N.Gurbanmämmedow, O.A.Aşyrow,
P.N.Gurbanmämmedow, A.N.Gurbanmämmedowa

KOMPLEKS ÜÝTGEÝÄNLI FUNKSIÝALAR NAZARYÝETI

Ýokary okuw mekdepleriniñ talyplary üçin okuw kitaby

Türkmenistanyñ Bilim ministrligi tarapyndan hödürlenildi

Aşgabat-2010

N.Gurbanmämmedow, O.A.Aşyrow,
P.N.Gurbanmämmedow, A.N.Gurbanmämmedowa.
„Kompleks üýtgeýänli funksiýalar nazaryýeti”.
Ýokary okuw mekdepleriniñ talyplary üçin okuw kitaby

Giriş

Beýik galkynyşlar zamanasynda milli bilim ulgamynda aýratyn üns berilýär.

Döwür kämil ahlagy, añ düşünjeligi talap edýär. Şol esasda hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhamedowyñ başyny başlan milli bilim özgertmelerine mynasyp goşant goşmak üçin ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaplaryny ýazmaklyk wajyp meseleleriñ biri bolup durýar.

Bu okuw kitaby on bäş bapdan ybarat bolup, kompleks san, hatar, kompleks funksiýalar, kompleks yzygiderlikleri, hatarlary, wyçetler barada düşünje berilýär. Her bir bap birnäçe paragraflardan ybaratdyr.

Her bapda nazaryýeti berkitmek maksady bilen, bölümde beýan edilen düşünjeleriñ ulanylyşyny görkezýän mysallar getirilýär.

Kitapda her bapdaky teoremalar, kesgitlemeler we formulalar yzygiderli belgilenendir.

I. Bap. Kopmleks sanlar we san hatarlary
§1.1. Kompleks sanlar, kompleks tekizlik, kompleks sanyň moduly we argumenti
1.Kompleks sanyñ kesgitlenişi. Kompleks tekizlik.

Herbir hakyky sandan kök alyp bolmaýandygy bize mälimdir. Şonuň üçin hem sanlar nazaryýetini umumylaşdyryp, hususy haly adaty hakyky sanlar bolan täze sanlary girizmek zerurlygy ýüze çykýar. Bu täze sanlar üçin hem hakyky sanlar bilen geçirilýän amallar saklanmalydyr. Täze sanlary girizmek üçin $x^2+1=0$ deňlemäniň köki bolan “hyýaly” *i* birlik girizilýär, ýa-da gőnüburçly koordinatalar tekizliginde şekili ulanylýar.

Hakyky sanlar bilen koordinata başlangyjy bar bolan *ox* okunyň nokatlarynyň arasynda birbelgili degişliligiň bardygy bize mälimdir. *ox* okuň ornuna *oxy* tekizlige seredeliň. Tekizligiň her bir (*x,y*) nokadyna käbir *z* sany degişli edeliň. Bu *z* sana kompleks san diýip, *xoy* tekizlige kompleks (*z*) tekizligi diýip atlandyrylýar.

Diýmek, *z* tertipleşdirilen hakyky sanlaryň (*x,y*) jübütidir, ýagny $z=(x,y)$.

x-e z sanyň hakyky bölegi, *y-e* hyýaly bölegi diýilýär we degişlilikde *x=Rez, y=Imz* bilen belgilenýär. o*x* oka hakyky ok, *oy* oka hyýaly ok diýilýär. 0 san diýip, koordinata başlangyjy kabul edilýär, ýagny (0,0)=0.

$(x,0)=x, (0,1)=i.$ diýip kabul edilýär.

Aşakdaky kesgitlemeleri girizeliň:

1. $z_1 = (x_1, y_1)$ *we* $z_2 = (x_2, y_2)$ sanlara deň diýilýär şonda diňe $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, bolanda, gysgaça şeýle ýazmak bolýar $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2)$.

2. z_1 we z_2 kompleks sanlaryň jemi diýilip,
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
kompleks sana aýdylýar

3. z_1 we z_2 kompleks sanlaryň köpelmek hasyly diýlip,

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \qquad (1.1)$$

kompleks sana aýdylýar.

