_0)=y_{n0}$,

$y_1(x_1)=y_{11}$, $y_2(x_1)=y_{21},\dots,y_n(x_1)=y_{n1}$,

diňe ýeke bir funksiýany wariasiýasyna seredeliň

$$y_i(x), \qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

galan hemme funksiýalary üýtgetmän goýalyň. Onda funksional $V[y_1,y_2,\dots,y_n]$ köp funksiýalara baglylykdan diňe bir funksiýa bagly funksionala öwrüler, ýagny $y_i(x)$, $v\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right)=\overline{v}\left[y_i\right]$, onda Eýleriň deňlemesini ýerine ýetirjek ekstremumy kesgitleýän funksiýa

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_1'}=0 \qquad (2)$$

görnüşde ýazylýar. Edil şonuň ýaly islendik $y_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ üçin hem ýazmak bolýar. Onda bizde 2-nji tertipli differensial deňleme emele gelýär. 2-nji tertipli deňlemeler sistemasyny alarys.

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}Fy_i=0 \qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

bu sistema 2n-perimetrli integral egrileriň maşgalasyny emele getirýär, $x,y_1,\dots,y_n$

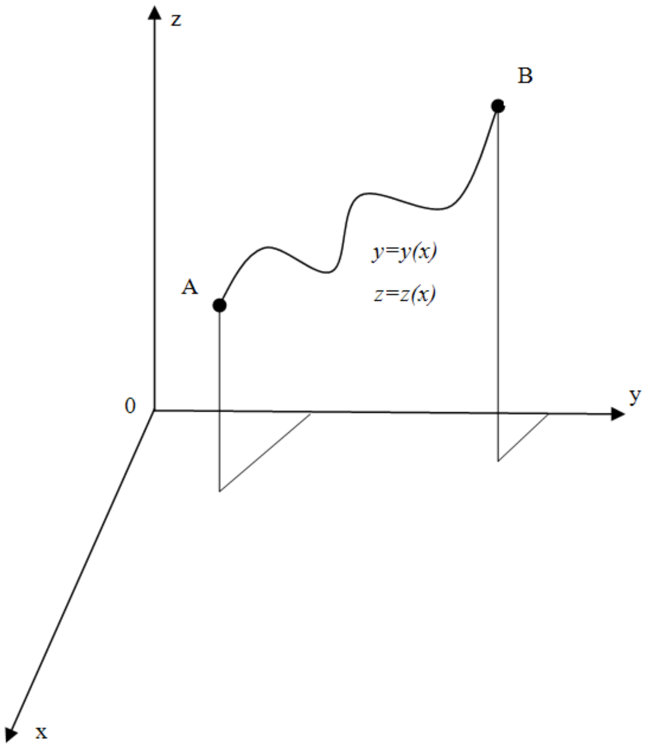
görnüşlikde wariasion meselesiniň ekstremalyny kesgitleýär.

Eger biz 2-funksiýa bagly bolan funksionalyň hususy ýagdaýyna seretsek, onda $y(x)$ we $z(x)$

$$v\left[y(x),z(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y,z,y',z'\right)dx \qquad (3)$$

$y(x_0)=y_0$, $x(x_0)=z_0$, $y(x_1)=y_1$, $z(x_1)=z_1$

ýagny giňişlikdäki *y=y(x)* , *z=z(x)* egrileri saýlamak esasynda kesgitlenýär, ýagny *z(x)* hemişelik diýlip (funksiýa) diňe *y(x)* warirowat edilýär.



1-nji surat

Biz seredilýän egrini şeýle bir üýtgetýäris, netijede onuň *x0z* tekizligine bolan proýeksiýasy üýtgemän galar ýaly *z=z(x)*. Edil şonuň ýaly hem y=y(x) onda. Netijede biz Eýleriň 2-i deňlemeler ulgamyny alýarys.

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \qquad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$$

$$\left(\nabla f\left(X_{k_i} - \nabla f\right)(y), \eta\right) \le \frac{\varepsilon}{2},$$

bu ýerden

$$\left(\nabla f(y), \frac{\nabla f\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|}\right) \ge \left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\| - \frac{\varepsilon}{2} \ge \frac{\varepsilon}{2}$$

bahalalyň $f\left(X_{k_i}\right) - f\left(X_{ki+1}\right)$:

$$f\left(X_{k_i}\right) - f\left(X_{ki+1}\right) \ge \int_0^h \left(\nabla f\left(X_{ki}\right) - t\frac{\nabla t\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|}, \frac{\Delta f\left(X_{k_i}\right)}{\left\|\nabla f\left(X_{k_i}\right)\right\|}\right) dt$$

$$\ge \frac{\varepsilon}{2} h$$

bu ýerden

$$f\left(X_{k_i}\right) - f\left(X_{kp+1}\right) \ge p \cdot \frac{\varepsilon h}{2}$$

$\forall$ p-natural bolanda f(x)- funksiýanyň bu bolsa aşakdan kesgitlenenligine ters gelýär. Teorema subut edildi.

Haçan položitel (oňly) kesgitlenýän kwadrat, görnişinde L.W. Kantorowiç tarapyndan tizleşdirilen lemmanyň toplanmagynyň tizligi baradaky teorema subut edildi. Goý $f(x) = \frac{1}{2}(AX, X)$. $A > 0$ nirede *A*-oňly we kesgitlenen matrissa, *M-max* hususy san, m-min hususy san *A*-operatywyň. Onda ýeňillik bilen $\nabla f(X) = A_X$ X tizlişdirilen aşaklamanyň ädimine görä

B

$$X_{k+1} = X_k - h_k kAx_{k,}$$

nirede $\boldsymbol{h_k}$–minimum şertlerden kesgitlenilýär:

Teorema 1: Üzüniksiz differensirlenýän, funksiýanyň *(1)* şerti ýerine ýetirende, $\nabla f(X_k)$ gradiýentleriň yzygiderligi nula ymtylýar:

$$\lim_{K\to+\infty} \nabla f(X_k)=0 \qquad (2)$$

Hakykatdan yzygiderligiň manatonlygynyň güýjine görä $\{f(X_k)\}_{k=0}^{\infty}$ we (1) häsiýete görä $\{X_k\}$-kesgitlenen hem-de onuň çlenleri

$$S_{X_0}=(x)+f(X)\le f(X_0)S$$

ýaýlanyň içinde ýerleşendir. A ol bolsa ýapyk kesgitlenen ýaýladyr. $\nabla f(X)$ üznüksizliginden onuň deňölçegli S_{X_0}-içinde üznüksizligi gelip çykýar. ýagny hemme

$$X_1X'\in S_{X_0} \quad \text{we} \qquad \eta\|\eta\|=1$$

üçin bardyr $t\ge 0$ $z(t)\ge 0$ funksiýa

$$\lim_{t\to 0}=(t)=0$$

ýagny şeýle

$$|(\nabla f(x')\text{-}\nabla f(x),\eta)|\le z(\|x-x'\|)$$

Goý $\{\nabla f(X_k)\}$ nula ymtylmaýan bolsun. Onda islendik $\forall\varepsilon$ üçin yzygiderlik

$$\{\nabla f(X_{ki})\}_{i=0}^{\infty}$$

bar bolup,

$$\|\nabla f(X_{ki})\|\ge\varepsilon,\ k_{i+1}\ge k_i,\ i=1,2,...;\ \text{onda}\ \forall h,$$

üçin $\|h\|=1$, we y aşakdaky şerti ýerine ýetirýän bolsun

$$\|X_{k_i}-y\|\le h,$$

Aşakdaky deňsizlik dogrydyr.

Mesele 1. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly.

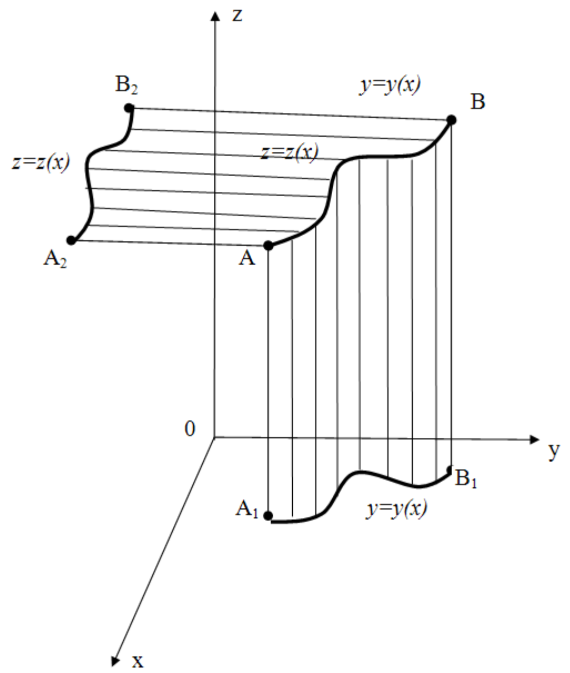
$$v[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[y'^2+z'^2+2yz]dx, \qquad y(0)=0, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$z(0)=0, \qquad z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1,$$

Eýleriň deňlemesi differensial deňlemeler sistemasy

$$y''-z=0,$$
$$z''-y=0$$

Görnüşe eýedir. Funksiýanyň näbellileriniň birini ýok edip, ýagny z-i ýok edip, $y^{IV}-y=0$ deňlemäni alarys.



2-nji surat

Bu deňlemäni integrirläp hemişelik koeffisiýentli çyzykly deňlemeleri alarys:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x;$$

$$z = y'';$$

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

Gyra şertleriniň esasynda taparys:

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$ onda $y = \sin x$, $z = -\sin x$.

Mysal 2. Eger yşygyň (ýagtylygyň) ýaýramagynyň tizligi bir sydyrgyn (görnüşli) däl optiki sredada(ýerde) $\vartheta(x, y)$ deň bolsa, onda onuň ýagtylygyň ýaýramagynyň çyzygynyň differensial deňlemesini tapmaly.

Çözüwi.

Fermanyň prinsipine baglylykda yşyk haýsy hem bolsa bir $A(x_0, y_0)$ nokatdan beýleki bir $B(x_0, y_0)$ nokada egri çyzyk boýunça dargaýar we T az wagtyň içinde yşyk geçýär. Eger gözlenýän egrileriň deňlemeleri $y = y(x)$ we $z = z(x)$ görnüşde seredilýän bolsa, onda

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\vartheta(x, y, z)} dx$$

Bu deňleme üçin Eýleriň deňlemeler ulgamy

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\vartheta^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{\vartheta\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\vartheta^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{\vartheta\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0$$

yşygyň ýaýramagynyň çygyny kesgitleýän ulgam bolar.

§9. Çyzykly däl programmirlemäniň aşaklygyna tizleşme - gradiýent usuly

Bize belli bolşy ýaly ugur -boýunça önüm, funksiýanyň berilen ugurynyň artdyrmanyň çyzykly bölegidir. Eger berilen nokatda gradiýent nuldan tapawutly bolup, hereketiň ugry bilen gradiýentiň ugry öz aralarynda ýiti buruçy emele getirse, onda ýeterlik kiçijik süýşmeklikde görkezilen ugur boýunça, funksiýanyň bahasy-artýar, tersine süýşse bolsa, funksiýanyň bahasy-kemelýär. Bu häsiýetler bolsa, üzüniksiz differensirlenýän funksiýanyň bahasynyň yzygiderli gowulanma ýagny ***min (max)*** meselesini çözmekde ulanylýar, degişlilikde bu usula relaksasion usul diýilýär. Eger hereket göni gradiýentiň ugry boýunça bolsa, onda ol usula gradiýent usuly diýilýär. Üzülýän gradiýent funksiýalar üçin bolsa, umumylaşdyrylan gradiýent usuly işlenip düzülen. Biz bir-näçe ýönekeý we tejribede köp ulanylýan, gradiýent usullaryň hasaplanşyna seredeliň.

1) Tizleşdirlen aşaklama usuly

Goý $f(x)$ – üzüniksiz, differensirlenýän funksiýa, E_n-hemme ýerinde kesgitlenen we aşakdaky häsiýeti ýerine ýetirýän bolsun

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{1}$$

X_0 -haýsy hem bolsa bir başlangyç nokat. Aşakdaky görnüşdäki yzygiderlige seredeliň. (çalt aşaklama usual) Proses

$$X_{k+1} = X_k - h(X_k)\nabla f(X_k), K = 1,2,...$$

nirede

$$h(X_k) \geq 0 \qquad f(X_{k+1}) = \min_{h \geq 0} f(X_k - h\nabla f(X_k))$$

ýagny prosessiň (yzygiderligiň) her bir ädiminde, biz antigradiýentiň uguryna tarap süýşýäris, şol uguryň minimumna çenli.

$$z+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*[f_i(x)-z]\ge z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*[f_i(x^*)-z^*]\ge z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[f_i(x^*)-z^*]$$

$$(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^*)z+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*f_i(x)\ge(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*)z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*f_i(x^*)\ge(1-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i)z^*+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^*)$$

kanagatlandyrýan şeýle bir $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$ otrisatel däl sanlar bardyr.

Eger *φ(x)≥fᵢ(x*)* bolsa, bu ýerden $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*=1$ bolýandygyny alýarys.

Goý, $R(x^*)$ $f_i(x^*)=\varphi_i(x^*)$ üçin *“i”* indeksleriň köplügi bolsun. Onda

$$\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*f_i(x)\ge\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*f_i(x^*)\ge\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i f_i(x^*),$$
$$x\in E_n,\qquad \sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*=1,\lambda_i^*\ge0,\lambda_i\ge0,i\in R(x^*)$$

kanagatlandyrýan şeýle bir $\{\lambda_i\},i\in R(x^*)$ otrisatel däl sanlar bardyr. Eger $f_i(x)$, $i=1,\dots,m$ üznüksiz differensirlenýän bolsalar, onda bu ýerden

$$\sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*\nabla f(x^*)=0,\qquad \sum_{i\in R(x^*)}\lambda_i^*=1;\lambda_i^*\ge0 \tag{9}$$

bolan λ_i^*-leriň barlygy gelip çykýar. (9) şert (6) minimaks meselede x^* nokadyň optimaldygynyň zerur we ýeterlik şertidir.

§6. Eýler - Puasson deňlemesi we onuň häsiýetleri.

Berlen funksionaly ekstremuma derňemeli

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}_{(x)}\right)dx \tag{1}$$

nirede funksional F, (n+2) gerek hemme argumentleri boýunça differensirlenýän funksiýa.
Goý, gyra şertleri aşakdaky görnüşde bolsun:

$$y(x_0)=y_0,\qquad y'(x_0)=y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
$$y(x_1)=y_1,\qquad y'(x_1)=y_1',\dots,y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}$$

gyra nokatlarda diňe bir funksiýalaryň bahalary bolman eýsem olaryň önümleriniň (n-1) tertiplä çenli hem berilendir. Goý ekstremum bar bolan *y=y(x)* egri çyzyk funksiýa 2n gezek differensirlenýän bolsun. Goý, $y(x)=\bar{y}(x)$ 2n gezek differensirlenýän bolsun. Bir perimetrli funksiýalar maşgalasyna seredeliň

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\left[\bar{y}(x)-y(x)\right]$$

ýa-da

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$$

haçan *a*=0 $y(x,\alpha)=y(x)$, $a=1$, $y(x,y)=\bar{y}(x)$ egri $v[y(x)]$- funksionaly diňe $y=y(x,\alpha)$ egriler maşgalasynda seretsek, onda funksional perimetri α görä bolan funksiýa öwrüler we $\alpha=0$ ekstremuma eye bolar. Onda

$$\frac{d}{d\alpha}v\left[y(x,\alpha)\right]_{\alpha=0}=0$$

ϑ funksionalyň wariasiýasy diýilýär we $\delta\vartheta$ bilen belgilenýär.
Eýleriň deňlemesindäki ýaly edip aşakdaky integraly alarys:

$$\delta v = \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x,\alpha),\dots, y^{(n)}(x,\alpha)\right)dx \right]_{\alpha=0} = \tag{2}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)})\, dx$$

2-njide integraldan başlap sag tarapyny bir gezek bölekleýin integrirlesek onda:

1. $\int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = \left[F_{y'} \delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx$

2. $\int_{x_0}^{x_1} F_{y''} \delta y'' dx = \left[F_{y''} \delta y'\right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y''} \delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx$

3.

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = \left[F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)}\right]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)}\right]_{x_0}^{x_1} + \dots$$

$$+ (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} \delta y dx$$

gyra şertleriniň esasynda hem-de

$$x = x_0, \text{ we } x = x_1, \ \delta y = \delta y' = \delta y'' = - - - - = \delta y^{(n-1)} = 0,$$

onda

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx \tag{3}$$

seredilýän egride ekstremuma eýe bolýanlygy üçin

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0$$

Esasy Lemmanyň esasynda $\delta \upsilon = 0$, ýagny

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y(n)} = 0 \tag{4}$$

Şeýlelikde, *y=y(x)* funksiýa (3) formuladaky funksionalyň ekstremumunyň barlygyny görkezýär.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i^* - c_j = 0, \ j = 1,\dots,n; \lambda_i^* \ge 0$$

deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýandygyny, ýagny $\{\lambda_i\}$ Lagranž köpeldijileri çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň ýolbererlik çözüwlerdigini alarys.

Kun-Takkeriň teoremasynyň ulanyşy bilen bagly bolan beýleki käbir netijelere, meselem, minimaks görnüşli meselelere garalyň. Güberçek minimaks meseleler indiki görnüşde formulirlenýär. E_n giňişlikde kesgitlenen $\{f_i(x)\}$, $i=1,\dots,m$ güberçek funksiýalaryň maşgalasy berlen. Goý,

$$\varphi(x) = \max_{1 \le i \le m} f_i(x)$$

bolsun . $\varphi(x)$-iň minimumyny tapmaklyk talap edilýär:

$$\min_{x} \max_{1 \le i \le m} f_i(x) \tag{6}$$

Bu mesele güberçek programmirlemäniň meselesine aňsat getirilýär:

$$f_i(x) - z \le 0, i = 1,\dots,m \tag{7}$$

şertlerde:

$$\min z \tag{8}$$

tapmaly. Dorudan–da her bir *x* nokada $z=\varphi(x)$ hasaba alyp, (6) meseläniň ýolbererlik çözüwini goýup bileris. (7-8) meseläniň optimal çözüwini $\varphi(x)$-iň minimumy alynýandygyny zerur we ýeterlik şertini alýarys;

$\forall$ *x* we z $\lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}\ge 0$ üçin

$$f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda_i f_i(x^*) \le f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda^*{}_i f_i(x^*) \le f_0(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m+k+l} \lambda^*{}_i f_i(x)$$

bolýan $\lambda^* = \{\lambda_1^*, ..., \lambda_{m+k+l}^*\}$ wektoryň bar bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Kun–Takkeriň teoremasyny çyzykly programmirlemedäki ikileýinlik teoremasynyň umumylaşdyrmasy, görnüşinde garamak bolar. Goý, çyzykly programmirlemäniň meselesi indiki görnüşde bolsun:

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 0, i = 1, ..., m.$$

çäklendirmelerde $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ jemi minimizirlemeli. Eger bu meseläniň çözüwi bar bolsa, onda Kun – Takkeriň modofisirlenen teoremasyna laýyklykda $x \in E_n$ we $\lambda_i \ge 0$, i=1,…,n bolanda

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*] \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*] \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*]$$

kanagatlandyrýan *m* ölçegli $\lambda^* \ge 0$ wektor bardyr.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] = \sum_{i=1}^{m} \lambda^*{}_i b_i + \sum_{j=1}^{n} x_j [c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i^*]$$

Bolýandygyny göz öňünde tutup, biz λ_i^*-niň

(4) formula Eýler-Puassonyň deňlemesi diýilýär. Onuň integral egrilerine seredilýän ekstremaly diýilýär. Umumy çözüwi 2n azat hemişelik sanlardan durýar. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y(x_1)=y_1$ olar gyra şertleriniň üsti bilen kesgitlenýär. Şeýlelikde, $y=y(x)$ funksiýa funksionalyň ekstremumyny ýerine ýetirýär. Ol bolsa (4) deňlemäniň çözülişi bolmaly.

Mesele 1. Funksionalyň ekstremalyny kesgitlemeli

$$\upsilon[y(x)] = \int_0^1 (1 + y''^2) dx,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

Eýler - Puassonyň deňlemesi

$\frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$ ýa-da $y^{IV} = 0$ görnüşe eýe bolar. Onuň umumy çözlüşi $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. Gyra şertleriň esasynda:

$$C_1=0, \ C_2=0, \ C_3=0, \ C_4=0.$$

Şeýlelikde, ekstremuma $y=x$ gönide ýeter.

Mesele 2. Funksionalyň ekstremalyny kesgitlemeli

$$\upsilon[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x2)\, dx,$$
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Eýler - Puassonyň deňlemesi $y^{IV} - y = 0$ görnüşe eýe bolar. Onuň umumy çözlüşi $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3cosx+C_4sinx$. Gyra şertleriň esasynda:

$$C_1=0, \ C_2=0, \ C_3=1, \ C_4=0.$$

Şeýlelikde, ekstremuma $y=cosx$ egride ýeter.

Eger funksional υ aşakdaky görnüşde berilse

$$\upsilon\,[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\,(x, y, y', ..., y^{(n)}, z, z', ..., z^{(m)})dx \qquad (5)$$

onda $y(x)$ boýunça warirowat edip, $z(x)$ fiksirlesek, onda Eýler-Puassonyň deňlemesi

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 \qquad (6)$$

görnüşe eýe bolar. Edil şonuň ýaly hem *z(x)* boýunça warirowat etsek *y(x)*–fiksirlenen diýip hasap etsek, onda:

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0 \qquad (7)$$

Onda

olar *z(x)* we *y(x)* 2 sany deňlemeler sistemasyny ýerine ýetirmeli.

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0, \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} + \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{z^{(m)}} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Edil şonuň ýaly hem, islendik sanly funksiýa bagly bolanda hem, onuň funksionalynyň ekstremumy kesgitlemek bolýar:

$$\upsilon[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}\right) dx \qquad (9)$$

Eger biz haýsy hem bolsa bir $y_i(x)$-funksiýa boýunça warirowat edip hemme galanlaryny bolsa üýtgetmän saklasak, onda biz wariasiýanyň hökmany şertini alarys:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \ldots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0, \ (i=1,2,\ldots,m) \qquad (10)$$

Deňsizligiň jübiti görnüşinde aňladylyp biliner. Eger biz Kun – Takkeriň teoremasyny formal ulansak, onda Lagranž funksiýada deňlige 2 goşulyja (два слагаемых) laýyk geler:

$$\lambda_1[(e,x)+c] + \lambda_2[(-e,x)-c] = (\lambda_1 - \lambda_2)[(e,x)+c] = \\ = \overline{\lambda}[(e,x)+c]$$

bu ýerde $\overline{\lambda} = \lambda_1 - \lambda_2$. Otresateldällik şertine diňe λ_1 we λ_2 degişli, $\overline{\lambda}$ bolsa erkin san bolup biler. Şeýlelikde, biz indiki teoremany formulirleýäris: (Kun-Takkeriň modifisirlenen formulasy)

Teorema 1: Goý, güberçek programmirlemäniň meselesi bar bolsun: $x \in \Omega$ çäklendirmelerde

$$\min f_0(x) \qquad (2)$$

tapmaly, bu ýerde Ω

$$f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m; \qquad (3)$$
$$f_i(x) = (e_i, x) + c_i \le 0, i = m+1, \ldots, m+k; \qquad (4)$$
$$f_i(x) = (e_i, x) + c_i = 0, i = m+k+1, \ldots, m+k+l \qquad (5)$$

ulgam bilen berilýär we sleýter şerti ýerine ýetirilýär: $f_i(\overline{x})<0$, $i=1,\ldots,m$ üçin $\overline{x} \in \Omega$ bardyr. Onda (2-5) meseläniň optimal çözüwi x^* bolmak üçin birinji (m+k) komponentalar otrisatel bolmadyk we (x^*,λ^*) jübüt

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m+k+1} \lambda_i f_i(x), x \in E_n; \lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, m+k$$

Lagranž funksiýanyň eýerli nokady bolýan, ýagny $\lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, m+k$ kanagatlandyrýan x üçin we $x \in E_n$

1) Ω köplükde x^* -den tapawutly nokat bu ýagdaýda $\bar{x}-x^*$ ugur bolup biler we Kun-Takkeriň teoremasy adalatlydyr.

2) x^* nokat Ω köplükde ýeke-täk. Goý, ∇ - x^* nokada $f_0(x)$ funksiýanyň umumylaşdyrylan gradiýentiniň erkin wektory bolsun. Çyzykly programmirlemäniň meselesine seredeliň. $(c_j,x)\le c_j,\ j=1,\ldots,k$ şertlerde $min(\nabla,x)$ tapmaly. Ol x^* nokada ýeketäk çözüwe eýe $(c_j,x^*)=c_j$, deňsizligi kanagatlandyrýan $j=1,\ldots,k$ indekslere garalyň. Goý, olar i^* köplügi emele getirsinler. $(c_j,\eta)<0$ ýerine ýetýän $\eta\neq 0$ wektorlaryň toplumy boş bolany üçin c_j wektorlardan minimal bölek köplük saýlap almak bolar. Bu wektorlar üçin $\sum_j \lambda_j e_j=0$ deňsizligi kanagatlandyrýan şeýle bir položitel $\lambda_j>0$ sanlar tapylar, başga tarapdan $\nabla=\sum_j \alpha_j e_j$. Bu ýerden

$$\nabla+\sum_j(\lambda_j-\alpha_j)e_j=0$$

λ_j sanlaryň islendikçe uly bolup bilýänligi sebäpli, onda $\nabla+\sum_j\bar{\lambda}_j e_j=0$ kanagatlandyrýan $\bar{\lambda}_j>0$ bardyr. Bu ýerden biziň ýagdaýymyzdaky Kun-Takker teoremanyň tassyklamasynyň adalatlydygy gelip çykýar. Şu usulda modifisirlenen Kun – Takkeriň teoremasy adatça güberçek programmirlemäniň meselesiniň çäklendirmeler ulgamynda güberçek we çyzykly deňsizlikleriň hatarynda çyzykly deňlemeleriň bar bolan ýagdaýynda ulanylýar.

$$(e,x)+c=0 \qquad (1)$$

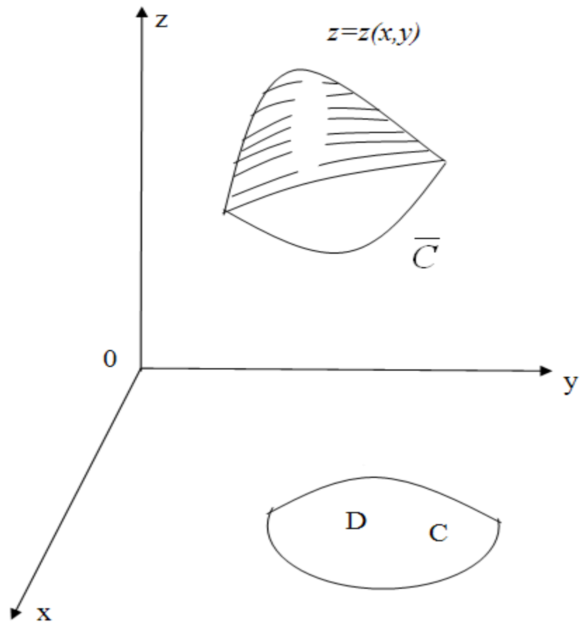
görnüşli çyzykly deňleme

$$(e,x)+c=0;$$
$$(-e,x)-c=0$$

§7. Wariasion hasaplamada Ostrogradskiniň deňlemesi we gat integrallary

$$\upsilon[z(x,y)]=\iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy\ ,$$

funksoinalyň ekstremumyny derňemeli, şunlukda D ýaýlanyň C araçäginde $z(x,y)$ funksiýanyň bahalary berlen, ýagny hemme mümkin bolan üstleriň geçmeli giňişlikdäki $\bar{C}$ kontury berlen.



1-nji surat

Gysgalyk üçin şeýle belgilemeleri gitizeliň: $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$.

F funksiýany 3 gezek differensirlenýär diýip hasap edeliň.
z = z(x,y) tekizligi 2 gezek differensirlenýär diýip hasap ederis.
$z=z(x,y,\alpha)=z(x,y)+\alpha\delta z$ birperimetrli tekizlikleriň toplumyna seredeliň. Bu ýerde $\delta z=\bar{z}(x,y)-z(x,y)$, $\alpha=0$ bolanda $z=z(x,y)$ tekizligi, $\alpha=1$ bolanda bolsa, $z=\bar{z}(x,y)$ käbir

ýolbererlik tekizligi özünde jemleýär. $z=z(x,y,\ \alpha)$ toplumyň funksiýalarynda υ funksional α funksiýa öwrülýär, $\alpha=0$ bolanda ol ekstremuma eýe bolmaly. Diýmek, $\frac{\partial}{\partial\alpha}v[z(x,y,\alpha)]|_{\alpha=0}=0$. $\alpha=0$ bolanda $\upsilon[z(x,y,\alpha)]$-dan α boýunça alnan önüme funksionalyň wariasiýasy diýilýär we ony $\delta\upsilon$ bilen belgiläp alarys:

$$\delta\upsilon=\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\iint_D F(x,y,z(x,y,\alpha),p(x,y,\alpha),q(x,y,\alpha))dxdy\right\}_{\alpha=0}$$
$$=\iint_D\left[F_2\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q\right]dxdy$$

bu ýerde

$$z(x,y,\alpha)=z(x,y)+\alpha\delta z,$$
$$p(x,y,\alpha)=\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial x}=p(x,y)+\alpha\delta p,$$
$$q(x,y,\alpha)=\frac{\partial z(x,y,\alpha)}{\partial y}=q(x,y)+\alpha\delta q.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}=\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}\delta z+F_p\delta p,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}=\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\delta z+F_q\delta q$$

bolany üçin

$$\iint_D(F_p\delta p+F_q\delta q)dxdy=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}\right]dxdy-$$
$$-\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta zdxdy$$

ýerine ýetýär.

Bu ýerde $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ - x boýunça doly hususy önüm. Ol hasaplananda y fiksirlenen diýlip hasap edilýär, z, p we q baglanşyk bolsa hasaba alynýar:

§8. Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň optimal çözüliş usullary

Bellik: Eger sleýter şerti ýerine ýetmese, onda $\{x^*,\lambda^*\}$ görnüşli Lagranž funksiýanyň eýerli nokady bolman hem biler.
Indiki ýönekeý mysala garalyň: $x^2\le 0$ şertde $min(-x)$ tapmaly. Sleýter şerti ýerine ýetmeýär, sebäbi $x^2<0$ bolanda x –iň bahalar köplügi boş. Optimum $x=0$ nokatda alynýar. Lagranž funksiýasy

$$L(x,\lambda)=-x+\lambda x^2$$

görnüşe eýe. X boýunça minimumyň zerur şerti $\frac{\partial L}{\partial x}=-1+\lambda x=0$ görnüşde ýazylýar. $x=0$ bolanda bu şerti kanagatlandyrýan λ ýokdur, ýagny Lagranž funksiýanyň (0,λ) görnüşli sedlowoý nokady ýokdur. Güberçek programmirlemäniň meselesinde çäklendirmeler hökmünde çyzykly deňsizlik bolup biler. Şunda Kun-Takkeriň teoremasynyň zerurlygy subut edilende sleýter şertiniň ýerine ýetmegini diňe çyzykly däl deňsizlikleriň kesme köplükleri üçin talap etmeli. Dogrudan-da, Kun-Takkeriň teoremasyny subut edenimizde biz bolup biljek ugurlaryň köplüginiň boş däldigini görkezmek üçin sleýter şertini talap etdik. Goý, çäklendirmeleriň ulgamy

$$\Omega=\left\{x:\begin{array}{l}f_i(x)\le 0, i=1,\dots m;\\(e_j,x)\le c_j, j=1,\dots k\end{array}\right.$$

görnüşli we $j=1,\dots,k$ üçin $f_i(\bar{x})<0, i=1,\dots,m,\quad (e_j,\bar{x})<c_j$ kanagatlandyrýan şeýle bir $\bar{x}$ nokat bar bolsun. Goý, $x^*\in\Omega$ meseläniň optimal çözüwi bolsun. Onda 2 ýagdaýyň bolmagy mümkin :

$$\overline{\nabla} L_1(x^*) = \alpha_0 \overline{\nabla} f_0(x^*) + \sum_{i\in I^*} \alpha_i \nabla f_i(x^*) \quad G_{L_1}(x^*) \equiv \overline{G}$$

görnüsli wektordan ybarat. $\overline{G}$ - niň nul wektor saklaýandygy üçin x^* nokatda $L_1(x)$ minimum gazanylýar. $i \overline{\in} I^*$ üçin $\alpha_i = 0$ ulanyp we $\frac{\partial L}{\partial x} = -1 + \lambda x = 0$ belgiläp

$$L(x,\lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

funksiýa garalyň. Bu funksiýanyň $\lambda_i = \lambda_i^*$ bolanda $x=x^*$ nokada x boýunça minimal baha we $x=x^*$ bolanda $\{\lambda_i^*\}$ nokada $\lambda \geq 0$ boýunça maksimal baha eýe bolýandygyny görmek aňsat. Şunlukda, $\{x^*, \lambda^*\}$ Lagranž funksiýanyň eýerli nokady, subut etmelimiz hem şudy. Kun – Takkeriň teoremasy subut edildi.

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}$$

we şuňa meňzeşlikde

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (Ndy - Mdx)$ belli bolan Grin formulasyndan peýdalansak, alarys:

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p \delta z\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q \delta z\}\right] = \int_C (F_p dy - F_q dx)\delta z = 0,$$

Soňky integral nula deň, sebäbi $\overline{C}$ konturda $\delta z = 0$. Sebäbi hemme mümkin bolan üstler şol bir $\overline{C}$ konturyň üstünden geçýär.

$$\iint_D [F_p \delta p + F_q \delta q] dxdy = -\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} + \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right] \delta z dxdy,$$

we ekstremumyň zerur şerti

$$\iint_D (F_z \delta z + F_p \delta p + F_q \delta q) dxdy = 0$$

şeýle görnüşe eýe bolýar

$$\iint_D \left(F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right) \delta z dxdy = 0.$$

δz wariasiya erkin we birinji köpeldiji üznüksiz bolany üçin esasy lemma boýunça $z=z(x,y)$ ekstremumy kesgitleýär.

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} \equiv 0.$$

Diýmek, $z(x,y)$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0$$

deňlemäniň çözüwi.
Bu differensial deňlemä Ostrogradskiniň deňlemesi diýilär.

Mysal 1.

$$v[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

D ýaýlanyň C araçäginde z funksiýanyň bahalary berlen : $z=f(x,y)$. Berlen ýagdaýda Ostrogradskiniň deňlemesi şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\,,$$

ýa-da gysgaça

$$\Delta z=0,$$

ýagny Laplasyň deňlemesi bolup çykýar. Şunlukda, bu deňlemäniň D ýaýladaky üznüksiz çözüwini tapmaly. Bu matematiki fizikanyň Dirihle meselesi diýlip atlandyrylýan esasy meseleleriň biridir.

Mysal 2.

$$v[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x,y)\right]dxdy$$

D ýaýlanyň araçäginde z funksiýa berlen.). Berlen ýagdaýda Ostrogradskiniň deňlemesi şeýle görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y)\,,$$

ýa-da gysgaça

$$\Delta z=f(x,y),$$

Bu deňlemä Puassonyň deňlemesi diýilýär. Ol hem matematiki fizikanyň meselelerinde köp gabat gelýär.

$$\max_{\nabla\in G_{f_\upsilon}(x^*)}(\nabla,\eta)\geq 0, G(x^*)=\bigcup_{\upsilon\in I^*\cup\{0\}}G_{f_\upsilon}(x^*) \qquad (5)$$

$G(x^*)$ köplügiň $\overline{G}$ güberçek ýagny,

$$\sum_{\upsilon\in I^*\cup\{0\}}\alpha_\upsilon\nabla_\upsilon,\sum_\upsilon\alpha_\upsilon=1,\alpha_\upsilon\geq 0,\nabla_\upsilon\in G_{f_\upsilon}(x^*)$$

görnüşli wektorlarynyň toplumyna seredeliň. Şu köplük üçin (5) deňsizlik saklanylýar:

$$max(\nabla,\eta)>0, \text{ hemme } \eta \text{ üçin} \qquad (6)$$

Ýöne bu $\overline{G}$ nul wektory saklaýandygyny aňladýar. Dogrudanda $\overline{G}$ ýapyk çäkli güberçek köplük. Eger G nuly saklamadyk bolsady, onda nul nokatdan 1(§2) häsiýete laýyklykda hemme $\nabla\in G$, $(a,\nabla)<0$ kanagatlandyrýan a normal bilen gipertekizlik geçirip bolardy. Ol blsa (6) deňsizlige garşy gelýär. $\overline{G}$ - niň nul wektory saklaýandygyndan

$$\alpha_0\nabla_0+\sum_{i\in I^*}\alpha_i\nabla_i=0,$$

bu ýerde $\nabla_0\in G_{f_0}(x^*),\nabla_i\in G_{f_i}(x^*)$
kanagatlandyrýan şeýle bir $\alpha_\upsilon\geq 0,\upsilon\in I^*\cup\{0\},\sum_\upsilon\alpha_\upsilon=1$ sanlar bardygy gelip çykýar, şeýle hem $\alpha_0\neq 0,$ sebäbi tersine bolan halatynda W köplük boş bolardy. $L_1(x)=\alpha_0 f_0(x)+\sum_{i\in I^*}\alpha_i f_i(x)$ funksiýa seredeliň. Bu funksiýa güberçek we x^* nokada $G_{L1}(x^*)$ umumylaşdyrylan gradiýentiň köplügi

$f_i(x^*)>0$ bolsa, onda bu $f_0(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^*)\ge 0, i=1,\dots,m.$ ýokardan çäklilige garşy gelýär. Şonuň üçin hemme $i=1,\dots,m$ üçin $f_i(x^*)\le 0$, ýagny $x^*\in\Omega$. Soňra $x\in\Omega$ bolanda $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)\le 0$ we şol sebäpli:

$$f_0(x)\ge f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* f_i(x^*)\ge f_0(x^*)$$

Şunlukda x^* optimal çözüw.

Zerurlygy. Goý, x^* optimal çözüw bolsun. $F_i(x^*)=0$ kanagatlandyrýan şeýle bir $i\in\{1,\dots,m\}$ elerden ybarat bolan I^* indeksler köplügine we soňra ähli $i\in I^*$ üçin $f'_{i\eta}(x^*)<0$ kanagatlandyrýan şeýle bir η wektoryň W köplügine garalyň. Goý, $k=W\bigcup\{0\}$ bolsun.

Bellik. Eger I^* boş bolsa onda W köplük erkin nul däl wektorlarda ybarat, k köplük bolsa bütin giňişligi doldurýar diýip hasap ederis. W-ny emele getirýän wektorlaryň köplügi – bu x^* nokatdan bolup biljek ugurlaryň köplügidir, ýagny $x+i(\eta)\eta\overline{\Omega}$ kanagatlandyrýan şeýle bir $t(\eta)>0$ san tapylýan η ugurlardyr. Bu ýerde $\overline{\Omega}-\Omega$ köplügiň içki nokatlarynyň bölek köplügi. Sleýter şerti bize W köplügiň boş dälligini berýär. x^* - minimum nokady bolany üçin, mümkin bolan islendik ugurda $f(x)$ kemelmeli däldir, ýagny W girýän islendik ugur boýunça önüm otrisatel bolmaly däldir. $f'_{0\eta}(x^*)<0$ kanagatlandyrýan η köplügini W_0 diýip belgiläliň. Aşakdaky şert ýerine ýetirilmeli: $W_0\bigcap W=\emptyset$, diýmek, $i\in I^*$ bolanda $f'_{0\eta}(x^*)\,we\,f'_{i\eta}(x^*)$ şol bir wagtda otrisatel bolýan η ugur ýokdyr. Islendik η üçin

$$\max_{\upsilon\in I^*\bigcup\{0\}}\ \max_{\nabla\in G_{f_\upsilon}(x^*)}(\nabla,\eta)\ge 0$$

gelip çykýar. Bu ýerden:

Mysal 3. Üstüň minimal meýdanyny tapmak meselesi $\overline{C}$ berlen kontur ýapylanda ol aşakdaky minimum funksionaly derňemeklige getirýär.

$$S[z(x,y)]=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Onda Ostrogradskiniň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\}=0,$$

ýa-da

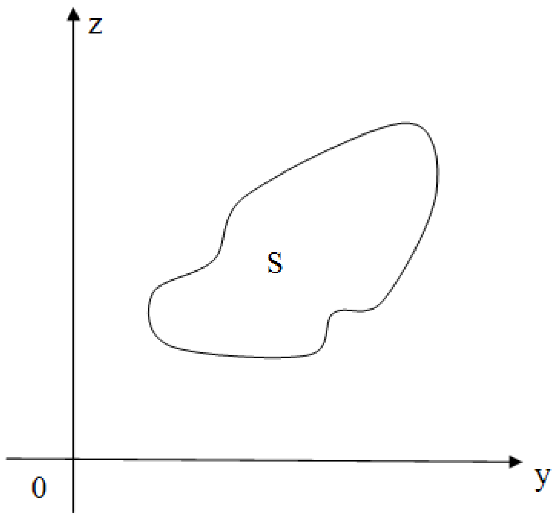
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]=0$$

ýagny her bir nokadyň orta egriligi nula deň. Minimal üstleriň fiziki ýerleşdirmesi sabyn köpügiň gabygy C berlen kontury ýapýar.

§8. Perimetrik görnüşdäki wariasion meseleleriň çözülişi.

Bir näçe wariasion meseleleriň çözüwini perimetrik görnüşde gözlemek amatly bolýar.Meselem ýokarda sereden ižoperimetrik meselede berilen uzynlygy ýapyk egri L-çyzyk bilen çäklendirilen maksimum S meýdany kesgitlemeklik üçin ony çözülişini $y-y(x)$ görnüşde gözlemek aňsat bolmaýar, sebäbi meseläniň manysyna görä $y(x)$ funksiýa bir bahaly däldir, şoňa görä seredilýän meseläniň çözülişini $x=x(t)$ $y=y(t)$ perimetrik görnüşde gözlemeklik amatly bolýar.Şoňa görä häzirki ýagdaýda funksionalyň ekstremumyny aşakdaky görnüşde gözlemek gerek.

$$S'[x(t),y(t)]=\frac{1}{2}\int_0^T(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt,$$



1-nji surat

çözüwleriniň gözlegini aňsatlaşdyrýan örän möhüm indiki häsiýete eýe:
Teorema 1: Güberçek programmirlemäniň meselesiniň islendik lokal minimumy global minimumdyr.
Subudy: Eger $x^*\in\Omega$ lokal minimumyň nokady bolsa onda şeýle bir $S(x^*)$ etrap bar bolup, $x\in\Omega\bigcap S(x^*)$ bolanda $f_0(x)-f_0(x^*)\geq 0$ ýerine ýeter. Goý, $-x$ Ω degişli nokat we $f(x)<f(x^*)$ bolsun. Goý $0<\alpha<1$ bolsun.

$$f((1-\alpha)x^*+\alpha x)<(1-\alpha)f(x^*)+\alpha f(x)<f(x^*)$$

Ýöne kiçi $\alpha-da$ $(1-\alpha)x^*+\alpha x\in\Omega\bigcap S(x^*)$ garşylyga geldik . bu ýerden x^* nokada global minimuma ýetilýändigi gelip çykýar.
Teorema 2: (Kun-Takkeriň teoremasy). Goý, (2-3) meseläniň Ω ýaýlasynyň içki nokatlary bar bolsun, ýagny sleýter şerti kanagatlansyn: ähli $i=1,\ldots,m$ üçin $f_i(x)<0$ kanagatlandyrýan $x\in\Omega$ bar bolsun. Onda x^* (2-3) meseläniň optimal çözüwi bolmagy ücin (x^*,λ^*) jübütiň

$$L(x,\lambda)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x), x\in E_n;\lambda\geq 0$$

Lagranž funksiýasynyň sedlowoý nokady bolýan otresatel däl m ölçegli $\lambda^*=\{\lambda_i^*\}_{i=1}^m$ wektoryň bar bolmagy zerur we ýeterlik, ýagny:

$$\begin{aligned}&f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* f_i(x)\geq f_0(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* f_i(x^*)\geq\\&\geq f_0(x^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x^*)\geq 0, i=1,\ldots,m.\end{aligned}\tag{4}$$

Subudy:
Ýeterligi: Goý, (4) ýerine ýetirilýän bolsun. Eger käbir I üçin

§7. Çyzykly däl güberçek programmirlemä gelýän amaly meseleler

M ýapyk güberçek köplükde $f_0(x)$ güberçek funksiýanyň minimal bahasyny tapmaklygyň meselesini biz güberçek programmirlemäniň meselesi diýip atlandyralyň. M köplügiň $f_i(x)\le 0$ $(i=1,..,m)$ güberçek deňsizlikler ulgamy bilen kesgitlenýän ýagdaýa seredeliň. Güberçek programmirlemäniň meselesi hökmünde biz indiki meselä düşüneris:

$$f_i(x)\le 0;\ i=1,\dots m \tag{1}$$

$f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m$ çäklenmelerde

$$\min f_0(x) \tag{2}$$

tapmaly. Bu ýerde $f_\nu(x), \nu=0,1,...m$ - *n* ölçegli E_n ýewklid giňişliginde kesgitlenen güberçek funksiýalar. $f_i(x)\le 0$ görnüşli her bir deňsizlik ýa boş ýa-da Ω_i güberçek köplügi kesgitleýär. Dogrudanam, goý Ω_i boş däl $x_1,x_2\in\Omega_i$ ýagny $f_i(x_1)\le 0$, $f_i(x_2)\le 0$ we goý $\alpha_1,\alpha_2\ge 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ bolsun. Onda $f_i(x)$ güberçekligi esasynda alarys:

$$f_i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\le \alpha_1 f_1(x_1)+\alpha_2 f_2(x_2)\le 0 \tag{3}$$

Diýmek $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2\in\Omega_i$. Bu ýerden Ω_i güberçek köplük. Onuň ýapyklygy ýerlikli (2) deňsizlikler ulgamyna ýa baş ýa-da ýapyk we güberçek bolan $\Omega=\bigcap_{i=1}^{m}\Omega_i$ köplük degişli. Eger Ω boş bolsa, onda (2-3) meseläniň ýolbererlik çözüwleri ýokdur. Eger Ω çäkli bolsa, onda meseläniň çözüwi bar, sebäbi üznüksiz funksiýa ($f_i(x)$ güberçek funksiýa üznüksiz) ýapyk çäkli köplükde minimal baha eýe bolýar. Eger Ω çäkli däl bolsa, onda optimal çözüw bolman hem biler. Güberçek programmirlemäniň meseleleri olaryň

$L=\int_0^T\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\ dt$ -şerti ýerine ýetse nirede L-perimetir hemişelikdir.Goý, aşakdaky funksionaly ekstremumy derňänimizde

$$\vartheta[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)x(t)dt$$

ýokarda seredilen funksional özgerdilenden soňra, integral aşagyndaky funksiýa, aşakdaky görnüşde eýe bolýar.

$$F\left(x(t),y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

ýagny aýdyň görnüşde t-ni özünde saklamak şeýle hem $\dot{x}$ we $\dot{y}$ näbellilere görä ýönekeý görnüşli funksiýa bolup, ýönekeýligiň birinji derejesindedi.