Bu kesgitlemeleri ulanyp,

$$z + 0 = (x, y) + (0,0) = (x, y) = z,$$

$$z \cdot 0 = (x, y) \cdot (0,0) = (0,0) = 0,$$

$$z \cdot 1 = (x, y) \cdot (1,0) = (x, y) = z$$

$$i \cdot i = i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

deňlikleri alarys. Şeýle hem

$$(0, y) = (0,1) \cdot (y,0) = iy.$$

Bu deňligi peýdalanyp, kompleks sanyň algebraik ýazylyşyny alarys:

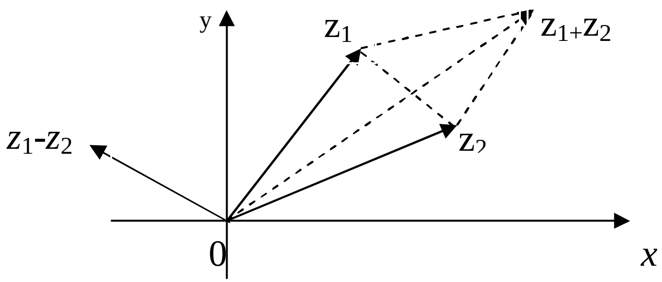
$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = x + iy.$$

x-iy kompleks sana *z=x+iy* kompleks sanyň çatrymlysy diýilýär we $\bar{z}$ bilen belgilenýär, ýagny $\bar{z} = x - iy$ (kompleks san we onuň çatrymlysy hakyky oka görä simmetrik ýerleşendir).

$z_1$we z_2 kompleks sanlaryň z_1-z_2 tapawudy diýlip $z_2 + z_3 = z_1$ deňligi kanagatlandyrýan z_3 kompleks sana aýdylýar. Şunlukda, $x_2 + iy_2 + (x_3 + iy_3) = x_1 + iy_1$ deňligiň esasynda $z_3 = z_1 - z_2$ tapawut $z_3 = x_3 + iy_3 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$ deňlik bilen kesgitlenýär.

Tekizlikdäki her bir nokat bilen bu nokadyñ radius wektorynyñ arasynda birbelgili degişliligiñ bardygy bize analitik geometriýadan bellidir. Diýmek her bir kompleks san bilen bu sanyñ radius wektorynyñ arasynda birbelgili degişlilik bardyr.

$z_1$we z_2 sanlaryň jeminiň we tapawudynyň geometrik manysy 1-nji suratda gőrkezilendir.



1-nji surat

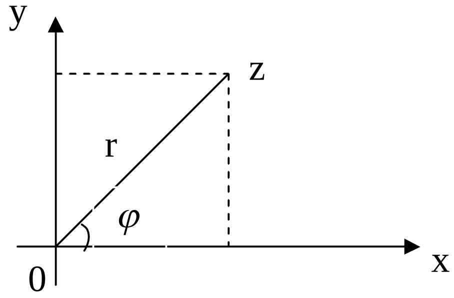
z_1 we $z_2 \neq 0$ kompleks sanlaryň $\frac{z_1}{z_2}$ paýy diýlip,

$z_2 \cdot z_3 = z_1$ deňligi kanagatlandyrýan z_3 kompleks sana aýdylýar we ol şeýle kesgitlenýär:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

2. Kompleks sanlaryň moduly we argumenti

$z = x + iy$ kompleks san kompleks tekizlikde birbelgili diňe dekart koordinatalarynda kesgitlenmän, r, φ polýar koordinatalarynda-da kesgitlenýändir, bu ýerde $r = |z|$ koordinatalar başlangyjy bilen z nokadyň arasyndaky uzaklyk, φ bolsa $\overrightarrow{oz}$ wektor bilen hakyky okuň položitel ugrunyň arasyndaky burç. Ol sagat diliniň aýlanýan ugrunyň garşysyna položitel, ugruna – otrisatel hasaplanylýar. φ sana z kompleks sanyň argumentini diýilýär we $\varphi = Argz$ bilen belgilenýär.



2-nji surat

2-nji suratdan:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ r^2 &= x^2 + y^2 = z\overline{z}, \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

bu ýerde

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}.$$

z kompleks sanyň r moduly birbelgili, φ argumenti bolsa $2k\pi (k = 0 \pm 1, \ldots)$ goşulyjyly takyklygy bilen kesgitlenýär. z=0 sanyň argumenti kesgitlenmeýär.

φ argumentiň,

$$-\pi < \varphi \le \pi \quad \text{ýa-da} \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

deňsizligi kanagatlandyrýan bahasyna onuň baş bahasy diýilýär we $\arg z$ bilen belgilenýär.

Şeýlelikde, $Argz = \arg z + 2k\pi,\ k \in Z$ deňligi ýazmak bolar.

$$\arg\ z = \begin{cases} arctg\ \dfrac{y}{x}, x > 0\ \ bolanda\ , \\ \pi + arctg\ \dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0\ \ bolanda\ , \\ -\pi + arctg\ \dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0\ \ bolanda\ , \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0\ \ bolanda\ , \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0\ \ bolanda\ . \end{cases}$$

(1.2)- iň esasynda z kompleks sanyň

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (1.3)$$

<u>trigonometrik</u> görnüşde ýazylyşyny alarys.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Eýler formulasyny we (1.3) deňligi ulanyp, kompleks sanyň $z = re^{i\varphi}$ – <u>görkezijili görnüşde ýazylyşyny</u> alarys.

3. Kompleks sany dereje götermek

Goý,

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, bolsun,

onda (1.1)deňligi ulanyp, alarys:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\ ) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (1.4)$$

Bu deñlikden

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ deñlikler gelip çykýar.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_1 \cdot \bar{z}_2} =$$

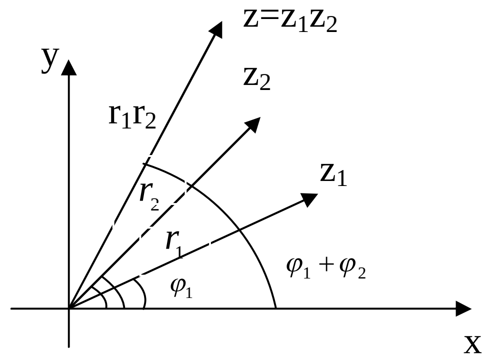
$$= \frac{r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

deňligi alarys.

Soñky deñlikden alarys: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$

z_1 *we* z_2 kőmpleks sanlaryň kőpeltmek hasylynyň geometrik manysy 3-nji suratda şekillendirilendir.



3-nji surat

(1.4)-deňligiñ getirilip çykarylyşyna meňzeşlikde, matematiki induksiýa usulyny ulanyp alarys:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)\right)=$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_n e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)}.$$

Bu deňlikden $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$ bolanda Muawra formulasy diýip atlandyrylan deňlik gelip çykýar:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \qquad (1.5)$$

<u>4.Kompleks sandan kök almak</u>

Komplek sandan kök almak üçin

$$z^n = c \qquad (1.6)$$

deňlemä seredeliň, bu ýerde $c \neq 0$ kompleks, n natural san.

Goý,

$$c = \rho e^{i\theta}, \qquad z = re^{i\varphi}$$

bolsun, onda (1,6) deňlikden

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

deňlik gelip çykýar. Bu deňlikden alarys:

$$r^n = \rho,\ n\varphi = \theta + 2\pi k,$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \varphi_k = (\theta + 2\pi k)/n,$$

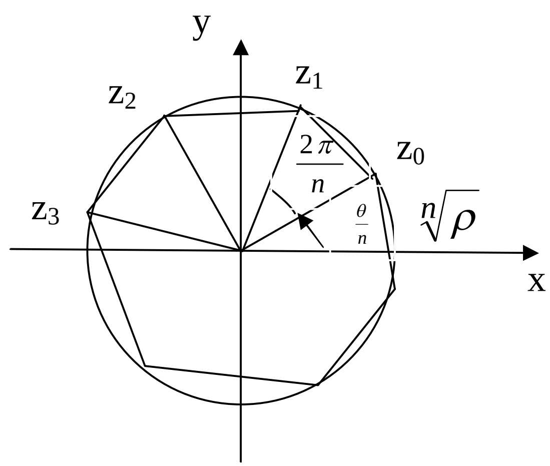
$$z_k = \sqrt[n]{p}e^{i(\theta+2\pi k)/n} = \sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right).$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Alnan kompleks sanlaryň n-sanysynyň dürlüdigini görkezeliň. $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ kompleks sanlar dürlüdir, sebäbi olaryň argumentleri dürli:

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta+2\pi}{n}, \varphi_2 = \frac{\theta+4\pi}{n}, \ldots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta+2\pi(n-1)}{n}.$$

4-nji suratda z sandan alnan kőküň bahalary şekillendirilendir.