Şeýlelik bilen $\vartheta[x(t),y(t)]$-funksional erkin däl funksional bolup aşakdaky görnüşde eýedir.

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi\big(t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)\big)dt$$

$x(t),y(t)$ 2-i funksiýa bagly bolup, örän hususy ýagdaýda şeýle funksional emele gelýär, integral aşagyndaky funksiýa aýdyň görnüşde özünde t-ni saklamaýar we birinji derejeli ýönekeý bolup şeýle hem $\dot{x}$ we $\dot{y}$ näbellilere görä ýönekeýdir. Eger biz başga bir görnüşli perimetrik egrilere seretsek $x(\tau),y(\tau)$, onda funksional $\vartheta(x,y)$ aşakdaky görnüşde özgerer

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}F\left(x,y,\frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right)\dot{x}_\tau\,d\tau$$

görşümiz ýaly funksional ϑ öz görnüşini üýtgedenok haçan perimetrik görnüşiň üýtgäni bilen.Diýmek funksional ϑ

perimetrik görnüşe bagly bolman ol diňe egriniň görnüşine baglydyr.Bu şertiň dogrydygyna biz aşakdaky tassyklamanyň esasynda göz ýetirip bileris.

Eger funksionalyň integral aşagyndaky funksiýasy

$$\vartheta[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\Phi\big(t,x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)\big)dt \qquad (1)$$

t-ni aýdyň görnüşde özünde saklamasa we ýönekeý görnüşli birinji derejeli funksiýa we onuň önümleri $\dot{x},\dot{y}$ bolsalar, onda funksional $\vartheta[x(t),y(t)]$ diňe $x=x(t)$ we $y=y(t)$ egrilere bagly bolup, onuň perimetrik görnüşine bagly bolmaýar. Ýagny (1) nirede $\Phi(x,y,k\dot{x},\dot{y}k)=k\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})$

Indi bolsa täze perimetrik görnüşe seredeliň goý

$\tau=\varphi(t),(\dot{\varphi}(t)\neq 0),x=x(\tau),y\neq y(\tau)$

Onda

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi\big(x(t),y(t),\dot{x}(t),\dot{y}(t)\big)dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Phi\ \big(x(\tau),y(t),\dot{x}_\tau(\tau),\dot{\varphi}(t),\dot{y}_\tau(\tau)\big)\frac{d\tau}{\dot{\varphi}(t)}$$

Φ-ýönekeý funksiýa bolýanlygy üçin we birinji dereje ýönekeýligi we onuň önümleriniň $\dot{x}$ we $\dot{y}$ hem ýönekeýligi üçin

$$\Phi\big(x,y,\dot{x}_i\dot{\varphi},\dot{y}_i\dot{\varphi}\big)=\dot{\varphi}\Phi\big(x,y,\dot{x}_i,\dot{y}_i\big)$$

Bu ýerden

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi\big(x,y,\dot{x}_\tau,\dot{y}_\tau\big)dt=\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Phi\big(x,y,\dot{x}_\tau,\dot{y}_\tau\big)d\tau$$

çäklendirmeler ulgamy bolsa islendik G ýaýlada

$$G\sum_{j=1}^{n}x_j\leq C \qquad (6)$$

$$x_j\geq 0 \qquad (7)$$

(5)-(7) x_j-baglylykda çyzykly ýa-da çyzykly däl programmirlemäniň meselesi bolýar. Ýene bir meselä seredeliň, ýagny goý gurluşyk guramasy n-dürli senagat gurluşuk binalaryny galdyrmak üçin tabşyryklary ýerine ýetirýän bolsun. Gurluşygyň binalarynyň j-nji görnüşi islendik bir tehnalogiki shemada ýerine ýetirilýän bolsun. Eger l-nji binany s-nji tehnalogiki shemada ýerine ýetirilýän bolsa onda serişdeleriň çykdajylarynyň ululygy - a_{ls}, netijede gurluşygyň guramasy C(x_{ls})-ululykda girdeýji almaga mümkinçilik berýän bolsun. Şeýle bir shemany saýlap almaly, haçan galdyrylan senagat binalary gurluşyk max girdeýji berýän bolsa, onda onuň max modeli

$$F(x)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}C(x_{ls})\to\max$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}a_{ls}^{j}x_{ls}\leq b_j \qquad (j=\overline{1,m})$$

$$x_{ls}=\begin{cases}1, \text{ eger } (l=\overline{1,n})\\ 0, \text{ eger } (s=\overline{1,k})\end{cases}$$

$$F(x)=\sum_{l=1}^{n}F_a(x)$$

görnüşde alynýar.

bahany tapmak üçin (1)-(2) deňsizliklere hem-de (4) şerte (2)-(3) göz öňüne tutmak bilen tapmak bolýar. (1)-(2) degişlidir: biz bazis usulyny ulanyp, we goşmaça (2-3) şertler göz öňünde tutup, tükenikli ädimden soňra bu meseläniň optimal çözüwiniň bardygyny ýa-da ýokdugyny kesgitläp bilýäris. Şeýlelikde kwadrat programmirlemäniň meselesiniň çözüliş prosesi aşakdaky tapgyrlardan durýar:

1) Lagranžyň funksiýasyny düzmeli;
2) (1)-(2) görnüşde hökmany we ýeterlik şertini Lagranžyň funksiýasy üçin eýer nokatlaryň bardygyny görkezmeli;
3) Täzeden goşmaça girizilen bazisleriň üsti bilen onuň usulyny ulanyp, Lagranžyň funksiýasy üçin eýer nokatlaryň bardygyny hem-de onuň koordinatalaryny görkezmeli, eger-de ýok bolsa, onuň ýokdugyny görkezmeli.
4) Netijede meseläniň optimal çözüwini kesgitlemeli we maksat funksiýany tapmaly.

Separabel meselelere gelýän amaly meseleler.

Ykdysadyýetde wajyp meseleleriň içinde pudaklaryň kärhanalaryň olaryň bölümleriniň we bölümçeleriniň arasynda maýa goýumlaryň optimal bölünişiniň meselesi örän gyzykly meseledir.

Goý, bize aşakdaky görnüşde mesele berlen bolsun. Goý n dürli pudaklaryň ozone mahsus bolan önümleri öndürýän bolsun, maýa goýumlaryň peýdalylygy j-njy pudagyň girdeýjisiniň q_j-ululyga baglylykdaky funksiýasy bilen kesgitlenilýär. C-ululygy ýagny serişdeleri pudaklar arasynda şeýle bölünmeli, netijede jemi alynýan peýda max bolmaly, eger bu funksiýa çyzykly bolsa, onda biz çyzykly programmirlemäniň meselesini alýarys, ýagny bize belli bolan:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} q_j(x_j) \to \max \qquad (5)$$

ýagny integral aşagyndaky funksiýa üýtgemedi onuň perimetrik görnüşiniň üýtgemegi bilen Duganyň uzynlygy

$$S - \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt,$$

$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y} \quad \dot{x}y)dt$ - egri bilen çäklendirilen meýdan şeýle funksionallara mysal bolup biler.Funksionalyň ekstremalyny tapmak üçin onuň aşakdaky görnüşine seredeliň

$$\vartheta[x(t), y(t)] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})dt$$

nirede Φ-ýönekeý funksiýa birinji derejeli $\dot{x}$ we $\dot{y}$ görä. Şeýle hem funksional üçin Eýleriň deňlemesiniň sistemasyny çözmeli

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0, \ \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0$$

ýöne seredilýän hususy ýagdaýda bu deňlemeler özara baglanşyksyz däldirler. Bu deňlemeleriň birisi beýlekisiniň netijesi bolup durýar. Şonuň üçin birini alyp ony integrirläp perimetri saýlap kesgitleýän deňleme bilen bilelikde.

Meselem

$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0,$ deňlemä $(E.D)$ $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$

birikdirip, ýagny perimetir duganyň uzynlygyny almalydygyny görkezýär.

§9. Esasy wariasion prinsipiniň birnäçe mehaniki meselelerde ulanylyşy

Mehanikada esasy wariasion prinsip diýip Ostragradskiý-Gameltonyň stasionarlyk hereketiniň prinspine aýdylýar. Hakykatdan hem material nokatlaryň sistemasynyň hereketi onuň stasionar bahalaryny kanagatlandyrýar.

Ostragradskiý-Gamiltonyň stasionar täsir ediji prinspi mehanikada esasy wariasion prinsip bolup kesgitleýji material nokatlaryň sisremasynyň hereketi bilen özara mümkin bolan bilelikdäki arabaglanşygyň esasynda stasionar bahalary berýän hakykatdan emele gelýän hereketiň integraly

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt, \qquad T=\frac{mv^2}{2} \tag{1}$$

nirede T-kinetik energiýasy U-potensial energiýa sistemasy. Bu prinsipi birnäçe mehaniki meselelere ulanalyň.

Mesele. Goý bize m_i $(i=\overline{1,n})$ massaly, material nokatlaryň sistemasy berlen bolsun,şeýle hem ol nokatlaryň koordinatalary(x_i,y_i,z_i),oňa täsir ediji güýçler $\vec{F_i}$ bolup güýç funksiýasyna U-eýedir (potensial),we diňe koordinatalara bagly bolup

$$F_{i}x=\frac{\partial U}{\partial x_i};\quad F_{i}y=\frac{\partial U}{\partial y_i};\quad F_{i}z=\frac{\partial U}{\partial z_i}$$

Nirede$\left(F_{i_x},F_{i_y},F_{i_z}\right)$,$\vec{F_i}$-wektoryň koordinatalary,bolup(x_i,y_i,z_i)-nokatlara täsir ediji güýçdir.Bu sistemanyň hereketiniň differansial deňlemesini tapmaly.

Bu ýagdaýda kinetiki energiýa

§6. Şekillendirilen kwadrat programmirlemäniň meselesi üçin Lagranžyň funksiýasy

$$L_n=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_k x_j+y_i(b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)$$

eger-de

$$L=(y_0,x_0)=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\dots,y_n^0)$$

eýer nokatlary bolsa, onda bu nokatlarda ýokardaky gatnaşyklar ýerine ýetýär. Egerde biz goşmaça täze näbelliler girizsek, ýagny V_j, W_i deňsizlikleri deňlemä öwürip kwadrat programmirlemäniň meselesiniň matematiki modellerini aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j}+V_j=0 \quad (j=\overline{1,m}) \tag{1}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i}-W_i=0 \quad (i=\overline{i,m}) \tag{2}$$

$$x_j^0 V_j=0 \quad (j=\overline{1,n}) \tag{3}$$

$$y_i^0\ W_i=0 \quad (i=\overline{1,m}) \tag{4}$$

$$x_j^0\ge 0,\ V\ge 0,\ W_i\ge 0,\ y_i^0\ge 0$$

Ýokarda berlen kwadrat programmirlemäniň meselesini çözmek üçin (1)-(2) ýerine täzeden alynan (1) we (2) sistemanyň oňyn çözülişini kesgitlemeli. Ol bolsa (3) we (4) şertleriň kanagatlandyrýan ýagdaýynda kesgitlemeli. Bu çözüw bolsa goşmaça näbellilerini ýagny bazisi girizip, onuň usulyny peýdalanyp bu meseläniň çözüwini peýdalanyp bolýar, egerde maksat funksiýa

$$F=\sum My_i-\max$$

§5. Kwadrat programmirleme meselesi we onuň matematiki modeli

Kesgitleme 1. $x_1, x_2, ..., x_n$ näbellilere görä kwadrat görnüşli diýlip, ol näbellilere göräsan funksiýasyna aýdylýar we aşakdaky görnüşde ýazylýar.

$$F(x) = C_{11}x_1x_1 + C_{12}x_1x_2 + C_{13}x_1x_3 + ... + C_{21}x_2x_1 +$$
$$+ C_{22}x_2x_2 + ... = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_k x_{x_j}$$

Kesgitleme 2. F(x) kwadrat görnüş oňyn däl diýlip aýdylýar, eger islendik $x_1, x_2, ..., x_n$ saýlanan näbellileriň bahasy üçin hemme näbellileriň bahasy bir pursatyň özünde 0-a deň däldir.

Teorema. *Kwadrat görnüş güberçek funksiýa bolýar, eger ol oňyn ýarym kesgitlenen bolsa we oýuk funksiýa bolýar, eger ol oňyn däl ýarym mesele bolsa.*

Kesgitleme: F(x) funksiýanyň bahasynyň max hem-de min bahasyny kesgitlemekden durýar, eger ol aşakdaky şertleri ýerine ýetirýän bolsa:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_k x_j \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (3)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

Mehanikadaky wariasiýanyň esasy prinsipi bolup Ostragradskiý-Gameltonyň stasionar täsir ediji prinsipine aýdylýar.

1) Nokadyň impulsy onuň tizligi we massasy arkaly aňladylýar we ol nokadyň iň möhüm häsiýetnamalarynyň biri bolup, mehaniki öňe hereketiň ölçegidir.

2) Kinetik energiýa jisimiň mehaniki hereketiniň ölçegidir.Onuň ululygy togtadylyp başlandan soň , doly durýança jisimiň ýerine ýetirip biljek işine deňdir.

$$T = \frac{mv^2}{2}, \; A = T_2 - T_1 = \Delta T \quad \text{ululyk.}$$

3) Ýokary galdyrylan jisimiň ýa-da gysylan pru£iniň ätiýaç energiýasyna potensial energiýa diýilýär.

4) Güýjüň ýerine ýetirýän işi jisimiň orun üýtgetmesiniň traýektoriýasyna bagly bolsa,beýle güýçlere dissipatiw güýçler diýilýär.Oňa sürtülme güýçler mysal bolup biler.

5) Ulgamyň kinetik we potensial energiýalaryň jemi bu ulgamyň doly mehanik energiýasyny berýär.

$$E = T + E_{p.}$$

Potensial energiýa sistemasy(U)-deňdir.Eýleriň deňlemeler sistemalary (1) integraly üçin aşakdaky görnüşe eýe bolup biler.

$$-\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0\,;\; -\frac{\partial u}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0\,;\; \frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0$$

ýa-da

$$m_i\ddot{x}_i - F_{ix} = 0\,; m_i\ddot{y}_i - F_{iy} = 0\,; m_i\ddot{z}_i - F_{iz} = 0\,.(i = \overline{1,n})$$

Eger hereket haýsy hem bolsa bir ,azat sistema degişli bolup oňa bagly bolsa

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$
$$(j = \overline{1,m}\ , m < 3n)$$

Onda m näbellileri $3n-m$ baglanşykly deňlemeden azat näbellileriň üsti bilen aňladyp (t-wagty hasaba almazdan) ýa-da hemme 3n näbellileri 3n-m täze baglanşyksyz näbellileriň üsti bilen aňladyp koordinatalaty

$$q_1, q_{2,\dots,} q_{3n-m}$$

Onda Twe U-energiýalara edil funksiýa hökmünde seretmek mümkin bolardy.

$$q_1, q_{2,\dots,} q_{3n-m}$$

we t;

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3n-m}, t)$$

Onda Eýleriň deňlemeler sistemasy aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0 \ (j = \overline{1,3n-m})$$

wektor bar bolup, $y_i^0 \geq 0$ *bolsa,* (X_0, Y_0)*-Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokatlary bolsa.*

Eger f(x), g(x) funksiýalar üznüksiz differensirlenýän bolsalar onda teorema 2 analitik aňlatmalar bilen doldurylan bolmagy mümkin, ol bolsa öz gezeginde Lagranžyň funksiýasynyň (X_0, Y_0) nokatlarda eýer nokatlaryň bolmagyny kesgitlenen hökmany şertidir hem ýeterlikdir.

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0 \ (j = \overline{1,n}) \tag{6}$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \tag{7}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \tag{8}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial y_i} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}) \tag{9}$$

$$y_i \frac{\partial L_0}{\partial_i} = 0 \tag{10}$$

$$y_i^0 \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \tag{11}$$

Netije. (10-12)-ä güberçekligi ýa-da oýuklygy dine $g_i(x)$ görä, haçan f(x) bilen, $g_i(x)$ funksiýalar bir wagtyň özünde oýuk hem-de güberçek bolmasa.

Teorema1. *islendik lokal max(min) güberçek programmirlemäniň meselesi bolsa onda ol şol bir wagtyň özünde global hem bolýar. Teoremanyň subudy güberçekligiň hem oýuklygyň üsti bilen ýönekeýje subut edilýär.*

Kesgitleme 5: (1-3) programmirlemäniň meselesinde Lagranžyň funksiýasy diýlip, aşakdaky funksiýa aýdylýar:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} y_i[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)]$$

Nirede $y_1, y_2, ..., y_m$ - Lagranžyň köpeldijisi.

Kesgitleme 6: $(X_0, Y_0) = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ nokatlara Lagranžyň funksiýasynyň eýer nokatlary diýilýär.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \le$$
$$\le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, ..., y_m)$$

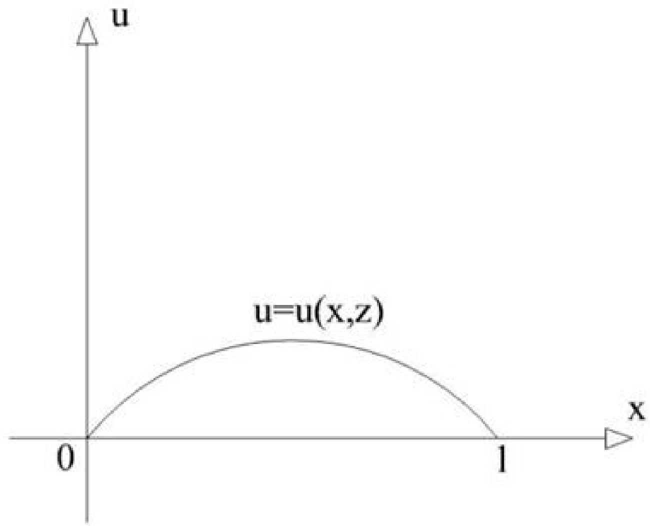
Eger aşakdaky şertler ýerine ýetýän bolsa:

$$x_j \ge 0 \quad we \quad y_i \ge 0 \ (j = \overline{1,n}), (i = \overline{1,m})$$

Teorema 2. *(Kun-Tekkeiň) (10-12) üçin mümkin bolan (rugsat edilen) çözüwleriň köplügiň kadalaşdyrma häsiýetine eýe bolýan bolsa, onda* $X_0 = x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ *nokatlaryň optimal nokatlar bolýar, ýagny optimal meýilnamasy bolýar, haçan* $Y_0 = y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0$

§10. Dartylan simiň(taryň) azat yrgyldylarynyň differensial deňlemesi

Koordinatalar başlangyjynyň simiň bir ujunda ýerleşdireliň. Sim ox-okuna görä dartyltyp durnukly ýagdaýda bir gönüniň üstünde ýerleşdirilen. Ol göni ox-oky bilen gabat gelýär. Onuň t-pursatda durnukly ýagdaýdan süýşmesi gyşarmasy $U(x,t)$-absissa we t görä funksiýa bolýar.



1-nji surat

Absolýut ýumşak simiň, U elementiň potensial energiýasy ,simiň dartgynlygyna proporsionaldyr. Simiň dx bölegi maýyşgaklyk ýagdaýa, tükeniksiz kiçi ýokary tertipli takyklykda ,onuň uzynlygy

$$ds = \sqrt{1 + U_x'^2}\, dx$$

we elementiň degişlilikde uzalmasy

$\left(\sqrt{1+U_x'^2}-1\right)dx$ deň. Teýloryň formulasy esasynda.

$$\sqrt{1+U_x'^2}\approx 1+\frac{1}{2}U_x'^2$$

U_x' –ýeterik derejede kiçi diýip, U_x'-niň ýokary derejelerini hasaba almazdan, potensial energiýanyň elementini $\left(\frac{1}{2}kU_x'^2\right)dx$ deň diýip hasap edip(*k*-proporsional köpeldiji), umumy simiň potensial energiýasy

$$\frac{1}{2}\int_0^s kU_x'^2\,dx$$

deňdir.
Simiň kinetiki energiýasy

$$\frac{1}{2}\int_0^s \rho U_x'^2\,dt$$

deňdir, nirede ρ -dykyzlyk, onda (1) integral bu ýagdaýda aşakdaky görnüşe eýedir.

$$\upsilon=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^s\left[\frac{1}{2}\rho U_i'^2-\frac{1}{2}kU_x'^2\right]dx\,dt$$

Simiň herekitiniň deňlemesi , Ostragragskiýniň v funksional üçin deňlemesidir.Şeýlelikde simiň hereketiniň deňlemesi , aşakdaky görnüşe eýedir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U_i'\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(kU_x'\right)=0$$

Eger sim bir tipli bolsa onda ρ we k hemişelik bolup, simiň yrgyldysynyň deňlemesi ýönekeýleşýär.

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$$

§4. Güberçek programmirlemäniň meselesi

Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň meselesi berlen bolsun, ýagny

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\max(\min) \qquad (1)$$
$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le b_i \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (2)$$
$$x_j\ge 0 \qquad (3)$$

Bu meseläni çözmek üçin belli bir ýol ýokdur.ýöne f(x), g(x)-goşmaça çäklendirmeler goşulyp, birnäçe deňlemeler synpyna görä örän oňat çözmek bolýar. Meselem, f(x) funksiýa güberçek we çözüwi bar bolan ýaýlasy güberçekdir (oýukdyr).

Kesgitleme1: x güberçek köplükde berlen f(x)-güberçek diýilýär, eger islendik nokatlar şol x-dan bolup, islendik λ üçin aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetýän bolsa

$$(0\le\lambda\le 1)$$
$$f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]\le\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (4)$$

Kesgitleme2: Eger x güberçek köplükde berlen f(x) funksiýa oýuk diýilýär, eger islendik 2 nokatlar şol x-dan bolup, islendik λ üçin aşakdaky gatnaşyk ýerine ýetýän bolsa, $(0\le\lambda\le 1)$

$$f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]\ge\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (5)$$

Kesgitleme3: (1-3) deňligiň mümkin bolan (rugsat edilen) çözüwi kadalaşdyrma şerti kanagatlandyrýar diýilýär, eger iň bolmanda ýeke-täk x_i nokat bar bolup, mümkin bolan ýaýlasyna degişli bolsa we $g_i(x)\le b_i$ deňsizligi ýerine ýetýän bolsa, onda ol kadalaşdyrylandyr.

Kesgitleme4: (10-12)-ä güberçek meselesi diýlip aýdylýar, eger f(x) funksiýa anyk (güberçek), g(x) tersine güberçek (oýuk) bolsa.

2) Näbellilerden x we L köpeldijilerden λ_i hususy önümleri alyp, o-a deňläp almaly;
3) Emele gelen (8-9) çözüp, tapylan nokatlaryň meseläniň ekstremumyny kesgitlemeli. Tapylan nokatlaryň içinden max(min) nokatlary kesgitläp, optimal çözüwini tapmaly.

Bellik: Lagranžyň köpeldiji usulyny haçan
$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$
$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m})$
ýagny näbellileriň, baglanyşyk häsiýeti şerti deňsizlik bolanda maksat funksiýany f(x) hiç hili şertsiz ekstremumyny kesgitleýäris, sonar bolsa 0-a deňläp hususy önümine görä onuň nokatlaryny kesgitläp şolaryň içinden g(x) g(x)<b koordinatalary tapyp, soňra

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n} \\ g(x) = b \end{cases}$$

Ýokardaky şerti kanagatlandyrýan nokatlary kesgitleýäris. Deňlemäni kanagatlandyrýan nokatlary tapyp, g(x)<b bolsa, şol deňsizligi kanagatlandyrýan edil şertsiz ekstremumy tapylyşy ýaly, soňky deňsizlige görä tapylan nokatlary derňemeli.

Goý ,sime daşky güýç täsir edýän bolsun,ýagny $f(t, x)$, sime perpendikulýar, bolup haçan ol durnukly (asudalykda) birlik massa hasabynda ,onda ol $\rho f(t, x) U dx$-daşky täsir ediji güýç bolup Ostragradskiý-Gamiltonyň deňlemesi (1) aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \rho U_t'^2 - \frac{1}{2} k U_x'^2 + \rho f(t, x) U \right] dx dt,$$

Simiň mejbury yrgyldysynyň deňlemesi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_t') - \frac{\partial}{\partial x}(k U_x') - \rho f(t, x) = 0$$

Eger sim bir tipli bolsa :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x, t)$$

Edil şonuň ýaly edip membrananyň yrgyldysynyň deňlemesini hem almak bolýar.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = f(x, t)$$

Ol bolsa material nokatlaryň ulgamynyň hereketleriniň özara mümkin bolan, ýagny özara bilelikde baglanşykly hakyky hereketi ýerine ýetirýändigini tassyklaýar we stasionar bahany berýän prinsip bolup (ýagny, degişli argumentleriň bahasy, netijede bolsa funksiýanyň wariasiýasy nula deň).

§11. Göni çyzykly Steržiniň yrgyldysynyň deňlemesi.

Goý OX oky Steržiniň okunyň ugry bilen gabat gelýän bolsun, goý ol asudalyk ýagdaýynda bolsun. Haçan durnukly ýagdaýyndan üýtgäninde u (x,z) funksiýa t wagta görä x-görä funksiýa bolar. L-uzynlykda bolan Steržiniň kinetiki energiýasy

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l pu^2 dx$$

Biz Steržini dartylmaýan diýip hasap edýäris. Maýyşgak Steržiniň potensial energiýasy, haçan egriligiň hemişeliginde, onuň inedördüline proporsional bolanda onda Steržiniň potensial energiýasynyň du differensial deňlemesi

$$du = \frac{1}{2}k\left\{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}^2$$

Onda bütin Steržiniň potensial energiýasy, egriligiň oky umuman aýdanda üýgeýan bolsa, onda ol aşakdaky görnüşe eýedir.

$$u = \frac{1}{2}\int_0^l\left\{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right]^{3/2}}\right\}dx$$

Eger biz Steržiniň durnuklylykdan onuň üýtgemesi örän kiçi diýip hasap etsek, onuň üýtgemesi örän kiçi diýip hasap etsek,

§3. Lagranžyň köpeldiji usuly

Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň esasy meselesiniň görnüşi berlen bolsun:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}) & (2) \\ x_j \geq 0 \; (j = 1, n) & (3) \end{cases}$$

Bu meseläniň çözüwini kesgitlemek üçin täze näbelliler girizeliň: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Girizilen näbellilere Lagranžyň köpeldijileri diýilýär, onda ol näbellileri köpeldip, alynan funksiýa bolsa Lagranžyň funksiýasy diýilýär.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot [b_i - g_i(x_i, x_2, ..., x_n)] \quad (4)$$

Egerde biz Lagranžyň funksiýasynda degişlilikde hususy önümleri kesgitlesek onda biz (n+m) sany deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 & (5) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)] = 0 & (6) \end{cases}$$

Emele gelen (n+m) näbellilerden durian islendik sistemanyň (5-6) çözülişini kesgitlesek, onda f(x) funksiýanyň $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ çözülişi Lagranžyň usuly bilen optimal çözüwi bolýar. Lagranžyň köpeldijisiniň usuly bu optimal çözüwi bolýar. L köpeldijisiniň usuly bilen ekstremal nokatlary kesgitlemek aşakdaky punktlardan durýar.

1) Lagranžyň funksiýasyny düzmeli;

Emma $\varphi_i(x)$-iň kiçelmesi (3) şertleriň sygyşmazlygyna getirmeýär. Şeýlelikde, biz x^* nokada minimum alynýandygyna garşy geldik.

Teorema 3. Eger (2-4) meseläniň x^* lokal minimum nokadynda $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}, i \in \{1,\dots,k\} \cup I(x^*) \equiv R(x^*)$ wektorlar ulgamy çyzykly bagly däl bolsa, onda şeýle gatnaşyk adalatly:

$$\nabla\varphi_0(x^*) + \sum_{i\in R(x^*)} \lambda_i \nabla\varphi_i(x^*) = 0, \qquad \lambda_i \geq 0, i \in I(x^*)$$

Deňsizlikler görnüşli çäklendirmeleriň ýagdaýynda „Teorema 3“ aňsat umumylaşdyrylýar.

Teoreme 4. $\lambda_0^* = 1, i < 0$ $\varphi_i(x^*) < 0$ bolanda $\lambda_i^* = 0$; $i < 0, \varphi_i(x^*) = 0$ bolanda $\lambda_i^* = 0$ bolan kesgitli $\lambda^* = \{\lambda_i^*\}_{i=-m}^{k}$ üçin (8) deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan x^* nokadyň (2-4) lokal minimum nokady bolmagy üçin $L(x,\lambda^*) = \sum \lambda_i^*(\varphi_i(x))$

Lagranž funksiýanyň gessiýany x^* nokada položitel kesgitlenen matrisa bolmagy ýeterlik. Güberçek programmirlemäniň meselesiniň ýagdaýy üçin minimumyň ýeterli we zerur şertleri hakyndaky subut eden teoremalarymyz indiki paragrafda subut ediljek Kun-Takker teoremada has içgin seredilýär.

onda $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ maýdalawjydaky agzany göz öňüne tutmasak hem bolýar, onda

$$u = \frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx$$

Onda Ostrogradskiý- Gamiltonyň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylyp biliner

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\frac{1}{2}\rho u_z'^2 - \frac{1}{2}k u_{xx}''^2\right] dxdt$$

Haçan maýyşgak steržn erkin yrgyldylar ýagdaýynda bolanda, biz aşakdaky hereketiň deňlemesini alarys.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_z'\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k u_{xx}''\right) = 0$$

Eger steržen ýönekeý bolsa onda ρ we k hemişelik (const) onda sterženiň yrgyldysynyň deňlemesi aşakdaky görnüşde ýazylyp biliner.

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

$f(x,z)$ -daşgy güç tasiri.

Stasionar hereketiň prinsipini ulanyp bolmagy mümkin meýdanyň deňlemesini almakda biz skalýar, wektor, tenzor meýdanlara seredeliň.

$$W = W(x,y,z,t,)$$

Bu ýagdaýda onuň integraly $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ görnüşde bolar.

Bu ýagdaýda umuman 4- kratny (gaz) integrala x,y,z we wagta görä z giňişligiň kordinatalarynda haýsy hem bolsa bir L funksiýa Lagranžyň funksiýasynyň dykyzlygy ýa-da Lagranžýan.
Umuman Lagranžýan W .

$$\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y},\frac{\partial W}{\partial z},\frac{\partial W}{\partial t}$$ funksiýa bolýar.

$$L = L(W,\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y},\frac{\partial W}{\partial z},\frac{\partial W}{\partial t})$$

onda stasionar hereket aşakdaky görnüşe eýedir:

$$\iiint_D L\left(W,\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y},\frac{\partial W}{\partial z},\frac{\partial W}{\partial t}\right)dxdydzdt$$

Stasionar hereketiň prinsipiniň esasynda meýdanyň deňlemesi funksional üçin Ostrogradskiniň deňlemesi bolýar:

$$L_W-\frac{\partial}{\partial x}\left[L_{p_1}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[L_{p_2}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[L_{p_3}\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[L_{p_4}\right]=0$$

nirede, $p_1=\frac{\partial w}{\partial x}$, $p_2=\frac{\partial w}{\partial y}$, $p_3=\frac{\partial w}{\partial z}$, $p_4=\frac{\partial w}{\partial t}$

$$y=(y_{-m},\dots,y_{-1});\lambda=(\lambda_{-m},\dots,\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k).$$
$$L(x,y,\lambda)=\sum_{i=-m}^{-1}\lambda_i[\varphi_i(x)+y_i^2]+\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\varphi_i(x).$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\sum_{i=-m}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=0,\ j=1,\dots,n. \qquad (8)$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_i}=2\lambda_i y_i=0, i=-m,\dots,-1.$$

Hemme i üçin, $-m<=i<=-1$, ýa-da $y_i=0$ ýa-da $\lambda_i=0$. $y_i=0$ bolýan i indeksleriň $I(x)$ köplügine garaly, ýagny $i\in I(x)$ bolanda x nokada $\varphi_i(x)=0$. (5-7) mesele üçin minimumyň zerur şertleri aşakdaky mesele üçin minimumyň zerur şertleri bilen deň geler : $i\in\{1,\dots,k\}\cup I(x^*)$ üçin $\varphi_i(x)=0$ çäklendirmede $min\,\varphi_0(x)$. Goý, x^* lokal minimumyň nokady bolsun. Eger $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}, i\in\{1,\dots,k\}\cup I(x^*)$ wektorlaryň ulgamy çyzykly bagly däl bolsa, onda $\lambda_0=1$ bolanda $i\in I(x^*)$ üçin otrisatel däl λ_i - leri almalydygyny görkezeliň. Hakykatdan hem, goý $\bar{i}\in I(x^*)$ üçin $\lambda_{\bar{i}}<0$,` bolsun $\{\nabla\varphi(x^*)\}$ ortogonal bolan we şeýle bir $(\nabla\varphi_{\bar{i}},\eta)<0$ üçin η ugry saýlap alalyň, bu ýerde i-$\bar{i}$ - den başga $\{1,\dots,k\}\cup I(x^*)$ hemme bahalary kabul edýär. Onda şu ugur boýunça süşmede $\varphi_0(x)$ we şol bir wagtda $\varphi_{\bar{i}}(x)$ kiçelýär. Dogrudanda

$$(\nabla L(x^*),\eta)=\sum_{i\in\{1,\dots k\}\cup(I(x^*)/\bar{i})}\lambda_i(\nabla\varphi_i(x^*),\eta)+(\nabla\varphi_0(x^*),\eta)+$$
$$+\lambda_{\bar{i}}(\Delta\varphi_{\bar{i}}(x^*),\eta)=(\nabla\varphi_0(x^*),\eta)+\lambda_{\bar{i}}(\nabla\varphi_{\bar{i}}(x^*),\eta)=0$$

we $\lambda_i<0$ sebäpli $(\Delta\varphi_0(x^*),\eta)<0$.

$$\varphi_0 = (x^* + \eta) = L(x^* + \eta, \lambda^*) = \varphi_0(x^*) + (\nabla\varphi_0(x^*) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^* \nabla\varphi_i(x^*), \eta) + \frac{1}{2}(H_{L(x,\lambda)}(x^*)\eta, \eta) + o(\|\eta\|^2). \quad \nabla L(x^*) = 0,$$

$$(H_{L(x,\lambda^*)}(x^*)$$

položitel kesgitlenen matrisa bolany sebäpli,

$$\varphi_0(x^* + \eta) - \varphi_0(x^*) \ge \frac{1}{2} m\|\eta\|^2 + 0(\|\eta\|^2)$$

bu ýerde $m>0$ $(H_{L(x,\lambda^*)}(x^*)$ matrisanyň minimal hususy sany. Bu ýerden teoremanyň subudy gelip çykýar. Indi käbir çäklendirmeleriň deňsizlikler görnüşinde berilýän ýagdaýa geçeliň.

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k; \tag{2}$$

$$\varphi_i(x) \le 0, i = -m, \ldots, -1 \tag{3}$$

çäklendirmelerde

$$\min \ \varphi_0(x) \tag{4}$$

tapmaly. Täze $y_{-m}, \ldots, y_{-1}$ üýtgeýän ululyklary girizýäris we (19-21) meseläni şeýle ýazýarys:

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1, \ldots, k; \tag{5}$$

$$\varphi_i(x) + y_i^2 = 0, i = -m, \ldots, -1 \tag{6}$$

çäklendirmede:

$$\min \varphi_0(x) \tag{7}$$

tapmaly. Lagranž umumylaşdyrylan düzgünine laýyklykda $L(x,y,\lambda)$ Lagranž funksiýasyny we (1) görnüşli deňlemeleri ýazarys. Bu ýerde:

I bapa degişli meseleler

1. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

2. Funksionaly ekstremuma derňemeli

$$\upsilon[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy')dx; \qquad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1$$

3. Funksionaly ekstremuma derňemeli

$$\upsilon[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')dx; \qquad y(0) = 1; \quad y(1) = 2$$

4. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')dx;$$

5. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2))dx;$$

6. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y')dx;$$

7. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx;$$

8. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2-2y\sin x)dx;$$

9. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)dx;$$

10. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y'''^2)dx;$$

11. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)dx;$$

12. Funksional üçin Ostrogradskiniň deňlemesini ýazmaly

$$\upsilon[z(x,y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

13. Funksional üçin Ostrogradskiniň deňlemesini ýazmaly

$$\upsilon[u(x,y,z)]=\iiint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right]dxdydz.$$

14. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}dx.$$

biz $\varphi_\upsilon(x)$, $\upsilon=0,1,...,k$ funksiýalaryň 2 gezek üznüksiz differensirlenmegini we aşakdaky kesgitleýjiniň noldan tapawutly bolmagyny talap etmeli:

$$\begin{array}{l}
n\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x^*(h),\lambda(h))\ldots\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_n}(x^*(h),\lambda(h)) \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^*(h))\ldots\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(x^*(h))\\
::\\
\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n\partial x_1}(x^*(h),\lambda(h))\ldots\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2_n}(x^*(h),\lambda(h)) \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x^*(h))\ldots\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(x^*(h))
\end{cases}\\
k\begin{cases}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^*(h))\ldots\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x^*(h))\\
::::::::::::::::::::::::::::::::::::::\\
\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(x^*(h))\ldots\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}(x^*(h))
\end{cases}
\end{array}$$

$n\times n$ ölçegli matrisanyň merkezi blogy x-e bagly bolan funksiýa görnüşinde seredilýän $L(x,\lambda)$ Lagranž funksiýanyň gessiýany bilen laýyk gelýär. Bu gessiýan minimumyň ýeterlik nyşanlarynda esasy rol oýnaýar. Indiki teorema adalatly:

Teorema 2. (*Şertli lokal minimumyň ýeterlik şerti*). *Kesgitli* $\{\lambda^*{}_i\}_{i=1}^k=\lambda^*$ *bahalarynda we 2 gezek üznüksiz differensirlenýän* $f^\upsilon(x)$ *funksiýalaryň* ($\upsilon=0,1,...,k$) *bahalarynda (1) deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan* x^* *nokadyň lokal minimumyň nokady bolmagy üçin* $L_{\lambda^*}(x)=L(x,\lambda^*)$ *funksiýanyň* x^* *nokatdaky gessiýanynyň položitel kesgitlenen matrisa bolmagy ýeterlikdir.*

Subudy: M_0 köplükde $\varphi_0(x)=L(x,\lambda)$ we hususy ýagdaýda $\varphi_0(x)=L(x,\lambda^*)$ deňlik adalatly. x^* nokadyň etrabynda $L(x,\lambda^*)$ funksiýany 2-nji tertipli kiçiler takyklykda dagydaly. Goý, $x^*+\eta\in M_0$ bolsun. Alarys:

güman edeliň. Goý, $F(h)$ – $\check{Z}_h$ meseläniň minimum nokadynda funksiýanyň bahasy bolsun. Onda

$$F(h) = \varphi_0(x^*(h)) + \lambda_1(h)\left[\varphi_1(x^*(h)) + h\right] + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i(h)\varphi_i(x^*(h));$$

$$\frac{dF}{dh}(h_0) = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_j}(x^*(h)) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \tfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x^*(h_0))\right]\frac{dx_j^*(h_0)}{dh} +$$

$$+\frac{d\lambda_1(h_0)}{dh}[\varphi_1(x^*(h_0)) + h] + \lambda_1(h_0) + \sum_{j=2}^{k}\frac{d\lambda_j(h_0)}{dh}\varphi_j(x^*(h_0)) = \lambda_1(h_0)$$

bu ýerde h_0 – käbir 0 etrapda erkin nokat. Şeýlelikde $\frac{dF}{dh}(0) = \lambda_1(0) = \lambda_1$. Ýokarda getirilenlerden biz indiki netijäni çykaryp bileris. Eger $\varphi_i(x) - h_i, \quad i = 1,\ldots,k$ çäklendirmelerde $\min\, \varphi_0(x)$ meseläniň funksiýasynyň optimal bahasy deňlikleriň ($h=\{h_1,\ldots,h_k\}$ wektoryň) sag böleginden alnan $F(h_1,\ldots,h_k)$ differensirlenýän funksiýa bolsa onda bu funksiýanyň $\hat{h} = \{\hat{h}_1,\ldots,\hat{h}_k\}$ nokatdaky gradiýenti Lagranž köpeldijileriň $\{\lambda_1(h),\ldots,\lambda_k(h)\}$ wektory bilen deň gelýär. Haýsy ýagdaýda teoremanyň şertleri ýerine ýetirilýär?

$\{\lambda_1(h),\ldots,\lambda_k(h)\}$ we $x^*(h)$ baglylykda – aşakdaky deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan anyk däl funksiýalardyr:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}(x) = 0;\ j = 1,\ldots,n. \qquad (1)$$
$$\varphi_i(x) + h_i = 0;\ i = 1,\ldots,k.$$

Anyk däl funksiýalar baradaky teorema esasynda berlen nokada anyk däl funksiýa boýunça önümleriň bar bolmagy üçin deňlemeleriň çep böleginiň hemme üýtgeýän ululyklary boýunça üznüksiz differensirlenmegi we baglanyşdyrýan üýtgeýän ululuklary boýunça ýakobiýan noldan tapawutly bolmagy zerur. Şeýlelik bilen, (1) – iň formal differensirlenme mümkinçiligi üçin

15. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + y'^2 + 2ye^x)dx.$$

16. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 - y'^2 - 2y\sin x)dx.$$

17. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y^2 + y'^2 + \frac{2y}{chx})dx.$$

18. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(x^2y^2 + 2y^2 + 2xy)dx.$$

19. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y\sin x)dx.$$

20. Funksionalyň ekstremalyny tapmaly

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y'''^2 + y^2 - 2yx3)dx.$$

II Bap. Gyra nokatlary hereket edýän wariasion meseleler

§1. Wariasion hasaplamada gyra nokatlarynyň süýşmeginde emele gelýän ýönekeý meselesi

Funksionalyň umumylaşdyrlan meselesiniň wariasiýasy. Gyra nokatlarynyň süýşmeginden emele gelen wariasion meselede Eýleriň deňlemesi:Transwersallyk şerti.