4-nji surat

$z_n = z_0$ bolar, sebäbi $\varphi_n = \dfrac{\theta + 2\pi n}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$,

$z_{n+1} = z_1, \ldots$.

Diýmek, $c \neq 0$ bolanda (1.6) deňlemäniň n dürli köki bar:

$$z_k = \sqrt[n]{p}e^{i(\theta+2\pi k)/n}, k = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

ýa-da

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,2,\dots,n-1 \quad (1.7)$$

Mysal 1.1. Amallary ýerine ýetiriň:

$$1)\,\frac{1-i}{1+i};\quad 2)\left(1+i\sqrt{3}\right)^3,\quad i^{2010}.$$

Çözülişi: 1) Drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny (1-i)-e köpeldip alarys:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

2) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = 1 + i3\sqrt{3} + i^2 3\cdot 3 + i^3\left(\sqrt{3}\right)^3 = 1 + i3\sqrt{3} - 9 - i3\sqrt{3} = -8.$

3) $i^{2010} = \left(i^2\right)^{1005} = -1.$

Mysal 1.2 $\cos 3\varphi, \sin 3\varphi$ aňlatmalary degişlilikde $\cos\varphi$ we $\sin\varphi$ aňlatmalaryň üsti bilen aňladyň.

Çözülişi. (1.5)formulany ulanyp alarys:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

ýa-da

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

$$\left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly böleklerini deňeşdirip,

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

deňlikleri alarys. Bu deňlikleriň esasynda

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right) = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi + 3\cos^3\varphi =$$

$$= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\left(1-\sin^2\varphi\right)\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 3\sin^3\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

deňlikleri alarys.

Mysal 1.3 Kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly böleklerini tapmaly:

$$1)\ \frac{1}{1-i};\qquad 2)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

Çözülişi: 1) Sanawjyny, maýdalawjyny maýdalawjynyň çatrymlysyna köpeldip alarys:

1) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2},\quad \mathrm{Re}\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2},\quad \mathrm{Im}\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}.$

2) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^3 = \left(-\frac{2i}{2}\right)^3 = (-i)^3 = i.$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 0,\ \mathrm{Im}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = 1.$$

Mysal 1.4 Kompleks sanlaryň modulyny we argumentini tapmaly:

$$1)\ 1 + i^{123};\qquad 2)\ -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$$

Çözülişi:

1) $1 + i^{123} = 1 + i^{122}\cdot i = 1 + \left(i^2\right)^{61}\cdot i = 1 - i$

$$\left|1+i^{123}\right|=\left|1-i\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$Arg\left(1+i^{123}\right)=Arg(1-i)=arctg\frac{-1}{1}+2k\pi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\ldots$$

2) $$\left|-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right|=\sqrt{\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{7}}=1,$$

$$Arg\left(-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\pi-arctg\left(\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\right)+2k\pi=\pi-arctg\left(tg\frac{\pi}{7}\right)+2k\pi=$$

$$=\pi-\frac{\pi}{7}+2k\pi=\frac{6\pi}{7}+2k\pi,\ \ k=0,\pm1,\ldots\cdot$$

Mysal 1.5 Deňlikleri subut etmeli:

1) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z;\qquad \overline{(z_1-z_2)}=\bar{z}_1-\bar{z}_2.$

Gőzülişi. 1)

$$z+\bar{z}=x+iy+x-iy=2x=2\operatorname{Re}z$$

2) $$\overline{(z_1-z_2)}=\overline{(x_1-x_2+i(y_1-y_2))}=x_1-x_2-i(y_1-y_2)=$$
$$=x_1-iy_1-(x_2-iy_2)=\bar{z}_1-\bar{z}_2.$$

Mysal 1.6 Kompleks sanlary trigonometrik we görkezijili görnüşlerde ýazyň

1) $1+i\sqrt{3}$; 2) $-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$

Gözülişi. 1) Ilki bilen bu sanyň modulyny we argumentini tapalyň:

$$r=\left|1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2,\qquad \varphi=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2) $-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ kompleks san,

kompleks sanyň trigonometrik ýazylyşy däl, sebäbi –2 položitel san däl.

$$-\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3},$$
$$-\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{4\pi}{3},$$

Diýmek

$$-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

3) $$-\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5},$$
$$\sin\frac{\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{4\pi}{5},$$
$$-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}=e^{i\frac{4\pi}{5}}.$$

Mysal 1.7 Tapyň: 1) $\sqrt{1-i}$; 2) $\sqrt[3]{i}$.

Çözülişi 1) Ilki bilen (1-i) kompleks sanyň modulyny we argumentiniň baş bahasyny tapalyň:

$$\rho=\sqrt{2},\quad \theta=arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

(1.7) formulany ulanyp alarys:

$$\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right), k=0,1.$$

$$\left(\sqrt{1-i}\right)_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right);$$

$$\left(\sqrt{1-i}\right)_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right).$$

2) $\rho=1,\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$

$$\sqrt[3]{i}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3},\ k=0,1,2.$$

$$\left(\sqrt[3]{i}\right)_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{i}\right)_2=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(i-\sqrt{3}\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{i}\right)_3=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

Mysal 1.8. Deňlemeleri çözüň:

1) $z^2-2iz+3=0;$ 2) $z^3+8i=0$

Çözülişi. 1) Bu kwadrat deňlemäni, çözüp, alarys:

1) $z_{1,2}=i\pm\sqrt{i^2-3}=i\pm\sqrt{-4}=i\pm 2i.$

2) $z^3+8i=0\Rightarrow z^3-(2i)^3=0\Rightarrow$

$(z-2i)\left(z^2+2iz-4\right)=0\Rightarrow$

$z-2i=0,\ z^2+2iz-4=0,$

$z_1=2i,\quad z_{2,3}=-i\pm\sqrt{i^2+4}=-i\pm\sqrt{3}.$

Mysal 1.9. Eger $\rho(z_1,z_2)$ ululyk $z_1$we z_2 nokatlaryň arasyndaky uzaklyk bolsa, onda $|z_1-z_2|=\rho(z_1,z_2)$ bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi

$$|z_1-z_2|=|x_1-x_2+i(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\rho(z_1,z_2).$$

Mysal 1.10. Deňligi subut ediň:

$$\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n=\frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha}.$$

Çözülişi.

$$\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^n=\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}\right)^n=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos n\alpha-i\sin\alpha}=\frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha}.$$

§1.2. Kompleks sanlaryň yzygiderlikleri we hatarlary.

1.Kompleks sanlaryñ yzygiderlikleri.

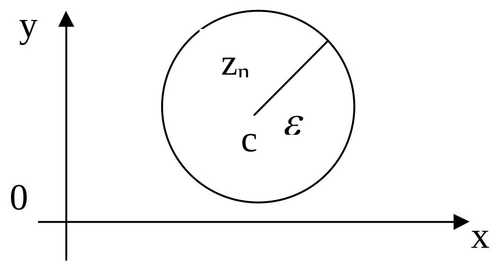
Kesgitleme 1.1. Eger her bir *n* natural sana käbir z_n kompleks san degişli edilse, onda $z_1, z_2, ...z_n, ...$ sanlaryň toplumyna kompleks sanlaryñ yzygiderligi diýilýär.

Kesgitleme 1.2. Eger $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle $N=N(\varepsilon)$ nomer $\exists, \forall n\geq N$ üçin $|z_n-c|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa,onda c kompleks sana $\{z_n\}$ yzygiderligiň predeli diýilýär, ýa-da

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-c|=0.$$

Predeli bar bolan yzygiderlige ýygnanýan yzygiderlik diýilýär.

Predeliň geometrik manysy 5-nji suratda şekillendirilendir:



Eger c san, $\{z_n\}$ yzygiderligiň predeli bolsa , onda *c* nokadyň islendik etraby $\{z_n\}$ yzygiderligiň tükeniksiz köp agzalaryny özünde saklaýandyr.

5-nji surat

Her bir $\{z_n\}$ kompleks yzygiderligine hakyky sanlaryň $\{x_n\}$ we $\{y_n\}$yzygiderlikleri degişlidir, bu ýerde $z_n=x_n+iy_n, n=1,2,....$

Teorema1.1.

$$\lim_{n-\infty} z_n=\lim_{n-\infty}(x_n+iy_n)=c=\alpha+i\beta \qquad (1.8)$$

predeliň bar bolmagy üçin

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha \qquad ,\lim_{n\to\infty} y_n=\beta \qquad (1.9)$$

predelleriň bar bolmagy zerur we ýeterlikdir.