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx$$

(x_0,y_0), (x_1,y_1) – berilen nokatlar.
Eger nokatlaryň birisi ýa-da ikisi hem süşýän bolsa, onda seredilýän egriler klasy giňelýär, ýagny umumy nokatlary bar bolanlardan başga hem garyşyk gyra nokatlaty bar bolan egrileri hem almak bolýar.Şoňa görä eger haýsy hem bolsa, bir egride gyra nokatlary süýşýän meselede $y=y(x)$ ekstremuma ýetýän bolsa, onda umumy gyra nokatlary bar bolan meselä görä ekstremuma aňry ýany bilen ýetýändir(ýagny dar klasa görä). Ýagny Eýleriň deňlemesiniň çözlüşi bolmaly,

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

Diýmek ekstremuma eye bolýan $y=y(x)$ egriler gyra nokatlary süýşýän meseläniň ekstremaly bolmaly. Belli bolşy ýaly Eýleriň deňlemesiniň umumy çözüwi özünde iki sany azat hemişelikleri saklaýar, olary kesgitlemeklik üçin bolsa hökman iki sany şerti gerek bolýar. Hereket etmeýän gyra nokatly mesele üçin ol şertler aşakdaky görnüşde seredilýär $y(x_0)=y_0$,$y(x_1)=y_1$ gyra notatlary hereket edýän meselede bir ýa-da iki şertler göz öňünde tutulmaýar (ýagny olar ýok). Eýleriň deňlemesiniň umumy

§2. Çyzykly däl programmirlemede Lagranjyň köpeldijileriniň umumylaşdyrylan düzgüni

Teorema1. Eger $\varphi_0(x)$ funksiýanyň $\varphi_i(x) = 0$ giperüstüň kesişmesinde x^* minimum (maksimum) nokady bolsa, E_n-de $\varphi_v(x)$ üznüksiz differensirlenýän funksiýalar, $v=0,1,\ldots,k$, onda

$$\sum_{v=0}^{k} \lambda_v \nabla \varphi_v(x^*) = 0$$

kanagatlandyrýan ählisi nola deň bolmadyk $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sanlar bardyr. Eger $x_0 \neq 0$ bolsa onda $\overline{\lambda_i} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_0}$ ululyklara meseläniň Lagranž köpeldijileri diýilýär.

$$L(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x)$$

funksiýa Lagranž funksiýasy diýilýär. M_0 ýaýlasynda Lagranž funksiýanyň bahasy $\varphi_0(x)$-iň bahasy bilen deň gelýär. Z_n meseläniň maşgalasyna garaly:

$$\min \varphi_0(x),$$
$$\varphi_1(x) + h = 0,$$
$$\varphi_i(x) = 0; i = 2, \ldots, k,$$

Z_0 mesele bilen x deň gelýär. Z_0 mesele Lagranžyň köpeldijilerine eýe diýip, şeýle hem $\lambda(h)$ Lagranž köpeldijileri we z_n meseläniň $x^*(h)$ çözüwi käbir O etrapda h boýunça differensirlenýän diýip seredeli. Bu funksiýa üznüksiz differensirlenýän we $t=0$ bolanda minimuma öwrülýär. Minimumyň zerur şertinde (6)-y kanagatlandyrýan erkin

$$\left\{\frac{\partial x_j}{\partial t_l}\right\}$$

üçin

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t_l}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j}(x^*)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t_l}(0)=0, l=1,...,n-k,$$

gelip çykýar. Bu ýerden:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}(x^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x^*), j=1,...,n$$

ýa-da wektor formulada:

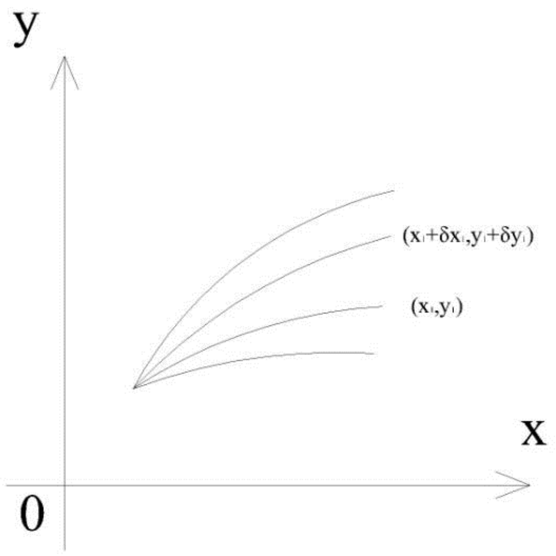
$$\nabla\varphi_0(x^*)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla\varphi_i(x^*) \tag{7}$$

kanagatlandyrýan $\lambda_1,...,\lambda_k$ tapyljakdygy gelip çykýar. Bu Logranž köpeldijileriniň belli düzgünidir. Ol $\{\nabla\varphi_i(x^*)\}_{i=1}^{k}$ wektorlaryň çyzykly bagly dälligi esasynda subut edilen. Eger şeýle bolmasa, onda

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla\varphi_i(x^*)=0 \tag{8}$$

kanagatlandyrýan ählisi nola deň bolmadyk $\lambda_1,...,\lambda_k$ bardyr.

çözlüşinde ol ýetmeýän şertler, ýagny azat hemişelikleri ekstremumyň esasy hökmany şertiniň üsti bilen wariasiýanyň nula deň bolmak $\delta\vartheta=0$ şerti arkaly kesgitlemek bolar. Hereket edýän gyra meselesinde, ekstremuma, Eýleriň deňlemesiniň $y=y(x, c_1, c_2)$ çözüwinde ýetýär. Onda fuksionalyň bahasyny geljekde fuksiýanyň bahasy hökminde bu egriler köpligindeseretmek bolýar.



1-nji surat

Bu ýagdaýda $\vartheta[y(x),c_1,c_2]$ funksional c_1, c_2 perimetrli funksiýa öwrülýär, funksionalyň wariasiýasy bu funksiýanyň differensialy bilen gabat (deň) gelýär, x_0 we x_1 integrasiýasynyň (jemlemesiniň) predellerinde ýönekeýlik üçin gyra nokatlaryň birisi meselem (x_0,y_0) berkidilen, (x_1,y_1) nokat bolsa süýşýän, $(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ - nokada süýşüp geçipdir,ya-da hemişe bolşy ýaly wariasion hasaplamada $(x_1+\delta x_1, y+\delta y_1)$. Goý $y=y(x)$ we $y=y(x)+\delta y$ ýakyn egriler diýip hasap edeliň, eger wariasiýanyň moduly δy we δy_1 kiçi we artdyrmanyň moduly δx_1 we δy_1 hem kiçi (δx_1 we δy_1 artdyrma hemişe bolşy ýaly

x_1, y_1-leriň predel bahasynyň wariasiýasy diýilýär). Ekstremallar (x_0,y_0) nokatdan geçýär we dessäniň ekstremalyny $y= y(x, c_1)$ emele getirýär. $\vartheta[y(x), c_1]$ - funksional bu dessäniň egrilerinde c_1 we x_1 görä funksiýa öwrülýär. $\vartheta[y(x), c_1]$ funksionalyň wariasiýasyny hasaplalyň $y=y(x)$- dessäniň ekstremalynda, haçan (x_1,y_1) gyra nokat süýşip $(x_1+\delta x_1, y+\delta y_1)$ nokada geçende. Sebäbi ϑ funksional egriler dessesinde (x_1,y_1) görä funksiýa öwrülýär, onuň wariasiýasy bolsa differensial funksiýa bilen gabat gelýär. Biz artdyrmadan $\Delta\vartheta$ aýratynlaşdyryp baş çyzykly δx_1 we δy_1 bölege görä diýip hasap edeliň:

$$\Delta\vartheta = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx \quad \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx =$$
$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx + \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx$$
$$-\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \tag{1}$$

Sag tarapynyň, ikinji bölegine orta baha teoremasyny ulanypözgerdeliň:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx = F/_{x-x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1, \quad 0<\theta<1$$

üznüksizligiň güýjine görä F-üçin alarys:

$$F/_{x=x_1+\theta\delta x_1} - F(x,y,y')_{x=x_1} + \varepsilon_1$$

nirede $\varepsilon \to 0$, haçan $\delta x_1 \to 0$.Onda

tapmaly. M_0 bilen (5) kanagatlandyrýan nokatlaryň toplumyny belgileýäris. Goý, $\varphi_\nu(x), 0\le\nu\le k$ üznüksiz differensirlenýän x^* -minimum nokady , $k<=n$,

$$\left\| \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x^*) \right\|_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,k}$$

matrisanyň rangy k deň bolsun. Onda M_0 köpgörnüşlilik x^* nokadyň etrabynda anyk däl funksiýalar hakyndaky teorema laýyklykda aşakdaky görnüşde bolup biler.

$$x_J = x_J(t_1,\dots,t_{n-k}),$$

bu ýerde

$$x_j(t_1,\dots,t_{n-k})$$

üznüksiz differensirlenýän funksiýalar we

$$x_J^* = x_J(0,\dots,0), \quad (j=1,\dots,n)$$

bolýandygyny hasap etmek bolar.

$$x_J = x_J(t_1,\dots,t_{n-k})$$

üçin aňlatmany (5)-de goýaly.

$$\Phi_i(t_1,\dots,t_{n-k}) = \varphi_i(x(t_1,\dots,t_{n-k})) \equiv 0;$$
$$x(t_1,\dots,t_{n-k}) = \{x_1(t_1,\dots,t_{n-k}),\dots,x_n(t_1,\dots,t_{n-k})\}$$

bu ýerden

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t_l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}(x^*)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t_l}(0) = 0, \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,k; \\ l=1,\dots,n-k. \end{matrix} \tag{6}$$

soňra

$$\Phi_0(t_1,\dots,t_{n-k}) \equiv \varphi_0(x(t_1,\dots,t_{n-k}))$$

VII Bap. Lagranjyň köpeldijileri we kwadrat rogrammirleme meselesi

§1. Lagranjyň köpeldijileriniň häsiýetleri

Goý, E_n – n ölçegli ýewklid giňişligi,

$$\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1,...,x_n), i \in j - M \subseteq E_n$$

bölek köplükde kesgitlenen üznüksiz funksiýalar bolsun. Adatça biz $\varphi_i(x)$ endiganlygyň belli bir şertlerini kanagatlandyrýar, meselem M köplügiň hemme içki nokatlarynda üznüksiz differensirlenýär diýip güman ederis. Bu paragrafda çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesini aşakdaky görnüşde ýazarys:

$$\varphi_i(x) \le 0; i = -m,...,-1 \qquad (1)$$

$$\varphi_i(x) = 0; i = 1,...,k \qquad (2)$$

şertlerde

$$\min_{x \in M} \varphi_0(x) \qquad (3)$$

tapmaly.

$$M \equiv E_n, m = 0$$

ýagdaýa seredeliň. Ýönekeý meseläni alarys:

$$\varphi_i(x) = 0, i = 1,...,k \qquad (4)$$

$$\min \varphi_0(x) \qquad (5)$$

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y' + \delta y')dx = F(x,y,y')/_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon \delta x_1$$

(1) deňlemäniň sag tarapyndaky birinji bölegni Teýloryň formulasy boýunça integral aşagyndaky funksiýany gargydyp ýönekeýleşdirip alarys:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y' + \delta y') - F(x,y,y')]dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x,y,y')dy + F_{y'}(x,y,y')\delta y'] + \text{ R1}$$

nirede R_1 – tükeniksiz kiçi ululyk , örän ýokary tertipli, δy we $\delta y'$ bilen deňeşdirlende öz gezeginde çyzykly bölegi:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y dy + F_{y'}\delta y')dx$$

Bölekleýin integirlemäniň esasynda, integral aşagyndaky funksiýanyň ikinji bölegi, aşakdaky görnüşde ýazlyp bilner:

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx$$

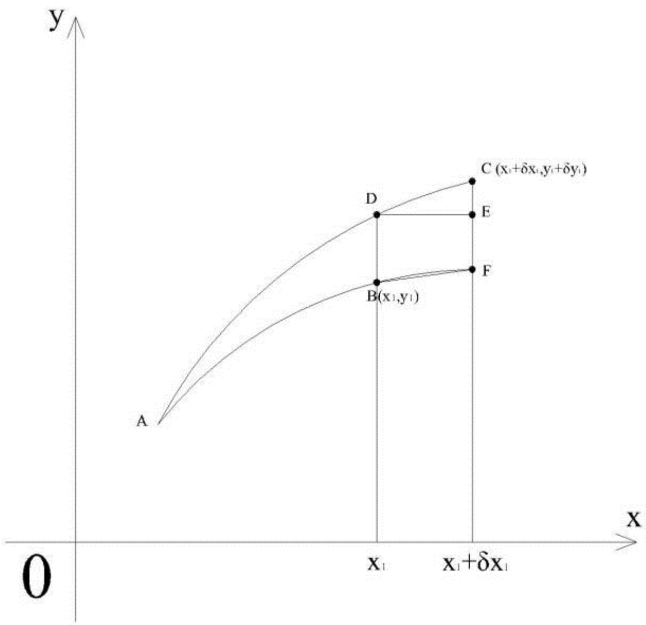
Edil üýtgemeýän nokatlaryňky ýaly Eýleriň formulasy, funksionalyň bahasy diňe ekstremalda alynýar, ýagny

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$$

Sebäbi (x_0,y_0)ahyrky nokatlar berkidilen, onda $\delta y/_{x=x_0} = 0$

Diýmek,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')dx - [F_{y'} \delta y]_{x=x_1}$$



2-nji surat

Ýöne $\delta y/_{x=x_1}$ deň däldir δy_1, sebäbi δy_1 - y_1 görä artdyrma gyra nokatlarynyň süýşmeginde onuň ýagdaýy $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ bolýar, a $\delta y/_{x=x_1}$ bolsa ordinatanyň x_1 nokatda süýşmesi bolýar haçan ekstremala geçilende. (x_0,y_0) we (x_1,y_1) nokatlardan geçýän ekstremallary (x_0,y_0) we $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ nokatdan geçýän ekstremallara geçýär.Çyzgydan görnüşi ýaly $BD - \delta y/_{x=x_1}$; $BC = \delta y_1$; $EC \approx y'(x_1)\delta x_1$; $BD=FC-EC$ ýa-da $\delta y/_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$ netijede

z_1 daýanç nokada seredeliň $\int(O(z_1)) \le k$ onda induksiýanyň mümkinçiligi bilen:

$$z_1 = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i z^i, \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1, \qquad \beta_i \ge 0$$

$z^{(i)}$ –grany nokatlar. w_1

$$x = \sum_{i=0}^{k+1} \beta_i^1 z^i, \beta_i^1 \ge 0, \sum_{i=0}^{k+1} = 1$$

teorema subut edildi.

§10. Çyzykly däl programmirlemede güberçek köplükler teoremasy

Teorema1: *x nokadyň w köplügiň ahyrky nokady bolmaklygy üçin* $x\in w$*, hökmany we ýeterlik şerti, x – nokat aşakdaky görnüşde ýazmak bolmaýar.*

$$x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2:\ x_1,x_2\in w;\ \ x_1,x_x\neq x;$$
$$0<\alpha<1; \qquad (1)$$

Subudy:
Goý *x (1)* görnüşde ýazmak bolýan bolsun. Onda onuň daýanjy *[x₁,x₂]* özünde ol kesimi saklaýar, onda ol bolsa *x* nokadyň ahyrky nokat däldigini görkezýär. Hökmany subudy ýerine ýetdi. Ýeterlik bolsa *w*-niň induksiýa möçberi bilen subut edilýär. Möçberiň *x* nokatdaky daýanjy iň bolmanda $\rho(w)$ haçan $\rho(w)\geq 1$ birlik kiçidir. Eger *x*-içki nokat bolsa onda ony *(1)* görnüşde ýazmak bolýar, eger *x* – gyraky bolsa onda *(1)*-de ýazmak bolmaýar.

Teorema2: *Güberçek ýapyk kesgitlenen w köplükde* $\forall\ x\in w$ *güberçek kombinasiýasy görnüşde* $\rho(w)+1$ *gezekden köp bolmadyk w köplügiň ahyrky nokady görnüsde ýazmak bolýar.*

Subudy: Induksiýanyň üsti bilen geçirmek bolýar. $\rho(w)=1$ teorema üçin aýdyň görünýär. Hakykatdan

$$\rho(w)=k+1$$

subut edip bolýar. Goý $x\in w$, z^0 gyraky nokat *w*. eger $x\neq z^0$, onda z^0 –dan *x* –üstünden şöhle geçirsek, onda ol *w* –nyň araçägini *z*, nokatda kesip geçýär. *X* nokat z^0, z_1 nokadyň arasyndan geçýär, ol bolsa aşakdaky görnüşde ýazylýar:

$$x=\alpha z^0+(1-\alpha)z_1 \quad 0\leq\alpha<1$$

$$\int_{x_0}^{x_1+\Delta x_1} F dx \approx F/_{x=x_1}\delta x_1$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]dx \approx$$
$$\approx F_{y'}/_{x=x_1}\delta y_1 - y'(x_1)dx_1$$

Takmyn deňlemeler (adalatly), δx_1 we δy_1 artdyrmalara görä, birinji tertipden ýokary takyklykda seredilýän agzalara görä

$$\delta\vartheta = F/_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}/_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 =$$

$$= (F-y'F_{y'})/_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}/_{x=x_1}\delta y_1$$

ýa-da

$$d\bar{\vartheta}(x_1,y_1) = (F-y'F_{y'})/_{x=x_1}dx_1 + F_{y'}/_{x=x_1}dy_1$$

nirede $\bar{\vartheta}(x_1,y_1)$–funksýa, *y= y(x, c₁)* ekstremalda ϑ funksionala öwrülýär, $dx_1=\Delta x_1$, $dy_1=\Delta y_1=\delta y_1$ – gyra nokatdaky koordinatanyň artdyrmasy. Ekstremumyň esasy hökmany şertine $\delta\vartheta=0$ görä aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$(F-y'F_{y'})/_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}/_{x=x_1}\delta y_1 = 0 \qquad (2)$$

Eger δx_1 we δy_1 wariasiýalar öz ara baglanşyksyz bolsa, onda

$$(F-y'F_{y'})/_{x=x_1}-0 \quad \text{we} \quad F_{y'}/_{x=x_0}=0$$

Köplenç ýagdaýda olar öz ara baglanşykly görnüşde seredilýär. Mysal üçin, (x_1,y_1) sag tarapdaky gyra nokat haýsy hem bolsa bir $y_1=\varphi(x)$ egri boýunça süýşýän bolsun. Onda $\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1$ we (2) deňlemä görä

$\left[F + (\varphi' + y')F_{y'}\right]dx_1 = 0$ görnüşe eýe bolýar, ýa-da δx_1 erkin üýtgeýänligi üçin ol $[F + (\varphi' + y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$ görnüşe eýe bolar.

Bu şert φ' we y' burç koeffisentleriniň arasynda gyra nokadynda arabaglanşyk gurýar. Oňa Transwersal şerti diýilýär. Traswersallyk şerti bilen $y_1 = \varphi'(x_1)$ şerti bilen bilelikde *y=y(x, c_1)* ekstremallaryň dessesiniň birini ýa-da bir näçesini ekstremuma eýe bolýandygyny kesgitlemäge mümkinçilikler döredýär. Eger gyra nokady *(x_0,y_0)* haýsy hem bolsa bir $y_0 = \psi(x_0)$ egride süýşip bilýän bolsa, onda edil şonuň ýaly *(x_0,y_0)* nokatda Transwersallyk şerti kanagatlandyrylýandygyny biz kesgitleýäris. Ýagny

$$[F + (\varphi' + y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0$$

Teorema3: *Islendik içki x_0 nokat kesgitlenen ýaýlasy M güberçek funksiýa f(x) islendik ugur boýunça önümi bar bolmak η. Bu önüm aşakdaky formula boýunça hasaplanyp bolar.*

$$f'_{\eta}\ (x_0) = \max_{\nabla \in G(x_0)} (\nabla, \eta)$$

Hakyky funksiýa seredeliň.

$$u(t) = f(x_t + \eta t) - f(x_0)$$

Teorema4: *f(x) funksiýa güberçek bolmaklygy üçin E_n hökman we ýeterlik ugur boýunça önüm hemme nokatlarda bar bolsa özem $f'_{\eta}(x + 1t\eta)$ manoton kemelmeýän funksiýa t görä.*

Goý

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

1-njini α_1, *2*-njini α_2 köpeldip alarys.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)[f(\varphi - f(x_0)] = f(x) - f(x_0) \geq$$
$$\geq (\alpha_1 \overline{\nabla}_1 + \alpha_2 \overline{\nabla}_2, x - x_0), \Big| \overline{\nabla}_3 = \alpha_1 \overline{\nabla}_1 + \alpha_2 \overline{\nabla}_2$$

umumylaşdyrylan gradiýent. Bu bolsa *G(x₀)* güberçekdigini aýdyňlaşdyrýar. Teorema subut edildi.

Teorema2: *Güberçek funksiýa M köplügiň hemme içki nokadynda üznüksiz we M köplükde kesgitlenendir*.
Hakykatdan: Goý x_0 nokat *M* köplügiň içki nakady bolsun. *K* ýokary kuba seredeliň x_0 içki nokat. $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{M}$. $\overline{x}$ azat nokat $\in \mu$ ony äsakdaky görnüşde

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1$$

$$\alpha_j \geq 0$$

f(x)–güberçekliginden gelip çykýar

$$f(\overline{x}) \leq \sum_{j=1}^{s} \alpha_j f(y_j) \leq \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \max_{1 \leq j \leq s} f(y_j) = \max_{1 \leq j \leq s} f(y_j)$$

§2. Funksionalyň umumylaşdyrylan meselesiniň wariasiýasy

Eger

$$\upsilon = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx \tag{1}$$

funksionaly ekteruma derňelende haýsydyr bir gyra nokadynyň biri, mysal üçin $B(x_1,y_1,z_1)$ hereket edýän, beýleki $A(x_0,y_0,z_0)$ nokady gozganmaýan bolsa, onda ekstermum Eýleriň deňlemeler ulgamynyň integral egrilerinde bolar.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \qquad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0$$

Hakykatdan hem, eger gyra nokatlary hereket edýän meselede ektremum käbir C –egride bolýan bolsa, onda υ maksimal ýa-da minimal baha eýe bolar.
Belli bolşy ýaly C egri gozganmaýan gyra nokatlary bilen meseläniň zerur bolan ektremum şertini kanagatlandyrýar. Hususy halda C –egri Eýleriň deňlemeler ulgamynyň integral egrisi bolmaly. Eýleriň deňlemeler ulgamynyň umumy çözüwi dört sany erkin hemiýelikleri saklaýar. Gozganmaýan $A(x_0,y_0,z_0)$ –gyra nokadynyň koordinatalaryny anyklap, 2 sany erkin hemişelikleri aýyryp bolýar. Beýleki 2 sany erkin hemişelikleri kesgitlemek üçin ýene-de 2 sany deňleme zerur bolýar, olary $\delta\upsilon = 0$ şertden alarys. Şeýlelikde, υ funksional $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ funksiýa öwrülýär we funksionalyň wariasiýasy bu funksiýanyň differensialyna öwrüler.

$$\Delta\upsilon = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_1} [F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x, y, z, y', z')]dx$$

Birinji integralda orta baha baradaky teoremany we F-funksiýanyň üznüksizliginden ulanarys, ikinji integralda bolsa Teýloryň formulasynyň kömegi bilen esasy çyzykly bölegini belläris. Bu özgertmelerden soň alarys:

$$\delta\upsilon = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y + F_z\delta z + F_{y'}\delta y' + F_{z'}\delta z')dx$$

Bölekler boýunça integrirläp alarys:

$$\delta\upsilon = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1} +$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1}[(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y + (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\delta z']dx$$

υ –nyň bahalary ekstremallarda hasaplanylýar, onda

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0, \quad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \equiv 0$$

Şeýlelikde alarys:

$$\delta\upsilon = F\big|_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1}$$

Şeýle hem alarys:

$\delta y\big|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$ we $\delta z\big|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1)\delta x_1$

Şeýlelikde alarys:

§9. Çyzykly däl programmirlemede güberçek funksiýalaryň häsiýetleri we teoremalary

I-Häsiýet: Eger güberçek köplügiň üstünde kesgitlenen güberçek funksiýa bolsa, onda ol güberçekdir.

Hakykatdan: Goý, $x_1 \in \mu$, $x_2 \in \mu$ onda

$$z_1 = \{f(x_1)x_1\} \in \mu_j, \quad z_2 = \{f(x_2), x_2\} \in \mu_j,$$

μ - kesgitlemesi boýunça μ_j güberçek köplük $\alpha \in [0,1]$, onda

$$\{z_\alpha = (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2), (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2\} + \mu_j$$
$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in \mu$$

onuň güberçekdigini subut edýär.

II-Häsiýet: $\forall$ $x_1, x_2 \in \mu$ $\alpha \in [0,1]$ üçin aşakdaky deňsizlik dogrudyr.

$$(1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \geq f[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2]$$

Teorema1. *f(k) güberçek funksiýanyň G(x_0) umumylaşdyrylan gradiýent köplüginiň, x_0-nokatda boşdäl, kesgitlenen, güberçek we ýapyk islendik içki nokatlarynyň köplügi μ üçin.*

Hakykatdan: $\overline{\nabla}_1, \overline{\nabla}_2$ – umumylaşdyrylan gardiýent x_0 nokatda, onda islendik $x \in M$ üçin

$$f(x) - f(x_0) \geq (\overline{\nabla}_1; x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq (\overline{\nabla}_2; x - x_0)$$

$$\left(a, x-\bar{x}\right)=0, \qquad \left(a \neq 0\right)$$

ýokary tekizlik bar bolup:

$(a, k-\bar{x}) \leq 0$ haçan $x \in w_1$

$(a, x-\bar{x}) \geq 0$ haçan $x \in w_2$.

$$\delta \upsilon = [F - y' F_{y'} - z' F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

Eger δx_1, δy_1, δz_1 wariasiýalar bagly däl bolsalar, onda $\delta \upsilon = 0$ şertden alarys:

$$[F - y' F_{y'} - z' F_{z'}]_{x=x_1} = 0; \qquad F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0 \text{ we } F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0$$

Eger $B(x_1,y_1,z_1)$ gyra nokady käbir $y_1 = \varphi(x_1)$; $z = \psi(x_1)$ egriler boýunça hereket etse, onda $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1$; $\delta z_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$ we $\delta \upsilon = 0$ şertden peýdalanyp alarys:

$$[F - y' F_{y'} - z' F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y_1 + F_{z'}\Big|_{x=x_1} \delta z_1 = 0$$

Aşakdaky görnüýdäki ýerti alarys:

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} \delta x_1 = 0$$

Bu ýerden δx_1-erkinliginden peýdalanyp alarys:

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0$$

Bu bolsa $\upsilon = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$ - funksionaly ekstremuma derňemek baradaky meselede transwersallyk şerti diýen ada eýe bolýar. $y_1 = \varphi(x_1)$; $z = \psi(x_1)$ deňlemelr bilen bilelikde transwersarlyk şerti Eýleriň deňlemeler ulgamynyň umumy çözüwindäki erkin hemişelikleri kesgitlemek üçin goşmaça deňlemelerdir.

Eger $B(x_1,y_1,z_1)$ gyra nokady käbir $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ üst boýunça hereket edýän bolsa, onda $\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi'_{y_1}\delta y_1$, δx_1 we δy_1 wariasiýalar erkindir. Şeýlelikde, $\delta\upsilon=0$ şerti aşakdaky ýaly giňeldilen görnüşe eýe bolar:

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

Aşakdaky şerte özgerer:

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\varphi'_xF_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}\delta y_1=0$$

Bu ýerden δx_1 we δy_1 bagly dälliginden alarys:

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0,\qquad [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0$$

Bu iki şert $z_1=\varphi(x_1,y_1)$ deňlemesi bilen Eýleriň deňlemeler ulgamynyň umumy çözüwindäki iki sany erkin hemişelikleri kesgitlemek üçin mümkinçilik berýär.

Eger $A(x_0,y_0,z_0)$-gyra nokady hereket edýän bolsa, onda bu usuly peýdalanyp meňzeş şertleri alarys.

Eger

$$\upsilon=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,...,y_n,y'_1,y'_2,...,y'_n)dx$$

funksionala seredeliň. Ýokarda getirilen usuly peýdalanyp $B(x_1,y_{11},y_{21},...,y_{n1})$ nokadyň herekt edýän ýagdaýy üçin alarys:

$$\left(F-\sum_{i=1}^{n}y'_iF_{y'_i}\right)\Bigg|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n}F_{y'_i}\Big|_{x=x_1}\delta y_{i1}=0$$

$$\frac{x^{(k)}-x^{(*)}(k)}{\left\|x^{(k)}-x^{*}(k)\right\|},x-x^{*}(k)\le 0,$$

$$\{a_k\}=\left\{\frac{x^{(k)}-x^{(*)}(k)}{\left\|x^{(k)}-x^{*}(k)\right\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$a=\lim_{i\to\infty}\frac{x^{(k)}(i)-x^{*}(k_i)}{\left\|x^{(k_i)}-x^{*}(k_i)\right\|}$$

gözlenýän $(a,x-\bar{x})=0$ daýanç ýokary tekizlik diýip görkezeris.

$$\begin{array}{ll} x\in w & (a,x-\bar{x})\le 0\\ \bar{y}\in w & (a,\bar{y}-\bar{x})>0\\ & (a,x-\bar{x})=0.\end{array}$$

onda

$$((a,\bar{y})-\bar{x})=\lim_{i\to\infty}(a_{k_i},\bar{y}-x^{*}(k_i))\le 0.$$

III–Häsiýet: Goý, w_1 we w_2 iki sany ýapyk kesişmeýän güberçek köplükler, biri kesgitlenen bolsa onda ýokary tekizlik tapylýar

$(a,x)+b=0.$

Şeýle

$(a,x)+b<0$ haçan $x\in w_1$

$(a,x)+b>0$ haçan $x\in w_2$.

IV–Häsiýet: Goý w_1 we w_2 iki sany ýapyk güberçek köplükler bolsun. Goý olaryň umumy içki nokatlary ýok bolsun. Goý w_1 köplügiň içki nokatlarynyň köplügi boş däl bolsun. Onda eger $\bar{x}$ - iki köplügiň hem araçäginde ýatýan nokat bolsa, onda

§8. Çyzykly däl programmirlemede güberçek köplükleriň häsiýetleri

Biz ilki bilen güberçek köplüklere we funksiýalara kesgitleme bereliň, soňra bolsa olaryň häsiýetlerine seredeliň. $w \subseteq E_n$ köplük güberçek diýilip aýdylýar, eger $x \in w$ we $y \in w$ deň

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in w, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

Geometriki, eger iki nokat w köplüge degişli bolsa onda, bitin kesim, şol iki nokady birikdirýän şol köplüge degişlidigini aňladýar. Ýagny bitin kesim şol iki nokady birikdirýän hem şol w köplüge degişlidir.

I–Häsiýet: Goý w – ýapyk güberçek köplük $x_0 \overline{\in} w$ nokat. Onda $(\bar{a}, x) + b = 0$ ýokary tekizlik (giperploskost) tapylyp $\forall x \in w$ üçin $(\bar{a}, x) + b > 0,$ we $(\bar{a}, x) + b < 0.$

Subudy: Goý $x^* \in w$, gysga arasy x_0 bilen ýerleşen. Eger

$$x_0 - x^* = a, \ -(x_0 - x^*, x^*) - c = b$$

$$L(x) - c = (x_0 - x^*, x) - (x_0 - x^*, x^*) - c = b.$$

II-Häsiýet: Güberçek köplügiň (ýapyk) araçäkdäki nokadynyň her biriniň üstünden bolmanda bir daýanç ýokary tekizligi geçirmek bolýar.

Subudy: Goý $\bar{x} \in w$ - araçäk nokady I-nji häsiýete görä $x^{(k)}$-her bir nokada

$$(x^{(k)} - x^*(k), x - x^*(k)) = 0$$

ýokary tekizligi goýmak bolýar. $\forall \ x \in w$ deňsizlik adalatly.

$x^*(k) \in w$ iň ýakyn aralyk $x^{(k)}$ yzygiderlik

§3. Wariasion hasaplamalarda burç nokatly ekstremallar.

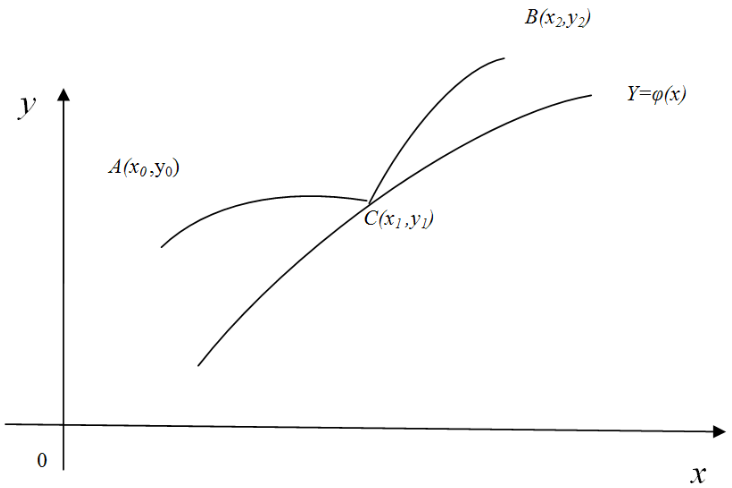
Ýokarda biziň sereden hemme wariasion meselelerimizde $y = y(x)$ gözlenýän funksiýany üznüksiz we üznüksiz önümleri bar funksia diýip hasap edýärdik ýöne bir näçe meselelerde soňky talap edilýän şert hakyky bolmaýar mundan başga hem birnäçe klassiki (nusgawy) Wariasion meseleleriň çözüwi düzgün boýuça ekstremala diňe burç nokatlary bar bolanda eýe bolýar. Şeýle meseleleriň sanyna mysal bolup, döwülme we yzynagaýtarma ekstremal meselesi girýär, bu bolsa degişlilikde ýagtylygyň döwülme we yzynagaýtarma umumylaşdyrylan meselesi bolýar .

Yzynagaýtarma ekstremal meselesi barada berilen $A(x_0, y_0)$ we $B(x_2, y_2)$ nokatlardan geçýän we

$$\vartheta = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

funksionalyň ekstremumyny ýerleşdirýän egrini kesgitlemeli . Ol egri haçanda berilen $y = \varphi(x)$ çyzykdan yzyna gaýtarylandan soň B nokada gabat gelmeli. Hakykatdanam yzyna gaýtarma nokat $C(x_1, y_1)$ –nyň gözlenýän ekstremalyň burç nokady bolmagy mümkin dýip hasap etmek bolar.

Şeýlelikde bu nokatda çep önüm aýdanda $y'(x_1 - 0)$, we sag önüm $y'(x_1 + 0)$, umuman aýdanda dürlidir.



1-nji surat

Şoňa görä $\vartheta[y(x)]$-funksionaly aşakdaky görnüşde ýazmaklyk ýerliklidir.

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

özem $x_0 \le x \le x_1$ we $x_1 \le x \le x_2$ aralyklaryň hasap edilýär, şonuň üçin biz ýokarda getirilen ekstremumynyň esasy hökmany şerti $\delta\vartheta = 0$ aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$\delta u = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx = 0$$

$C(x_1,y_1)$- nokat $y = \varphi(x)$ egri boýunça hereket edip bilýär, onda

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \quad \text{we} \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$$

Wariasiýasyny hasaplasak, onda biz hereket edýan gyra nokadyň meselesiniň şertinde bolup berlen egri boýunça hereket edýär. Ýokarda seredilen netijeleri peýdalanmak bolýar. Seredilen netijeleri peýdalanmak bolýar. AC we CB egrileriň ekstremallygy aýdyňdyr. hakykatdanam bu böleklerde *y=y(x)*

Çyzykly däl ulgam çyzykly bolanda ýol berilýän ýaýlanyň güberçekligi saklanmaýar. Eger-de ýol berilýän ýaýla güberçek däl bolsa, onda çyzykly maksat funksiýasynda hem global lokal optimumlaryň tapawudy bolup biler

Lokal optimum bar bolan ýagdaýynda globaldan tapawutlulykda bir depeden goňşy depä geçmegine esaslanýan simpleks tipli hasaplanyş usulyny ulanmaga mümkinçilik ýok.

Çyzykly däl programmirleme meseleleri üçin (global lokal optimumy tapawutly bolan) köp hasaplanyş usullary lokal ekstremum nokady tapmaga mümkinçilik berýär. Umumy ýagdaýlarda olar global optimum bilen gabat gelip gurmaga mümkinçilik berýär. Bu usul bilen lokal optimumy tapmak praktikada köplenç peýda berýär.

Çyzykly programmirleme teoriýasynda funksiýanyň güberçekligine we oýuklugyna aýratyn gyzyklama bildirýärler. Şeýle kesgitlemeler adalatlydyr.

Goý *f(x)* galtaşýan *X* güberçek köplükde güberçek köplük bolsun. Onda islendik lokal minimum *X* –da global minimum bolýar.

Eger-de *f(x)* galyaşýan güberçek *X* köplükde oýuk funksiýa bolsa, onda *X*-da *f(x)*-yň islendik lokal maksimumy global minimumy bolar.

K nokat $y=\dfrac{3}{5}x$ deňlemeli çyzygyň OO_1 merkezinde we $(x-5)^2+(y-3)^2=36$ töwerekde ýatýar. Sistema geçeliň:

Onda

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=36\\ y=\dfrac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}17x^2-170x-25=0\\ y=\dfrac{3}{5}x\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases}x=5+\dfrac{30}{\sqrt{34}}\\ y=3+\dfrac{18}{\sqrt{34}}\end{cases} \quad ya-da \quad \begin{cases}x=5-\dfrac{30}{\sqrt{34}}\\ y=3-\dfrac{18}{\sqrt{34}}\end{cases} \right)$$

Diýmek $K\left(5+\dfrac{30}{\sqrt{34}}\ ;\ 3+\dfrac{18}{\sqrt{34}}\right)$

Şeýlelikde $Z_{\min}=43-12\cdot\sqrt{0{,}5}$; $Z_{\max}=40+12\sqrt{34}$

F nokat lokal maksimum bolýar, çünki z funksiýanyň bahasy goňşy B we C depelerdäki bahalaryndan uludyr. Onda C lokal minimum nokat bolýar.

Seredilen mesele çyzykly däl meseleleriň hatarynyň aýratynlyklary çyzykly meselelere garanyňda kyndygyna göz ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Eger-de çäkli meseleler ulgamy çyzykly, maksat funksiýasy çyzykly däl bolsa, onda maksat funksiýanyň ýol berilýän planyň gyrky nokatlarynda optimuma ýetmegi zerur däl. a eger ol ekstremuma çäk nokadynda ýetýän bolsa, onda bu nokadyň gyraky bolmagy hökman däl. Şeýlelikde ýol berilýän çözüwler köplüginiň depeleri bilen çäklenen şeýle tipli meseleleri çözmek üçin hasaplanyş usuly bolup bilmez. Şeýle tipli meseleleriň käbirinde lokal optimum global bilen gabat gelmeýär.

Eýleriň deňlemesiniň çözülişi bolýar, sebäbi eger bu egrileriň çözülişi bolýar, sebäbi, eger bu egrileriň haýsy hem bolsa birisi tapylan diýip hasap etsek, onda ikinjisi bilen warirowat edip seredelýän meseläni gyra nokatlary berkidilendir meselä ugrukdyrmak bolýar. Şonuň üçin Wariasiýasyny hasaplap, biz funksionalyň diňe ekstremal üçin burç nokady C-iň barlygyna seredelýär diýip hasap edýär.

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = [F+(\varphi'-y')F_y]_{x=x_1-0}\,\delta x_1$$
$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx = [F+(\varphi'-y')F_y]_{x=x_1-0}\,\delta x_1$$

nirede $x=x_1-0$ we $x=x_1+0$ belgiler skobkanyň içindäki ululyklaryň predel bahalary alynýar, haçan birinji ýagdaýda x_1-nokada ýakynlaşanda x bahasy tarapdan yzyna uly x_2- nokatda gaýtarma diňe y' önümde üzülýär (ýagny üznüksizdäl) onda birinji ýagdaýda burç nokatda çep önüm almaly, a ikinji ýagdaýda bolsa sag önüm almaly. $\delta\vartheta=0$ şerte görä aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1-\big[F+(\varphi'-y')F_{y'}\big]\delta x_1=0$$

ýa-da δx_1 erkin üýtgemeginiň esasynda

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1-0}=[F+(\varphi'-y')F_{y'}]_{x=x_1+0}$$

ýa-da

$$F(x_1,y_1,y'(x-0)+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{y'}(x_1,y_1,y'(x_1-0))=$$
$$=F(x_1,y_1,y'(x_1+0))+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))F_{y'}(x_1,y_1,y'(x_1+0))$$

Bu şertler yzyna gaýtarmada aýratyn ýönekeý

$$\vartheta=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{(1+y'^2)}\,dx$$

Funksional görnüşe eýe bolýar.

$$A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0}=$$
$$=A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0}$$

Goý $A(x_1,y_1)\neq 0,$ onda $A(x_1,y_1)$ gysgaldyp we ýönekeýleşdirip alarys:

$$\left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0}=\left.\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}$$

$y=\varphi(x)$ egriniň galtaşmasy absissler oky arasyndaky burçy a bilen belläliň. Absissler okyna bolan ýapgyt burçynyň çep we sag galtaşmalarynyň c-nokatdaky yzyna gaýtarmasynyň ekstremalyna degişlilikde β_1 we β_2 görä alarys.

$$y'(x_1-0)=tg\,\beta_1,\quad y'(x_1+0)=tg\,\beta_2 : \varphi'(x_1)=tg\,\alpha$$

Yzyna gaýtarma noktda şertiniň esasynda ol aşakdaky görnüşe eýe bolýar

$$\frac{1+tg\alpha\ tg\,\beta_1}{-sec\,\beta_1}=\frac{1+tg\alpha\ tg\,\beta_2}{sec\,\beta_2}$$

ýa-da ýönekeýleşdirilenden soň $cos\,\alpha$ köpeldilenden soň

$$-cos(\alpha-\beta_1)=cos(\alpha-\beta_2)$$

Bu ýerden düşme burçy yzyna gaýtarma burçyna deňligi gelip çykýar.

§7. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2\geq 9\\(x-5)^2+(y-3)^2\leq 36\\x+y\geq 8\\x\geq 0,y\geq 0\end{cases}$$

çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde $z=x^2+y^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözüwi: Ýol berilýän çözüwler köplügi garaldylyp görkezilen. Görnüşi ýaly ol güberçek däl. Funksiýa iň kiçi bahany B nokatda, iň uly bahany bolsa K nokatda alýar.

B we K nokatlaryň koordinatalaryny tapalyň. B nokat $x+y=8$ gönide we $(x-5)^2+(y-3)^2=y$ töwerekde ýatýar. Şonuň üçin onuň koordinatalaryny aşakdaky ulgamdan taparys:

$$\{(x-5)^2+(y-3)^2=y\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=y\\x+y=8\end{cases}$$

$$\begin{cases}(3-y)^2+(y-3)^2=9\\x=y-8\end{cases}\qquad \begin{matrix}2y^2-12y+9=0\\x=y-8\end{matrix}$$

$$\begin{cases}y=3+3\sqrt{0.5}\\x=5-3\sqrt{0,5}\end{cases}\ \text{ýa-da}\ \begin{cases}y=3-3\sqrt{0.5}\\x=5+3\sqrt{0,5}\end{cases}$$

Çözüwi: $z=(x-3)^2+(y-2)^2$ funksiýanyň dereje çyzygy merkezi A(3,2) (52-nji surat) nokatda bolan töwerek bolýar. A(3,2) nokatda ýetýär, global maksimuma bolsa B(0;6) nokatda ýetýär.(16-njy sur)

$z_{\min}=0 \quad z_{\max}=25$

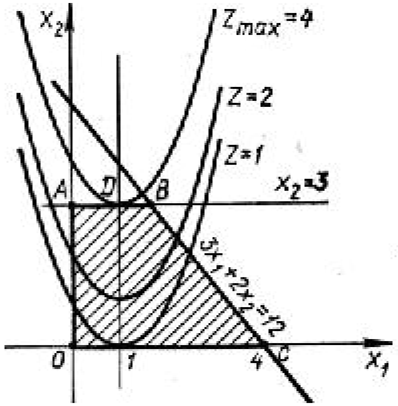
Aýdylanlary mysallarada düşündireliň:

Mesele 2

Çäkli $\begin{cases} x_2 \le 3 \\ 3x_1+2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z=2x_1-x_1^2+x_2$ funksiýanyň maksimumyny tapmaly.

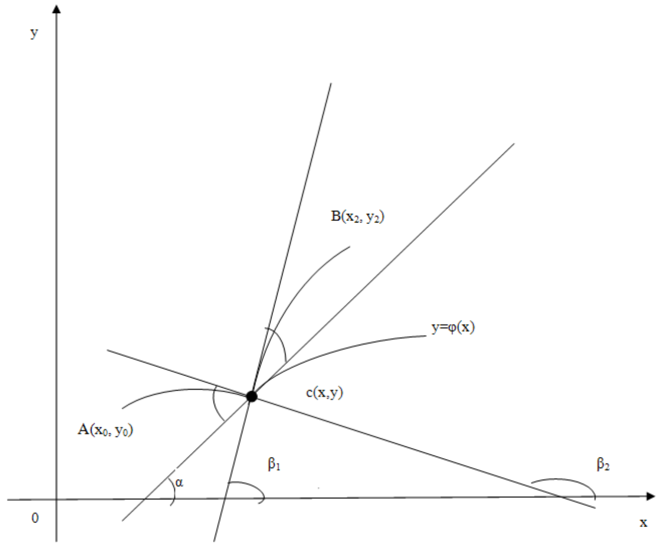
Çözülişi: $z=2x_1-x_1^2+x_2$ funksiýanyň dereje çyzygy parabola bolar. (3-nji surat).



3-nji surat

z funksiýa iki sany oýuk

$f_1(x_1)=2x_1-x_1^2$ *we* $f_2(x_2)=x_2$ funksiýalaryň jemi ýaly garamak bolar. Şeýlelikde *z* funksiýanyň lokal maksimumy global bolar. $z_{\max}=4$ baha *D(1;3)* nokatda ýetýär.



2-nji surat

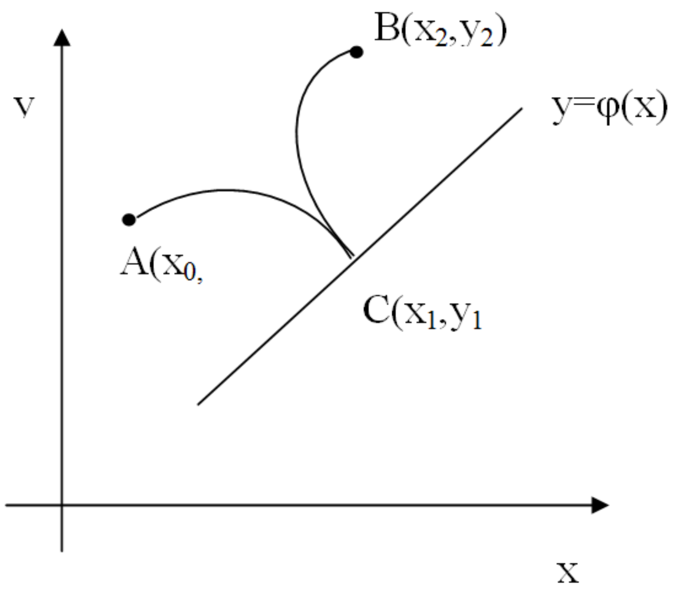
Eger nokat haýsy hem bolsa bir ýerde $\vartheta(x,y)$ tizlik bilen hereket edýän bolsa, onda harç edilýän wagt A(x_0, y_0) nokat ýagdaýdan süýşüp B (x_1, y_1) ýagdaýa geçmegi

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\vartheta(x,y)}\,dx$$

bolup, seredilýän görnüşe degişli funksional

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

görnüşe islendik $\vartheta(x,y)$ tizligiň üýgteme kanuny nokatda yzyna gaýtarma, düşme burçuna deňdir. Eger A, B, C nokatlar başhgaça ýerleşdirilen bolsa, mysal üçin (7-9) suratdaky ýaly, onda şol bir şerti almak yzyna gaýtarma nokadynda y=y(x) iki bahaly funksiýa görä, perimetrik görnüşde derňemeklik amatly bolardy.



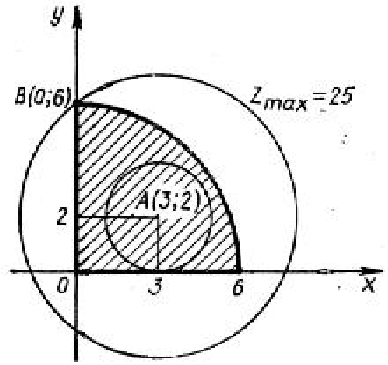
3-nji surat

§6. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

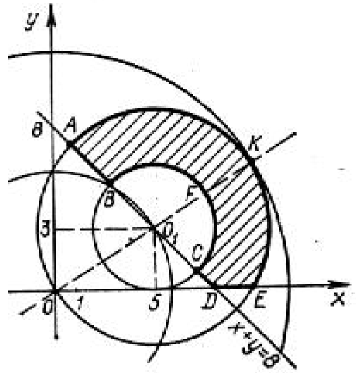
Mesele 1

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 36 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

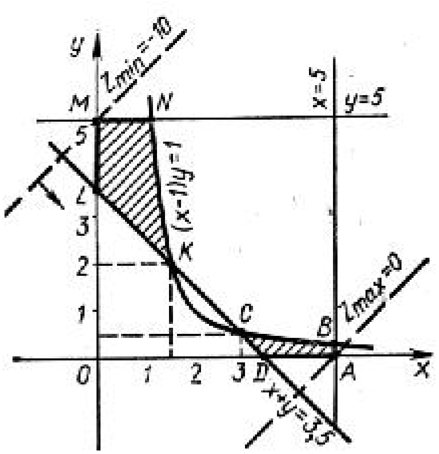
çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-3)^2 + (y-2)^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.



1-nji surat



2-nji surat



2-nji surat

z=x-y-5 maksat funksiýanyň *A,B,C,D,K,N,M,L* nokatlardaky bahalaryny hasaplalyň. Bu nokatlaryň koordinatalary şeýle bolar:

$A(5;0)$, $B(5;\frac{1}{4})$, $C(3;\frac{1}{2})$, $D(3{,}5;0)$, $K(1\frac{1}{2};2)$,

$L(0;3{,}5)$, $N(1\frac{1}{5};5)$, $M(0;5)$

Onda $Z_B=-\frac{1}{4}$, $Z_C=-2{,}5$, $Z_D=-1{,}5$, $Z_K=-5{,}5$,

$Z_L=-8{,}5$, $Z_N=-8{,}8$, $Z_A=0$, $Z_M=-10$

Global maksimuma *(5;0)* nokatlarda ýetýär we ol *0* –a deň, global minimuma bolsa *(0,5)* nokatlarda ýetýär we *-10*-a deň.

Funksiýa *C* nokatda *-2,5*-e deň bolan globaldan tapawutlanýan lokal minimuma ýetýär. Şonuň üçin *K* nokatda hem globaldan tapawutlylykda lokal maksimuma ýetýär.

§4. Burç nokatly ekstremallaryň döwülmesi.

Goý,

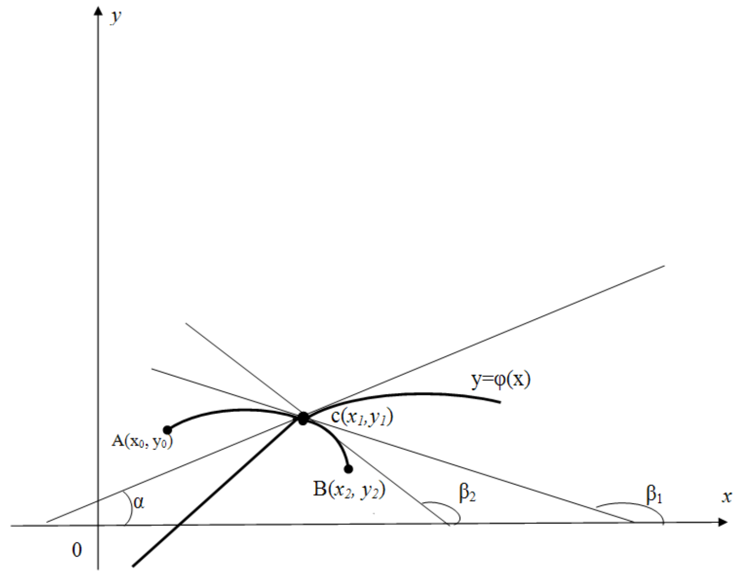
$$\vartheta[\varphi(x)] = \int_{x_0}^{x_2}(x,y,y')dx$$

funksionalyň integralynyň aşagynda funksiýasy seredilýän oblastda $y=\varphi(x)$ üzülme çyzgylar bolsun, A we B gyra nokatlary bolsa degişlilikde üzülme çyzygyň dürli tarapynda ýerleşen bolsun

$\vartheta[y(x)]$- funksionaly aşakdaky görnüşde ýazalyň

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x,y,y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F_2(x,y,y')dx$$

nirede $F_1(x,y,y') = F(x,y,y')$ üzülme çyzygyň bir tarapyndan, $F_2 = (x,y,y') = F(x,y,y')$ üzülme çyzyň beýleki bir tarapynda.



1-nji surat

Goý F_1 we F_2 üç gezek differensirlenýän funksiýa. Gözlenýän egriniň üzülme çyzygy bilen kesişme C - nokady burç nokadynyň barlygyna garaşma hakykydyr. AC we CB dugalaryň ekstremallygy aýdyňdyr (bu bolsa dugalaryň haýsy hem bolsa birisini fiksirläp beýleki birini bolsa Warirläp, biz gyra nokatlary berkidilen meseläni almaklyk gelip çykýar). Şonuň üçin, iki ekstremaldan durýan döwik çyzygy almak bolýar, onda Wariasiýa $C(x_1,y_1)$ gyra nokadyň hereketdedigine görä, $y=\varphi(x)$ egri boýunça süýşmegini göz öňünde tutup, ol aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$\delta\vartheta=\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx+\delta\int_{x_1}^{x_2}F_2(x,y,y')dx=[F_1+(\varphi'-y')F_1y']_{x=x_1-0}\delta x_1-[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}\delta x_1$$

ekstremumyň esasy hökmany şerti $\delta\vartheta=0$ aşakdaky deňlige getirýär.

$$[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}=[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}$$

Döwülme diňe y'üzülme nokadynda bolmagy mümkin, görnüşde ýazmak bolar:

$$\begin{gathered}F_1(x_1,y_1,y'(x-0))+\\(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{1y'}(x_1,y_1,y'(x_2-0))=\\=F_2(x_1,y_1,y'(x+0))\\+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{2y'}(x_1,y_1,y'(x_2+0))\end{gathered}$$

Bu döwülme şerti $y_1=\varphi(x_1)$ deňleme bilen bilelikde C-nokadyny koordinatalaryny kesgitlemeklige mümkinçilik berýär. Eger hususy ýagdýda funksional ϑ aşakdaky aňlatma deňdir.

$$\int_{x_0}^{x_2}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{x_0}^{x_1}A_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2}A_2(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

onda döwülme şerti aşakdaky görnüşe eýe bolar

$$A_1(x,y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1-0}=A_2(x,y)\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1+0}$$

ýa-da ýokardaky bellikleriň esasynda $y'(x+0)=tg\,\beta_2$, $\varphi'(x_1)=tg\,\alpha$, ýönekeýleşdirip $\cos\alpha$ köpeldip alarys:

üstünden geçýär we $k_1=\frac{1}{2}$ burç koeffisiýente eýe bolýar. Şonuň üçin onuň deňlemesi $y=\frac{1}{2}x$.

$$\begin{cases}x^2+y^2=36\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$$ ulgamy çözüp

$x=\frac{12\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ bahalary alarys.

Şeýlelikde *O(o;0)* nokatda global minimuma ýetýär. Ol nula deňir, global maksimum *A(2,4)* nokatlarda ýatýar we $6\sqrt{5}$ - e deň. Lokal ekstremumlaryň globallardan tapawudy funksiýa ösmeýär.

Mesele 2

z=x-y-5 funksiýanyň $\begin{cases}(x-1)y\le 1\\ x+y\ge 3{,}5\\ 0\le x\le 5,\quad 0\le y\le 5\end{cases}$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde global ekstremumlaryny tapmaly.

Çözülişi: Ýol berilýän çözüwler köplügi her biri güberçek bolan (2-nji surat) iki aýratyn bölekden ybarat.

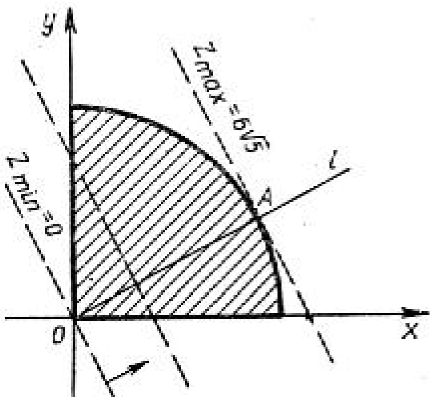
§5. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele 1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 0 \;\; y \ge 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwler köplüginde $z = 2x + y$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi: 6-njy suratda ýol berilýän çözüwler köplügi garaldylan. Bu köplük güberçek $z = 2x + y$ funksiýa *n=-2* burç koeffisentli gönä parallel. Görnüşi ýaly global minimum *O(o,o)* nokatda, *a* glabol maksimum $x^2 \pm y^2 = 36$ töwerege *A* galtaşma nokatda bolýar. *A* nokadyň koordinatasyny tapalyň. Onuň üçin l gönüniň deňlemesini düzmek we göniniň we töweregiň deňlmesini özünde saklaýan ulgamy çözmek ýeterlikdir.



1-nji surat

l göni dereje çyzygyna perpendikulýar, şeýlelikde onuň burç koeffisiýenti $k_1 = \frac{1}{2}$ $(k_1 \cdot k = -1)$ bolar. l göni *O* nokadyň

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)} = \frac{A_2(x_2,y_2)}{A_1(x_1,y_1)} \quad \text{ýa-da} \quad \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_2,y_2)}{A_1(x_1,y_1)}$$

Bu bolsa belli bolan ýagtylygyň döwülme kanunynyň umumylaşdyrylan çözülişi bolup durýar:
Sinus burçunyň ýagtylygyň düşmesine bolan gatnaşygy, tizligiň gatnaşygyna deňdir

$$\vartheta_1(x,y) = \frac{1}{A_1(x,y)} \quad \text{we} \quad \vartheta_2(x,y) = \frac{1}{A_2(x,y)}$$

gyrasynda sredalarda döwülmeler bolup geçýär. Ekstremallar diňe bir burç nokatlarynda, ýüze çykýar diýip pikir etmelidäl eýsem bolsa ol yzyna gaýtarma ýa-da döwülme ekstremal meselelerinde hem emelegelýär. Ekstremuma burç nokatlaryň ekstremalynda hem ýetmegi mümkin. Şeýle hem ol funksionalyň ekstremum meselelerinde.

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$$

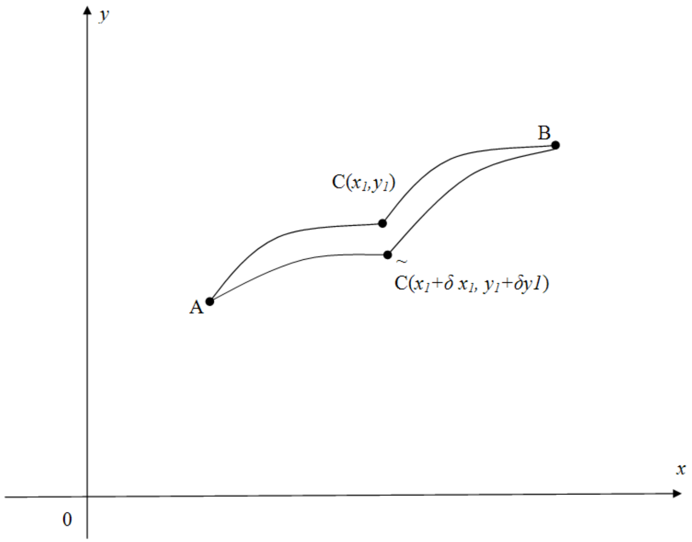
ýetmegi mümkin. Nirede $F(x,y,y')$ funksiýa üç gezek differensirlenýän we A,B gyra nokatlaryň üstünden geçýän rugsat edilýän egriniň hiç hili goşmaça şertler göz öňüne tutulmazdan.

Indi bolsa funksionalyň ekstremum baradaky meselesiniň $\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x,y,y')dx$ çözüwüni burç nokatlaryny kanagatlandyrmaly şertlrini kesgitläliň. Belli bolşy ýaly aýratyn ýylmanak dugalaryň esasynda düzülen döwük ekstremal, Eýleriň integral egrileriň deňlemesi bolmaly. Bu bolsa eger bizden galan hemme döwük çyzyklaryň böleklerini fiksirleseň we diňe bir bölegine görä Warirleseň, onda bu mesele bize belli bolan gyra nokarlary berkidilen ýönekeý meselä gelýär diýmek bu bölek bolsa duganyň ekstremaly bolmaly.
Ýönekeýlik üçin, biz döwük çyzygyň ekstremaly diňe bir burç nokadyň eýe bolýan bolsa, onda burç nokadyny kanagatlandyrýan şertlerini kesgitlemeli.

$$\vartheta[y(x)] = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx,$$

nirede x_1 burç nokadynyň absissasy

AC we CB egri çyzyklary Eýleriň integral egri çyzykly deňlemesi diýip hasap etsek we C nokat erkin hereket edýän bolsa, onda biz ýokarda seredilenleriň esasynda alarys



2-nji surat

$$\delta\vartheta = F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1-0}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1-0}\delta y_1 - (F - y'F_{y'}\big|_{x=x_1+0}\delta x_1 -$$

$$-F_{y'}\big|_{x=x_1+0}\delta y_1 = 0$$

bu ýerden

$$\left(F - y'F_{y'}\right)\big|_{x=x_1-0}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1-0}\delta y_1 =$$

$$= \left(F - y'F_{y'}\right)_{x=x_1+0}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1+0}\delta y_1$$

ýa-da δx_1we δy_1 bagly däldirler, onda

Mesele 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

çäkli $z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ maksat funksiýasynyň global maksimumyny we minumymyny tapmaly.

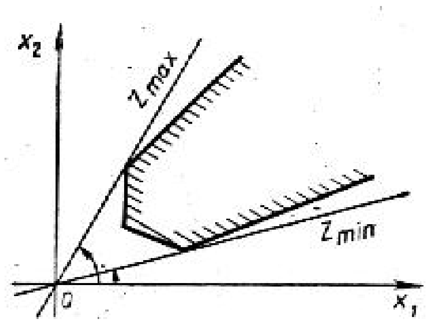
Çözülişi: Ýol berilýän köplügiň çyzgysyny guralyň (surat 51). Optimum koordinatalar başlangyjynyň töwereginde göniniň aýlanmasynda ýerleşýär, onda ekstremal nokatlar A we B depeler bolar.
Ýokardaky ýaly edip aňlatmadan maksat funksiýa üçin x_2-ni bölüp çykararys: $x_2 = \dfrac{3-z}{z+1} \cdot x_1$

Indi aýgytlaýjy gönüniň burç koeffisiýentini tapalyň: $k = \dfrac{3-z}{z+1}$

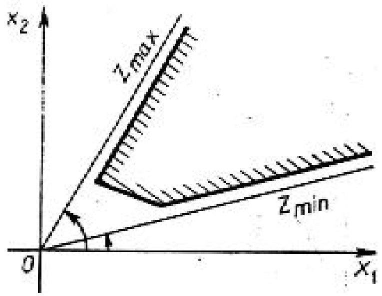
Önüm alsak $\dfrac{dk}{dz} = \dfrac{-4}{(z+1)^2}$

Bu önüm z-iň islendik bahasynda otrisatel, onda $k = \dfrac{3-z}{z+1}$ funksiýa kemelýär. Bu bolsa gönüniň aýlanmasynyň sagat strelkasy boýunçadygyny aňladýar. Şeýlelikde A depede maksat funksiýasy iň kiçi, B depede iň uly bahany alar.

Praktiki ekstremal nokatlary ýönekeý gurmak mümkin. Degişli deňlemäni çözüp A we B depeleriň koordinatalaryny kesgitläris. $A(2;3)$, $B(4;1)$
$z_A < z_B$ bolýandygyny belläris, sebäbi A depede global minimuma, B depede bolsa global maksimuma ýetýär.

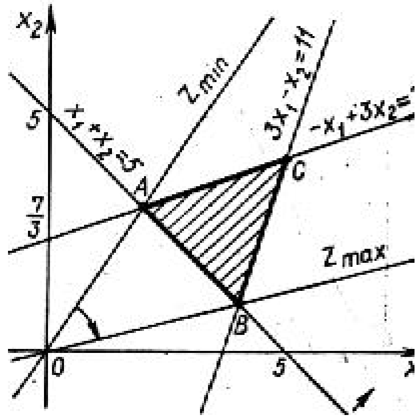


3-nji surat



4-nji surat

4. Köplik çäkli däl, ekstremumyň ikiside asimptotiki (5-nji surat).



5-nji surat

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1-0} = (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1+0}$$

$$F_{y'}\big|_{x=x_1-0} = F_{y'}\big|_{x=x_1+0}$$

Bu şert gözlenýän ekstremalyň üznüksizlik şerti bilen bilelikde burç nokatlarynyň koordinatalaryny kesgitlemäge mümkinçilikler döredýär.

Bellik: Egerde burç nokalary bir näçe sany bolsalar onda olaryň her birine aýratynlykda getirilen düzgün ulanylýar.

Mysal 1. Döwük çyzyklaryň ekstremalyny kesgitlemeli (eger olar bar bolsa)

$$\vartheta[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)dx$$

Döwülme nokadynda ýerine ýetmegi üçin ikinji şerti ýazalyň

$$F_{y'}\big|_{x=x_1-0} = F_{y'}\big|_{x=x_1+0}$$

ýa-da bu mesele üçin $2y'(x_i - 0) = 2y'(x_i + 0)$ bu ýerden $y'(x_i - 0) = y'(x_i + 0)$ ýagny y' önüm x_1 nokatda üznüksiz döwük çyzyk ýok. Onda seredilýän meselede ekstremuma diňe ýylmanak egrilerde ýetmek bolar.

Mysal 2.

$$\vartheta = \int_{x_1}^{x_2} y'^2 (1-y')^2 dx$$

Funksionalyň döwük çyzykly ekstremalyny kesgitlemeli. Integral aşagyndaky funksiýa diňe y'-bagly. Şonuň üçin ektremallar bolup $y = Cx + \overline{C}$ göni çyzyklar bolýar. Berlen ýagdaýda döwülme nokadynda şertler aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$-y'^2(1-y')(1-3y')\big|_{x=x_1-0} = -y'^2(1-y')(1-3y')\big|_{x=x_1+0}$$

we

$$2y'(1-y')(1-2y')\big|_{x=x_1-0} = 2y'(1-y')(1-2y')\big|_{x=x_1+0}$$

Bu şertleri triwial mümkinçilik diýip hasap etmeýäris

$$y'(x_1 - 0) = y'(x_1 + 0)$$

Olar aşakdaky şertlerde kanagatlandyrylýar:

$$y'(x_1 - 0) = 0$$

we

$$y'(x_1+0)=1$$

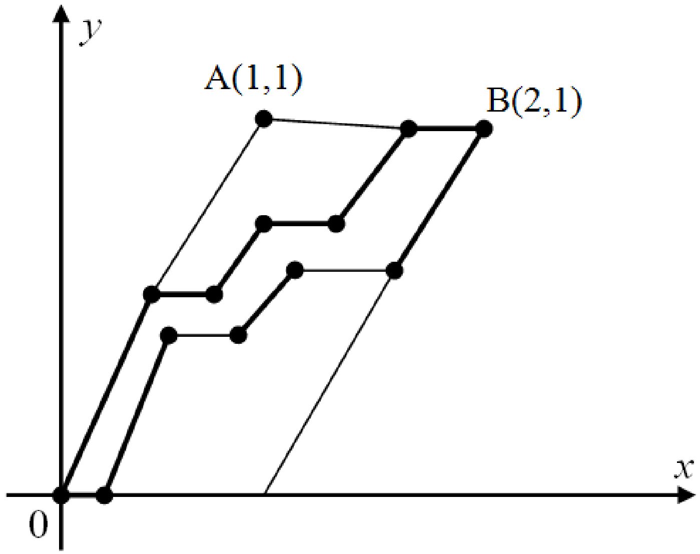
ýa-da

$$y'(x_1-0)=1$$

we

$$y'(x_1+0)=0$$

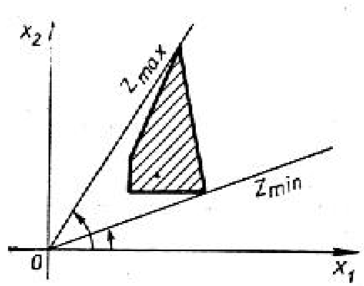
Şeýlelikde, döwülme ekstremallary $y=C_1$ we $y=x+C_2$ göni çyzyklaryň maşgalasyna degişli bolan kesimlerden ybaratdyr (3-nji surat).



3-nji surat

$$\frac{dk}{dz}=\frac{-q_1(zq_2-p_2)-(p_1-zq_1)q_2}{(zq_2-p_2)^2}=\frac{-zq_1q_2+p_2q_1-p_1q_1-zq_1q_2}{(zq_2-p_2)^2}=$$

$$=\frac{p_2q_1-p_1q_2}{(zq_2-p_2)^2}$$

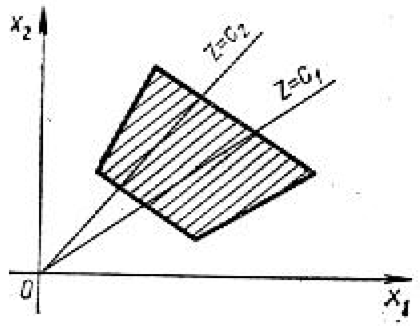


2-nji surat

Önümiň maýdalawjysy mydama poloitel, sanawjysy bolsa *z*-e bagly däl. Şeýlelikde önümiň hemişelik alamaty bolar, *z-iň* ösmegi bilen burç koeffisiýenti diňe artýar ýa-da kemelýär, *a* göni bolsa bir tarapa öwrülýär. Tersine gönüniň bir ugra öwrülmegi bilen *z* diňe ösýär ýa-da kemelýär, *z*-iň ösmegi bilen gönüniň aýlanyş ugruny kesgitläliň:

Şeýle dürli ýagdaýlaryň bolmagy mümkin:

1. Köpburçlyk çäkli, global maksimumy we minimumy bar (2-nji surat).
2. Ýol berilýän planyň köplügi çäkli däl, ýöne funksiýa global ekstremuma ösýär (3-nji surat).
3. Ýol berilýän planyň köplügi çäkli däl we global ekstremumlardan biri ösmeýär.(4-njy surat)



1-nji surat

Drob çyzykly maksat funksiýaly meseläniň üýtgeýän ululygyny çyzykly programmirlenen meselere getirip, soňra simpleks usuly bilen çözeris. Bu nähili edilýär, munuň bilen soňurrak tanyşarys. Ilkibada drob çyzykly progammirlenen meseleleriň geometrik manysyny we grafiki usullary bilen tanyşalyň.

$O_{x_1x_2}$ tekizlikde $z=\dfrac{p_1x_1+p_2x_2}{q_1x_1+q_2x_2}$ maksat funksiýa garalyň.

x_2 –ni bölüp cykarsak

$$zq_1x_1+zq_2x_2=p_1x_1+p_2x_2\,; \quad x_2=\frac{p_1-zq_1}{zq_2-p_2}$$

$$\text{ya – da} \quad (zq_2-p_2)x_2=(p_1-zq_1)x_1$$

$$x_2=kx_1 \quad \text{bu yerde} \quad k=\frac{p_1-zq_1}{zq_2-p_2}$$

$x_2=kx_1$ deňleme koordinatalar başlangyjyndan geçýän gönini berýär. *z-iň* käbir fiksirlenen z bahalarynda gönüniň k burç koeffisiýenti hem fiksirlenen a göni kesgitlenen. *z-iň* bahasynyň üýtgemegi bilen $x_2=k\cdot x_1$ göni koordinatalar başlangyjynyň daşynda öwrülýär. (1-nji sur.)

z-iň monoton artmagy bilen k burç koeffisiýentiniň üýtgemegine garalyň. Munuň üçin k –dan z boýunça önüm alarys.

§5. Izoperimetrik görnüşdäki wariasion meseleleriň çözülişi

Gysgaça perimetre bagly meseleler diýlip geometrik görnüşleriň meýdanynyň maksimumuny gözleýän meselelere aýdylýar. Bize belli bolşy ýaly, bularyň ýaly ekstremal meseleleriň arasynda , köne Gresiýada Warision meseleler bolup olary öwrenipdirler.

Biz kitabyň başynda berlen uzynlykly ýapyk egri çyzykly çäklendirlen maksimum meýdany kesgitlemek meselesine seredipdik. Egri çyzykly perimetrik görnüşde seretsek *x=x(t), y=y(t)* bolup, bu meseläni aşakdaky görnüşde aýdyňlaşdyrmak bolar: funksionalyň max kesgitlemeli

$$S=\int_{t_0}^{t} x\dot{y}dt \quad \text{ýa-da} \quad S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(x\dot{y}-y\dot{x})dt$$

haçanda $\displaystyle\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ - funksional özüniň hemişelik bahasyny saklaýar.

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=e$$

Şeýlelikde biz wariason meselä gelýäris, ol şertli özbaşyna ekistremumly:

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

hemişelik bahasyny saklaýar.

Häzirki döwürde perimetrli mesele diýlip, örän köp meselelere aýdylýar, has takygy bolsa hemme wariasion meselelere aýdylýar, eger olarda funksionalyň ekstremumyny kesgitlemeklik gerek bolsa,

$$\upsilon = \int_{x_2}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1' \ , y_2' \ , ..., y_n' \ )dx$$

eger perimetrli şert bar bolsa, ýagny

$$\int_{x_2}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1' \ , y_2' \ , ..., y_n' \ )dx = l_i, \ (i = \overline{1,m})$$

$l_i = \text{const}$, m>n, m<n, m=n bolmagy mümkin. Şeýle hem edil şular ýaly beýleki çylşyrymly meseleler çözülýär. Perimetrli meseleleri şertli ekstremum meselelerine getirmek hem mümkin. Täze näbelliler bilen belläliň

$$\int_{x_2}^{x_1} F_i dx = z_i(x), \ (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}),$$

Bu ýerden $z_i(x_0)=0$, onda $\int_{x_2}^{x_1} F_i dx = l_i$, şertden $z_i(x_1) = l_i$,

z_i -ni x görä differensirläp alarys.

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1' \ , y_2' \ , ..., y_n' \ ), \ (i = \overline{1,m})$$

Şeýlelikde integral perimetrli baglanşyk $\int_{x_2}^{x_1} F_i dx = l_i$, differensial baglanşyk bilen çalşyryldy.

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1' \ , y_2' \ , ..., y_n' \ ), \ (i = \overline{1,m})$$

Köpeldijiler düzgünini ulanyp, şertli ekistremumyň $\upsilon = \int_{x_2}^{x_1} F\,dx$ ýerine υ funksionaly derňemek bolar, ýagny $F_i - z_i' = 0$ baglanşyga görä, şertsiz eksremumy v funksionaly üçin derňemek bolýar.

§4. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleleriň çözülişi

Mesele 1.

Kärhana bir dürli önüm goýberýär we dört tehnologik usul bilen taýýarlanylýar. Bu usullarda işlenende wagt birliginde q_1, q_2, q_3 q_4 önüm alynýar, bu önümleriň gymmaty p_1, p_2, p_3, p_4 ybarat. Berlen meseläniň matematiki modelini düzmeli. Önümleriň gymmaty iň kiçi bolar ýaly we her bir usulda kärhana degişlilikde t_1, t_2, t_3, t_4 sagatdan köp bolmadyk wagtda işlener ýaly önüm goýberilişiň planyny kesgitlemeli.

Çözülişi: Goý x_1 birlik kärhana birinji tehnologiýa boýunça işleýän bolsun, x_2 -ikinji, x_3 –üçünji, x_4 –dördünji. Onda önümiň umumy goýberilişi

$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4$ bolar, *a* önümiň umumy çykdaýjysy bolsa $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$ deň bolar.

Umumy çykdaýjinyň umumy önümiň goýberilişine bolan gatnaşygyna önümiň gymmaty diýilýär.

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}$$

Indi $0 \le x_1 \le t_1$ $\quad 0 \le x_2 \le t_2$ $\quad 0 \le x_3 \le t_3$ $\quad 0 \le x_4 \le t_4$ çäkli ulgamyň çözüwler köplüginde

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}$$

maksak funksiýanyň iň kiçi bahasyny tapmaly.

Şeýlelikde y bir üýtgeýänli funksiýa ýaly bolar.

$$y = 2\sqrt{x_1 \frac{12-3x_1}{4}} = \sqrt{x_1(12-3x_1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x_1(12-3x_1)}$$

$3x_1$ *we* $12\text{-}3x_1$ otrisatel däl köpeldijileriň jemi hemişelik. Şonuň üçin $3x_1(12\text{-}3x_1)$ köpeldiji bilen y $3x_1(12\text{-}3x_1)$ bolsa iň uly bahany alýar. Alarys:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{12-6}{4} = 1{,}5 \qquad y_{\max} = 2\sqrt{3}$$

Garalýan çyzykly däl meseläniň tipi drob çyzykly maksat funksiýa meselä meňzeşdir.

$$z = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n}$$

Görnüşli funksiýalara drob çyzykly funksiýa diýilýär.

$$\upsilon^* = \int_{x}^{x_1}[F + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)(F_i - z_i')]dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

onda υ^*-üçin Eýleriň deňlemesini aşakdaky görnüşde ýazmak bolar.

$$F^*_{yj} - \frac{d}{dx}F^*_{y'j} = 0, \quad (j = \overline{1,n})$$
$$F^*_{zi} - \frac{d}{dx}F^*_{z'i} = 0, \quad (i = \overline{1,n})$$

ýa-da

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_{i_{y_j}} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_j'} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_{i_{y_j'}}\right) = 0 \qquad (j = \overline{1,n})$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x) = 0 \qquad (j = \overline{1,m})$$

$\upsilon = \int_{x_0}^{x_1} F dx$ -funksionalyň ekstremumyny tapmak baradaky izoperimetriki meselede esasy zerurlyk şertini almak üçin $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i \quad (i = \overline{1,m})$ baglanyşygyň bolmagynda kömekçi funksionaly düzmeli bolýar:

$$\vartheta^{**} = \int_{x_0}^{x_1}\left(F + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx$$

bu ýerde $\lambda_i = \text{const}$.

Eger biz ϑ^{**}-funksionala Eýleriň deňlemeler ulgamyna, haýsy hem bolsa bir $\mu_0 = \text{const}$ köpeltsek, onda ϑ^{**}-üýtgemeýär.

$$\mu_0\vartheta^{**} = \int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=0}^{m}\mu_i F_i dx,$$

bu ýerde $F_0 = F$, $\mu_j = \lambda_j \mu_0$, $j = \overline{1,m}$ belgileme girizilendir.

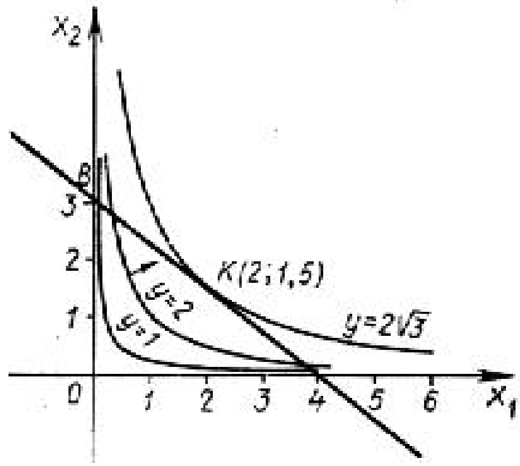
Indi bolsa F_i- funksiýalar simmetrik, şoňa görä wariasion meseläniň ekstremaly we $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx -$ funksionalyň ekstremumyny kesgitlemek meselesi haçan perimetrli $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ $(i = 0,1,2,\ldots,s-1,s+1,m)$ şerti bilen $\forall s$ *(s=0,1,...,n)* biri-biri bilen gabat gelýärler. Bu häsiýet biri-birine garşydaş prinsipler diýilýär.

Meselem, berlen uzynlygy boýunça çäklendirilen ýapyk egri çyzygyň maksimum meýdanyny kesgitlemek meselesi bilen berlen meýdany boýunça çäklendirilen ýapyk egri çyzygyň minimum uzynlygyny kesgitlemek meselesi biri -birine umumy ekstremala eýedir.

Bellik: ýokarda görkezilen düzgün perimetirli meseleleri çözmeklik, örän çylşyrymly funksionallar üçin hem dogrydyr.

Mesele 4. (2 meseläniň şertine seret.)

Çözülişi: Ýol berilýän planlarköplügi *AB* kesimiň nokatlar köplügi (4-njy surat), dereje çyzylgy bolsa giperboladyr.



4-nji surat

Eger-de *y=1* onda $x_2 = \dfrac{1}{4x_1}$ giperbola, eger-de $y = 2\sqrt{3}$ bolsa, onda $x_2 = \dfrac{3}{x_1}$ giperbola bolar.

$x_2 = \dfrac{3}{x_1}(y = 2\sqrt{3})$ giperbola *AB* kesim bilen bir umumy *K(2;1,5)* nokady bolar. Şeýlelikde $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$ bolanda iň uly baha ýetýär we ol $2\sqrt{3}$ -e deň.

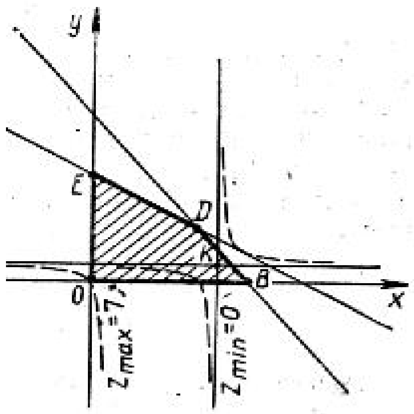
Bu mesele aňsat çözülýär we analitiki $3x_1 + 4x_2 = 12$ deňlemeden x_2-*ni* x_1-*iň* üsti bilen aňlatmak bolar.

$$x_2 = \frac{12 - 3x_1}{4}.$$

Mesele 3

$$\begin{cases} x + 2y \le 12 \\ x + y \le 9 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-7)(y-1)$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.



3-nji surat

Çözülişi: Ýol berilýän plan köpburçlugy biz eýýäm 7.3.2 meselede gurduk, *a* dereje çyzygy bolsa osimtotalary *x=7, y=1* (9-nji surat) bolup hyzmat edýän deňtaraply giperboladyr. *z* ululygyň boýuna *z* giperbola asimtota kesigininiň nokadyndan başlap kiçelýär. *z* –iň iň uly bahasy degişli *O(o,o)* nokatdan geçýän giperbolada, iň kiçi bahany bolsa funksiýa *K(7,1)* nokatda alýar. Şeýlelikde *O(o,o)* nokatda $Z_{max}=7$, *K(7;1)* nokatda $Z_{min}=0$

§6. Warasion hasaplamanyň göni usullary

Wariasion meselelerde emele gelýän differensial deňlemeleri , gutarnykly görnüşde diňe aýratyn ýagdaýlarda integrirläp bolýar. Şoňa görä bu meseleleri çözmek üçin, öz-özünden başga usullaryň gerekdigi ýüze çykýar. Göni usullaryň esasy ideýasy, birnäçe tükenikli sanly näbellili funksiýalaryň ekstremumyny kesgitlemek meselesiniň, predeline, (limit) wariasion meselelerine seretmeklikden ybaratdyr.

Bu tükenikli sanly näbellili funksiýanyň ekstremumyny kesgitlemek meselesi, (hemişe) belli usullar bilen çözülip soňra (limit) predele geçip degişli warisson mesele çözülýär.

$\upsilon[y(x)]$-funksionaly tükeniksiz näbellileriň köplüginiň funksiýasy hökmünde seretmek bolýar. Bu tassyklamanyň, ýerine ýetýändigi aýdyň görünýär, eger seredilýän funksiýalary aşakdaky derejeli hatar görnüşinde dagydylýar diýip bellesek, onda

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

ýa-da Furýeniň hatary

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

ýa-da haýsy hem bolsa bir görnüşli hatar

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

nirede $\varphi_n(x)$-berilen funksiýa *y(x)* funksiýany berilen $y(x)$ funksiýa üçin,ony aşakdaky görnüşde

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

ýazmak üçin a_n-koeffisientleriň bahalaryny bermeklik ýeterlik, diýmek $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň bahasy bu ýagdaýda berlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tükeniksiz yzygiderlik sanlar bilen kesgitlenilýär, ýagny funksional

$$\upsilon\left[y(x)\right] = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

Tükeniksiz köp näbellili funkiýa öwrülýär. Diýmek wariasion mesele bilen ekstremumynyň arasyndaky tapawudy, wariasion ýagdaýda funksiýanyň ekstremumyny tükeniksiz köp sany näbellilere görä derňemeklik gerek bolýar. Şoňa görä gäni usulyň esasy ideýasy ýokarda belleýşimiz ýaly wariasion meseläni tükenikli sanly näbellili funksiýanyň ekstremumyny kesgitleme meselesi üçin prdel meselesi hökmünde seredilmeginden durýar, ol bolsa örän dogry bolýar.

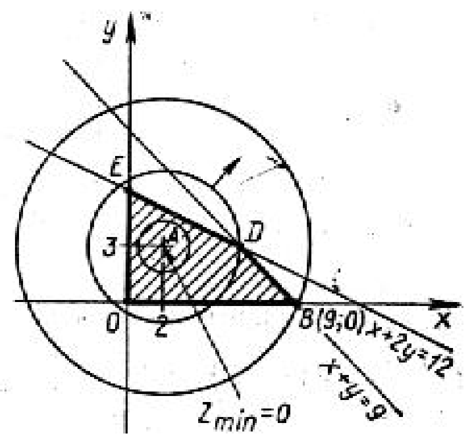
alarys. Goý $c=1, 2, 3, \ldots$ bolan töwerekleri çyzalyň. 8-nji suratdan görnüşi ýaly $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýa $A(8;0)$ nokatda iň uly baha ýetýär. $r_{max} = 8$.

Mesele 2.

$$\begin{cases} x + 2y \le 12 \\ x + y \le 9 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

ulgamyň çözüwler köplüginde $z = (x-2)^2 + (y-3)^2$ funksiýanyň global ekstremumyny tapmaly.

Çözülişi: Ýol berilýän köpburçlyklary we birnäçe dereje çyzyklary guralyň. (2-nji surat).



2-nji surat

$z = c$ dereje çyzygy $A(2;3)$ nokada merkezi bolan $r = \sqrt{c}$ radiusly töweregi berýär. 9-nji suratdan görnüşi ýaly $z_{min}=0$ baha $A(2;3)$ nokada ýetýär, z_{min} bolsa $B(9;0)$ nokatda ýetýär. Şeýlelikde $z_{min}=0$; $z_{max}=(9-2)^2+(0-3)^2=58$.

§3. Çyzykly däl maksat funksiýaly we çyzykly çäklendirmeler ulgamly meseleler

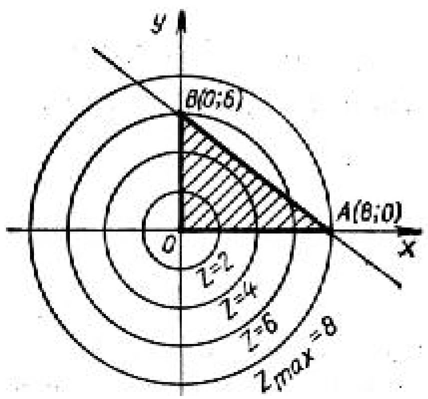
Şeýle meseleleriň ýol berilýän çözüwler köplügi mydama güberçek, çünki çyzyky çäklilik n ölçegli giňişlikde güberçek köpgyranlygy emele getirýärler. Çyzykly programmirlemeden tapawutlylykda çyzykly däl programmirlemelerde maksat funksiýanyň optimal çözüwleriniň bu köpgyranlygyň depelerinde ýerleşmegi hökman däldir.

Mesele 1.

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 \le 0 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

şertlerde $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiýanyň iň uly bahasyny tapmaly.

Çözülişi: Çözüwleriň ýol berilýän köplügi 1-nji suratda garalanan.



1-nji surat

Eger-de maksak funksiýa fiksirlenen c nokady bersek, onda merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan c^2 radiýusly töwerek

§7. Eýleriň tükenikli tapawut usuly

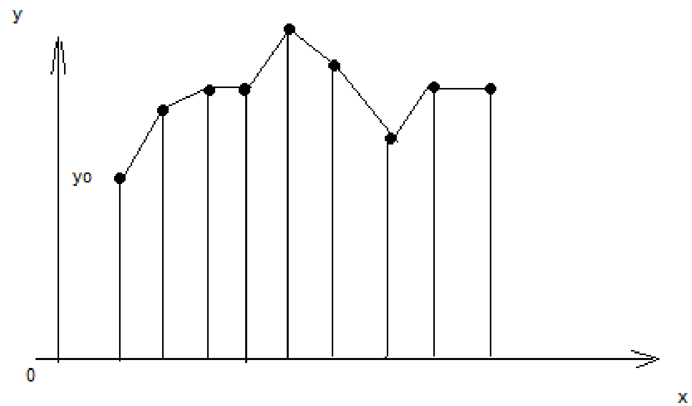
Eýleriň tükenikli tapawut usulynyň esasy ideýasy $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň bahasy meselem

$$\int_{x_o}^{x_1} F(x, y, y')dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b,$$

seredilýän wariasion mesele rugsat edilen azat (islendik) egride seredilmän, eýsem bolsa, diňe döwük çyzyklarda, ýagny berlen n sany gönüçyzykly zwenolardan (böleklerde) durýan we abssissalardaky berlen depeler bilen kesgitlenen:

$$x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, ..., x_0 + (n-1)\Delta x, \text{ nirede } \Delta x = \frac{x_1 - x_0}{n}.$$

Bular ýaly döwük çyzyklarda $\upsilon[y(x)]$-funksional, $\varphi(y_1 y_2, \ldots y_{n-1}, \ldots)$ – funksiýa öwrülýär. $y_1 y_2, \ldots y_{n-1}$ ordinatalar, döwük çyzyklaryň depeleri, sebäbi döwük çyzyklar bu ordinatalar arkaly doly kesgitlenilýär.