Subudy. Zerurlyk. Goý (1.8) ýerine ýetýän bolsun, ýagny $\forall\varepsilon>0$ üçin şeýle bir $N=N(\varepsilon)$ nomer $\exists, \forall n\geq N(\varepsilon)$ üçin $|z_n-c|<\varepsilon$, ýagny

$$|z_n-c|=\sqrt{(x_n-\alpha)^2+(y_n-\beta)^2}<\varepsilon$$

Bu ýerden $\forall\varepsilon > 0$, üçin $N = N(\varepsilon)\exists$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ üçin

$$|x_n = \alpha| < \varepsilon, \qquad |y_n - \beta| < \varepsilon$$

deňsizlikleri alarys. Diýmek (1.9) deňlikler ýerine ýetýär.

Ýeterlik Goý, (1.9) ýerine ýetýän bolsun, ýagny $\forall\varepsilon > 0$, üçin $N_1(\varepsilon)$ *we* $N_2(\varepsilon)$ nomerler $\exists$, $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$ we $\forall n \geq N_2(\varepsilon)$

üçin degişlilikde $|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ *we* $|y_n - \beta| \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

deňsizlikler ýerine ýetsin. Goý, $N = \max\{N_1, N_2\}$ bolsun, onda

$\forall n \geq N$, üçin $|x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $|y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}$

deňsizlikler ýerine ýetýär.
Bu deňsziliklerïň esasynda bolsa

$$|z_n - c| = \sqrt{(x_n - 2)^2 + (y_n - \beta)^2} < \varepsilon$$

deňsizilik ýerine ýeter.

Kesgitleme 1.3. Eger $\forall n \in N$ üçin şeýle hakyky a>0 san tapylyp, $|z_n| \leq a$ bolsa, onda $\{z_n\}$ yzygiderlige çäkli yzygiderlik diýilýär.

Predeliň kesgitlemesine görä, eger yzygiderligiň predeli bar bolsa, onda ol çäklidir.Tersine umuman dogry däldir.

Teorema 1.2. (Weýterştrass teoremasy). Islendik çäkli $\{z_n\}$ yzygiderlik özünde ýygnanýan bölek yzygiderligini saklaýandyr.

Subudy Bu teoremanyň subudy teorema 1.1-den we hakyky san yzygideligi üçin Weýterştrass teoremasyndan gelip çykýar.

Teorema 1.3. (Koşi kriterisi). $\{z_n\}$yzygiderligiň predeliniň bar bolmagy üçin $\forall\varepsilon>0$ san üçin $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $\forall n \geq N,\ \ \forall m \geq N$ nomerler üçin $|z_n - z_m| < \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir

Subudy Bu teoremanyň subudy hem teorema 1.1-den we hakyky san yzygiderligi üçin Koşi kriterisinden gelip çykýar.

2. Kompleks san hatarlary.

Goý, $z_1, z_2, ..., z_n ...$ (hakyky ýa-da kompleks)san yzygiderlik berlen bolsun. Onda ol yzygiderligiň agzalaryndan düzülen

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (1.10)$$

aňlatma kompleks san hatary diýilýär.

Eger (1.10) hataryň $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ bölek jemleriniň $\{S_n\}$ yzygiderligi ýygnanýan bolsa, onda (1.10) hatara ýygnanýan hatar diýilýär. Bu yzygiderligiñ predeli (1.10) hataryñ jemidir.

Eger $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|-$ hatar ýygnanýan bolsa, onda (1.10) hatara absalýut ýygnanýan hatar diýilýär.

(1.10) hataryň ýygnanýandygyny aýdyňlaşdyrmak üçin $\{S_n\}$ yzygiderligiň ýygnanýandygyny aýdyňlaşdyrmak ýeterlikdir.

Yzygiderligiň häsiýetlerinden alarys:

1^0.(1.10) hataryň ýygnanmagy üçin $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ we $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ $\left(z_n = x_n + iy_n\right)$ hatarlaryň ýygnanmagy zerur we ýeterlikdir, şunlukda $\sum_{n=1}^{\infty}z_n = \sum_{n=1}^{\infty}x_n + i\sum_{n=1}^{\infty}y_n$.