1-nji surat

$y_1 y_2, \ldots y_{n-1}$ ordinatalary şeýle bir saýlalyň netijede, $\varphi(y_1 y_2, \ldots y_{n-1}, \ldots)$ – funksiýa ekstremuma eýe bolar ýaly, ýagny $y_1 y_2, \ldots y_{n-1}$ aşakdaky sistemadan kesgitleýäris.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0,\ \dots\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0$$

soňra predele geçeris, haçan $n\to\infty$. Predelde funksiýa F şertler goýup, birnäçe çäklendirmelerde wariasion meseläniň çözülişini alarys. $\upsilon[y(x)]$-funksionalyň bahasyny ýokarda görkezilen döwük çyzygyň esasynda takmyn kesgitlemek, meselem ýönekeý meselede integral çalyşylyp alynýar.

$$\int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_o+k\Delta x}^{x_o+(k+1)\Delta x} F(x,y,\frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x})dx$$

integral jem bilen

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i,y_i\,\frac{\Delta y_i}{\Delta x})\Delta x$$

Mysal hökmünde funksional üçin Eýleriň deňlemesini getirip çykaralyň:

$$\upsilon[y(x)]=\int_{x_o}^{x_1} F(x,y,y')dx.$$

Bu ýagdaýda seredilýän egri çyzykda

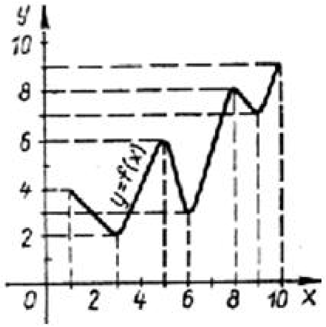
$$\upsilon[y(x)]\approx\varphi(y_{1,}y_{2,\dots}y_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i,y_i\,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x$$

Bu jemiň diňe iki bölegi y_i bagly bolýar, ýagny i we (i-1)-e

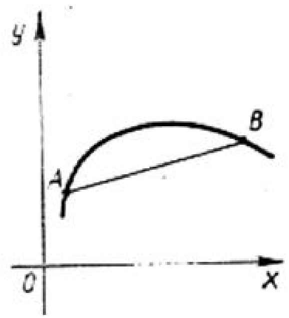
$F\left(x_i,y_i\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x$ we $F\left(x_{i-1},y_{i-1}\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$, onda

$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0\,(i=\overline{1,n-1})$ deňleme aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

“global” termini hem ulanylýar. Gysgaça aýtsak funksýanyň global maksimumy onuň kesgitleniş ýaýlasyndaky iň uly bahalary, global minimumy bolsa iň kiçi bahalary. Global maksimum we global minimum bilelikde funksýanyň global ekstremumy diýilip atlandyrylýar. 39-njy suratda görkezilen funksýanyň grafiginde global minumum 2-ä deň we lokal minimumlaryň iň kiçisi bilen gabat gelýär. Global maksimum 9-a deň, funksiýa x_0=10 nokatda bu baha ýetýär we iň uly lokal maksimum bilen gabat gelýär.



4-nji surat



5-nji surat

Ýene-de geljekde talap edilek kesgitlemeleri ýatlalyň. Goý ýapyk *Φ* köplükde kesgitlenen *z=f(*x_1 *,* x_2 *, ... ,.*x_n *)* funksiýa berlen bolsun. *Φ* köplügiň elementleri *X=(*x_1 *,* x_2 *, ... ,* x_n *)* bolsun. Şonuň üçin *z=f(*x_1 *,* x_2 *, ... ,.*x_n *)* funksiýany z=*f (x)* görnüşde ýazarys.

Eger-de $\varepsilon > 0$ san tapylyp $x - x_0 < \varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan ähli *x*-lar üçin $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda *z=f (x)* funksýa kesgitlenen käbir ýapyk X köplükde $x_0 \in X$ nokatda lokal maksimuma (lokal minimuma) ýetýär diýilýär.

Funksýanyň lokal maksimuma (minimuma) ýetýän x_0 nokady lokal maksimum (minimum) nokady diýilýär.

Mysallara seredeliň:

5-nji suratda käbir bir üýtgeýänli *[1,10]* kesimde kesgitlenen funksýanyň grafigi şekillendirilen (bu funksýa oýuk hem däl güberçek hem). Funksiýa *[1;10]* kesimde lokal minimuma *(*x_1*=3,* x_2*=6,* x_3*=y)* we iki lokal maksimuma *(*x_4*=5,* x_5*=8)* eýedir.

Goý *z=f(x)* funksiýa *X* ýapyk köplükde kesgitlenen bolsun. Eger-de $x_0 \in X$ we islendik $x \in X$ üçin $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ deňsizlik dogry bolsa, onda oňa bu funksýa x_0 nokatda absalýut maksimuma (minimuma) ýetýär diýilýär. “Absalýut” termini bilen bilelikde käwagtlar

$$F_y\left(x_i, y_i \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}(x_i, y_i \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})(-\frac{1}{\Delta x})\Delta x +$$

$$+F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0, \qquad (i=\overline{1,n-1})$$

ýa-da

$$F_y(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}) - \frac{F_{y'}(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x})}{\Delta x} = 0$$

ýa-da

$$F_y(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0$$

$n \to \infty$ predele geçip Eýleriň deňlemsini alarys:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$y(\varphi)$ gözlenilýän funksiýa deňlemäni kanagatlandyryp ekstremumy ýerleşdirmeli. Edil şonuň ýaly hem beýleki wariasion meseleler üçin esasy hökmany şertli ekstremumy mümkin almak bolar. Eger predele geçilmese, onda deňlemeler sistemasydnan $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = 0, (i=\overline{1,n-1}),$ gözlenilýän *y₁*, *y₂*, ..., *yn-1* ordinatalary kesgitlemek bolýar, ol bolsa döwük çyzygyň almaklyga getirýär, ýagny wariasion meseläniň takmyn çözülişine getirýär.

§8. Warasion hasaplama meselesiniň Ritsiň usuly bilen çözülişi

Ritsiň usulynyň ideýasy $\upsilon[y(x)]$- haýsy hem bolsa bir funksionalyň bahasyna, azat rugsat edilýän berilen wariasion meseläniň egrilerinde däl-de, a diňe hemme mümkin bolan çyzykly kombinasiýalarda

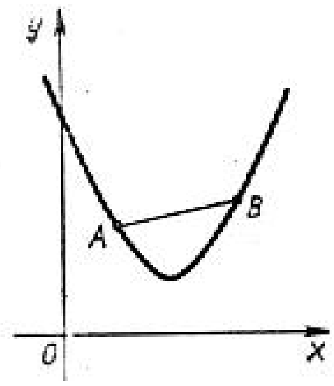
$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$$

hemişelik koeffisientli, birinji n funksiýalardan düzülen birnäçe saýlanylyp alynan yzygiderli funksiýalardan $W_1(x), W_2(x),...,W_n(x),...$ durýar.

$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$-funksiýalar seredilýän meselede hökman rugsat edilen bolmaly , bu bolsa $W_i(x)$ yzygiderli funksiýany saýlamakda birnäçe çäklendirmeler şerti goýulýar. Bular ýaly çyzykly kombinasiýalarda $\upsilon[y(x)]$- funksional $\varphi(\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n)$ – funksiýa öwrülýär, $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n$ –koeffisiýentli. Bu koeffisiýentler şeýle bir saýlanylýar, netijede funksiýa $\varphi(\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n)$ -ekstremuma eýe bolar ýaly: şeýlelikde $\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n$ aşakdaky deňlemeler sistemasyndan kesgitlenýän bolmaly.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i=1,...,n)$$

$n \to \infty$ predele geçirmegi amala aşyryp haçan $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ funksiýanyň predeliniň bar ýagdaýynda seredilýän wariasion meseläniň takyk çözülişi bolar. $\upsilon[y(x)]$-funksional çäklendirmeler şerti goýulanda we şeýle hem $W_1(x), W_2(x),...,W_n(x),...$ – yzygiderlige. Eger predele geçilmese , diňe n birinji çleni bilen çäklendirilse $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$, onda biz wariasion meseläniň takmyn çözülişini alarys. Eger şeýle



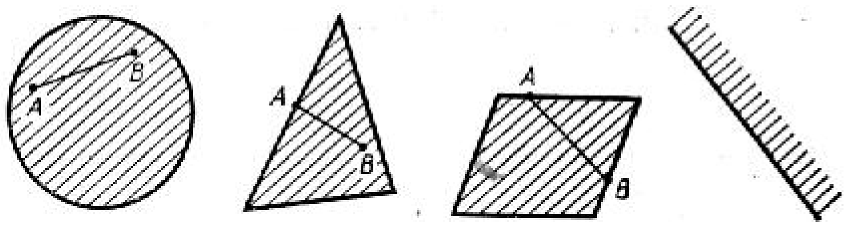
3-nji surat

Gerekli kesgitlemeleri ýatlalyň. Eger-de köplük islendik A we B nokatlardan geçirilen AB kesimiň ähli nokatlaryny özünde saklaýan bolsa, onda bu köplüge güberçek diýilýär. 1-nji suratda nokatlar tekizliginde güberçek köplüge sfera, piramida, prizma we beýlekiler degişlidir.

2-nji suratda güberçek däl köplüge mysallar görkezilendir. Güberçek däl köplükde *AB* kesimiň ähli nokatlaryndan bu köplükde ýatmaýan iň bolmanda iki nokady görkezip bolar. Giňişlikde güberçek däl köplüge tory mysal getirip bolar.

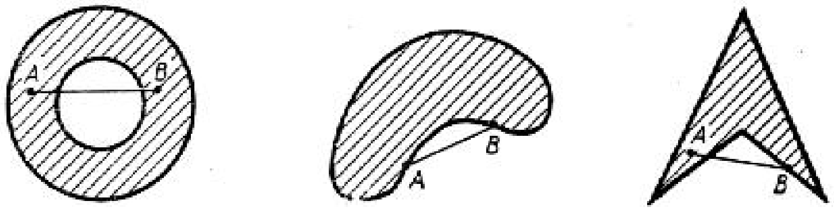
Bir üýtgeýänli $y=f(x)$ funksýanyň grafiginiň islendik iki nokadyny birleýşdirýän kesim grafikde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa bu funksýa güberçek diýilýär.(3-nji surat)

Birnäçe üýtgeýänli güberçek ýa-da oýuk funksýalar düşünjesine formulirlemek mümkin. Eger-de $z=f(x_{11;}x_{21}...x_n)$ giper üstiň islendik iki nokadyny birleşdirýän kesim onuň üstünde ýa-da ondan ýokarda ýatýan bolsa, onda oňa güberçek diýilýär.(4-nji surat) Giper üste $z=f(x_{11;}x_{21}...x_n)$ oýuk diýilýär, haçanda onuň iki nokadyny birleşdirýän kesim üstde ýa-da ondan aşakda ýatýan bolsa.



1-nji surat

Bu meselede ulgam çyzykly çäkli, *a* maksat funksiýaň çyzykly bolmaýar. Seredeliň 7.11 we 7.12 meseleler çyzykly däl programmirlenen meselä degişli.



2-nji surat

Şeýle meseleleriň käbir aýratyn çözüwleriniň üstünde durup geçeliň. Çyzykly däl programmirleňýän meseleleri çözmek üçin şulary bilmek zerurdyr:

1) Meseläniň ýol berilýän çözüwleriniň köplügi oýuk ýa-da güberçek:
2) Maksat funksiýa güberçekmi ýa-da oýuk

usul bilen funksionalyň absolýut minimumyny kesgitlenilse, onda funksionalyň minimumynyň takmyn bahasy islendik rugsat edilýän egrilerde uly däldir . Funksionalyň şol bir minimumdan rugsat edilýän egriler klasynyň böleklerinde, $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ - egriler görnüşine. Şol bir usul bilen funksionalyň maksimum bahasyny tapanymyzda funksionalyň maksimum bahasyny takmyn alýarys . Şol bir sebäbine görä ýetmezçilikde. $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ -funksiýalar rugsat edilen bolmagy üçin ilki bilen gyra şertlerini hökman kagatlandyrylmaly (şeýle hem beýleki çäklendirmeleri hem ýatdan çykarmaly däl, olar mümkin funksiýanyň rugsat edilmeli şertinde goýulandyr, meselem olaryň üznüksizlik we ýylmanaklyk şertlerine degişli bolmagy). Eger gyra şertleri çyzykly we ýönekeý meselem iň ýönekeý mesele $y(x_0) = y(x_1) = 0$ ýa-da

$$\beta_{1j} y(x_j) + \beta_{2j} y'(x_j) = y(x_1) = 0 \quad (j=0,1).$$

nirede β_{ij}- hemişelikler, onda iň ýönekeýleri we koordinatlar funksiýalary bu gyra şertlerini kanagatlandyrýanlaryny saýlamaly. Bu yagdaýda aýdyň görünýär we $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ islendik α_i şol bir gyra şertlerini kanagatlandyrýar. Goý , meselem gyra şertler $y(x_0) = y(x_1) = 0$ görnüşde bolsun, onda koordinatlar funksiýasyny hil boýunça saýlap bolýar.

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x)$$

nirede $\varphi_i(x)$- haýsy hem bolsa üznüksiz funksiýa, ýa-da

$$W_k(x) = \sin \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k=1,2,...)$$

ýa-da haýsy hem bolsa başga bir funksiýa aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär:

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$$

Eger şertler ýönekeý däl bolsa, meselem: $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$ nirede iň bolmanda sanlaryň biri y_0 ýa-da y_1 nula deň däldir, onda wariasion meseläniň çözüwini yönekeý görnuşde gözlemek

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x) + W_0(x)$$

nirede $W_0(x)$ berilen gyra şertlerini kanagatlandyrýar.
$W_0(x_0) = y_0,\ W_0(x_1) = y_1$ galan hemme $W_i(x)$ degişli ýönekeý gyra şertlerini kanagatlandyrýar , ýagny seredilýän ýagdaýda $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$
Bular ýaly saýlananda aýdyň görünýär, islendik α_i üçin funksiýalar $y_n(x)$ berilen gyra şertlerini kanagatlandyrýar. $W_0(x)$ funksiýany hil boýunça saýlamak bolýar, meselem çyzykly funksiýa

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$ deňlemeler sistemasynyň çözülişi, umuman aýdanda örän çylşyrymly mesele. Bu mesele epesli ýönekeşleşýär, eger ekstremum näbellili funksiýa kwadrat we onuň υ funksionalynyň önümlerine görä derňelýär, sebäbi bu ýagdaýda deňlemeler sistemasy $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0\ (i = 1,2,\ldots,n)$, α_i - görä çyzyklydyr.
Yzygiderli funksiýalary $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ saýlamakda funksiýalaryň koordinatlary diýlip atlandyrylýar we geljekki hasaplamalaryň çylşyrymlylyk derejesine örän güýçli täsir edýär,

§2. Çyzykly maksat funksiýaly we çyzykly däl çäklendirmeler ulgamly meseleler

Mesele 1. Önümçilikde käbir azyk iki görnüşde öndürülýär. Egerde birinji görnüşli resursyň bahasy 3 manat, ikinjiniňki bolsa 4 manat, ähli alnanda bolsa 12 manat bolsa resuslarynyň ululyklarynyň optimal paýlanyşygyny kesgitlemeli. Birinji resusyň x_1 mukdaryndan we ikinji resusyň x_2 mukdaryndan $2 \cdot x_1^{0,5} \cdot x_2^{0,5}$ önüm birligini almak mümkin.

Umuman işlenilip taýýarlanylan önümiň mukdary bilen onuň çykarylýan resuslaryny baglanyşdyrýan $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fumksiýa önümçilik funksiýasy diýilýär. Önüm üçin ýönekeýje önümçilik funksiýasy iki dürli resurs üçin şeýle bolar:

$$y = c\, x_1^{\alpha} \cdot c_2^{\ 1-\alpha}$$

Bu ýerde c we α - hemişelik ululyklar, $0 < \alpha < 1$. y funksiýa diňe iki resurs bolan ýagdaýy üçin görkezilen: x_1 – zähmet, x_2 – baýlyk (kopital), bu ýerdäki α bu resuslaryň degişli paýlaryny aňladýar.

y funksiýa ýönekeý önümçilik funksiýasy, şeýle hem muňa iki resursyň we bir önümiň arasyndaky baglylyk ýaly garalýar. Bu funksiýa politekonomiki derňewlerde wajypdyr.

<u>Meseläniň matematiki modeli:</u> Goý x_1 – I görnüşli resursyň mukdary, x_2 – II görnüşli resursyň mukdary.

Çäkli ulgam
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Magnit funksiýasy $y = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$

(1) formulanyň çözüwler köplüginde (2) funksiýanyň iň uly bahasyny tapmak talap edilýär.

$$f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geq f(x_1, x_2, ..., x_n) - \max$$

$$[f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \leq f(x_1, x_2, ..., x_n)] - \min$$

Eger biziň sereden (1)-(3) deňlemämiz çyzykly bolsa, onda ol meseläni belli bolan usullar bilen simpleks, tora, excel elektron tablisasy arkaly optimal çözülýär.

$$E^n = \text{çyzykly giňiňişl} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \|x\|$$

Eger-de (1)-(3) çözemizde ol meseläniň esasynda emele gelen köpgrnalyk (köpburçluk) çyzykly däl bolan ýagdaýynda hemme wagt güberçek (oýuk) hem bolup duranok, onuň sebäbi gipertekizlik köpgranlygyň ýeke bir depelerinde däl-de, eýsem bolsa onuň içinden geçmegi hem mümkin

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň çözülişini kesgitlenilende onuň geometric manysyny peýdalanalyň:

1) giperüst (gipertekizlik);
2) meseläniň çözüwiniň bar bolan ýaýlasyny kesgitlemeli;
3) ýokarky we aşaky derejäni kesgitlemeli we onuň gipertekizlige görä ýerleşişini barlamaly. Eger onuň çözüwi ýok bolsa, onda ýaýlada boş köplük ýa-da ýeke täk çözüwi bar;
4) çäklendirilen ýaýlanyň esasynda max (min) nokatlaryň üsti bilen gipertekizlige görä egri çyzyk ýa-da göni çyzyk, ýagny şol nokatlardan geçýän çyzgyny kesgitlemeli.

şonuň üçin funksiýanyň koordinatalar sistemasyny oňat saýlamaklyk köp derejede bu usulyň ulanylmagyndaky ýetişiklilige bagly bolup durýar .

Ýokarda hemme aýdylanlar doly görnüşde funksionallara hem degişlidir $\upsilon[z(x_1, x_2, ..., x_n)]$ özem şu ýagdaýda W_i funksiýalar indi bolsa funksiýalar $x_1, x_2, ..., x_n$ näbellilere bagly bolup, şeýle hem köp näbellilere degişli funksionaldyr.

Ritsiň usuly köplenç matematiki fizikanyň meseleleriniň takyk we takmyn çözmekde ulanylýar. Meselem, eger haýsy hem bolsa D ýaýlada Puassonyň deňlemesiniň çözülişini tapmak gerek bolsa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

D ýaýlanyň gyrasynda, z-iň bahasy berilen bolsa, onda bu meseläni funksionalyň ekstremumy baradaky wariasion mesele bilen çalyşmak bolýar, netijede alynan deňleme bolsa Ostragradskiýniň deňlemesi bolýar. Bize belli bolşy ýaly seredilýän mesele üçin onuň funksionaly

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x, y) \right] dxdy$$

görnüşde bolýar.

Kesgitlilik üçin aşakdaky görnüşdäki funksionala seredeliň:

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x0}^{x1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

Bu ýerde meseläniň minimumy baradaky soraglara seredeliň. Koordinatlar funksiýalar yzygiderligi $W_1(x), W_2(x), ..., W_n, (x)...$ doly diýip hasap edeliň, ýagny koordinatlar funksiýalar ynyň

$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(x)$ çyzykly kombinasiýasynyň ýakynlygy birinji tertipli manyda, ýagny her bir rugsat edilen funksiýa islendik derejede takyklyk bilen approksimirlenen, nirede n-ýeterlik derejede uly. Onda Ritsiň usuly bilen $y_1, y_2,..., y_n,...$ nirede $y_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(x)$ funksiýalary almak bolýandygy emele getirijisi, ýagny minimumlaşdyrýan yzygiderlik diýip atlandyrylýan ýagny yzygiderlik onuň üçin funksionalyň bahasy $\upsilon[y(x)]$, $\upsilon[y_1],\upsilon[y_2],...,\upsilon[y_n],...$minimuma ýygnalýar ýa-da $\upsilon[y(x)]$ funksionalyň iň aşakdaky granynyň bahasy ýöne $\lim_{n\to\infty}\upsilon[y_n(x)] = \min\upsilon[y(x)]$ deňlemeden $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ gelip çykanok. Rugsat edilýän funksiýalaryň klasynda ekstremumy ýerleşdirýän funksiya ymtylman hem biler minimumlaşdyrlan yzygiderlik funksional

$$\upsilon[y_n(x)] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_n(x), y_n'(x))dx$$

Örän kiçi tapawut edip biler .

$$\upsilon[y(x)] = \int_{x0}^{x1} F(x, y(x), y'(x))dx$$

Ýeke bir bu ýagdaýda däl, haçan $y_n(x)$ hemme integrirlenýän kesimde, ýakyn, birinji tertipli ýakynlama manysynda *y(x)*, şeýle hem haçan ýeterlik kiçi bölegi (x_0, x_1) kesimde $y_n(x)$, we *y(x)* ýagdaýda, ýa-da olaryň önümleri örän uly biri-birinden tapawutlanýarlar, ýöne galan böleklerde (x_0, x_1) kesimiň ýakynlyklary galýar.

VI BAP. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesi

§1. Çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesiniň goýluşy

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň ykdysady geometriki manysy. Amaly meseleleriň köpüsi optimallyga çözmeklik üçin onuň matematiki modeli çözülende umumy görnüşde ol çyzykly däl bolýar.

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesi aşakdaky görnüşde berilmegi mümkin:

1) maksat funksiýasy çyzykly, çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl;
2) maksat funksiýasy çyzykly däl, çäklendirmeler ulgamy çyzykly;
3) maksat funksiýa hem-de çäklendirmeler ulgamy çyzykly däl.

Biz bu meseläni dürli usullar bilen çözüp, ony optimaldygyny kesgitleýäris. Goý, bize çyzykly däl programmirlemäniň umumy meselesi aşakdaky görnüşde berlen bolsun:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) \to \max(\min) \quad (1)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2,..., x_n) \le b_i,\ (i = \overline{1,k}) \\ g_i(x_1, x_2,..., x_n) > b_i\ \ (i = \overline{k+1,m}) \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0:\ (j = \overline{1,n}) \quad (3)$$

(1)-(3)-çyzykly programmirlemäniň umumy meselesiniň matematiki modeli diýilýär. f, g_i -n sany näbellä degişli bolan b_i -berlen san (serişdäniň görnüşleri).

Eger-de meseläniň çözülişi bar bolsa we ol (2)-ni kanagatlandyrýan bolsa onda aşakdaky şertler ýerine ýetýändir.

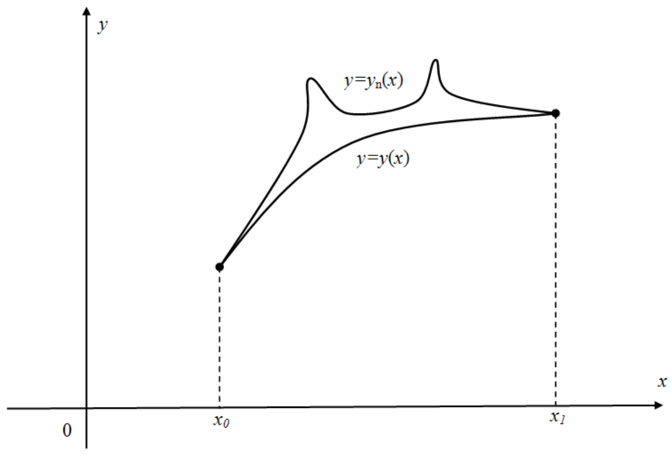
optimal çözüwe eýe bolarys. Eger ýerine ýetmese onda biz optimal çözüwi ýene barlarys.

$$(1,\ 2)\quad v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}$$
$$(1,\ 4)\quad v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$(2,\ 3)\quad v_3 - u_2 = 6 - 1 = 5 < 7 = c_{23}$$
$$(2,\ 4)\quad v_4 - u_2 = 3 - 1 = 2 < 4 = c_{24}$$
$$(3,\ 1)\quad v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$
$$(3,\ 3)\quad v_3 - u_3 = 6 - (-4) = 10 < 13 = c_{33}$$

Tablisa 10

U_i \ V_i	2	4	6	5	a_i
0	2 10	4 -	6 80	10 -	90
1	1 0	3 100	7 -	4 -	100
-2	4 100	8 -	13 -	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

$$(1,\ 2)\quad 4 - 0 = 4 = 4$$
$$(1,\ 4)\quad 5 - 0 = 5 < 10$$
$$(2,\ 3)\quad 6 - 1 = 5 < 7$$
$$(2,\ 4)\quad 5 - 1 = 4 = 4$$
$$(3,\ 2)\quad 4 - (-2) = 6 < 8$$
$$(3,\ 3)\quad 6 - (-2) = 8 < 13$$
$$z_{\min} = 10 \cdot 2 + 80 \cdot 6 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 40 \cdot 7 = 1480.$$



1-nji surat

Şonuň üçin minimumlaşýan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yzygiderlik rugsat edilýän klasda predela eýe bolman hem biler. Ýöne funksiýalaryň $y_1, y_2, \ldots, y_n$ özleri rugsat edilen Ritsiň usuly bilen y_n yzygiderligiň ýygnanma şerti alnan, wariasion meseläniň çözülişi we ýygnanmanyň tizligi köplenç gabat gelýän işlerde rus alymlarynyň goşandy kändir.

§9. Warasion hasaplamagynyň meselesiniň Kantorowiçiň usuly bilen çözülişi

Köp azat nübelili funksiýalar bagly bolan $\vartheta[z(x_1,x_2,...,x_n)]$ funksionallara Ritsiň usulyny ulanylanda, kordinatlar sistema funksiýasy saýlanylýar.

$W_1(x_1,x_2,...,x_n), W_2(x_1,x_2,...,x_n),...,W_n(x_1,x_2,...,x_n),...$

We Wariasion meseläniň takmyn çözüwi

$$\check{Z}_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k W_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

Görnüşde gözlenilýär,nirede α_k-koeffsientler hemişelik. Kantorowiçiň usulynda hem edil şonuň ýaly koordinatalar sistema funksiýasyny saýlamaklyk talap edýär.
$W_1(x_1,x_2,...,x_n), W_2(x_1,x_2,...,x_n),...,W_n(x_1,x_2,...,x_n),...$
Onuň takmyn çözülşi hem edil şonuň ýaly

$$\check{Z}_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x_i)W_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

görnüşde gözlenilýär,ýöne $\alpha_k(x_i)$ koeffisientler hemişelik däl, ýagny ol haýsy hem bolsa bir näbellä görä näbellili funksiýadyr. $\vartheta[\check{z}]$-funksional, funksiýalaryň klassynda

$$\bar{\check{z}}_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x_i)W_k(x_1,x_2,...,x_n)$$

görnüşden
$\bar{\vartheta}[\alpha_1(x_i),\alpha_2(x_i),...,\alpha_m(x_i)]$
m-sany bir bagly däl näbellili $\alpha_1(x_i),\alpha_2(x_i),...,\alpha_m(x_i)$ funksiýa bagly bolan funksionala öwrüldi.
$\alpha_1(x_i),\alpha_2(x_i),...,\alpha_m(x_i)$, funksiýalar şeýle bir saýlanylýar, netijede $\bar{\vartheta}$ funksional ekstremuma ýeter ýaly.Şundan soňra, haçan $m\to\infty$, predele geçilse,onda bir näçe şertleriň esasynda takyk çözüwi almak bolýar, eger predele geçilse, onda bu usul bilen takmyn çözüwi almak bolýar,özem umuman aýdanda ara takyk(ýokary derejede takyk), ýagny Ritsiň usuly bilen deňeşdirilende şeýle hem, şol bir koordinataly funksiýalary we m-

Tablisa 8

$U_i \backslash V_i$	2	4	9	3	a_i
0	2 90	4 -	6 -	10 -	90
1	1 20	3 80	7 -	4 -	100
-4	4 -	8 20	13 80= θ	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

$$\min(x_{ij})=\theta$$

$$x'_{ij}=\begin{cases}x_{ij}\\ x_{ij}+\theta\\ x_{ij}-\theta\end{cases}$$

Tablisa 9

$U_i \backslash V_i$	2	4	9	3	a_i
0	2 10	4	6 80	10	90
1	1 100	3 + 0	7	4	100
-4	4 +	8 100= θ	13	7 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Ỳokarda görkezilen prosesi ýene bir gezek, iň soňky formulanyň esasynda barlap, deňligi barlap ýerine etýän bolsa,

$$\delta_{13} = v_3 - u_1 - c_{13} = 9 - 6 = 3$$
$$\delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - 7 = 1$$
$$\delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 4 = 2$$
$$\delta_{ij} = V_j - U_i - C_{ij} > 0$$

Tablisa 7

U_i \ V_i	2	4	9	3	a_i
0	2 / 90	4 / -	6 / -	10 / -	90
1	1 / 20	3 / 80	7 / -	4 / -	100
4	4 / -	8 / 20	13 / 80	7 / 40	140
b_j	110	100	80	40	330

Soňky tablisalara biz Potensiallar usulyny ulanyp, (5)-iň esasynda *U*-lary we *V*-leri kesgitledik. Soňra olary şol tablisalarda ýerine goýup, (5)-iň ýerine ýetirilişini barladyk. Netijede biz 3-kletkada
(5)-iň ýerine ýetmeýändigini gördük. Soňra ony (6)-nyň üsti bilen aňlatdyk.Indi bolsa, biz şol aňlatmalaryň ýerine ýetmegi üçin tablisalary täzeden dolduryp ýene-de bir gezek (5)-iň dogrulygyny barlarys. Şeýlelikde biz bu prosesi tä hemme kletkalarda (5)-iň (6)-nyň formulalary ýerine ýetýänçä dowam ederis. Haçan şol netije alynanda seredilýän mesele optimal çözüwe eýe bolar.

çlenlerini sanynda. Bu usulyň ýokary takyklygy bolmagynyň sebäbi

$$\check{Z}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

funksiýalar klasslary $\alpha_k(x_i)$ näbelliler

$$\check{Z}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

funksiýalar klasslaryndan has giňdir we haçan α_k -hemişelik bolup

$$\check{Z}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Görnüşdäki funksiýalaryň içinden şeýle bir funksiýany saýlamak bolýar netijede, Wariasion meseläniň çözüwüniň oňat approksemirleýän

$$\check{Z}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

-funksiýalara garanda $\alpha_k = const$.
Meselem. Goý aşakda berilen funksionaly ekstremuma derňemeklik talap edilýän bolsun

$$\vartheta = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, \check{z}, \frac{\partial \check{z}}{\partial x}, \frac{\partial \check{z}}{\partial y}\right) dx dy$$

D-ýaýla degişli bolup, $x = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$-egriler we $x = x_0, x = x_1$ gönüler bilen çaklendirilen.D-ýaýlanyň gyralarynda $\check{z} = (x, y)$ funksiýanyň bahalary kesgitlenen. Koordinatalar funksiýasynyň yzygiderligini saýlalyň:

$$\check{Z}_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x) W_k(x, y)$$

ýa-da bellikleri üýtgedip $\alpha_k(x)$ -yň ýerine $u_k(x)$-ny girizip alarys:

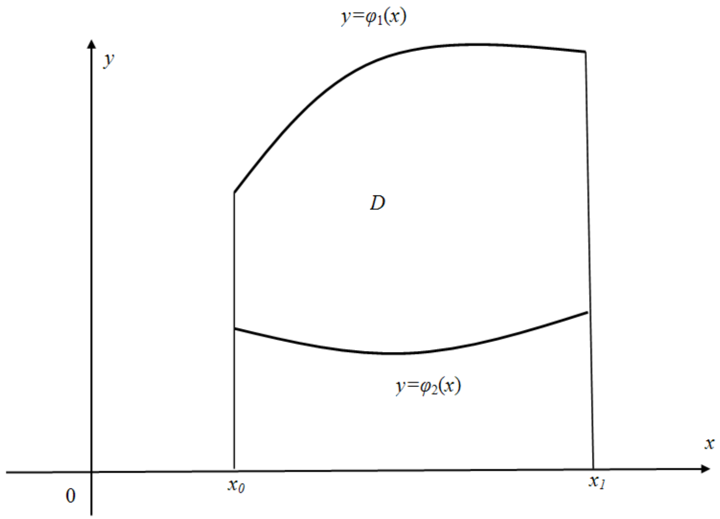
$\check{Z}_m(x,y) =$
$u_1(x)W_1(x,y) + u_2(x)W_2(x,y) + \cdots + u_m(x)W_m(x,y)$,
W_k-biziň saýlan funksiýamyz, u_k-näbelli funksiýa,biz bu funksiýany, ϑ funksioanalyň ekstremuma ýeter ýaly edip kesgitleýäris, ýagny

$$\vartheta[\check{Z}_m(x,y)] = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, \check{z}, \frac{\partial \check{z}_m}{\partial x}, \frac{\partial \check{z}_m}{\partial y}\right) dy$$

Ikinji integralyň aşagyndaky funksiýa,belli y-funksiýa,onda y-görä integrirlemek bolýar, we $\vartheta[\check{Z}_m(x,y)]$ funksional bolsa aşakdaky görnüşde eýe bolar.

$$\vartheta[\check{Z}_m(x,y)] = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, u_1(x), \ldots, u_m(x), \acute{u}_1, \ldots \acute{u}_m)\, dx$$

$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$-funksiýalar şeýle bir saýlanýar netijede $\vartheta[\check{Z}_m(x,y)]$-funksional ekstremuma ýeter ýaly.



1-nji surat

Diýmek $u_i(x)$ Eýleriň deňlemeler sistemasyny hökmany kanagatlandyrmaly:

Tablisa 6

Ugratmaly \ Barmaly		1	2	3	4	Serişdeler
	V_i / U_i	v_1	v_2	v_3	v_4	
1	u_1	2 / 90	4 / -	6 / -	10 / -	90
2	u_2	1 / 20	3 / 80	7 / -	4 / -	100
3	u_3	4 / -	8 / 20	13 / 80	7 / 40	140
Islegler		110	100	80	40	330

$$v_1 - u_1 = 2,$$
$$v_1 - u_2 = 1,$$
$$v_2 - u_2 = 3,$$
$$v_2 - u_3 = 8,$$
$$v_3 - u_3 = 13,$$
$$v_4 - u_3 = 7.$$

$$v_2 - u_1 = 4 - 0 = 4 = 4 = c_{12}$$
$$v_3 - u_1 = 9 > 6 = c_{13}$$
$$v_4 - u_1 = 3 - 0 = 3 < 10 = c_{14}$$
$$v_3 - u_2 = 9 - 1 = 8 > c_{23}$$
$$v_1 - u_3 = 2 - (-4) = 6 > 4 = c_{31}$$

$X(x_{ij})$ meýilnamanyň potensiallygy üçin her bir

$v_j - u_i = c_{ij}$.

deňlik ýerine ýetirilýär, beýleki komponentler nula deň, şonuň üçin hem degişli goşulyjylar nula öwrülerler. Şonuň üçin hem (13) deňligi

$$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \qquad (14)$$

görnüşde alarys. Bu bahany (6) deňsizlikde ornuna goýup

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x'_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \qquad (15)$$

deňsizlige geleris ýa-da (3) we (4) deňlikleri hasaba alyp

$$z_{\min} \geq z_X. \qquad (16)$$

deňsizlige geleris. Başga sözler bilen aýdylanda *X* meýilnama boýunça ulag çykdajylary minimum çykdajylardan kiçidir ýa-da deňdir.

Indi bolsa biz Potensiallar usulyny ulanmak üçin *U* we *V* potensiallary girizeliň (5). Onda biziň tablisamyz aşakdaky görnüşde ýazylar.

$$\begin{cases} \varphi_{u_1} - \frac{d}{dx}\varphi_{u'_1} = 0, \\ \varphi_{u_2} - \frac{d}{dx}\varphi_{u'_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{u_m} - \frac{d}{dx}\varphi_{u'_m} = 0, \end{cases}$$

Azat hemişelikler şeýle bir saýlanýarlar netijede, $\check{Z}_m(x,y)$, $x = x_0$ *we* $x = x_1$ gönülerde berilen gyra şertleri ýerine ýetirmeli.

Bellik. Gyra meseleleriniň takmyn çözüwlerini kesgitlemek üçin, wariasion usul däl-de, ýene-de bir gönü usul, ol hem bolsa köplenç ulanylýan B.G.Galerkiniň usulydiýilip atlandyrylýar. Bu usul örän amatly, çyzykly gyra meselelerini çözmek üçin, ýöne bu usul bir näçe çyzykly däl meseleleri hem çözmekde ulanmak bolar. Kesgitlilik üçin Galerkiniň usulyna seredeliň, özem örän köp aýratyn tejribelikde gabat gelýän ikinji tertipli çyzykly deňlemelerde

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bir tipli gyra şertleri bilen $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ (bir tipli däl gyra şertleri $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ näbellileri bilen çalyşyp

$$\check{z} = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

ýeňillik bilen bir tiplä getirmek bolýar).

(1) deňlemäni gysgaja ýazalyň

$$L(y) = f(x)$$

$[x_0, x_1]$-kesimde, doly üzüniksiz çyzykly baglanşyksyz funksiýalar sistemasyny saýlalyň

$$W_1(x), W_2(x), \dots, W_n(x), \dots \qquad (2)$$

$W_n(x_0) = W_n(x_1) = 0$, $(n = 1,2,\dots)$ gyra şertleri kanagatlandyrýan gyra meselesiniň takmyn çözülşini birinji n funksiýanyň sistemasynyň çyzykly kombinasiýasy görnüşde gözläliň (2):

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(x)$$

y_n-ni (1)-deňlemede ýerinde goýup,soňra α_i-koeffisentleri saýlalyň, netijede funksiýa

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(x)\right) - f(x)$$

$[x_0, x_1]$-kesimde her bir $w_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ funksiýa ortogonal bolar ýaly

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i(x)\right) - f(x)\right] w_i(x)dx = 0 \qquad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Hakykatdan hem y_n, haçan $n \to \infty$, takyk çözüwine ymtylmagyna garaşmak bolýar.

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i(x)$$

eger, alynan hatar ýygnanýan bolup her bir çlenlere görä iki gezeg differensirlemäge rugsat edilýän bolsa onda $L(\tilde{y}) - f(x)$ funksiýa $[x_0, x_1]$- kesimde her bir $w_i(x)$ funksiýalar sistemasyna (2) görä ortogonaldyr, sebäbi (2) -nji sistema doly,onda $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$, bu bolsa $\tilde{y}$ -iň (1) deňlemäniň çözüwini aňladýar, $\tilde{y}$ –iň $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}(x_1) = 0$, gyra şertlerinem kanagatlandyrýandygy aýdyňdyr.(sebäbi $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$).(3)-çyzykly sistemadan, hemma α_i-leri,oňa görä kesgitlemeli,a haçan $n \to \infty$ predele geçirmeklik bolsa,käwagtlarda mümkin bolýar,şoňa görä

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Şonuň üçin hem islendik ýol bererlikli meýilnamalar üçin alarys.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \\ \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij}.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

we x'_{ij} ýazylan (9) deňlik x_{ij} üçin hem dogry bolar:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right). \qquad (12)$$

Indi (9) deň özgertmeleri tersine geçirip

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} v_j x_{ij} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} u_i x_{ij}.$$

alarys we (8) deňliklerde hem şeýdip (7) deňlige meňzeş deňlik alarys:

$$S = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (v_j - u_i) x_{ij}. \qquad (13)$$

$$v_1(x'_{11}+x'_{21}+\ldots+x'_{m1})+$$
$$+v_2(x'_{12}+x'_{22}+\ldots+x'_{m2})+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n(x'_{1n}+x'_{2n}+\ldots+x'_{mn})$$

ýa-da

$$\sum_{j=1}^{n}\left(v_j\sum_{i=1}^{m}x'_{ij}\right).$$

Şuňa meňzeşlikde ikinji jemi hem

$$\sum_{i=1}^{m}\left(u_i\sum_{j=1}^{n}x'_{ij}\right).$$

görnüşde alarys. Onda (8) deňlik aşakdaky ýaly ýazylýar.

$$S=\sum_{j=1}^{n}\left(v_j\sum_{i=1}^{m}x'_{ij}\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(u_i\sum_{j=1}^{n}x'_{ij}\right) \qquad (9)$$

$\sum_{i=1}^{m}x'_{ij}$ jem *j* sütün boýunça meýilnamanyň komponentleriniň jemi deňdir we ol *j* kabul edijiniň isleglerine deňdir:

$$\sum_{i=1}^{m}x'_{ij}=b_{j.}$$

Şuňa meňzeşlikde jem *i* setir boýunça alynan meýilnamanyň komponentleriniň jemine deňdir we ol *i* ugrudyjydaky harytlaryň sanyna deňdir.

$$\sum_{j=1}^{n}x'_{ij}=a_i.$$

Bu setirler we sütünler boýunça alnan jemler islendik ýol bererlikli meýilnama üçin dogry bolar we şol sanda $X(x_{ij})$ meýilnama üçin hem dogrydyr:

hemişe,uly bolmadyk n (n=1,2,3,4,5) tükenikli (kä wagtlarda n=1) sanlar bilen çäklenmeli bolýar.Bu ýagdaýda ilki bilen diňe n funksiýalary $W_i(x)$ saýlamaly,şoňa görä dolylyk şertiniň geregi ýok bolýar we olary diňe çyzykly baglanşyksyzlyklary nyň,gyra şertlerini

$$W_i(x_0)=W_i(x_1)=0$$

Kanagatlandyrýanlaryny saýlamaly. Köplenç ýagdaýlarda koordinatalar funksiýasy diýilip atlandyrýanlary köpçlenler görnüşde almak bolýar.

$$(x-x_0)(x-x_1),(x-x_0)^2(x-x_1),(x-x_0)^3(x-x_1),\ldots$$
$$\ldots,(x-x_0)^n(x-x_1),\ldots$$

(bu ýagdaýda koordinatalar başlangyjyny x_0-nokada geçirmeklik amatly bolýar, onda (3) x_0=0 ýa-da trigonometrik funksiýa

$$\sin\frac{n\pi(x-x_0)}{x_1-x_0} \qquad (i=1,2,\ldots)$$

II bapa degişli meseleler

1. Funksionalyň ekstremumy barada meseläniň takmyny çözüwini tapmaly.

$$\upsilon[y(x)]=\int_0^1(x^3y''^2+100xy^2-20xy)dx,\qquad y(1)=y'(1)=0$$

2. Funksionalyň minimumy barada meseläniň takmyny çözüwini tapmaly we takyk çözüwi bilen deňeşdirmeli.

$$\upsilon[y(x)]=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)dx,\qquad y(0)=y(1)=0$$

3. Funksionalyň ekstremumy barada meseläniň takmyny çözüwini tapmaly we takyk çözüwi bilen deňeşdirmeli.

$$\upsilon[y(x)]=\int_1^2\left(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx,\qquad y(1)=y(2)=0$$

4. Funksionalyň minimumy barada meseläniň takmyny çözüwini Ritsiň usuly bilen tapmaly we takyk çözüwi bilen deňeşdirmeli.

$$\upsilon[y(x)]=\int_0^2(y'^2+y^2-2xy)dx,\qquad y(0)=y(2)=0$$

5. Differensial deňlemäni takmyny çözüwini Ritsiň usuly bilen tapmaly

$$y''+x^2y=x,\qquad y(0)=y(1)=0$$

$y_2(x)$ we $y_3(x)$ kesgitlemeli we olaryň bahalaryny x=0,25, x=0,5 we x=0,75 nokatlarda olaryň bahalaryny deňeşdir.

Funksionala nähili baha berýändigini seredeliň (ulag çykdajylary iň az). X' meýilnama üçin onuň potensiallyk şerti kanagatlandyrýanlygy belli däl, ýöne X meýilnamanyň potensiallygy üçin maketiň her bir (i,j) öýjügine (1) deňsizlik

$$v_j-u_i\le c_{ij}$$

degişlidir ýa-da tersine

$$c_{ij}\ge v_j-u_i. \tag{5}$$

Maketiň her öýjüginden degişli x'_{ij} element alyp ony bu deňsizligiň iki bölegine-de köpeldip jemläp alarys:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x'_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(v_j-u_i)x'_{i\,j}. \tag{6}$$

Bu deňsizligiň san bölegini gysgalygy üçin S bilen belleýäris:

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(v_j-u_i)x'_{i\,j}, \tag{7}$$

Bu jemi tapawut görnüşde hem ýazyp bolar:

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}v_jx'_{ij}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}u_ix'_{i\,j}. \tag{8}$$

(8) jemi aşakdaky ýaly özgerdeliň. Ol jemleriň birinjisi açyk ýagdaýda

Ähli öýjükler üçin potensiallaryň tapawudy tarifleriň sanyna deň ýa-da ondan kiçi bolmalydyr, *X* belgilenen öýjükler üçin bolsa ol san tarifleriň sanyna deň bolmalydyr. Bu şertleri kanagatlandyrýan meýilnama potensial meýilnama diýilýär. Şeýlelik-de esasy teoremany aşakdaky ýaly aýdyp bolar; eger-de ulag meselesiniň käbir meýilnamasy potensial bolsa, onda ol meýilnama optimaldyr.

Subudy. Goý käbir X(Xij) meýilnama üçin potensiallyk şerti ýerine ýetirýän bolsun, yagny (1) we (2) şertleri kanagatlandyrýan U_i we V_j sanlaryň ulgamy bar bolsun.

Tablisa 5

	v_1	v_2	v_j	v_n	
u_1	c_{11}	c_{12}	c_{1j}	c_{1n}	a_1
u_2	c_{21}	c_{22}	c_{2j}	c_{2n}	a_2
u_i	c_{i1}	c_{i2}	c_{ij}	c_{in}	a_i
u_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{mj}	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	b_j	b_n	Σ

Başga söz bilen aýdanyňda goý *X* meýilnama potensial bolsun. Bu meýilnamanyň optimal boljakdygyny subut edeliň.
X meýilnama:

$$z_X = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \qquad (3)$$

Funksionala baha berýän bolsun. Bize *X* meýilnamanyň optimallygy ýa-da däldigi belli däl, şonuň üçin hem optimal $X'(x'_{ij})$ meýilnamany alyp onuň:

$$z_{\min} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x'_{ij} \qquad (4)$$

III Bap. Optimal dolandyrmanyň meselesi

Giriş

Her bir adam wagtal-wagtal durmuşda gabat gelýän dürli meseleleri çözmeli bolýar. Ol meseleler netijeli ýeke täk ýol ýa-da usul bilen çözülmeýän bolmagy mümkin. Bu ýagdaýlarda meseläniň iň oňat amatly çözüliş usulyny gözläp tapmaly bolýar. Ýöne dürli ýagdaýlarda iň oňat çözüwler biri-birinden tapawutly bolmagy mümkin. Meselem okuwçy mekdepden uzakda ýaşaýan bolsa, onda ol mekdebe tramwaýda 30 minut wagtda ýa-da ýoluň bir bölegini awtobus bilen, a galan beýleki bölegini bolsa, trolleýbus bilen 20 minut sarp edip geçip biler. Eger biz iki çözüwleri hem deňeşdirsek, onda ikinji çözüwiň oňatlygy aýdyň görünýär. Haçan mekdebe minimum wagtda barmaly bolsa, ýagny onuň kriteriýasy oňat minimum wagta görä. Başga kriteriýa görä (meselem, minimal baha ýa-da harajat, minimal dürli görnüşli ulaglar) birinji çözüw iň oňat bolýar. Durmuşda bolsa köplenç ýagdaýlarda **iň oňat** diýen düşünje san taýdan kriteriýasy bilen aňladylmagy mümkin, minimum çykdaýjy, normadan minimum gyşarma, maksimum tizlik, girdeýji we ş.m. Şoňa görä matematiki meseläniň (optimum – iň oňat, ýa-da amatly) optimal netijesini tapmak üçin meseläni goýmak bolýar. Sebäbi iň kiçi ýa-da iň uly bahasyny tapmakda aýratyn tapawut ýok. Meseläniň optimal çözüwini tapmak meselesine optimallaşdyrma meselesi diýilýär.

Optimal netije düzgin boýunça ýüzüniň ugruna birden tapylmaýar, ol prossesiň netijesinde tapylýar we optimallaşdyrma prossesi diýilýär. Prossesde ulanylýan optimallaşdyrma usuly, optimallaşdyrma usullary diýen ada eýe boldy. Ýönekeý ýagdaýlarda biz ýüzüniň ugruna meseläniň şertini matematiki dile geçirýäris we meseläniň matematiki şekillendirilişini alýarys. Ýöne tejribelikde meseläniň matematiki şekillendiriş prossesi ýeterlik derejede çylşyrymly.

Optimallaşdyrma usullary dersi matematiki ders bolup, ekstremal meselelerini öwrenmek bilen meşgul bolýar we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmek bilen meşgul bolýar.

Umumy ýagdaýda matematiki görnüşdäki ekstremal meseläniň goýulşy f(x_1,x_2 ,..., x_n)- maksat funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahasyny kesgitlemekden durýar, haçan

g_i(x_1,x_2 ,..., x_n)≤b_i (i=1,2,...,m) şerti ýerine ýetirende, nirede f, g_i- berilen funksiýalar, a b_i- haýsy hem bolsa bir hakyky sanlar.

f we g_i funksiýalaryň häsiýetine baglylykda optimallaşdyrma usullaryny aýratyn özbaşdak ders höküminde seretmek bolýar, ol kesgitli meseleler synpyny öwrenmek we olaryň çözüliş usullaryny işläp düzmeklik bilen meşgul bolýar. Şeýle hem ol çyzykly we çyzykly däl programmirleme meselelerine bölünýär. Eger hemme f we g_i funksiýalar çyzykly bolsalar onda degişli mesele çyzykly programmirlemäniň meselesi bolýar. Eger haýsy hem bolsa funksiýalaryň birisi çyzykly däl bolsa onda degişli mesele çyzykly däl programmirlemäniň meselesi bolýar. Optimallaşdyrma usullarynda iň köp öwrenilen bölüm bolup çyzykly programmirlemäniň meselesi bolup durýar. Çyzykly programmirlemäniň meselesini çözmek üçin birgiden peýdaly usullar, algoritmler we programmalar işlenip düzülendir.

Çyzykly däl programmirlemäniň meselesiniň içinde giňden köp öwrenilen mesele güberçek programmirlemäniň meselesidir. Bu meseleleriň çözüwleriniň netijesinde minimum güberçek (ýa-da maksimum oýuk) berilen funksiýalar güberçek ýapyk köplükde kesgitlenilýär. Öz gezeginde güberçek programmirlemäniň meselesiniň arasynda giňden yzygiderli kwadrat programmirlemäniň meselesi derňelýändir. Şeýle meseleleriň umumy ýagdaýda çözülişiniň netijesinde maksimum (ýa-da minimum) kwadrat funksiýalary tapmaklyk talap edilýär, haçan onuň näbellileri haýsy hem bolsa bir deňsizlikler ýa-sa çyzykly deňlemeler sistemasyny ýa-da çyzykly deňlemeler we çyzykly deňsizlikler sistemasyny bilelikde özünde saklaýan şertleri kanagatlandyrýan bolsa, matematiki programmirlemäniň

Bu ýerde nokatlar $x_{ij}>0$ bahalary alýan öýjükleri aňladýar ($x_{ij}<0$ meseläniň setirine görä bolup bilmez).

Asiklik meýilnamalaryň içinde optimal meýilnamalaryň hem boljakdygyny görkezeris.

Eger-de asiklik $X(x_{ij})$ meýilnamada položitel komponentleriň sany

$$N = m + n - 1$$

(beýleki komponentler nula deň) bolsa, onda öýjükleriň toplumyndaky $x_{ij}>0$ bahalaryň ýerleşen tarifleriň matrisasyndaky c_{ij} elementlere X-belgilenen elementler diýilýär.

Eger-de položitel komponentli meýilnamanyň sany

$$N < m + n - 1,$$

bolsa, onda öňki alnan öýjükleriň üstüne (m+n-1) sana ýeter ýaly we öňküler bilelikde sikli emele getirmez ýaly nul bahaly öýjükleri goşmaly. Şunlukda ähli alnan öýjükleriň c_{ij} tarifleri X belgilenen diýip hasap edilýär.

Asiklik meýilnamanyň komponentleriniň sany (m+n-1) sandan uly bolup bilmez, sebäbi N=m+n-1 bolanda subut edilen teorema görä saýlanyp alnan öýjüklerde sikl gurup bolar.

Teorema 2 (esasy teorema). Eger-de ulag meselesiniň käbir $X=(x_{ij})_{m+n}$ meýilnamasy üçin ähli i=1,2,..,m; j=1,2,…,n üçin

$$v_j - u_i \le c_{ij} \tag{1}$$

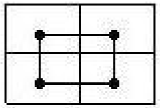
deňsizligi kanagatlandyrýan x_{ij}>0 ($x_{ij}(-X)$) üçin bolsa

$$v_j - u_i = c_{ij} \tag{2}$$

deňligi kanagatlandyrýan u_1, u_2,…,u_i,...,u_m; v_1, v_2,…, v_j,...,v_n sanlaryň içinde $m+n$ sany ulgamyny saýlap alyp bolsa, onda X meýilnama optimaldyr. u_i, v_j sanlara ugradyjylaryň we kabul edijileriň potensiýalary diýilýär. (1) we (2) şertlere X meýilnamanyň potensiallaşdyrma şerti diýilýär.

Her bir (i,j) öýjüge iki potensial degişlidir; i-u we j-v degişlidir. Potensialaşma şerti aşakdaky ýaly aýdylýar:

Tablisa 3



Goý, ($m+n$) öýjük aýlanyp alnyp setirleriň we sütünleriň jemi ($m+n$-1) bolan maket üçin teorema dogry bolsun. Teoremanyň subudy ($m+n$) üçin alarys.

Birinji ýagdaý; Belgilenen öýjükleriň içinde bir hatarda ýeke özi bar bolan öýjük bar bolsun. bu öýjügi taşlap onuň ýerleşen setirini hem ullanmaýarys. Şeýlelik-de setirleriň sany bir birlik kemelen sütünleriň öňküligine galan makede geleris.

Bu ýagdaýda setirleriň we sütünleriň bilelikdäki jemi ($m+n-1$) bolar we bellenen öýjükleriň bir-birlik kemeler. Diýmek, matematiki induksiýa görä bu ýagdaý üçin teorema dogrydyr.

Ikinji ýagdaý; Goý indi her bir hatarda sütünde birden köp bellenen öýjük bar bolsun ýa-da öýjükleriň hiç biri bolmasyn. Bir öýjügi "+" bilen belgiläp beýleki sütündäki öýjüge düşýäris, indi sütün boýunça hereket edip beýleki setire düşeris we şuňa meňzeşlikde dowam edýäris. Käbir etapdan soňra biz öňki belenen öýjüge geleris, ýapyk zynjyr alarys ol bolsa sikldir. Ýokarda görkezilişi ýaly teorema m=2, n=2 ($m+n$=4) üçin dogrudyr. Onda ýokarda görkezilen ýagdaýa görä $m+n$=5 ($m+n$>4); $m+n$=6 ($m+n$>5) we şuňa meňzeş ýagdaýlar üçin teorema dogrudyr.

Eger-de komponentleriniň meýilnamalary $x_{ij}>0$ bolan öýjükleriň toplumy özünde hiç bir sikli saklamaýan bolsa, onda $X(x_{ij})$ ýol bererlik meýilnama sikli däl (asikliki) diýilýär. Onuň mysaly aşakdaky tablisada berlen.

Tablisa 4

•	•			
	•	•		
		•	•	
			•	
				•
				•

aýratyn synpy meseleleri bolup bitin sanly, parametrik we ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesine degişlidir.

Bitin sanly programmirlemäniň meselesinde näbelliler diňe bitin sanly bahalary kabul edip alyp biler. Parametrik programmirlemäniň meselesinde maksat funksiýa ýa-da funksiýa näbellileriň mümkin bolan oblastyny kesgitleýän , ýa-da ikisi hem degişlilikde haýsy hem bolsa bir parametra bagly bolsa ülüşli çyzykly programmirlemäniň meselesiniň maksat funksiýasy bolsa iki sany çyzykly funksiýalaryň gatnaşygy görnüşinde getirilýär, kesgitlenýän funksiýanyň oblastynda bolsa näbellileriň mümkin bolan üýtgemesi hem çyzykly bolýar.

§1. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň san usullary bilen çözülişi

Bu meselede ýönekeý matematiki modeliň optimallaşdyrmasyna seredilýär. Gözlenýän maksat funksiýa bir näbellä x degişli bolup, hakyky okda ýerleşen kesimiň köplügine seredilýär.

$$f(x) \rightarrow \min$$
$$x \in [a, b] \qquad \textbf{(1)}$$

(f(x)→max) ekwiwalent (-f(x) →min) şoňa görä diňe minimum meselesine hem ýeterlik bolup durýar.
(1) matematiki meseläniň amaly görnüşine seretsek, ol ýeke-täk näbellili bilen dolandyrmak meselesine gelýär. A bir näbelli meseläniň minimumlaşdyrma meselesi bolsa, ýüze çykýan bir näçe çylşyrymly meseleleri çözmekde hökmany suratda ulanmak üçin gerek bolýar.

1. <u>Bir näbellili funksiýanyň minimumy.</u>

Goý f(x)-funksiýa U-köplükde hakyky okda kesgitlenen bolsun.
1. $x^* \in U$, san global minimumyň (absolýut) nokady ýa-da f(x) funksiýanyň minimum ýönekeý nokady diýilip U-köplükde .
Eger $f(x^*) \le f(x), \ \forall x \in U$ ýerine ýetýän bolsa $f^* = f(x^*) = \min\limits_U f(x)$ bahsyna global (absolýut) minimum diýilýär, ýa-da ýöne f(x) funksiýanyň U-köplükde minimumy diýilýär.

Geljekde U-köplükdäki f(x) funksiýanyň hemme minimum nokatlarynyň köplügini U* bilen belläliň.
2. $\tilde{x} \in U$ san f(x)-funksiýanyň lokal minimum nokady diýilip aýdylýar, eger $f(\tilde{x}) \le f(x) \forall x \in U$, ýagny $\tilde{x}$ nokada ýakyn bolan nokatlara;

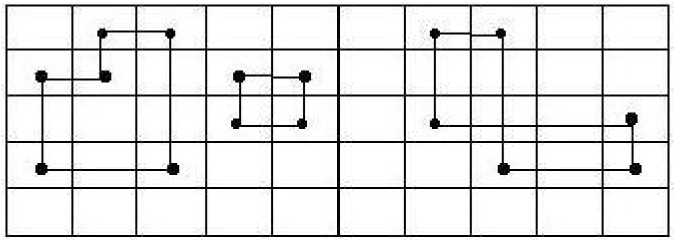
Eger $E, \varepsilon > 0$ san bar bolup $\forall x \in \{x | x \in U|, |x - \tilde{x}| < \varepsilon\}$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa.
3. Goý funksiýa f(x), U köplükde aşakdan çäklendirilen bolsun, ýagny

geçýär. Ulag meselesinde garşylygyň rolyny her marşrutyň tarifi oýnaýar.

Käbir kömekçi düşünjelere seredeliň;

Maketdaky öýjükleriň islendik köplügine <u>toplum</u> diýilýär. Eger-de topluma girýän iki goňşy öýjük bir hatarda (setirde, sütünde) ýerleşýän bolsa şunlukda hiç bir üç öýjük bir hatarda ýerleşmese, onda öýjükleriň beýle toplumyna yzygiderligine <u>zynjyr</u> diýilýär. Zynjyryň mysaly hökmünde tablisa 2 alynýar.
Alnan öýjükler gönüler bilen birikdirilen, kesimleriň kesişýän öýjükleri alynmaýar. Eger-de zynjyryň soňky öýjügi birinji öýjük bilen bir hatarda ýerleşse, onda beýle ýapyk zynjyra <u>sikl</u> diýilýär.Onuň görnüşleri 2-nji tablisada berlen.

Tablisa 2



Teorema 1. *Goý m setirli we n sütünli maketde (matrisada) m+n öýjük islendik ýagdaýda belgilenen bolsun we goý $m + n \le mn$. Bu ýagdaýda depeleri belgilenen öýjükde (hemmesi bolmazlygy hem mümkin) ýerleşen sikli elmydama gurup bolar.*
Bellik. m we n bitin sanlar, şonuň üçin $m + n \le mn$ deňsizlik elmydama ýerine ýetýan däldir. Mysal üçin bu sanlaryň haýsy hem bolsa biri birlik bolsa, onda deňsizlik ýerine ýetmeýär. Mysal üçin, m=3. n=1 bolsa $3+1 > 3 \cdot 1$. Ỳöne m=2, n=2 bolsa $2+2 = 2 \cdot 2$ deňligi alarys. m we n birwagtda ikiden uly bolsa deňsizlik elmydama ýerine ýetýär.
Subudy. m=2, n=2 ýagdaýa seredeliň. Maketde $m+n$=4 öýjügi almaly. Bu ýagdaýda teorema dogry, alnan öýjükler sikl emele getirýär. Goý indi m>2, n>2. Subudyny matematiki induksia usuly bilen geçirýäris.

§6. Ulag meselesiniň potensiallar usuly bilen optimal çözülişi

Umumy ýagdaýda optimallaşma meselesi simpleks usuly bilen çözülýär. Ýöne bu usul bilen ulag meselesini çözmeklik örän uly hasaplamalary talap edýär. Şonuň üçin hem bu mesele potensiallar usuly ý-da paýlaşdyrma usuly bilen çözülýär. Ulag meselesiniň islendik çözüwi maketlerde amala aşyrylýar. Potensiallar usulyny ulanmak üçin maket aşakdaky görnüşdedir;

Tablisa 1

Kabul edilýän / Ugradylýan		*1*	*2*	…	*j*	…	*n*	Ätiýaçlyklar
	v_j / u_i	v_1	v_2	…	v_j	…	v_n	
1	u_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	….	c_{1n}	a_1
2	u_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	u_j	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	α_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	u_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	α_m
Islegler		*b1*	*b2*	…	b_j	…	b_n	$\Sigma\alpha_j=\Sigma bj$

Maketiň esasy bölegi iki sany çyzyk bilen belgilenendir. Ol *mxn* öýjükden durýandyr. Bu bölege degişli her bir öýjük (*i,j*) belgi bilen bellenendir. Mysal üçin (2,1) belgi ikinji setirdäki birinji sütündäki öýjügi aňladýar. Maket özünde tarifleriň matrisasyny hem saklaýar. v_1 setiriň we u_i sütüniň näme aňladýandygyny soňra düşündireris.

Elektrik torundaky potensiallara meňzeşlikde sanlara degişli bolan potensiallar usuly ady girizýär. Elektrik torundaky bir düwünden beýleki düwüne tok haçanda olardaky potensiallaryň tapawudy simiň gar garşylygyndan köp bolsa tok

$f(x) \geq A > -\infty \forall x \in U$ f* -san aşaky çäginiň nokady diýilip f(x) funksiýa, U- köplükde aýdylýar ($f_* = \inf_U f(x)$), eger $f(x) \geq f_*$ $\forall x \in U$ şeýle hem $\forall \varepsilon > 0$ şeýle bir $x_\varepsilon \in U$ nokat tapylyp $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$, ýagny f(x) funksiýanyň bahalarynyň U-köplükde , f* - ýeterlik derejede ýakyn nokat tapylar.

Eger f* = -∞ bolsa onda, oňa aşakdan çäklendirilmedik diýilip aýdylýar.

Bellikler.

1. Global f(x) min funksiýa f(x) lokal min hem bolýar, tersine umumy ýagdaýda bu ýerine ýetmeýär.
2. U-köplükde, U^*-min nädogry nokatlaryň köplügi f(x)-funksiýa tükenikli ýa-da tükeniksiz sany nokatlardan durýan bolup, boş bolmagy hem mümkin.

Unimodel funksiýalar

Eger f(x) funksiýa U-köplükde globaldan başga lokal minimumy hem bar bolsa, onda f(x) funksiýanyň minimumlaşmasy düzgün boýunça kynlaşýar. Bize belli bolşy ýaly hususy, f(x)-funksiýanyň minimum nokadyny gözlemeklik her bir lokal minimum, şol wagtyň özünde global minimum hem bolmaklygyny düzgünleşdirilen usuldyr.

Kesgitleme 1. f(x) funksiýa unimodel diýilip, $[a,b]$ kesimde aýdylýar. Eger ol şol kesimde üznüksiz bolup, şeýle bir α we β sanlar bar bolup $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär:

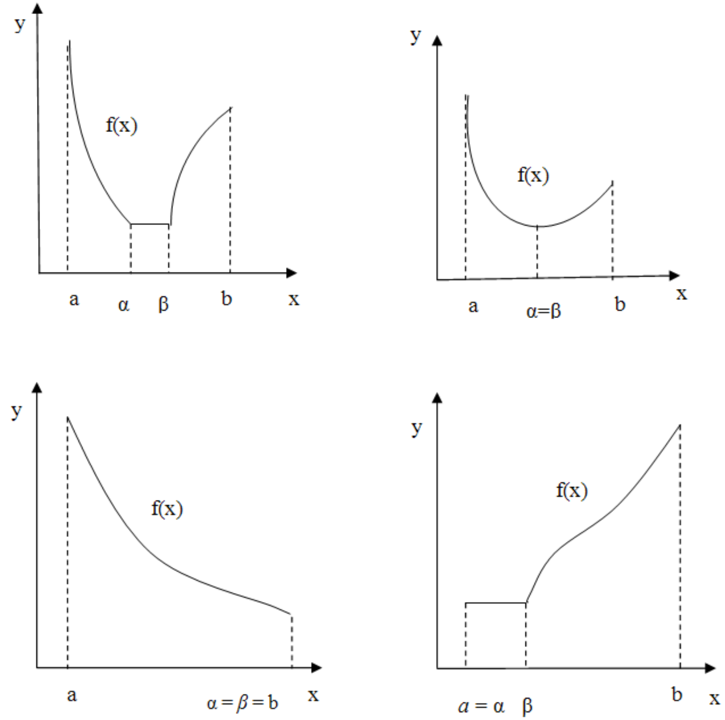
a) Eger a<α bolsa, onda $[a;\alpha]$ - kesimde f(x) funksiýa monoton kemelýär;

b) Eger β<b bolsa, onda $[\beta;b]$ kesimde f(x) funksiýa artýar.

ç) Haçan $x \in [\alpha;\beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a;b]} f(x)$

Biz $[a;b]$ kesimdäki unimodel funksiýalaryň köplügini geljekde Q $[a;b]$ bilen bellejekdiris.

$[\alpha;\alpha]$, $[\alpha;\beta]$ we $[\beta;b]$ bir ýa-da iki aralykda nokadyň azmagynyň mümkindigini belläliň. Unimodel funksiýalaryň hemişelikligi we kesimlerde nokadyň azmagynyň monotonlygyny ýerleşişiniň bir näçe wariantlary görkezilendir.



1-nji surat

Birinji kesgitlemeden unimodel funksiýalaryň aşakdaky häsiýetleri gelip çykýar.

1. Unimodel funksiýanyň, $\forall$ lokal minimumyň nokady, $[a; b]$ kesimde aralykda global minimumyň hem nokady bolup durýandyr.
2. $[a; b]$ kesimde unimodel funksiýa, $\forall$ kiçi kesimde $[c; d] \in [a; b]$ hem unimodeldir.
3. Goý f(x) $\in$ Q $[a; b]$ we a$\leq x_1 < x_2 \leq$ b. Onda:

	0	80	40							
		0	40							
			0							

$$V_j - U_i \leq C_{ij}$$

Soňky tablisanyň esasynda biz meseläniň çözülişiniň 1-nji tapgyryny ýerine ýetirdik. Demirgazyk-Günbatar usulyny ulandyk.

$$V_j - U_i = C_{ij}.$$

Tablisa 4

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0		
1 20	3 -	7 -	4 -	100	100	80	0
4	8	13	7	140	140	140	140
110	100	80	40	a_i b_j			
20	100	80	40				
0	100	80	40				
	20	80	40				

Tablisa 5

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0					
1 20	3 80	7 -	4 -	100	100	80	0			
4 -	8 20	13 80	7 40	140	140	140	140	120	40	0
110	100	80	40	a_i b_j						
20	100	80	40							
0	100	80	40							
	20	80	40							

eger $f(x_1) \leq f(x_2)$, onda $x^* \in [a; x_2]$;

(2)

eger $f(x_1) \geq f(x_2)$, onda $x^* \in [x_1; b]$

x^*- $[a; b]$ kesimde f(x) funksiýanyň haýsy hem bolsa, bir minimum nokady.

§2. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň Lipşisanyň şerti

Bir ölçegli minimumlaşdyrma, bir näçe usullary ulanmak mümkin bolýar, haçan maksat funksiýa f(x) – funksiýa $[a;b]$- kesimde üýtgemesiniň tizligi haýsy hem bolsa, bir san bilen hemme ýerlerde kesgitlenýän bolsa, bu ýagdaýda f(x) – funksiýa $[a;b]$- kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýär. Şoňa görä tejribelikde maksat funksiýa f(x) tejribelige degişli optimallaşdyrma meselelerde ýokarda görkezilen häsiýete eýedir.

Kesgitleme 1. $[a;b]$- kesimde f(x) – funksiýa Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýär, eger şeýle bir L>0 hemişelik san tapylyp,

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \qquad (1)$$

şeýle deňsizliligi islendik $x'', x' \in [a;b]$ üçin ýerine ýetirýän bolsa (L – Lipşesanyň hemişeligi).

Bellikler:

1. Eger ýokardaky deňsizlik L – hemişelik çin ýerine ýetýän bolsa, onda ol hemme $L' > L$ üçin hem ýerine ýetýändir. Şoňa görä Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýän hemişelikler tükeniksiz köpdirler. Olaryň hemmesi f(x)- funksiýa üçin adalatlydyr. Minimumlaşdyrma üçin ulanylýan algaritmde L – parameter hökminde degişli bolup, iň oňat netije, haçan L – minimum hemişelik diýilip alynan Mahalynda.

2. Deňsizligiň şertinden [a;b] – kesimde f(x)- funksiýanyň üznüksizligi gös göni gelip çykýar. Şoňa görä Weýerştrassyň teoremasy esasynda [a;b] – kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetirýän funksiýa, şol kesimde bolmanda bir minimum nokada eýedir.

3. Lipşisanyň şerti islendik hordanyň grafiginiň funksiýasy f(x)- funksiýanyň burç koiffisiýentiniň moduly Lipşisadan uly däldir.

Ỳokarda belleýşimiz ýaly ulag meselesiniň çözülişi ilki bilen Demirgazyk-Günbatar soňra Potensiallar usuly bilen dowam etdirilýär.

Ỳokardaky meslelä görä biz aşakdaky tablisalary düzeris.

Tablisa 2

2	4	6	10	90	0
1	3	7	4	100	100
4	8	13	7	140	140
110	100	80	40	a_i b_j	
20	100	80	40		

$x_{21} = \min\{100;20\} = 20$

$x_{22} = \min\{80;100\} = 80$

Tablisa 3

2 90	4 -	6 -	10 -	90	0	
1 20	3 -	7 -	4 -	100	100	80
4	8	13	4	140	140	140
110	100	80	40	a_i b_j		
20	100	80	40			
0	100	80	40			

§5. Ulag meselesiniň optimal çözüliş usullary

Ỳokarda görkezilen Simpleks usuly bilen ulag meselesini hem çözmek bolýar. Ỳöne ýerine ýetirmeli ädimleriň köp sanly bolýandygy üçin biz ony Demirgazyk-Günbatar, Potensiallar, Kiçijik kwadratik usullary bilen optimal we gysga ýollar bilen çözüp bolýandygyny göreris.

Goý, bize takyk bir mysal berlen bolsun, ýagny

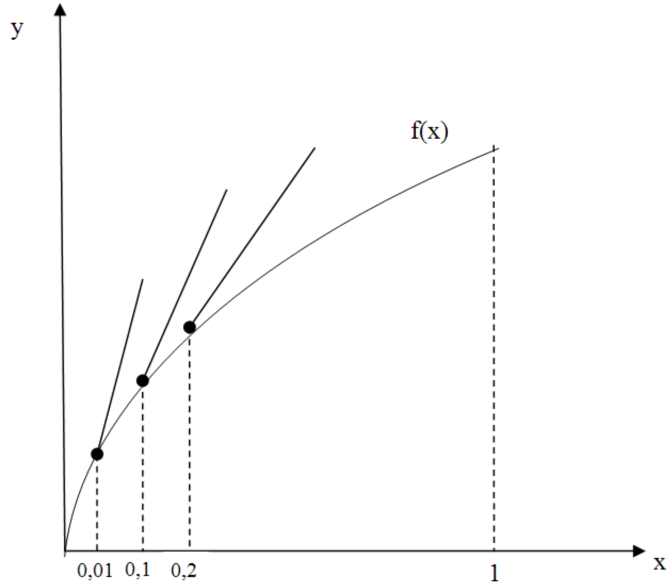
Tablisa 1

Barmaly / Uratmaly	1	2	3	4	Bar bolan serişdeler
1	2	4	6	10	90
2	1	3	7	4	100
3	4	8	13	7	140
Islegler	110	100	80	40	330

Bellik. Ỳokarda seredilen ulag meselesiniň matematiki modeli 4 görnüşde düzülmeli bolmagy mümkin. Olar aşakdaky görnüşlerde seredilýär:

1) Ulag meselesi ýeke-täk bir ulag bilen ýeke-täk bir ýük bilen ýagdaýda;
2) Düri ulaglar ýeke-täk bir ýüki ertmeli;
3) Dürli ýükler ýeke-täk bir ulag bilen eltilmeli;
4) Dürli ulaglar bilen dürli ýükleri daşamaly.

1-punktda seredilýän hususy hal iň ýönekeý . 2-nji we 3-nji hususy hal 1-njiden çylşyrymly, ýöne 4-nji hususy hal has çylşyrymlysy bolup hyzmat edýär. Şonuň üçin 2-nji, 3-nji we 4-nji ýagdaýlar birnäçe tapgyrda ýerine ýetirilýär.



1-nji surat

4. Eger f(x)- funksiýa [a;b] – kasimde üznüksiz önüme eýe bolýan bolsa, onda ol şol kesimde Lipşisanyň şertini ýerine ýetýändir.

$$L = \max_{[a;b]} |f'(x)|$$

Hakykatdan tükenikli artdyrmanyň formulasynda $\forall$ azat nokatlary üçin $x', x'' \in [a;b]$-den f(x’)-f(x’’)=f ‘(ξ)(x’)-f(x’-x‘‘)-alarys, nirede ξ-x‘ we x‘‘ nokadyň arasyndaky nokatdyr. Bu ýerden

$$|f'(x)| \le \max_{[a;b]} |f'(x)| = L$$

5. Eger $a<x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, f(x) [a;b] – kesimde üznüksiz bolsa we Lipşisanyň şertini her bir $[x_i, x_{i+1}]$ ýerine ýetirýän bolsa onda, ol [a;b] – kesimiň hemme ýerinde ýerine ýetirýändir.

$$L = \max_{0 \le i \le n-1} L_i$$

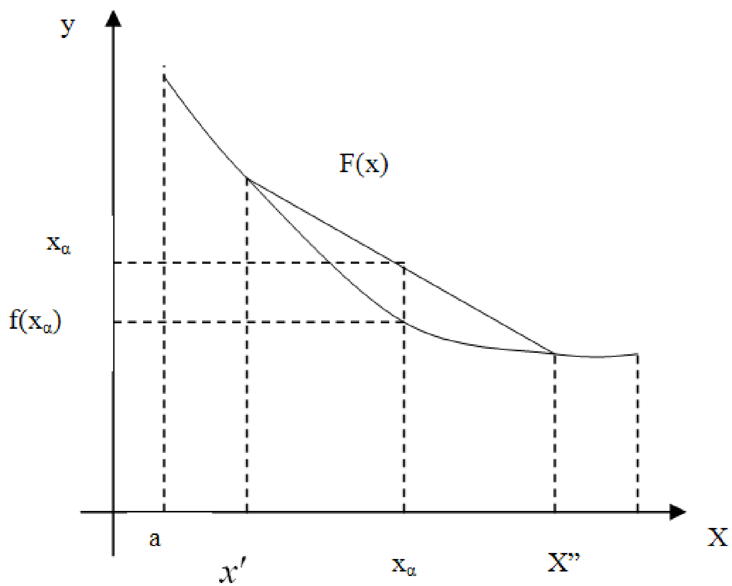
§3. Birölçegli optimallaşdyrma meselesiniň güberçeklik şerti

Kesgitleme 1. $[a;b]$ kesimde berlen f(x) – funksiýa şu kesimde güberçek diýilip aýdylýar, eger $\forall$ hemme x', $x'' \in [a;b]$ we $\alpha \in [0;1]$ azat san üçin aşakdaky deňsizlik ýerine ýetýän bolsa

$$f[\alpha x' + (1-\alpha)x''] \leq \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x'') \qquad (1)$$

Güberçek funksiýalaryň esasy häsiýetlerini sanalyň

1. Eger f(x) – funksiýa $[a;b]$ kesimde güberçek bolsa, onda ol $\forall[x';x''] \subset [a;b]$- kesimde onuň grafigi hordadan ýokarda ýerleşen däldir, ýagny absissalar okunda x' we x'' nokatlardan geçirlen grafik.



1-nji surat

Horda bilen güberçek funksiýanyň özara ýerleşişleri.

Eger-de (6)-nyň esasynda barmaly punktymyzda isleg az bolsa, onda ugradýan punktlaryň serişdeleriniň üstüne ýetmeýän bölegi goşup, onuň eltmesiniň bahasyny 0-hasap edýäris.

Edil şonuň ýaly hem haçan islegler az bolup serişde köp bolsa, onuň eltilmeli bahasyny 0-diýip hasap edip, açyk modeli ýapyga öwürip meseläni çözýäris.

1)

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{in}=a_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mj}+\ldots x_{mn}=a_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

2) Serişdeler ähli punktlara dagadylmaly

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{i1}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{i2}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{ij}+\ldots+x_{mj}=b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{in}+\ldots x_{mn}=b_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Hemme islegler kanagatlandyrylmaly.

Bu mesele çyzykly programmirlemäniň meselesine görä

$$x_{ij}\geq 0, \quad i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

şerti kanagatlandyrmaly. Meseläniň şertine görä

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

hemme bar bolan serişdeler hemme gerek bolan islegleri kanagatlandyrmaly. Bu ýagdaýda düzülen model ýapyk model diýilip meseläni çözmek üçin hökmany we ýeterlik şerti diýilip hasaplanýar.

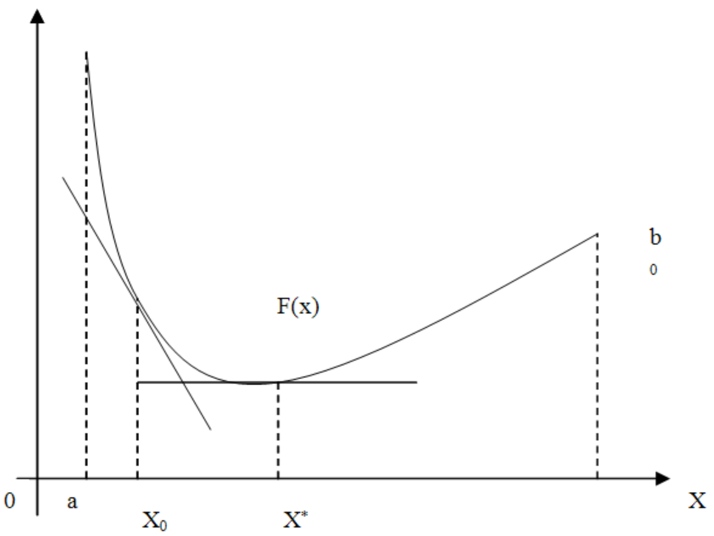
Mesele açyk diýilip hasap edilýär, eger-de

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (6)$$

2. Matematiki derňew kursyndan funksiýanyňgüberçekligi aşakdaky şertler bilen bellidir:

a) $[a;b]$- kesimde differensirlenýän f(x)- funksiýanyň güberçek bolmaklygy üçin hökmany we ýeterlik şerti, onuň önümi $f'(x)[a;b]$- kesimde kemelmeli däldir;

b) $[a;b]$-kesimde 2 gezek differensirlenýän funksiýanyň güberçek bolmaklygy üçin hökmany we ýeterlik şerti $x\in[a;b]$ $f''(x)\geq 0$ deňsizligi ýerine ýetirmeli.



2-nji surat

Güberçek differensirlenýän funksiýanyň grafigi bilen oňa bolan galtaşmanyň özara ýerleşişleri.

3. $[a;b]$-kesimde differensirlenýän f(x) – funksiýanyň güberçekliginiň şerti şol kesimde $\forall f(x)$- funksiýanyň grafigine bolan galtaşma grafikden ýokarda (ýerleşip) bilmeýär.

4. Eger f(x) güberçek differensirlenýän $[a;b]$- kesimde funksiýa bolsa we $x^*\in[a;b]$- nokatda aşakdaky şerti ýerine ýetirýän bolsa

$$f'(x^*) = 0, \qquad (1)$$

onda $x^*;[a;b]$- kesimde f(x) – funksiýanyň global minimum nokady bolýar.

5. $\forall[a;b]$-kesimde güberçek üznüksiz funksiýanyň şol kesimde unimodel funksiýadygyny görkezmek bolýar. Tersine umumy ýagdaýda dogry däldir.

Şeýlelikde ýokarda bellenilen häsiýetlerden başga hem, güberçek funksiýalar unimodel funksiýalaryň hemme häsiýetlerine hem eýedir.

Bellik funksiýanyň güberçekligini tejribelikde derňelende onuň ýerine ýetirýän deňsizligini örän az ýagdaýlarda ulanyp bolýar. Şoňa görä gerek bolýan gezek, differensirlenýän funksiýa güberçekligiň differensiýal kriteriýasyny ulanmak amatly bolýar. (häsiýet – 2)

Edil şonuň ýaly hem unimodellik funksiýalar üçin kesgitleme 1 köplenç ýagdaýa kynçylyk döredýär. Onuň üçin unimodelligini kepillendirmek üçin, onuň ýylmanaklygyny göz öňüne tutup, güberçeklik kriteriýasyny ulanmak bolýar.

Eger funksiýa güberçek bolsa, onda ol unimodeldir. Tersine umuman dogry däldir.

Tablisa 1

Barmaly / Ugratmaly	*1*	*2*	…	*j*	…	*n*	Bar bolan serişdeler
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1j} x_{1j}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2j} x_{2j}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	… …	c_{ij} x_{ij}	… …	c_{in} x_{in}	a_i
…	… …	… …	… …	… …	… …	… …	… …
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mj} x_{mj}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Islegler	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

§4. Ulag meselesiniň goýluşy we onuň matematiki modeli

Bize belli bolşy ýaly, çyzykly programmirlemäniň meselesini optimal çözmek üçin biz Simpleks usuly ulanyp, ony biz optimal çözüp bilýäris. Ỳokarda görkezişimiz ýaly bu usul hemme çyzykly programmirlemäniň meseleleri üçin uniwersal usul bolup hyzmat edýär.

Çyzykly programmirlemäniň hususy çözüwleriniň birine ulag meselesi diýilýär Ol aşakdaky görnüşdedir.

Goý, *m*-sany punktlarda degişlilikde $a_1, a_2, ..., a_m$ serişdeler bar bolsun. Goý, *n*-sany punkda şol serişdelere bolan islegler bar bolsun $b_1, b_2, ..., b_n$. *m*-punktda bar bolan serişdeleri *n*-punktdaky isleglere ulag bilen daşamaklygyň minimum çykdaýjysyny kesgitlemeli.

Degişlilikde meseläniň çykdaýjylaryny çözmek üçin biz onuň ýoluny c_{ij} bilen belgiläris $i \to j$. Edil şonuň ýaly onuň meýilnamasyny X. Ỳöne $(c_{ij})_{mxn}$; $X = (x_{ij})_{mxn}$.

Biz ýokarda belleşimiz ýaly, ulag bilen daşamaklyk çykdaýjy minimum harajat bolmaly. Onda biz meseläniň şertine görä X meýilnamasyny kesgitlemeli. Onda maksat funksiýamyz

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min. \qquad (1)$$

görnüşde bolar. Onda meseläniň şertine görä aşakdaky tablisany düzeris.

§4. Optimal dolandyrma meselesiniň takmyn çözülişi

1. Optimal dolandyrma meselesiniň goýluşy.

Optimal dolandyrma nazarýeti bu dolandyrma obýektleriň öwrenilmegine degişliylmyň bir bölegi bolup durýar we dolandyrmanyň iň oňat usullaryny kesgitleýär.

Dolandyrma obýektleri ylmy derňewlerde, önümçilikde we her günki tejribelikde giňden ýaýrandyr. Meselem: Awtomobil we S. M. dolandyrma enjamlar enjamlar bilen üpjün edilen. Şolaryň hemmesine seredilýän obýektleriň özüni alyp barşyna täsir etmekden durýar.

Umuman aýdanda dolandyrylýan obýektiň başlangyç ýagdaýyndan soňky, ahyrky ýagdaýyna geçýän çenli dürli usullar bilen täsir edilýär. Şoňa görä iň oňat geçiş ýollaryny saýlap almak ýagny, iň amatly ýol bilenöwrenilýän obýekti dolandyrma meselesi ýüze çykýar. Köplenç dolandyrylýan obýektler.

Differensial deňlemerler (ýönekeý we hususy) gyra şertler bile. Berilen meseleler görnüşde suratlandyrylýar ýa-da şoňa meňzeş deňlemel sistemasy. Bular ýaly gyra meselelerine $x(t)$-iň skalýar we wektor häsýetlendirmesinden başga hem seredilýän obýektiň t pursatdaky ýagdaýyny $U(z)$ dolandyrmany hem özünde saklaýar. Ç skalýar we wertikal funksiýalar. Biz şeýlelikde $U(t)$ dolandyrmany saýlap dolandyrylýan obýektiniň häsýetlerini kesgitleýäris ýagny $x(z)$ degişli gyra meselesiniň çözüwini kesgitleýäris.

Obýektleri optimal dolandyrmasynyň matematiki modeliniň gyra meselesi baş obýekti suratlandyrýanyndan başga hem obýektiň hilini görkezýän sanlary hem özünde saklamalydyr. Bular ýaly görkeziji umuman J- funksional bolup ol $x(t)$ bagly we $U(t)$ dolandyrmanyň özüne bagly bolýar. (ýagny obýektiň ewolýusiýasyna we $U(t)$ saýlanan dolandyrmasyna) $X(t)$-funksiýa doly kesgitleýär haçan $U(t)$ saýlanylanda, onda bu funksional diňe $U(t)$: $J = J(t)$ dolandyrma bagly bolýar diýip hasap etmek bolýar.

2. Optimal dolandyrma meselesinde differensial deňlemeler ulgamy

Goý obýektiň ýagdaýy wagta görä kesimde berlen bolsun [0;T]-

$$x(t) = (x_1(t),\, x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Wektor fuksiýa görnüşinde häsýetlendirilýän bolsun (E_n-giňişlikde faza görä traektorýasy), differensial deňlemeler ulgamyny kanagatlandyrýan

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \\ \dot{x}_2(t) = f_2[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n[t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)], \end{cases}$$

nirede $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(x)}{dx}, \quad i = \overline{1,n}$

Geljekde biz bu ulgam Wektor görnüşinde ýazjakdyrys.

$$\dot{x}_1(t) = f_1[t, x(t), u(t)]. \qquad (1)$$

Bu ýerde $u(t)$=$(x_1(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$- Wektor – funsiýa (dolandyrma) haýsy hem bolsa bir köplükden, ýagny U-dolandyrmanyň mümkin bolan köplüklerinden saýlaýarys. $f = (f_1, \dots, f_n)$ argumentleri $t,\ x,\ u$ bolan belli wektor funksiýalar.
U(t) we x(t) berilmeginde (1) – ulgamyň ýeke täk çözülşini kesgitlemek üçin takyk ýagdaýlarda, dolandyrma prosessini şekillendirýän ulgam goşmaça $x_i(t)$ we (ýa-da) x_i (t) bahalary üçin gatnaşyklar haýsy hem bolsa bir $t \in [0;T]$- nokatda (t=0, ýa-da t=T düzgün boýunça). Şeýle gatnaşyklar gyra şertleri diýilip atlandyrylýar, umumy görnüşde biz ony deňleme görnüşde ýazjakdyrys.

$$\Gamma(x)=0 \qquad (2)$$

$$p'_j = p_j - \frac{p_s}{a_{rs}} a_{rj} = a_{rj}\left(\frac{p_j}{a_{rj}} - \frac{p_s}{a_{rs}}\right). \qquad (8)$$

Teoremadan görnüşi ýaly *z*-setirde minuslaryň sanynyň köpelmezligi üçin çözülýän topbagy az ikilik gatnaşyklar boýunça düzmeli.

Ähli ýokarda ýazylanlar mesele çözülende birinji etabynda çözülýän element sanlarynyň tertibini kesgitleýär.

1) *z*-setirde otrisatel koeffisiýent ýerleşýär;
2) Saýlanan topbakda otrisatel san gözlenýär we ony düzýän setir çözgüde alynýar;
3) Ikileýin gatnaşyklar saklanýar we olardan azy çözýän elemente görkezýär.