2^0. Eger (1.10) hatar ýygnanýan bolsa, onda (α-kompleks san üçin) $\sum_{n=1}^{\infty}az_n$ hatarlar hem ýygnanýandyr we $\sum_{n=1}^{\infty}az_n = a\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ deňlik dogrudyr;

3^0. Eger (1.10) we

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n \qquad (1.11)$$

hatarlar ýygnanýan bolsalar, onda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n + \xi_n\right)$ hatar hem ýygnanýandyr we

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n + \xi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}z_n + \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ deňlik dogrydyr;

4^0.Eger (1.10) we (1.11) hatarlar ýygnanyp,olaryň jemi degişlilikde S we σ deň bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\xi_{n-k+1}\right)$ hatar hem ýygnaýandyr we jemi $S\sigma$ deňdir;

5^0. Koşi kriterisi (1.10) hataryň ýygnanmagy üçin $\forall\varepsilon > 0$ san üçin şeýle $N = N(\varepsilon)$ nomer $\exists, \forall n > N, m > N$ $(m > n)$ nomerler üçin $\left|\sum_{k=n}^{m}z_k\right| < \varepsilon$ deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir;

6^0.Eger (1.10) hatar ýygnanýan bolsa, onda $\lim_{n\to\infty}z_n = 0$;

7^0.Eger $\sum_{n=1}^{\infty}|z_k|$ hatar ýygnanýan bolsa, onda (1.10) hatar hem ýygnanýandyr.

Bu häsiýetleriň esasynda hakyky sanlaryň hatary üçin belli bolan ýygnanma nyşanlary kompleks sanlaryň (1.10) hatary üçin hem ulanmak bolar.

3. Oblast düşünjesi.

Kesgitleme 1.4. Eger z_0 nokat özüniň käbir etrapy bilen D köplüge degişli bolsa, onda ol nokada bu köplügiň içki nokady diýilýär.

Kesgitleme 1.5. Eger $D\in(z)$ köplügiň hemme nokatlary içki nokatlar bolsa, onda ol köplüge <u>açyk</u> köplük diýilýär.

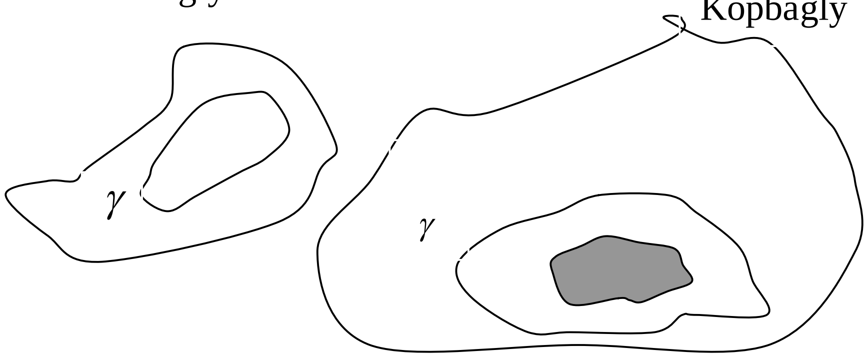
Kesgitleme 1.6. (z) kompleks tekizligiň *D* köplügi açyk we baglanyşykly (*D* köplügiň islendik iki nokadyny ähli nokatlary bu köplüge degişli bolan egri bilen birikdirip bolýan) bolsa, onda ol kőplüge <u>oblast </u>diýilýär.

Kesgitleme 1.7. Eger z_0 nokadyň islendik etrapy özünde D oblasta degişli we degişli däl nokatlary saklaýan bolsa, onda ol nokada bu oblastyň <u>çäk nokady</u> diýilýär.

Kesgitleme 1.8. D oblastyñ çäk nokatlaryň köplügine oblastyñ <u>çägi</u> diýilýär

Kesgitleme 1.9. Kompleks tekizliginiň D oblastyna degişli bolan islendik ýapyk egriniň içi hem D oblastda saklanýan bolsa, onda ol oblasta <u>birbagly</u> oblast diýilýär, tersine bolanda köpbagly oblast diýilýär. (6-njy surat)

birbagly



6-njy surat

Mysal 1.11. Kesgitleme 1.8-i ulanyp, $c=1$ sanyň $z_n=\dfrac{n^2+3i}{n^2-2i}$ yzygiderligiň predelidigini görkeziň.