Goy $p_s<0$, ýöne topbakda başga otrisatel sanlar ýok.

$$a_{is} \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m$$

Bu ýagdaýda *s* topbagyň haýsy bir elementini biz alanymyzda we näçe ädim etsekde koeffisiýent p_s otrisatel bolup galar, topbagyň beýleki hemme elementleri bolsa položitel bolar.

Şert (6) ýerine ýetirip bolmaýan bolar.

Üýtgeýji x_s, $x_s>=0$ manyny bereliň. Beýleki hemme ýokarky üýtgeýjileri bolsa nula deň edeliň. Onda

$$y_i = a_{is}t + a_i, \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (9)$$

$a_{is} > 0$ şertde *t* parametri islendikçe ulaldyp bolýar we a_i belgä garamazdan $y_i>0$ alarys, ýagny çäklendirmeler sistemasy (2) kanagatlandyrylýar.

Funksionalyň manysy bu ýagdaýda azalýar:

$$z = p_s t + p \to -\infty.$$

Eger-de $a_{is} = 0$ we $a_i < 0$ bolsa, onda (9) görnüşi ýaly dürli *t* gutarnyklydyr. $p_s<0$ şerte salgylanyp üýtgeýji x_s ulaltmaly, ýöne dürli *i* nomerli deňsizlige onuň položitel aňladylyşy kanagatlandyrmaýar. Bu bolsa meseläniň çäklendirmesiniň gapma-garşysyny görkezýär.

çykarmasynyň (aýyrmasy) ädiminden soň $p_s<0$ ýerinde $\frac{p_s}{a_{rs}}$ sany alarys, ol položitel bolmaly. Bu ýerden hem $a_{rs}<0$ bolup jemi çykar. Eger-de $p_s<0$ koeffisiýentli topbakda ýöne dürli a_{rs} otrisatel elementi saýlasaň we ony çözgütli diýip hasaplasaň, onda netijede edilen ädimden soň *z*-setirde bir minusyň ýerine başga biri peýda bolup biler. Saýlawy tertiplesdirmäge şu aşakdaky teorema kömek edýär.

Çözülýän setiriň elementlerine z setiriň koeffisiýentleriniň gatnaşyklaryny düzeliň (z nomer bilen):

$$\frac{p_j}{b_r}; \qquad j=1, 2, \ldots, n$$

Alnan sanlardan položitelleri saýlalyň:

$$\frac{p_j}{a_{rj}}>0,$$

olara ikileýin gatnaşyklar diýeliň.

Teorema 1. *Eger-de çösülýän elementi iň* a^z *ikileýin gatnaşyklar boýunça saýlansa, onda adaty Žordan aýyrmalaryň ädiminde soň, z-setiriň koefisiýenti çözülýän topbakda hemişe položitel galan z-setiriň koefisiýentleri bolsa öz belgilerini saklaýarlar.*

Subudy. Goý,

$$\frac{p_s}{a_{rs}}=\min\left(\frac{p_j}{a_{rj}}>0\right) \qquad (7)$$

Bu topbak *s* nomerli çözülýär.

Onda *z* setiriň täze koeffisiýentlerinde $\frac{p_s}{a_{rs}}>0$ deň bolar we teoremanyň birinji bölümi subut edildi.

Özbaşdak (*j* nomerli) topbagy alalyň we *z*-setiriň p_j täze koeffisiýenti üçin ýüzlenme düzeliň

Gyra şertine iň ýönekeý mysal hökmünde koşiniň şertini getirmek bolýar. x(0)-x^0=0 (ýa-da x(T)-x^T =0), nirede x^0(ýa-da x^T) – berlen wektor.

Optimal dolandyrmanyň meselesiniň matematiki modeline u(t) – dolandyrmany saýlamaklygyň çäklendirilmesi hem girýändir. Bu çäklendirmeleri umumy ýagdaýda aşakdaky görnüşde ýazmak bolýar.

$$u(t)\subset U \qquad (3)$$

nirede U – berilen köplik haýsy hem bolsa bir funksional giňişlikde.

Biz $U\subset L_2^{(m)}[0;T]$, nirede $U\subset L_2^{(m)}[0;T]$, m- ölçegli Gilbert giňişligi wektor – funksiýa diýip hasap edýäris. Goý X – haýsy hem bolsa bir funksional giňişlik, (3) çäklendirmä goşmaça faza görä traektoriýa girizilmegi mümkin $x(t): x(t)\in X$.

Dürli görnüşli funksionallaryň dolandyrma prosesleriniň hilini suratlandyrýan, ilki bilen funksionala seredeliň

$$J(u,x)=\int_0^T \Phi[t,x(t),u(t)]dt,$$

tejribelikde ýüze çykýan optimal dolandyrma degişli ýeterlik derejede giň klass meseleleriň matematiki modelini girýändir.

Şeýlelikde meselä seredeliň

$$J(u,x)=\int_0^T \Phi[t,x(t),u(t)]dt\to\min(\max) \qquad (4)$$

$$x(t)=[t,x,u],\ t\in[0;T] \qquad (5)$$

$$\Gamma(x)=0, \qquad (6)$$

$$u(t)\in U\subset L_2^m[0;T]. \qquad (7)$$

§6. Funksionalyň güberçeklik şerti

Ýokarda belleýşimiz ýaly J(U)-funksionalyň ýeke täk minimum nokadyny barlygyny derňänimizde onuň minimumlaşmagyny we beýleki wajyp soraglara jogap bolup, takyk usul ulanylanda, onuň güberçekligi we J(U)-iň güçli güberçekligi esasy roly oýnaýar. Ýönekeýleşdirip aýdanda, J(u)-funksionalyň bu şertleri kabul edip alanda, onuň häsiýetleri (5)-çyzykly differensial deňlemeler ulgamy üçin goýulýar. Optimal dolandyrma meselesine seredeliň.

$$J(u) = \int_0^T \phi[t, x(t), u(t)]dt \to \min \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) + C(t), \qquad t \in [0;T] \quad (2)$$

$$\Gamma(x) = x(0) - x^0 = 0 \quad (3)$$

$$u(t) \in U \subset L_2^{(m)}[0;T], \quad (4)$$

nirede $A(t)=(a_{ij}(t))$, $B(t)=(b_{k1}(t))$, $n \times n$ we $n \times m$ çäkli möçberde berlen matrisalar; $C(t)=(C_1(t), C_2(t),\ldots, C_n(t))^T$ azat agzalaryň sütün wektory (2) deňlemeler ulgamy açyk görnüşde ýazylyp bilner.

$$\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) + C(t), \qquad i = 1,\ldots,n.$$

görüşimiz ýaly (1) - (4) – deňleler ulgamy (4) – (7) – deňlemeler ulgamynyň hususy halydyr, degişlilikde çyzykly wektor-funksianyň esasynda

$$f(t,x,u)=A(t)x+B(t)u+C(t)$$

Bu ýagdaýda f'_xwe f'_u- matrisalar $f'_x = A(t)$, $f'_u = B(t)$ bellemek ýeterlikdir. Şoňa görä çatrymdaş mesele aşakdaky görnüşe eýedir:

$$\dot{\Psi}(t) + A^T\cdot\Psi(t) = -\phi'_x[t, x(t), u(t)], \qquad t \in [0;T];$$

$$\Psi(T) - 0$$

gradient üçin bolsa

$$J'(u) = B^T\cdot\Psi + \phi'_u = \left(J'_{u1}(u),\ldots,J'_{um}(u)\right),$$

nirede $J'_{u1}(u) = \sum_{k-1}^{l} b_{lk}\Psi_k + \phi'_{u_l}$

(1)– (4) meselede J(u)–funksionalyň güberçeklik şertini kesgitläliň.

$$z' = z - \frac{a_r}{a_{rs}}\cdot p_s. \quad (5)$$

Adaty žordan kesgitlemelerde başga tablisa geçmek üçin çözülýän setiriň elementleri çözülýän elemente bölünýärler we belgileri üýtgedýärler. a_r položitel erkin agzanyň ýerinde täze tablisada $\left(-\frac{a_r}{a_{rs}}\right)$ san bolup durýar. Alynýan meýilnamada bu san şeýle hem položitel bolmaly: $\left(-\frac{a_r}{a_{rs}}\right) > 0$ (bu bolsa öz gezeginde $a_{rs} < 0$ bolmagy talap edýär). Bu ýagdaýda $p_s > 0$ azalýar, $p_s=0$ üýtgewsiz galýar.

Mesele çözlende eger p_j ähli koeffisiýentleri položitel bolsa, bu ýagdaýda funksional beýgelýär. Ýagny tablisada funksionalyň aňladylyşy minimal, meýilnama bolsa optimal. P_j koefisiýentiň arasynda nuluň bolmagy bilen meýilnamany täze tablisa geçirilende üýtgedip bolýar, ýöne funksional öňki bolup galar. Bu ýagdaýda optimal meýilnamalar köpdür. Eger-de nuluň üsünde otrisatel elementler ýok bolsa, meýilnama ýeke-täk bolup galýar. Şeýlelik bilen minimum meselede optimal goýberilýän meýilnamanyň kriteriýasy bolup galýar. Şeýlelikde minimum meselede optimal goýberilýän meýilnamanyň kriteriýasy bolup, z setiriň koeffisiýenti otrisatel däldigi bolup durýar, erkin agzalardan başgasy.

$$p_j \geq 0, \quad j=1, 2, \ldots, n \quad (6)$$

Ikileýin simpleks usulda meseläniň çözülişi şeýle yzygiderlikde ýerine ýetirilýär. Ilki bilen z setiriň koeffisiýentleriniň otrisatel däldigi alynýar, soňra bolsa erkin agzalaryň otrisatel däldigi alynýar. Munuň ýaly tertip üçin çözülýän elementiň saýlamynyň düzgünini esaslandyrmak gerekdir.

z-setirde p_s-nyň otrisatel koeffisiyentini kesgitlemeli. Eger-de a_{rs} elementi çözülýän diýip hasaplasak, onda adaty Žordan

Tablisa 1

Ikileýin mesele	x_1 … x_j … x_s … x_n	*1*
$y_1=$	a_{11} … a_{1j} … a_{1s} … a_{1n}	b_1
….	………………………………	…
$y_i=$	a_{i1} … a_{ij} … a_{is} … a_{in}	b_j
….	………………………………	…
$y_r=$	a_{r1} … a_{rj} … a_{rs} … a_{rn}	b_r
….	………………………………	…
$y_{m}=$	a_{m1} … a_{mj} … a_{ms} … a_{mn}	b_m
$z=$	p_1 … p_j … p_s … p_n	p

Meýilnama goýberilip bilner, eger-de ähli erkin agzalar otrisatel bolmasa

$$a_i \geq 0,\ \ i=1,2,\ldots,m \tag{4}$$

Hasaplaýjy operasiýa hökmünde bu meseläni çözmek üçin žordan aýyrmalaryny peýdalanarys.

Meýilnamanyň optimal kriteriýalaryny kesgitleýäris

$$z' = P' = P - \frac{a_r}{a_{rs}} \cdot p_s$$

ýa-da

Teorema 1. Goý $\Phi(t,x,u)$-funksiýa (1)- deňlemede hemme $x \in E_n$, $u \in E_m$-ler üçin kesgitlenen bolsun, ýagny x^1 , x^2 , u^1, u^2, we $\alpha \in [0;1]$-üçin deňsizlik.

$$\phi'_x[t, \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \alpha u^1 + (1-\alpha)u^2] \leq \alpha\phi(t,x^1,u^1) + (1-\alpha)\phi(t,x^2,u^2) \tag{5}$$

Ýerine ýetýär. Onda J(u)-funksional (1)-güberçek U-köplikde, güberçek bolýar.

Subudy. Goý u^1 (t), $u^2(t) \in U$, $ax^1(t)$ we $x^2(t)$, (1)–(3)- gra meselesiniň çözülişi, onda

$$J'_{u1}(u) = \int_{k-1}^{l} \phi(t,x^1,u^1)dt, \qquad J'_{u1}(u) = \int_{k-1}^{l} \phi(t,x^1,u^1)dt,$$

Haçan $u(t)=u^1(t)$ we $u(t)=u^2(t)$ bize belli bolşy ýaly $u(t)=\alpha u^1(t)+(1-\alpha)u^2(t)$
degişlilikde $\mathbf{x}(t)=\alpha x^1(t)+(1-\alpha)x(t)$ (1)-(3) meseläniň çözülişi. Şoňa görä

$$J[\alpha u^1(t) + (1-\alpha)\mathbf{u}^2(\mathbf{t})] =$$

$$\int_0^T \phi[t + \alpha x^1(t) + (1-\alpha)x^2(t), \alpha u^1(t) + (1-\alpha)\mathbf{u}^2(t)]dt$$

$$J[\alpha u^1(t) + (1-\alpha)u^2(t)] \leq \alpha J(u^1) + (1-\alpha)J(u^2)$$

Deňsizlik J(u) güberçekligini subut edýär.

§7. Optimal dolandyrma meselesiniň gradiýent usuly

Gradient usulynyň J(u) funksionalyň minimumlaşmasyna ulanylmagy, u(t)-erkin nokatda mümkinçiligi bolan U-köplüginde J’(u) gradienti hasaplap bolmaklygy bilen esaslandyrylýar. Ýokarda seredilen optimal dolandyrma meselesiniň $J^{/}(u)$ gradientin iň kesgitlenişine seredeliň. Onuň üçin bolsa funksionalyň artdyrmasyny hökman aşakdaky görnüşde ýazalyň.

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = < J'(u), \Delta u > + \sigma(\|\Delta u\|) \qquad (1)$$

Goý u(t)∈U. Onda u(t) dolandyrma artdyrma berip $\Delta u(t)$ görnüşiň esasynda (u(t)+ $\Delta u(t)$) ∈U diýip ýazmak bolar. Bu artdyrma bolsa $\Delta x(t)$ artdyrma degişli bolup, fazanyň traektoriýasyny, ýagny x(t), bolsa x(t)+ $\Delta x(t)$ geçýär.
Onda funksiýa x(t) bolsa meseläniň çözülişi bolýar, a=x(t)+ $\Delta x(t)$ aşakdaky meseläniň çözülişi bolýar,

$$x(t) + \Delta\dot{x}(t) = f(t, x+\Delta x, u+\Delta u), \quad t\in[0;T]; \qquad (2)$$
$$\Gamma(x+\Delta x) = 0 \qquad (3)$$

(2) we (3) degişlilikde (5) we (6) aýryp, $\Delta x(t)$ kesgitleýän gyra meselesini alarys;

$$\Delta\dot{x} = \Delta f(t,x,u), \quad t\in[0;T]; \qquad (4)$$
$$\Delta\Gamma(x) = 0, \qquad (5)$$

nirede $\Delta f(t,x,u) = f(t, x+\Delta x, u+\Delta u) - f(t,x,u)$
Eger biz $f_i(t,x,u)$-funksiýany *x* we u argumentlere görä differensirlenýän diýip hasap etsek we Δf_i-nji deňlemäniň sag tarapyny takmynan aşakdaky differensiallar bilen çalyşyp alsak ýagny:

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Delta u_m = f'_{ix}\Delta x + f'_{iu}\Delta u,$$

§3. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň simpleks usuly bilen optimal çözülişi

Goý, çyzykly programmirleme meselesi bar bolsun: funksionalyň minimumyny tapmaly

$$z = p_1x_1 + \dots + p_jx_j + \dots + p_sx_s + \dots + p_nx_n + p \qquad (1)$$

Çäklendirmeler ýerine ýetirilende:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n + a_1 \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{is}x_s + \dots + a_{in}x_n + a_i \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_r = a_{r1}x_1 + \dots + a_{rj}x_j + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n + a_r \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{ms}x_s + \dots + a_{mn}x_n + a_m \ge 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\dots,n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

1-nji tablisada meseläni ýazalyň. Meseläniň meýilnamasyny öň bolşy ýaly, ýokarky üýtgeýji nula deňeşdirmek bilen gyrakylary bolsa erkin agzalary bilen. Bu funksionala degişli hem şonun üçin 1-tablisada

$$z = P \qquad (3)$$

Teorema 2. *Eger-de meseläniň optimal çözgüdi onuň çäklendirilmesini deňsizlige öwürýän bolsa, onda optimal meýilnamada ikileýin meselede gabat gelýän üýtgeýji nula deň.*

Eger-de optimal meýilnamaýň haýsyda bolsa bir komponenti položitel bolsa, onda ikileýin meseläniň gabat gelýän çäklendirme onuň optimal meýilnamasy bilen deňlige öwrülýär.

Şu getirilen mysalda göni meseläniň optimal meýilnamasy ikinji gezek üçünji şertlerini (*Q*) deňsizlige öwürýär.

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 < 12$$

$$6 - 3 \cdot 0 + 1 < 8.$$

nirede $f'_{ix}x, f'_{iu}u$ - funksiýalar $f_i(t,x,u)$ – funksiýanyň gradienti, olar x we u-argumentlere görä, a $f_{ix}{}^1\Delta x, f^1_{iu}\Delta u$ degişlilikde E_n we E_m – giňişlikde olaryň skalýar köpeltmek hasyly Δx we Δu degişlilikde wektor artdyrmalara görä. Onda (4) deňlemeler ulgamy aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner.

$$\Delta\dot{x}_i = f'_{ix} \cdot \Delta\dot{x} + f'_{iu} \cdot \Delta u, \quad i=1,2,\ldots,n$$

ýa-da $\Delta\dot{x} = f'_x \cdot \Delta\dot{x} + f'_{iu} \cdot \Delta u,$

nirede $f'_x = (f'_{xij}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

degişlilikde nxn we nxm –möçberli önümler matrisasy;

$$f'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad f'_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Nirede $f'_x \cdot \Delta x$ we $f_u{}' \cdot \Delta u$, şu matrisalaryň $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$, $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n)$. Wektor- sütin matrisalara köpeldilmegidir. Şeýlelikde (4)-(6)-meseläniň ýerine $\Delta x(t)$-ni kesgitlemek üçin takmyn meselä seredeliň :

$$\Delta x = f'_x \cdot \Delta\dot{x} + f'_u \cdot \Delta u, \ t \in [0; T]; \qquad (7)$$

$$\Delta\Gamma(x) = 0. \qquad (8)$$

Ýeterlik derejede giň öertleriň esasynda (7)-(8) meseläniň çözülişi 0 $(\|\Delta u\|)$ haçan $\|\Delta u\| \to 0$ takyklykda ululygyň tertibinde (4)-(5) meseläniň çözülişine ýakynlaýar we ΔJ aňlatmanyň getirlip çykarlyşynda (2) Δx höküminde (1)-(2) meseläniň takmyn çözülişi kabul edip almak bolýar.

Biz $\phi(x,u)$ öz argumentlerine görä differensirlenýän funksiýa daýip hasap etsek, onda

$$\Delta J = J(u \mid \Delta u) \quad J(U) = \int_0^T [\Phi[x(t \mid \Delta x(T), u(t) \mid \Delta u(T))] \quad \Phi[x(t),u(t)]]dt = \int_0^T \Phi'_x \Delta x dt + \int_0^T \Phi'_u \cdot \Delta u dt + 0(\|\Delta u\|) = <\Phi'_x, \Delta x> + <\Phi'_u, \Delta u> + 0(\|\Delta u\|)$$

Nirede $\Phi'_x, \Phi_u{}'$ funksiýalar $\Phi(x,u)$ funksiýanyň x we u näbellilere görä gradiýentidir. $<\Phi_x, \Delta x> -$ skalýar köpeltmek hasylyny bize gerek bolan görnüşde ýazmak üçin, ýagny Δx üsti bilen Δu aňlatmak üçin, berlen meselä çatrymdaş $\psi(t)$ meseläniň çözülişini peýdalanýarys,

$$\dot{\psi} + f_x'^T \psi = -\Phi'_x, \quad t \in [0,T]; \qquad (9)$$

$$\Gamma^*(\psi) = 0,$$

Nirede $f_x'^T$funksiýa (6)-nji meseleden önümli transportirlenen matrisa, (9)- gyra şerti aşakdaky deňlemäniň ýerine ýetmegine görä saýlanylýar.

$$\psi(T) \cdot \Delta x(T) - \psi(0) \cdot \Delta x(0) = 0$$

Aşakdaky deňleme adalatlydyr

$$<\Phi' x, \Delta x> = <f' uT \cdot \psi, \Delta u>, \qquad (10)$$

(9)- görä

$$\Delta J = <f' xT \cdot \Phi' u, \Delta u> + 0(\|\Delta u\|).$$

Bu ýerde (1)- görä f' (u)- gradient üçin gözleýän aňlatmamyzy alarys: $f'(u) = f' uT \cdot \psi + \Phi^1 u$, ýa-da açyk görnüşde:

$$f(u) = (f_u(u), \ldots, f_{um}(u)), f_{ue} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial fj}{\partial ue} \cdot \psi j + \frac{\vartheta \Phi}{\vartheta ue}, \qquad (1 = 1, m) \qquad (11)$$

(10)-(11) deňlemäni getirip çykarmak üçin bize aşakdaky Lemma gerek bolar.

Lemma1. Goý Δx(t), ψ(t)- n ölçegli üznüksiz wektor- funksiýa, (0;T)- kesimde bölekleýin üznüksiksiz önümleri bar bolsun. Onda Lagranžyň toždestwasy ýerine ýetýändir.

Tablisa 3

Ikileýin mesele		*u_1=*	*v_2=*	*v_3=*	*w=*
	Göni mesele	*$-y_1$*	*$-x_2$*	*$-x_3$*	*1*
v_1	*x_1=*	*1*	*1*	*-1*	*5*
u_2	*y_2=*	*-2*	*2*	*-3*	*2*
u_3	*y_3=*	*-1*	*-4*	*2*	*3*
u_4	*y_4=*	*-2*	*6*	*$\boxed{1}$*	*1*
1	*z=*	*12*	*6*	*-5*	*60*

Tablisa 4

Ikileýin mesele		*u_1=*	*v_2=*	*u_4=*	*w=*
	Göni mesele	*$-y_1$*	*$-x_2$*	*$-y_4$*	*1*
v_1	*x_1=*	*-1*	*7*	*1*	*6*
u_2	*y_2=*	*-8*	*20*	*3*	*5*
u_3	*y_3=*	*3*	*-16*	*-2*	*1*
v_3	*x_3=*	*-2*	*6*	*1*	*1*
1	*z=*	*2*	*36*	*5*	*65*

4-nji tablisada ýokarky üýtgeýänleri göni meseläniň nuluna deňleşdirýäris we onuň optimal meýilnamasyny ýazyp alarys:

$$x_1=6, \; x_2=0, \; x_3=1, \quad z_{max}=65, \; w_{min}=65.$$

Ikileýin mesele üçin nula gyraky üýtgeýjileri deňleýäris we iň soňky setirde tablisada ýokarkylaryň aňlatmasyny okaýarys. Esasy üýtgeýjilerin optimal aňlatmalary şu aşakdaky ýaly bolar:

$$u_1=2, \; u_2=u_3=0, \; u_4=5;$$

Munda funksionalyň aňlatmasy minimal we göni meseläniň

w_{min}=65 funksionalyň aňlatmasyna deň.

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= \; -x_1 - x_2 + x_3 + 5 \geq 0,\\
y_2 &= -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 12 \geq 0,\\
y_3 &= \; -x_1 + 3x_2 - x_3 + 8 \geq 0,\\
y_4 &= -2x_1 - 8x_2 + x_3 + 11 \geq 0
\end{aligned}\right\}
$$

Şeýlelikde

$$
\left.\begin{aligned}
v_1 &= u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 - 12 \geq 0,\\
v_2 &= u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 - 6 \geq 0,\\
v_3 &= -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 + 7 \geq 0.
\end{aligned}\right\}
$$

Ilki meseläni ikileýin tablisa ýazalyň (2-nji tablisa) we göni meselä modifisirlenen žordan aýyrmasyndan iki ädim etmeli, optimumyny almak üçin (3-nji, 4-nji tablisa).

Tablisa 2

Ikileýin mesele		$v_1=$	$v_2=$	$v_3=$	*W=*
	Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	*1*
u_1	$y_1=$	$\boxed{1}$	*1*	*- 1*	*5*
u_2	$y_2=$	*2*	*4*	*-5*	*12*
u_3	$y_3=$	*1*	*-3*	*1*	*8*
u_4	$y_4=$	*2*	*8*	*-1*	*11*
1	*z=*	*-12*	*-6*	*7*	*0*

$$
\int_0^T [\psi \cdot (\Lambda x - f'x \cdot \Lambda x) + \Lambda x \cdot (\psi + fx'^T \cdot \psi)]dt = \psi \cdot \Lambda^T/_0, \qquad (12)
$$

nirede f- meseläniň goýluşyndaky wektor – funksiýa, a $f'x$ - (6)-den önüm matrisasy, a $f_x'^T$ — oňa görä transportrlenen matrisa. Onda görkezeliň

$$
\int_0^T \psi \bullet (f_x' \cdot \Delta x)dt = \int_0^T (f_x'^T \cdot \psi)\Delta x dt,
$$

ýagny

$$
< \psi; (f_x'^T \cdot \Delta x) \geq < f_x'^T \cdot \psi, \Delta x >.
$$

Şoňa görä $f_x'^T \Delta x$ we $f_x'^T \cdot \psi$ wektorlaryň i-nji koordinatalaryny ýazalyň:

$$
(f_x'^T \cdot \Delta x)_i = \textstyle\sum_{j=1}^n f'xji\Delta xj, \quad (f_x'^T \cdot \psi)i = \sum_{j=1}^n f_x'^T \cdot \psi\, j.
$$

Bu ýerden,

$$
\psi \cdot (f_x'^T \cdot \Delta x) = \textstyle\sum_{j=1}^n \psi i \cdot (f_x'^T \cdot \Delta x)i = \sum_{i=1}^n \psi i \sum_{j=1}^n f'xij\Delta xi =
$$
$$
= \textstyle\sum_{i=1}^n \psi i \sum_{j=1}^n f'xij\, \psi i\Delta xi;
$$

$$
(f_x'^T \cdot \psi) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n (f_x'^T \cdot \psi)\Delta xi
$$
$$
= \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n f_{xji}' \cdot \psi j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{xji}'\psi j \cdot \Delta xi
$$

Şeýlelikde $\psi \cdot (f_x'^T \Delta x) = (f_x'^T \cdot \psi)\Delta x)$

Bu aňlatmany t-görä integirläp biz (12) geleris. Indi bolsa integral aşagyndaky aňlatmalary başgaça toparlap (11) çep tarapyny (12) kömegi bilen alarys.

$$\int_0^T \{[\psi \cdot \Delta\dot{x} - \dot{\psi} \cdot \Delta x] + [(f_x{}'^T \cdot \psi) \cdot \Delta x - \psi \cdot (f_x{}'^T \cdot \Delta x)]\}dt$$

$$= \int_0^T \frac{d}{dt}(\psi \cdot \Delta x)dt = \psi \cdot \Delta x \,{}^T/_0$$

subut boldy.

Mysal. Bu teoremany aşakdaky ýaly mysal bilen görkezeliň.

Goý, göni meseläniň görnüşi bar bolsun: funksiýanyn maksimumyny tapmaly.

$$z= 12x_1+6x_2-7x_3$$

Şu sertlerde

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\le 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &\le 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\le 8, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &\le 11, \\ x_j \ge 0, \quad j &= 1,2,3 \end{aligned}\right\}$$

Ikileýin mesele şeýle formulalaşdyrylýar: fuinksionalyň minimumyny tapmaly

$$w=5u_1+12u_2+8u_3+11u_4$$

Çäklendirilmelerde

$$\left.\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + u_3 + 2u_4 &\ge 12, \\ u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 8u_4 &\ge 6, \\ -u_1 - 5u_2 + u_3 - u_4 &\ge 7, \\ u_i \ge 0, \ i &= 1,2,3,4. \end{aligned}\right\}$$

Meselelerde goşmaça üýtgeýjileri girizeliň:

ululygy we ýagdaýda üýtgemeýär. Bu ýagdaýda ikileýin meselede optimal meýilnamalar köp we minimum we maksimum şol bir Q erkin agzasyna deň dolup durýar. Bu gutarnykly teoremanyň birinji bölegini subut edýär.

Goý indi göni meselede z funksional çäklenen däl.

Algebraik bu aňladýar, daýanç meýilnamayň 1-nji tablisasynyň sütünleriniň, topbaklaryň birinde bolmaly, s ütunde q_s koeffisiýent otrisatel , beýleki koeffisiýentler bolsa položitel däl.

$b_{is} \le 0$, i=1, 2, …, m. Sütün s çözgütli, ýöne onda aýgytly l element saýlap bolmaýar we meýilnamanyň gowulaşmagy üçin hasabatdaky ädim etmek bolanok.

Ikileýin meselede ýagdaýa seredip geçeliň. Munuň üçin u_s üýtgeýjiniň aňlatmasyny ýazalyň. Şeýle şowsuz sütüne baş bolýar, gyraky üýtgeýjileriň üstünden:

$$u_s=b_{is}\, v_1+\ldots+b_{ss}\, v_s+b_{s+1,s}\, u_{s+1}+\ldots+b_{ms}u_m+q_s.$$

Bu aňlatmanyň sag böleginde v we u üýtgeýjileri otrisatel däl, b koeffisiýenti z bolsa položitel däl. Şeýle ululyklaryň köpeltmesi, ýagny b_{is}, v_i ýa-da b_{js}, u položitel däl, şeýle kopeltmegiň jemi

$$b_{1s}v_1+\ldots+b_{ss}\, v_s+b_{s+1,s}\, u_{s+1}+\ldots+b_{ms}u_m\le 0.$$

Şeýle hem bu jemi nula getirip bolýar, onuň üçin nula degişli v we u üýtgeýjileri deňlemeli.

Ýöne şonda hem üýtgeýji u_s otrisatel bolar, sebäbi $u_s=q_s$, $q_s\le 0$ bolar. Sag bölekde nuluň ýerine dürli bir üýtgeýjiniň berilmegi položitel aňlatmagy diňe ýagdaýy ýaramazlaşdyrýar. Meseläniň şertine görä bu üýtgeýjiler şol sanda üýtgeýjisi otrisatel däl ýokarky u_s üýtgeýjini alyp bolmaýar:

s-ikileýin meseläniň çäklendirmeler sistemasynyň deňsizligi kanagatlandyrmaýar, sistema gapma-garşy, meseläniň ýolbererlik çözgüdi ýok. Teorema doly subut edildi.

Eger-de göni mesele gapma-garşy bolsa, onda oňa ikileýin çäkli däl funksional bolmak hökman däl. Ol hem gapma-garşy bolup biler.

§9. Pontrýaginyň maksimum prinsipi

Fizikanyň we tehnikanyň dürli bölümlerinde gabat gelýän birnäçe meselelerinde iş prosesinde, parametrleri örän oňatlyk bilen saýlap kesgitlemeklik gerek bolýar. Bu meseleler özüniň gurluşy boýunça Wariasion mesele bolup durýar. Ýöne bu meseleler (klassiki) synpy wariasion usullar bilen çözüp bolmaýar. Bu meseleri çözmegiň usullary L.S.Pontrýaginyň we onuň talyplary tarapyndan işlenip düzüldi. Bu meseläniň çözüliş usulynyň esasy bolup maksimum prinsipi hyzmat edýär.

Biz maksimum prinsipiniň dürli görnüşlerini getireliň we oňa degişli birnäçe meselelere seredeliň:

1. Ýönekeý differensial deňlemelere getirilýän prosessine seredeliň:

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(t,x^1,x^2,\ldots,x^n,u), \quad (i=\overline{1,n}) \qquad (1)$$

ýa-da wektor görnüşde

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)$$

nirede

$x=\{x^1,x^2,\ldots,x^n\}$, $f(t,x,u)=\{f^1(t,x,u), f^2(t,x,u),\ldots,$ $f^n(x,t,u)\}$,

u–parametr.

Goý $x_0=\{x_0^1,x_0^2,\ldots,x_0^n\}$, $x_1=\{x_1^1,x_1^2,\ldots,x_1^n\}$ - fazaly giňişligiň $x^1,x^2,\ldots,x^n$; 2-sany nokady u=u(t) - $[t_0,t_1]$ – kesimde kesgitlenen funksiýa. $u=u(t)$, $(t_0\le t\le t_1)$ funksiýa dolandyrmaly diýilýär.

Dolandyrmaly u=u(t) funksiýa rugsatly diýilýär, eger u(t) – funksiýa $[t_0,t_1]$ kesimde bölekleýin üznüksiz bolsa we onuň bahasy haýsy hem bolsa bir U – köplügiň predeliniň daşyna çykmaýan bolsa, islendik rugsatly dolandyrmanyň kesgitliligi aýdyňdyr.

Goý funksional berlen bolsun

$$F = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt \qquad (2)$$

f(t,x,u) $\frac{\partial f}{\partial x^j}(t,x,u) \ (j = \overline{1,n}), \ f^0(t,x,u)$ funksiýalary, islendik $x^1, x^2, ..., x^n, \ t \in [t_0, t_1], \ u \in u$ bahalarda üznüksiz diýip hasap edýäris.

Her bir rugsatly *u=u(t)* dolandyrma haýsy hem bolsa bir çözüliş, (1) deňlemeler ulgamy *x(t)=x* başlangyç şerti ýerine ýetirýän jogap bolýar.

Aşakdaky meselä seredeliň:
u=u(t) rugsat berlen dolandyrmalaryň içinde şeýle bir häsýete eýe bolup, *x=x(t)* – degişli çözüliş (1) deňlemeler ulgamy aşakdaky şertleri ýerine ýetirilýär:

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \qquad (3)$$

(2) funsionalyň iň kiçi bahalary kabul edip, olar ýaly bahalary tapmaly. Eger *u=u(t), x=x(t)* $(t_0 \le t \le t_1)$ – goýlan meseläniň çözülişi bolsa, onda *u=u(t), x=x(t)* funksiýalar optimal prossesi kesgitleýär diýip aýdylýar. Şeýle hem *u=u(t)* – funksiýa optimal dolandyrma diýilýär, *x=x(t)* – optimal traýektoriýa diýilýär.

Kömekçi funksiýany guralyň

$$\tilde{H}(t, x, u, \psi) = \psi_0 f^0(t, x, u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(t, x, u) \qquad (4)$$

Nirede $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ – täze näbelliler.

Goý

$$\tilde{M}(t, x, \psi) = \sup_{u \in u} \tilde{H}(t, x, u, \psi). \qquad (5)$$

Indi bolsa ikileýin meselä ýüzleneliň. Oňa degişli näbellileri nola deňläliň, topbagyň çepinde durýanlar.

$$v_1 = \ldots = v_s = u_{s+1} = \ldots u_m = 0.$$

Onda ýokarky bäş setirdäki üýtgeýjilere deň bolar.

$$u_1 = q_1, \ldots, u_s = q_s, v_{s+1} = q_{s+1} \ldots v_n = q_n$$

q_i ähli koeffisiýentleriniň otrisatel däldigi sebäpli şu hili meýilnama bolup biler. Ikileýin meselede garaşsyz üýtgeýjileriň nula deňleşdirilen. Ýagny bu meýilnama (opornyý) berk, geometrik çözgütleriň köptaraplylygynyň depesini görkezýär. Şunuň ýaly meýilnamalaryň içinde optimalyny gözlemeli.

1-nji tablisadan ikileýin meseläniň funksionalyny ýazyp alalyň:

$$w = b_1 v_1 + \ldots + b_s v_s + b_{s+1} u_{s+1} \ldots + b_m u_m + Q$$

1-nji tablisada erkin agzalaryň otrisatel däldigi alnypdyr. $b_i \ge 0$ *v* we *u* üýtgeýjiler bolsa ikileýin meseläniň manysy boýunça otrisatel däl $b_{is} v_i$ we $b_{js} u_j$ görnüşlerin ugaşmalary otrisatel däl we olaryň ähli jemi

$$b_i v_i + \ldots + b_s v_s + b_{s+1} u_{s+1} + \ldots + b_m u_m$$

dürli goýberilýän meýilnama üçin otrisatel däl. Bu jem erkin *Q* agzasyna goşulýar we w minimumy gazanmak üçin mümkin boldugyça azaltmaly. Otrisatel däl sanlaryň içinde iň azy nul. Bizi gyzyklandyrýan jem nula deň bolar ýaly her bir goşmaçalara girýän v we u üýtgeyjileri deňleşdirmek ýeterlikdir.

Şeýlelikde, ikileýin meseläniň meýilnamasy 1-nji tablisadan alnyp gyraky üýtgeýän nula deňeşdirmek arkaly ol funksionala minimumy berýär, ol optimal. Eger-de b_i-niň erkin agzalarynyň arasynda nul bar bolsa, onda oňa gabat gelýän gyraky üýtgeýjiler nuldan ulaldylyp biliner, belli bir aňlatma çenli we funksionalyň

§2. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesiniň optimal çözülişi barada teoremalar

Teorema 1. *Eger ikileýin meselelerinden biriniň optimal çözgüdi bar bolsa, onda onuň beýlekisiniň hem ekstremal aňlatmalary olaryň funksionaly gabat gelýär. max z = min w.*

Eger-de bir meselede funksional çäklendirilmedik bolsa, onda oňa ikileýin mesele gapma-garşydyr.

Subudy. Ikileýin tablisa göni we ikileýin meseläni ýazalyň we modifisirlenen žordan aýyrmalarynyň ädimini edeliň, tä göni meseläniň optimal meýilnamasyny alýançak. Netijede birinji tablisa geleris, onda b_i-niň ähli erkin agzalary we z setiriň ähli koeffisiýentini q_j otrisatel däl $b_i \geq 0,\ q_j \geq 0;$ meýilnama

$y_1=\ldots\ \ y_s=x_{s+1}=\ldots=x_n=0$ optimal $z=Q$ maksimal aňlatmasy.

Tablisa 1

Ikileýin mesele		$u_1=$	...	$u_s=$	v_{s+1}	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-y_1$	…	$-y_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$	*1*
v_1	x_1	b_{11}	...	b_{1s}	$b_{1,s+1}$	...	b_{1n}	b_1
....	...	...	...	....		...	...	...
v_s	x_s	b_{s1}	...	b_{ss}	$b_{s,s+1}$	...	b_{sn}	b_s
u_{s+1}	y_{s+1}	$b_{s+1,1}$	...	$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$	...	$b_{s+1,n}$	b_{s+1}
....	...	...	...	...	...	...	...	...
u_m	y_m	b_{m1}	...	b_{ms}	$b_{m,s+1}$	...	b_{mn}	b_m
1	*Z=*	q_1	…	q_s	q_{s+1}	...	q_n	Q

Çyzykly differensial deňlemeler ulgamyna seredeliň

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial f^0}{\partial x^i}\psi_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\psi_k, \quad (i=\overline{1,n}) \tag{6}$$

(1) we (2) deňlemeler ulgamyny degişli görnüşde ýazmak bolýandygyny belläliň

$$\frac{\partial x^i}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_i}, \frac{\partial \psi_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^i} \quad (i=\overline{1,n})$$

<u>**Teorema 1**</u> (Maksimum prinsipi) *u=u(x), x=x(t)* $(t_0 \leq t \leq t_1)$ – funksiýalaryň optimal proseslerini kesgitlemeklik üçin hökman şeýle bir hemişelik $\psi_0 \leq 0$ bor bolup we $\psi(t) = \{\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)\},$ şeýle bir çözüş (terwaldäl, eger $\psi_0 = 0$) deňlemeler ulgamy (6) *u=u(t)* we *x=x(t)* funsiýalara jogap bolýan, hemme t $(t_0 \leq t \leq t_1)$ nokatlar üçin *u(t)* üznüksiz bolup, funksiýa $\tilde{H}(t, x(t), u\psi(t))$ näbelli üçin $u \in u$, u=u(t) – nokatda maksimuma ýetýär:

$$\tilde{H}(t,x(t),u(t),\psi(t)) = \tilde{M}(t,x(t),\psi(t)). \tag{7}$$

Görşimiz ýaly teorema 1 *u=u(t)* we *x=x(t)* prosessiň optimallygynyň diňe bir hökmany şertini berýär (eger ol bar bolsa). Kesgitlenen çözülişiň optimallygynyň tükenikli çözülişi diýen soraga goşmaça getiriljek derňewiň esasynda jogap bermek bolýar.

Bellik 1 1 – nji teoremanyň esasynda, ýokarda goýlan meseläni çözmek üçin, hökmany *x=x(t),* $\psi = \psi(t)$ fun
ksiýalary tapmaly, olar bolsa (1) we (6) deňlemeler ulgamynyň çözülişi bolmaly, degişlilikde funksiýa *u=u(t)* we ψ_0 – hemişelik özem hökman (3) we (7) şertleri ýerne ýetirmeli. (1) we (6) deňlemeler ulgamynyň çözüwiniň köplügi, 2n hemişelik $c_1, c_2, ..., c_{2n}$ sanlara baglydyr. 2n+1 hemişelikleri $\psi_0 c_1, c_2, ..., c_{2n}$ tapmak üçin we u=u(t) funksiýanyň 2n+1 sany gatnaşyklary bar bolup (3) we (7) durýandyr. Bu ýagdaýda, ýagny $\psi_0 c_1, c_2, ..., c_{2n}$ parametrleriň birisi hökman däl, sebäbi $\widetilde{H}$ funksiýa bir tipli näbellilere görä. Şoňa görä 2n gezekli parametrleri tapmak üçin we funksiýany u=u(t) üçin 2n+1 gatnaşyklar bardyr.

Bellik 2 Bar bolan wariasion hasaplamanyň meselesi bolan we optimal dolandyrma meselesiniň arasyndaky arabaglanşygy görkezeliň. Ýönekeý wariasion meselä seredeliň: funksiýany tapmaly

$$x(t) \in E^1 = \{x(t) \in D_2([t_0, t_1])x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\},$$

şoňa görä funsional

$$F = \int_{t_2}^{t_1} f(t, x(t), x'(t))dt$$

iň kiçi bahany kabul edip alýar. *F(t,x(t),x`(t))* – funksiýanyň, üznüksiz hususy önümi hemme argumentler boýunça bar diýip hasap edilýär. Bu mesele, aşakdaky optimal dolandyrma meselesiniň hususy halydygy aýdyňdyr: *u=u(t)* $(t_0 \le t \le t_1)$, bölek üznüksiz funksiýany kesgitlemeli, eger onuň bahasy

Tablisa3

Ikileýin mesele		$v_1=$	$u_m=$	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-x_1$	$-y_2$	...	$-x_n$	*1*
u_1	$y_1=$	b_{11}	$-\frac{a_{12}}{a_{m2}}$	...	b_{1n}	b_1
u_2	$y_2=$	b_{21}	$-\frac{a_{22}}{a_{m2}}$	...	b_{2n}	b_2
....	...	...	...	...	...	...
v_2	$x_2=$	$\frac{a_{m1}}{a_{m2}}$	$\frac{1}{a_{m2}}$	...	$\frac{a_{mn}}{a_{m2}}$	$\frac{a_m}{a_{m2}}$
1	*Z=*	q_1	$-\frac{p_2}{a_{m2}}$	...	q_n	*Q*

aňlatmalary derňemek bilen bu maksat üçin ikileleýin meseleleriň garaşsyz u_i näbellilerini setir bilen ýazmaly däl-de, topbak edip ýazmaly. Her topragyň jedweliniň esasy böleginiň ýokarsynda bolsa mahsus bolan ikileýin meseläniň v_i näbellilerini goýaly, erkin agzalaryň topbagyny bolsa w funksionala geçireliň. Topbakda iň soňky kletkada garaşsyz näbelliler birlige goýýarys (jedwel z). Şonda ikileýin mesele jedweli şu aşakdaky yaly okalýar:

Tablisa 2

Ikileýin mesele		$v_1=$	$v_2=$	...	$v_n=$	$w=$
	Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	*1*
u_1	$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
u_2	$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
....	...	...	...	...	...	...
u_m	$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
1	$Z=$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	*0*

Topbagyň yokarsynda durýan koeffisiýentiň topbagynyň önünmleriniň summasyna deňdir, çepde durýan topbakdaky üýtgeýjilere mahsus bolan. Bu çäklendirmelere hem bitewi funksiýalara degişlidir.

Şu hili jedwelde iki hili mesele ýazylan-esasy hem ikileýin, şeýle hem ikileýin diýilýär.

$u = (-\infty, +\infty)$ aralygyň predeliniň daşyna çykmaýan bolsa, şeýle hem,

$$\frac{dx}{dt} = u(t)$$

başlangyç şertlerini ýerine ýetirýän

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

deňlemäniň çözülişinde funksional

$$F = \int_{t_2}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt$$

Iň kiçi bahalaryny kabul edip alýar. Iň soňky meseläni çözmek üçin maksimum prinsipini peýdalanalyň. Biziň ýagdaýmyzda

$$\widetilde{H} = \psi_0 f(t, x, u) + \psi_1 u$$

(6) deňlemeler ulgamy bir deňlemä gelýär.

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\psi_0 \qquad (8)$$

1 – nji teoremanyň esasynda

$$\widetilde{H}(t, x(t), u, \psi_1(t)) = \psi_0 f(f, x(t), u) + \psi_1(t)u,$$

Nirede ψ_0 – hemmişelik, özem $\psi_0 \leq 0,\ \psi_0 \neq 0$ görkezeliň. Hakykatdan, ters bolan ýagdaýynda $\psi_1(t) \neq 0$ we

$$\underset{U}{Sup}\,\tilde{H}(t,x(t),u,\psi_1(t))=+\infty$$

$\tilde{H}(t,x(t),u,\psi_1(t)),$ *u* – boýunça differensirlenýär we *u=u(t)* bolanda maksimuma eýe bolýar. (t – islendik nokat üznüksiz *u(t)* funksiýa görä).
Şonuň üçin

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t),\psi_1(t))=\psi_0\frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))+\psi_1(t)=0$$

ýagny $\psi_1(t)=-\psi_0\frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))$. Iň soňky deňlemäni (8) – de ýerinde goýup alarys, ýagny Eýleriň deňlemesini

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial f}{\partial u})=0,\ \ (u=x'(t)).$$

2. Amaly meseleleriň arasyndaky, şeýle meseleler gabat gelýärler: u=u(t) rugsat edilen hemme deňlemeleriň içinde, şeýle bir häsýete eýe bolup, degişli çözüw *x=x(t)* (1) deňlemeler ulgamy aşakdaky şertleri ýerine ýetirýär:

$$x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_2$$

haçan $t_1>t_0$ (t_1 – moment wagty fiksirlenen däl) şeýle bir çözülişi tapmaly, netijede (2) funksional iň kiçi bahany kabul edip alar ýaly.

5) Bir meselede funksional maksimumlaşýar, beýlekide minimallaşýar. Çyzykly programmirlemegiň meselesini görkezilen häsiýetlere eýe bolan özara ikileýinlik diýilýär.

Olaryň biri esasy ya-da göni bolup durýar, beýleki oňa çatrymly ýa-da ikileýin. Göni mesele diýip biz birinjini hasap ederis. Göni meseläniň çäklendirmeler ulgamyna goşmaça näbellileri y_i girizmeli we şu aşakdaky görnüsde alarys:

$$\left.\begin{array}{l} y_1=-a_{11}x_1-a_{12}x_2-\ ...-a_{1n}x_n+a_1\geq 0,\\ y_2=-a_{21}x_1-a_{22}x_2-...-a_{2n}x_n+a_2\geq 0,\\ ....\\ y_m=-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-....-a_{mn}x_n+a_m\geq 0.\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Ikileýin meselede goşmaça näbellileri v_j (y) üsti bilen belläris:

$$\left.\begin{array}{l} v_1=a_{11}u_1+a_{21}u_2+...+a_{m1}u_m-p_1\geq 0,\\ v_2=a_{12}u_1+a_{22}u_2+...+a_{m2}u_m-p_2\geq 0,\\ ....\\ v_n=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+....+a_{mn}u_m-p_n\geq 0.\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Žordan jedweline göni meseläni alýarys.

Tablisa 1

Göni mesele	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	*1*
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m
Z=	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	*0*

Sebäbi ikileýin mesele şol bir öňki berilenler boýunça formirlenen, ony şol bir jedwelde girizip bolýar. (4), (5), (8) harajatlamaýan, birinji serişdäniň birliginiň u_1 bahasy bilen, a_{21} ikinji serişdäniň birliginiň u_2 bilen we ş.m., u_m m serişdäniň a_{mn} bahasy bilen. Ähli serişdeleriň bahasy $1,2,...,m$ önüminiň birliginiň öndürijiligine gidip, şu aşakdaka deň bolar:

$$a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq p_1.$$

Şuňa meňzeşlikde pikir ýöretsek, 2-nji, 3-nji we ş.m. önümiň görnüşleri üçin getirip bolar. Netijede deňsizlikleriň toparyny alýarys

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq p_1, \\ &a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m \geq p_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \geq p_n. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Ykdysady many boýunça gözlenilýän bahalar otrisatel däl:

$$u_1 \geq 0,\, u_2 \geq 0, ..., u_m \geq 0. \qquad (9)$$

Deňsizlikleriň umumylygy (8), (9) we meseleleriň sistemasyny emele getirýär.

Matematiki formulany deňeşdireliň (1)-(3) formulasy bilen birinji mesele (4)-(6) ikinji.

1) Bir meselänin näbellileriniň sany beýleki deňsizlikleriň sanyna deňdir.
2) Çäklendirilmeler ulgamynyň koeffisiýentiniň matrisalary biriniň beýlekisinden transponirlemegi bilen bolýar.
3) Deňsizlikler ulgamynda çäklendirmleriň gapma-garşy manylary bar. (≤çalyşýar ≥) näbellileriň otrisatel dälligi bolsa saklanýar.
4) Çäklendirmeler ulgamynyň erkin agzalary bir meseläniňki beýlekiniň funksionalynyň koeffisiýenti bolýar, funksionalyň koefisiyenti bolsa çäklendirmeleriň erkin agzasyna öwrülýärler.

IV. Bap. Çyzykly programmirlemäniň esasy meselesi

§1. Çyzykly programmirleme meselesine gelýän amaly meseleler we onuň matematiki modeli

Goý, kärhananyň n görnüşli önümi öndürmäge mümkinçiligi bar bolsun. Oba hojalyk pudagyna degişli bolan edaralarda bu önümlere maldarçylyk, ösümçilik önümleri mysal bolup biler. Şonlukda kärhana m görnüşli resurslara eýe (mysal üçin: ýer, işçi güýç, tohum we ş.m.). Bu resurslaryň bar bolan mukdary öňünden belli:

$$b_1,\, b_2,\, ...\, ,\, b_i,\, ...\, ,\, b_m.$$

Her bir önümiň öndürilişinden alnan ykdysady taýdan peýdasy belli:

$$c_1,\, c_2,\, ...\, ,\, c_j,\, ...\, ,\, c_n.$$

Mundan başga-da her görnüşiň bir önümini öndürmek üçin zerur bolan resursyň her bir görnüşiniň mukdary bellidir:

$$a_{11},\, a_{12},\, ...\, ,\, a_{ij},\, ...\, ,\, a_{mn}.$$

Bu ýerde a_{11} – birinji önümi öndürmek üçin brinji resursyň zerur bolan mukdary we ş.m.; umumy görnüşde a_{ij} – bu j ($j=1,2,...,n$) nomerli önümi öndürmek üçin zerur bolan i (i=1,2,...,m) nomerli resursyň mukdary. Bu sanlara tehnologik koeffisiýentler hem diýilýär, olaryň sany mn ululyga deň.

X önümçiligiň jemeleýji girdejisiniň iň uly baha eýe bolmagyny üpjün edýän meýilnamasyny düzmek zerurlygy ýüze çykýar (basgaça aýdanymyzda, her görnüşiň x_1, x_2, ... , x_j, ... , x_n önümleriň zerur bolan mukdaryny tapmaly).

Ilki bilen maksat funksiýany düzeliň. Onuň üçin girdejini belli bolan ululyklar arkaly aňladalyň. Birinji görnüşli bir önüm c_1

girdejini berýär; meýilnama boýunça birinji görnüşli önüm x_1 mukdarda öndürilmeli, bu bolsa c_1x_1 girdejini berer. Şuňa meňzeşlikde meýilnama boýunça x_2 mukdarda öndürilmeli ikinji gönüşli önüm c_2x_2 girdejini berer we ş.m. Umumy girdeji (ony z bilen belgiläliň) aşakdakyny berer:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n$$

Bu aňlatma meseläniň maksat funksiýasy bolup durýar. Bu aňlatmany aşakdaky görnüşde ýazmak hem bolar:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Indi bolsa çäklendirmeler ulgamyny düzeliň. Başgaça aýdanymyzda, gözlenýän X meýilnamanyň x_j komponentleriniň kanagatlandyrmaly şertlerini düzmeli. Munuň üçin önümi öndürmekde sarp ediljek her bir görnüşli resursyň mukdaryny tapmaly.

Birinji görnüşli x_1 sany önümi öndürmek üçin $a_{11}x_1$ mukdardaky birinji görnüşli resurs sarp ediler; iknji görnüşli x_2 sany önümi öndürmek üçin $a_{12}x_2$ mukdardaky ikinji görnüşli resurs sarp ediler we ş.m. Umumy çykdajy aşakdakyny berer:

$$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+...+ a_{1j}x_j+...+ a_{1n}x_n$$

(bu aňlatmada a koeffisiýentiň birinji indeksi üýtgemän galýandygyny, ikinji bolsa üýtgeýändigini bellemek gerek).

Emma resursyň umumy çykdajysy bar bolan resursdan uly bolmaly däldir, şonuň üçin tapylan soňky aňlatma birinji b_1 resursa diňe ýa deň ýa-da uly bolup biler:

$$a_{11}x_1+ a_{12}x_2+...+ a_{1j}x_j+...+ a_{1n}x_n \leq b_1$$

Şuňa meňzeşlikde galan resurslar üçin hem şertleri düzmek bolar:

ulanmaly. Her görnüşiň önüminiň x_1, x_2, …, x_n öndürijiligiň göwrümini kesgitlemeli. Şunlukda önümiň umumy bahasy

$$Z=p_1\, x_2+p_2\, x_2+\ldots+p_n\, x_n \qquad (4)$$

maksimal bolmaly. Çäklendirmeler ulgamy

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq a_m \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Bu yerde p_j j-nji önümiň birlik bahasy, a_{ij}-ykdysady tehnologiki koeffisiýent i-nji serişdäniň ulanmak bilen j-nji önümi öndürmekligiň normasy.

Ykdysady many boýunça ahli näbelliler otrisatel däl.

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad (6)$$

Indi bolsa başdaky mesele boýunça başga ykdysady meselä seredeliň. Mysal üçin, haýsy hem bolsa bir kärhana satyn almakçy bolýar, hojalykda bar bolan ähli serişdeleri. Bu $u_1, u_2, ..., u_m$ optimal bahalary kesgitlemek zerur, bu şertden ugur alyp:

1) Serişdeleriň umumy bahasyny satyn alýan edara minimumlaşdyrmaga ymtylýar;
2) Ýöne her bir serişde üçin hojalyga bolmanda onuň taýyn önümi hökmünde aljak girdejisini tölemeli. Eger-de bolmanda hojalyga serişdeleri satmasa girdejili bolýar, ol öz öndürijiligini gurnap biler;
3) w-serişdelerň umumy bahasy öndürijilik bahasy bilen ýüze çykýar, olaryň bolan a_i we başga bahalar u_i

$$w = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_mu_m \qquad (7)$$

Alnan bütewi funksiýany minimallaşdyrmaly. Ikinji talap şu çäklendirmelere getirýär. Birinji önümiň birligine a_{11}

V Bap. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin we ulag meselesi

§1. Çyzykly programmirlemäniň ikileýin meselesi we onuň matematiki modeli

Bize belli bolşy ýaly islendik kärhana önüm öndürmek üçin özüne gerek bolan serişdeleri üpjün edýär. Soňra şonuň esasynda dürli görnüşli önümleri öndürip, gerek bolan ýa-da soralýan islegleri kanagatlandyrýar,

Biz ýokarda bu meselä görä çyzykly programmirlemäniň esasy görnüşine seredipdik. Ol degişlilikde,

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \qquad (1)$$

Şeýle hem çäklendirmeler ulgamy:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (3)$$

Ýagny bar bolan *m* sany serişdäniň esasynda *n* dürli önümi öndirip çykarmaly diýen çyzykly programmirlemäniň meselesiniň umumy modeli.

Birnäçe ýagdaýlaryň esasynda kärhana öndürmeli bu önümleri öndürmän, özünde bar bolan serişdeleri ýokary bahada başga bir kärhana ýerleşdirip edil önümiň öndürilip çykarylan bahasyny talap edýär. 2-nji kärhana bolsa, bu serişdeleri mümkin boldugyça arzan almak isleýär.

Ykdysady tarapdan seredeniňde çyzykly programmirlemäniiň esasy meselesi, hojalygy meýilnamalaşdyrmakdan durýandyr. Hojalykda a_1, a_2, …, a_n serişdeleri bolsun. Olary onda *n*-dürli önümi çykarmak üçin

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n \le b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n \le b_n$$

Meýilnama hakykatda ulanmaga ukyply bolar ýaly x_j komponentler ýokarda getirlen şertleri kanagatlandyrmalydyrlar.

Emma gözlenýän ululyklara ykdysady taýdan seredilende bu ululyklaryň otrisatel bolmaly däldigi gelip çykýar. Şol bir wagtda bu ululyklar nola deň bolup bilerler; bu bolsa şu görnüşiň öndürilmegi düşewüntli däldigini aňladýar. Diýmek, ýokarda alynan şertlere gözlenýän ululyklaryň otrisatel dällik şertini goşmaly:

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0,$$
$$\ldots$$
$$x_j \ge 0,$$
$$x_n \ge 0.$$

Alnan deňsizlikleriň iki topary bilelikde meseläniň çäklendirmeler ulgamyny düzýärler. Olary başgaça aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m);$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n);$$

Indi bolsa meseläni aşakdaky ýaly beýan etmek bolar: z funksionalyň iň uly baha eýe bolmagyny üpjün edýän we hemme deňsizlikleri kanagatlandyrýan x_j komponentleri tapmaly. Çäklendirmeler ulgamyň we maksat funksiýanyň näbellilere görä çyzyklydygyndan bu meseläniň çyzykly programmirlemäniň meselesidigi gelip çykýar.

§2. Deňlemeler ulgamlarynyň žordan usuly bilen optimal çözülişi

Goý bize Ỳewklidiň giňişliginde n-tertipli çyzykly ulgamlar berlen bolsun. Ol ulgamlar degişlilikde ýokarda seredilen ýokary tertipli tekizlikler (gipro) berlen bolsun.

$$\vec{a}\vec{x} - c \geq 0$$

$$\vec{a}\vec{x} - c \leq 0$$

ýarym giňilik

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - y_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - y_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - y_m &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Onda (1)-nji ulgam üçin aşakdaky tablisany ýazýarys.

Tablisa 1

	x_1 x_2 ……. x_n
$y_1=$	a_{11} a_{12} …….. a_{1n}
$y_2=$	a_{21} a_{22} ……. a_{2n}
….	………………..
$y_m=$	a_{m1} a_{m2} ……. a_{mn}

1) Tablisada nola deň bolmadyk a_{22} elementi saýlap alýarys we ony žordan element diýip atlandyrýarys. Soňra şol setiriň hemme elementini şol elemente bölýäris. Ýöne a_{22} elementiň özüni öz-özüniň tersini alýarys.

$$a_{22}^{-1} = \frac{1}{a_{22}}$$

Tablisa 2

	$-y_1$	...	$-y_j$	...	$-y_s$	...	$-y_n$	1
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	...	$b_{n+1,j}$	...	$b_{n+1,s}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	b_{i1}	...	b_{ij}	...	b_{is}	...	b_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_r=$	b_{r1}	...	b_{rj}	...	b_{rs}	...	b_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	...	b_{mj}	...	b_{ms}	...	b_{mn}	b_m
$Z=$	q_1	...	q_j	...	q_s	...	q_n	Q

Bu tablisada çyzykly maksatnamalaşdyrma meselesi täze görnüşde alynýar:

$$z = q_1y_1 - q_2y_2 - \ldots - q_ny_n + Q \quad (5)$$

funksiýa we çäklendirmeleriň ulgamyndan şzgerdilip alynan deňsizlikleriň ulgamy alynýar:

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = -b_{i1}y_1 - b_{i2}y_2 - \ldots - b_{in}y_n + b_i \geq 0 \\ & (i = n+1, n+2, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$$

Şeýlelikde (6) şertleri kanagatlandyrýan we (5) funksiýa min (ýa-da max) bahany berýän ***y***–leriň $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ toplumyny tapmak talap edilýär. Ähli ***m*** –lerden ***n*** sany ***y***–leri kesgitlemek gerek bolýar, galan ***m-n*** sany ***y***–ler öňküleri çyzykly baglydyrlar.

Meseläniň bu täze görnüşe getirilişiniň sebäbi y_j üýtgeýänler üçin otrisatel bolmazlyk şertiň alynmagydyr, başlangyç ***y*** –ler üçin bolsa bu şert aýdylmadykdyr.

bolsun. Onda **n** – yzygiderlikli ädimiň kömegi bilen 1-nji tablisa 1a tablisa özgerdiler (ýokarky setire **n** sany $\mathbf{y_i}$ –leri geçireris).

Tablisa 1a

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
$x_n=$	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}	b_n
$y_{n+1}=$	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$	...	$b_{n+1,n}$	b_{n+1}
...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mn}	b_m
$Z=$	q_1	q_2	...	q_n	Q

Bu tablisada çepde ***n*** sany ***x***-ler, **(*m*-*n*)** sany ***y***–ler, ýokarda bolsa ***n*** sany ***y***-ler ýerleşer. ***Z*** setir hem özgerer: täze ***q*** koeffisiýentler we ***Q*** azat agza emele geler.

1a tablisada ýokarda ***n*** setiri alyp ***y***-leriň üsti bilen aňladarys:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - ... - b_{1n}y_n + b_1; \\ x_2 = -b_{21}y_1 - b_{22}y_2 - ... - b_{2n}y_n + b_2; \\ .... \\ x_n = -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 - ... - b_{nn}y_n + b_n; \end{array}\right\} \tag{4}$$

Eger-de **y** –leriň bahasyny hasaplap, olary (4) ulgamda ornuna goýsak, onda **x** –leriň gözlenýän bahalaryny alarys. Şonuň üçin hem tablisanyň bu bölegi meseläniň çözüwiniň soňunda peýdalanylýar. Ýokardaky **n** setiri 1a tablisadan aýyrsak 2-nji tablisany alarys:

Tablisa 2

	x_1	y_2	…	x_n
$y_1 =$	a_{11}	$\frac{a_{12}}{a_{22}}$	…	a_{1n}
$x_2 =$	$-\frac{a_{21}}{a_{22}}$	$\frac{1}{a_{22}}$	…	$-\frac{a_{2n}}{a_{22}}$
….	...	…	…	…
$y_m =$	a_{m1}	$\frac{a_{m2}}{a_{22}}$	…	a_{mn}

2) Žordan elementiň setirindäki hemme elementler žordan elemente bölünýärler, hem alamaty tersine alynýar.

3) Žordan elementiň sütünindäki elementleriň hemmesi žordan elemente bölünýär.
4) Galan hemme elementler

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}} .$$

formula boýunça tapylýar.

Netijede eger (1) ulgamyň matrisasynyň rangy $r=n$ bolsa, biz n gezek žordan usulyny ulanyp, hemme x-leri y-ler bilen ýerini çalşyp, aşakdaky n-nji tablisany alýarys.

Tablisa 3

	y_1	y_2 …..	y_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12} …..	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22} …..	b_{2n}
…	…………………		
$x_n=$	b_{n1}	b_{n2} ……	b_{nn}
…	………………………		
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2} …..	b_{mn}

Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň

$$y_1 = x_1 + 3x_2 - 2x_3,$$
$$y_2 = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$
$$y_3 = 7x_2 - x_3$$

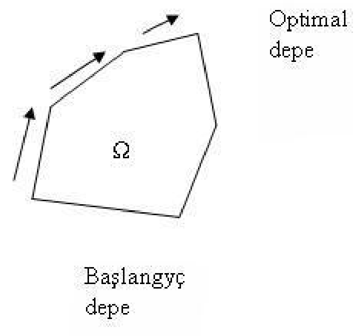
Tablisa 4

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	1	3	-2
$y_2 =$	4	-2	3
$y_3 =$	0	7	-1

Tablisa 5

	x_1	x_2	y_1
$x_3 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y_2 =$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y_3 =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$ tersi $\frac{1}{2}$



Bu ideýany amala aşyrmak üçin başlangyç depäni almaklygy öwrenmeli, soňra ondan başlap depeden-depä geçip, her gezek optimuma ýakynlaşmagyň usulýetini tapmaly.

Ilki bilen (2) ulgamdaky her bir deňsizligi -1 sana köpeldip, olaryň garşylykly alamatyny alarys. Azat agzalary deňsizligiň çep bölegine geçirip, olary $\mathbf{y_i}$ bilen belgiläliň:

Tablisa 1

	$-x_1$	$-x_2$	...	$-x_n$	1
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	a_m
$Z=$	$-p_1$	$-p_2$	...	$-p_n$	0

Bu tablisada çyzykly maksatnamalaşdyrma başlangyç meselesiniň hemme şertleri ýerleşdirilendir. Eger-de x_j üýtgeýänlere $x_j \geq 0$ şertler goýulan bolsa, onda soňraky işleri 1-nji tablisa bilen başlamaly. Eger-de x_j ululyklara otrisatel bolmazlyk şert goýulmadyk bolsa, onda 1-nji tablisa 2-nji tablisa özgerdilýär.

Goý, x_j-ler üçin $x_j \geq 0$ şert goýulmadyk bolsun we (2) ulgamda **m>n** hem-de deňlemäni $(a_{ij})_{m\times n}$ matrisasynyň rangy **n**

Çyzykly maksatnamalaşdyrma umumy goýluşda $a_1, a_2, ..., a_m$ çäklendirmeler bilen alynýar. Emma ykdysady meseleler çözülende üýtgeýänlere

$$x \geq 0 \qquad (3)$$

şert goýulýar. Şeýle hem bolsa meseleler çözülende üýtgeýänler otrisatel bahany hem alyp bilerler.

(1), (2), (3) şertler bilen kesgitlenýän meselä çyzykly maksatnamalaşdyrmanyň meselesi, formulalara bolsa ol meseläniň modeli diýilýär.

Biziň esasy meselämiz z funksionala min ýa-da max baha berýän we (2) deňsizlikleri ýerine ýetirýän $\bar{x}(x_1, ..., x_n)$ wektory kesgitlemekden ybaratdyr.

Deňsiklikleriň (2) ulgamy E^n giňisliginde Ω güberçek köpgranlygy kesgitleýär we ol köpgranlygyň bir depesinde z funksional minimum ýa-da maximum baha eýe bolýar.

Eger-de bu köpgranlyk boş bolsa, ýagny bir nokady hem özünde saklamasa, onda meseläniň çözüwi ýok.

Eger-de bu köpgranlyk boş bolmasa we diňe bir nokatdan durmaýan bolsa, onda bu köplük (2) şerti kanagatlandyrýar we z funksionaly belli bir baha eýe edýän nokatlaryň tükeniksiz sanysyny özünde saklaýar. Olaryň içinden z funksionalyň min ýa-da max bahasyny kesgitleýän nokadyny tapmaly z funksionalyň min we max bahalarynyň bu köplügiň araçäklerinde kesgitleýänligi üçin önümleri ulanyp bolmaýar). Bu ýagdaý hem bize köpgranlygyň hemme nokatlaryny optimallyga derňemän, eýsem diňe onuň depelerinde bu işi ýerine ýetirmäge mümkinçilik berýär.

Şeýlelikde simpleks usul bilen meseläni çözmekligiň esasy ideýasy aşakdakydan ybaratdyr: köpgranlygyň haýsy hem bolsa bir depesini alyp ondan bize gerek bolan depä çenli gidýäris.

Tablisadan görşümiz ýaly biz 1-ädim Žordan usulyny ulanyp, alan tablisamyzda y_1 bilen x_3-iň ýerini çalyşdyk. Edil şonuň ýaly edip degişlilikde hemme näbellileriň ýerini çalşyp, meseläniň çözüwini kesgitläp bilýäris.

Netije. Bu usulyň esasynda biz berlen ulgamyň näbellilerini tablisa görä kesgitläp bilýäris. Ýöne žordan usulynyň ulanylmasynyň sany ulgamyň elementlerinden düzülen matrisanyň rangynyň sanyna deň bolmalydyr.

§3. Deňlemeler ulgamynyň modelleşdirlen žordan usuly bilen optimal çözülişi

Goý bize ýokardaky ýaly ulgam berlen bolsun. Ýagny,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=y_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Bu ulgamy biz haçan

1) $m=n$ bolanda, $n=r$ bolanda belli bolan usullaryň üsti bilen onuň çözüwlerini kesgiläp bilýäris;
2) Eger $m<n$ bolsa, $m=r$ bolsa, onda (1) ulgamyň çözülişinde hemme näbellileri kesgitläp bolmaýar. Sebäbi onuň tükeniksiz çözülşiniň bolup bilýändigini rangyň üsti bilen kesgitlemek bolýar;
3) Eger-de $m\geq n$ bolup, $n=r$ bolsa, onda hemme näbellileri kesgitlemek bolýar. Ýöne birnäçe deňlemeleri üýtgedip bolmaýar.

Hakykatdan :

Tablisa 1

	$-x_1$ $-x_2$ ... $-x_s$ -... $-x_n$
$y_1=$	$-a_{11}$ $-a_{12}$ ... $-a_{1s}$ -... $-a_{1n}$
$y_2=$	$-a_{21}$ $-a_{22}$ ... $-a_{2s}$ -... $-a_{2n}$
……	………………………………………
$y_r=$	$-a_{r1}$ $-a_{r2}$ ... $-a_{rs}$ -... $-a_{rn}$
……	………………………………………
$y_m=$	$-a_{m1}$ $-a_{m2}$ ... $-a_{ms}$ -... $-a_{mn}$

§6. Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň Simpleks usuly bilen optimal çözülişi

Goý, bize başlangyç mesele ýa-da çyzykly z funksiýa

$$z=p_1x_1+...+p_nx_n \quad (1)$$

we oňa degişli çäklendirmeler ulgamy berlen bolsun:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\leq a_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\leq a_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+....+a_{mn}x_n\leq a_m \end{array}\right\} \quad (2)$$

bu ýerde $x_1,x_2,...,x_n$ önümleriň görnüşleri; $p_1,p_2,...,p_n$ önümleriň bir birligini ýerleşdirmegiň bahalary islendik belli hakyky sanlar (bahalar).
p_j koeffisiýentler ***n*** ölçegli ýewklid giňişliginde baha $\overline{p}(p_1,...,p_n)$ wektoryny, x_j - üýtgeýänler $\overline{x}(x_1,...,x_n)$ wektory kesgitleýänligi üçin *z* funksiýa $\vec{p}$ baha wektory bilen gözlenýän $\vec{x}$ wektoryň skalýar köpeltmek hasyly görnüşinde

$$z=\overline{p}\cdot\overline{x}$$

ýaly hem aňladylyp biliner. Bu funksiýa maksatlaýyn ýa-da baha funksiýasy – meseläniň funksionaly diýip atlandyrylýar.

Ulgamdaky $a_1,a_2,...,a_m$ – sanlar resurslaryň görnüşlerini aňladýarlar; a_{ij} – ykdysady-tehnologik koeffisiýent bolup ***j*** önümi öndürmekde sarp edilýän ***i*** görnüşli resursy kesgitleýär.

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$-x_1 + x_2 = 3$$
$$\overline{}$$
$$2x_2 = 8$$

Bu ýerden

$$x_2 = 4, \quad x_1 = 1.$$

Şeýlelikde

$$z_{\max} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 13.$$

Tablisa 2

T-2	$-x_1 \quad -x_2$ - … $-y_s$ - … $-x_n$
$y_1 =$	$-b_{11} \quad -b_{12}$ - ... - a_{1s}/a_{rs} -... $-b_{1n}$
$y_2 =$	$-b_{21} \quad -b_{22}$ - ... - a_{2s}/a_{rs} -... $-a_{2n}$
……	....
$y_r =$	$-a_{r1}/a_{rs} \quad -a_{r2}/a_{rs}$ -...- a_{rs}/a_{rs} -...- a_{rn}/a_{rs}
……	....
$y_m =$	$-b_{m1} \quad -b_{m2}$ -...$-a_{ms}/a_{rs}$ -... $-b_{mn}$

Eger biz ýokarda serden žordan usulymyz ýaly yzygiderlikde görkezilen 4-punkt boýunça 1-nji tablisadan 2-nji tablisa geçsek, onda biz ony aşakdaky görnüşde ýazyp bileris. Goý žordan element diýip $a_{rs} \neq 0$ alalyň.

2-nji tablisadan görnüşi ýaly biz y_r bilen x_s -iň ýerini çalyşdyk we aşakdaky amallary ýerine ýetirdik:

1) $-a_{rs}$ elementi žordan element diýip saýladyk we 2-nji tablisada ony $-\frac{1}{a_{rs}}$ diýip ýazdyk.
2) Şol elementiň ýerleşen setirine žordan setir diýip, onuň hemme elementlerini a_{rs} elemente böldük.

Şol elementiň ýerleşen sütüninde bar bolan elementleriň hemmesini şol elemente böldük, alamatlaryny bolsa tersine öwrüp aldyk. Galan hemme elementleri žordan usuldaky ýaly $b_{ij} = \dfrac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}}$ formula bilen tapdyk.

Biz 2-nji tablisada žordan usuly bilen 1-nji ulgamy çözmeklik üçin 1 ädim žordan usulyny ulandyk. Eger-de biz yzygiderlikde şol usuly ulansaň onda ýokardaky görkezilen 3-nji görnüşe görä takyk netije alarys.

Steýnisiň teoremasy. *Eger 1-nji žordan tablisasyndan* $m \leq n$ *çyzykly baglanşyksyz setirler bar bolup, m ädimden soňra hemme*

y_i-ler ($i=1,2,\ldots,m$) ýokary geçýär, x-ler bolsa aşak geçýär, artykmajy bolsa, çyzykly baglanşykly bolýar.
Subudy. Onda biz aşakdaky tablisany alýarys.

Tablisa 3

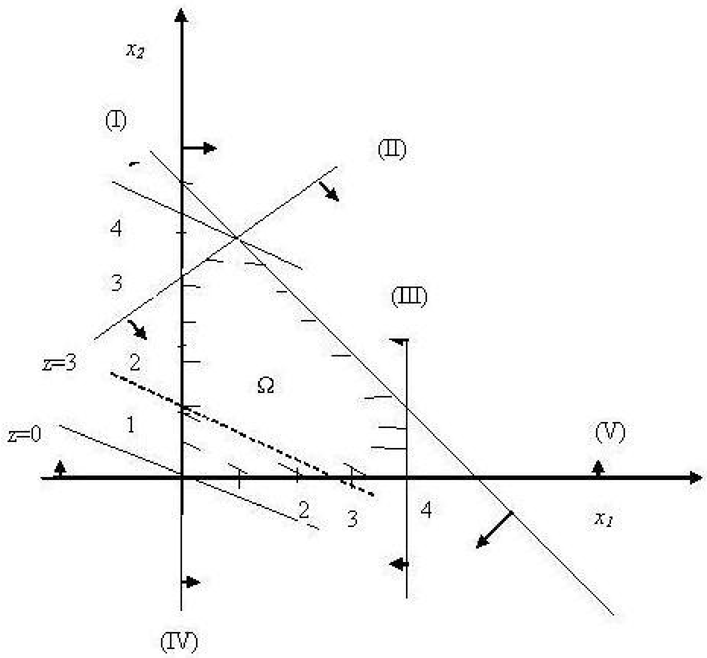
	$-y_1$	$-y_2$	…	$-y_r$	$-x_{r+1}$	…	$-x_n$
$x_1 =$	c_{11}	c_{12}	…	c_{1r}	$c_{1,r+1}$	…	c_{1n}
$x_2 =$	c_{21}	c_{22}	…	c_{2r}	$c_{2,r+1}$	…	c_{1n}
……	………						
$x_r =$	c_{r1}	c_{r2}	…	c_{rr}	$c_{r,r+1}$	…	c_{rn}
……	………						
y_{r+1}	$c_{r+1,1}$	$c_{r+1,2}$	…	$c_{r+1,r}$	$c_{r+1,r+1}$	…	c_{r+1n}
y_{m1}	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mr}	$c_{m,r+1}$	…	c_{mn}

Eger $m \le n$ bolup, bu ulgamyň matrisanyň rangy r-e deň bolsa, onda biz sag tarapdaky tablisada ýerleşen elementler olara deň bolýarlar. Onda galan y-ler öz aralarynda çyzykly baglanşyklydyrlar. Ony şeýle ýazmak bolýar:

$$\left.\begin{array}{l} y_{r+1} = -c_{r+1,1}y_1 - c_{r+1,2}y_2 - \ldots - c_{r+1,r}y_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = -c_{m1}y_1 - c_{m2}y_2 - \ldots\ldots - c_{mr}y_r \end{array}\right\}$$

Bu bolsa Steýnisiň teoremasyny doly subut edýär.
Mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny alalyň

$$y_1 = x_1 - 4x_2 + 3x_3$$
$$y_2 = -5x_1 + x_2$$
$$y_3 = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3.$$



1-nji surat

Eger-de biz $z=p_1x_1+p_2x_2$ deňlemä görä $z=p_1.p_2$ diýip alsak $p_1p_2=p_1x_1+p_2x_2$ bolup alsak.

$$\frac{p_1x_1}{p_1p_2} + \frac{p_2x_2}{p_1p_2} = \frac{p_1p_2}{p_1p_2}$$
$$\frac{x_1}{p_2} + \frac{x_2}{p_1} = 1.$$
$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} = 1$$
$$\frac{x_1}{-3} + \frac{x_2}{3} = 1$$

Görşümiz ýaly çyzgylaryň her birinde dürli görnüşler görkezilen. Ω- köpburçlugyň çäklendirilen ýapyk görnüşinde maximum hem minimum kesgitlenilýär. Haýsy hem bolsa bir tarapy çäklendirilmedik görnüşinde ýa maksimum kesgitlenilýär minimum kesgitlenilmeýär. Tersine minimum kesgitlenilýär maksimum kesgitlenilmeýär.

Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň grafik usul bilen çözülişi

Çyzykly programmirlemäniň meselesiniň grafiki taýdan çözmeklik üçin ýokarda seredilen meselä görä grafik usul bilen çözmeklik üçin biz z=0 şertini maksat funksiýa görä goýup aýdyňlaşdyrmaklyk üçin tekizlikde E^2 Ω- köpburçluga seredip, onuň depelerini kesgitläliň we max, min bahalaryny tapalyň. Goý bize aşakdaky görnüşde mesele berlen bolsun.

$$z_{\max} = x_1 + 3x_2$$

$$\left.\begin{array}{lrl} (I) & x_1 + x_2 & \le 5, \\ (II) & -x_1 + x_2 & \le 3, \\ (III) & x_1 & \le 4, \\ (IV) & x_1 & \ge 0, \\ (V) & x_2 & \ge 0, \end{array}\right\}$$

Tablisa 4

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1=$	-1	4	-3
$y_2=$	5	-1	0
$y_3=$	-2	$\boxed{3}$	4

Tablisa 5

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$
$y_1=$	5/3	-4/3	25/3
$y_2=$	13/3	1/3	4/3
$x_2=$	-2/3	1/3	4/3

$$y_1 = -\frac{5}{3}x_1 + \frac{4}{3}y_3 + \frac{25}{3}x_3$$

$$y_2 = -\frac{13}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3$$

$$x_2 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{4}{3}x_3.$$

§4. Çyzykly programmirlemäniň esasy meselesiniň goýluşy we häsiýetleri

Çyzykly z funksiýa berlen:

$$z = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad (1)$$

bu ýerde p_j – belli bolan koeffisiýentler (olar dürli hakyky sanlar bolup bilerler).

p_j koeffisiýentler n ölçegli ýewklid giňişliginde $\overline{P}(p_1, p_2,..., p_n)$ baha wektory, x_j näbelliler bolsa $\overline{x}(x_1, x_2,..., x_n)$ wektory berýärler. z funksiýa $\overline{P}$ we gözlenýän $\overline{x}$ wektorlaryň skalýar köpeltmek hasyly görnüşinde ýazmak bolar:

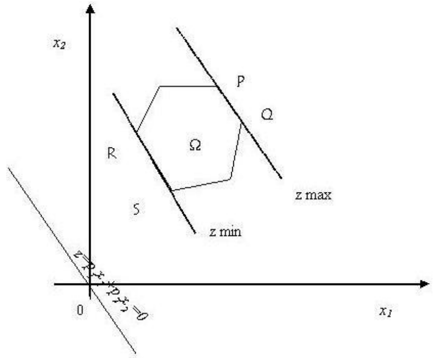
$$z = \overline{P} \cdot \overline{x} \qquad (1a)$$

z funksiýa maksat funksiýa ýa-da meseläniň funksianaly diýilýär.

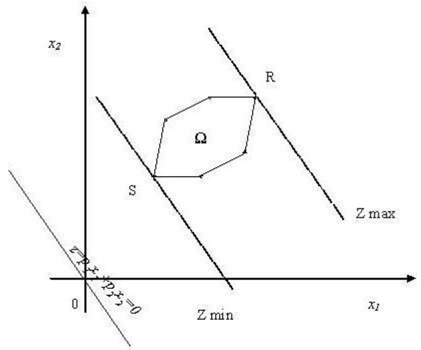
Çäklendirmeler ulgamy berlen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n1}x_n \le a_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le a_m. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

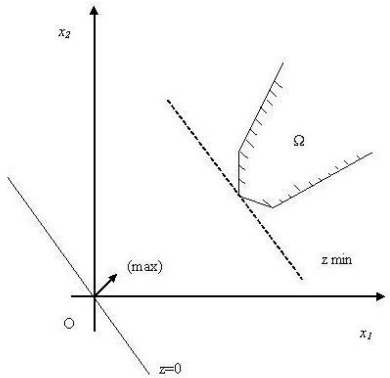
z funksionalyň iň uly ýa-da iň kiçi baha eýe bolmagyny üpjün edýän we (2)-ni kanagatlandyrýan $\overline{x}(x_1, x_2,..., x_n)$ wektory (nokady, näbelliler toplumyny) tapmaly. Ýokarda bellenilşi ýaly (2) ulgam n ölçegli ýewklid giňişliginde güberçek köpburçlugy kesgitleýär. Eger bu köpburçluk boş bolsa (nokatlaryň hiç birini özünde saklamaýar), onda meseläniň çözüwi ýok diýip hasap edilýär.



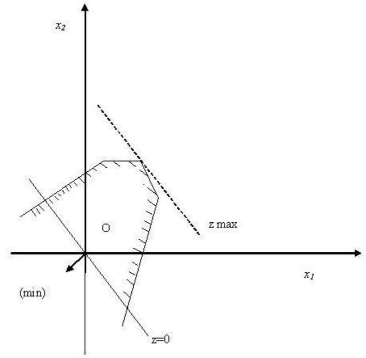
1-nji surat



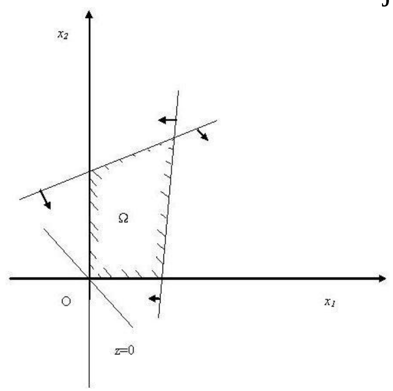
2-nji surat



3-nji surat



4-nji surat



5-nji surat

§5. Çyzykly programmirlemäniň geometrik manysy we grafiki usul bilen çözülişi

Goý bize E^n- ýewklidiň giňişliginde maksat funksiýa berlen bolsun.

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i < b_j \tag{2}$$

$$x_i \ge 0 \tag{3}$$

Bu meseläniň geometrik çözülişi maksat funksiýanyň $z=0$ (4) şerti bilen kesgitlenilýär. Eger biz $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ azat nokady alsak onda ol nokada görä maksat funksiýa şeýle görnüşde ýazylýar.

$$Z^{/}(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{5}$$

Bu bolsa ýokary tizlikden daşlaşýan nokady görkezýär. Onda biz 4-nji şerte görä, ýokary tekizligi koordinatalar başlangyjyndan geçirip x' nokada görä oňa parallel bolan tekizligi kesgitlemeli bolýarys. Meseläni aýdyňlaşdyrmak üçin biz ony ýönekeýleşdirip tekizlikde x_1 hem-de x_2 nokat arkaly hususy hala Ýewklidiň E^2 2-nji giňişliginde seredeliň. Onda biz aşakdaky hususy hallary alýarys.

Eger bu köpburçluk boş däl we diňe bir nokada getirilmeýän bolsa, onda tükeniksiz nokatlar köplügi bar bolup, bu nokatlaryň her biri z funksionalyň belli bir takyk baha eýe bolmagyny üpjün edýärler we (2)-ni kanagatlandyrýarlar. Bu nokatlaryň içinde z ululyk maksimuma ýa-da minimuma eýe bolýan nokady tapmaly. Bu nokady önüm arkaly tapmak usuly ýerlikli bolmaýar, sebäbi *max z* ýa-da *min z* kesgitleniş ýaýlanyň içinde däl-de, gyrada ýerleşýär.

Teorema1. z funksional maksimuma (minimuma) (2) deňsizlikler bilen kesgitlenýän Ω köpburçlugyň gyra nokadynda eýe bolýar.

Subudy. Ω köpburçluk gyra nokatlaryň tükenikli sanyna eýedir. Goý, gyra nokatlar aşakdakylar bolsun:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(r)}$$

Onda $\forall x \in \Omega$ nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar

$$x=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$$

bu ýerde

$$\lambda_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

Goý, z funksiýa käbir x_0 nokatda maksimuma eýe bolýar diýeliň

$$z_{\max}=\overline{P}\cdot\overline{x}_0 \qquad (x_0 \in \Omega).$$

$x_0 \in \Omega$ bolýanlygy üçin bu nokat gyra nokatlaryň güberçek kombinasiýasy bolup durýar. Diýmek, käbir λ_i^0 bar bolup aşakdakyny alarys:

$$z_{\max}=\overline{P}\cdot\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^0\overline{x}^{(i)}=\lambda_1^0\overline{P}\cdot\overline{x}^{(1)}+\lambda_2^0\overline{P}\cdot\overline{x}^{(2)}+\ldots+\lambda_r^0\overline{P}\cdot\overline{x}^{(r)}$$

Her bir $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(1)}, \overline{P}\cdot\overline{x}^{(2)},..., \overline{P}\cdot\overline{x}^{(r)}$ skalýar köpeltmek hasyly san ululykdyr. Bu sanlardan iň ulusyny saýlalyň; goý, bu san $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$ bolsun. $\overline{x}^{(k)}$ gyra nokatlaryň köplüginiň biri bolup durýar; $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$ bolsa funksionalyň şol nokatda eýe bolýan bahasy.

Hemme $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(i)}$ skalýar köpeltmek hasyllaryň ýerine olaryň iň ulusyny $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$-ny goýalyň; deňligiň ýerine deňsizlik alarys:

$$z_{\max} \le \lambda_1^0 \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)} + \lambda_2^0 \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)} + ... + \lambda_r^0 \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$$

(eger hemme $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(i)}$-ler biri-birine deň bolanda, onda deňlik alamaty goýulardy, şonuň üçin deňsizlige deňlik hem goşulýar). $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$-i jemiň daşyna çykaryp we $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^0 = 1$ bolýanlygy göz öňünde tutup alarys:

$$z_{\max} \le \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)} \cdot \sum_{i=1}^{r}\lambda_i^0 = \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$$

Şeýlelik bilen,

$$z_{\max} \le \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$$

Bu ýerde $z_{\max}$ alnan köplükde funksionalyň iň uly bahasy; $\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$ - funksionalyň käbir gyra nokatda eýe bolýan bahasy. Emma iň uly baha mümkin bolan bahalardan kiçi bolup bilmeýär, şonuň diňe = alamaty galýar:

$$z_{\max} = \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}$$

Diýmek, z iň uly baha diňe gyra nokatda eýe bolýar.

Teorema2. *Eger z funksional maksimuma (minimuma) birnäçe gyra nokatlarda eýe bolýan bolsa:*

$$z_{\max} = \overline{P}\cdot\overline{x}^{(1)} = \overline{P}\cdot\overline{x}^{(2)} = ... = \overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)}, \quad k > r$$

(r – gyra nokatlaryň umumy sany), onda z şol bir baha agzalan k nokatlaryň güberçek oboloçkasynyň her bir nokadynda eýe bolýar.

Subudy. $x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(k)}$ nokatlar bilen emele gelen güberçek köplügiň islendik x nokadyndaky z funksionalyň bahasyna seredeliň:

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^{(i)}, \quad \lambda_i \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1;$$

$$z(x) = \overline{P}\cdot\overline{x} = \overline{P}\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \overline{x}^{(i)} = \lambda_1\overline{P}\cdot\overline{x}^{(1)} + \lambda_2\overline{P}\cdot\overline{x}^{(2)} + ... + \lambda_k\overline{P}\cdot\overline{x}^{(k)} =$$
$$= \lambda_1 z_{\max} + \lambda_2 z_{\max} + ... + \lambda_k z_{\max} = z_{\max}(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k =$$
$$= z_{\max}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = z_{\max}\cdot 1 = z_{\max}.$$

Diýmek, güberçek oboloçkanyň islendik nokadynda *z(x)*-iň bahasy

$$z(x) = z_{\max}$$

Geometriki manyda: eger max z iki nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda ol bütin kesimde ýerine ýetýär; eger üç nokatda ýerine ýetýän bolsa, onda bütin üçburçlukda we ş.m. Eger max z hemme gyra nokatlarda ýerine ýetýän bolsa, onda çözüwler ýaýlasynda funksional üýtgemeýär.

Subut edilen teoremalar meseleleri çözmekligiň usullaryny gurmaklygyň esasyny düzýärler.