<u>Gözülişi</u> Goý, $\varepsilon>0$- erkin san bolsun. Onda

$$|z_n-1|=\left|\frac{n^2+3i}{n^2-2i}-1\right|=\left|\frac{5i}{n^2-2i}\right|=\frac{5}{\sqrt{n^4+4}}<\varepsilon\ .$$

Bu deňsizlikden alarys:

$$\sqrt{n^4+4}>\frac{5}{\varepsilon}\Rightarrow n^4+4>\frac{25}{\varepsilon^2}\Rightarrow n>\sqrt[4]{\frac{25-4\varepsilon^2}{\varepsilon^2}}$$

bolanda ýerine ýetýändir.

Goý, N san $\left[\dfrac{\sqrt[4]{25-4\varepsilon^2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ bolsun. Onda $\forall n>N$ üçin $n>\dfrac{\sqrt[4]{25-4\varepsilon^2}}{\sqrt{\varepsilon}}$ deňsizlik ýerine ýeter. Diýmek, $c=1$ san

Köpbagly $z_n=\dfrac{n^2+3i}{n^2-2i}$ yzygiderligiň predelidir.

Mysal 1.12. $z_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{i\frac{\pi}{n}}$ yzygiderligiň predelini tapyň.

Çözülişi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i\frac{\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{i\frac{\pi}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i\pi}{n^2}}=e^0=1.$$

Mysal 1.13. $z_n=\arg\dfrac{(-1)^n}{n}\quad (n=1,2,...)$ yzygiderligiň dargaýandygyny görkeziň.

Çözülişi.

$$z_n=\arg\frac{(-1)^n}{n}=\begin{cases}0,\ eger\ n-\ jubut\ bolsa,\\ \pi,\ eger\ n-tak\ bolsa.\end{cases}$$

z_n yzygiderlik $\pi,0,\pi,0,...$ görnüşi alar. Bu yzygiderligiň predeli ýok.

Mysal 1.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{i^n(2n)!}$ hataryň ýygnanýandygyny derňemeli.

Çözülişi. Dalamber nyşany ulanyp, alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{2(n+1)}i^n\cdot(2n)!}{i^{n+1}(2(n+1))!n^{2n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n+2}(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)n^{2n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}(1+\frac{1}{n})^{2n}=\frac{e^2}{4}>1$$

ýagny berlen hatar dargaýar.

Mysal 1.15. $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$ bolanda gipergeometrik

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta-1)...(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}$$

hataryň ýygnanýandygyny derňäň.

Çözülişi: Dalamber nyşanyny ulanyp alarys:

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\frac{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)\beta(\beta-1)...(\beta+n-1)(\beta+n)}{(n+1)!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)(\gamma+n)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{n!\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)\beta(\beta-1)...(\beta+n-1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha+n||\beta+n|}{|n+1||\gamma+n|}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|1+\frac{\alpha}{n}\right|\left|1+\frac{\beta}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left|1+\frac{\gamma}{n}\right|}=1, \qquad (1.12)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1.$$

Diýmek Dalamber nyşany berlen hatara ulanarlyk däl. Pabe nyşanyny ulanmak üçin (1.12) deňligi ulanyp alarys:

$$n(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|) = n\left(1-\frac{\left|1+\frac{\alpha}{n}\right|\left|1+\frac{\beta}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left|1+\frac{\gamma}{n}\right|}\right) = n(1-\frac{\sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{Im}\alpha}{n}\right)^2}}{(1+\frac{1}{n})\sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{Re}\gamma}{n}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{Im}\gamma}{n}\right)^2}}\times$$

$$\times\sqrt{\left(1+\frac{\operatorname{Re}\beta}{n}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{Im}\beta}{n}\right)^2},$$

Teýlor formulasynyň esasynda bu deňligi

$$n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) = n\Bigg(1-\left(1+\frac{\operatorname{Re}a}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{\operatorname{Re}\beta}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\operatorname{Re}\gamma}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Bigg) = n\Bigg(1-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}(\operatorname{Re}a+\operatorname{Re}\beta-\operatorname{Re}\gamma)+$$

$$+0\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg),$$

görnüşde ýazmak bolar. Onda Ruabe nyşany boýunça

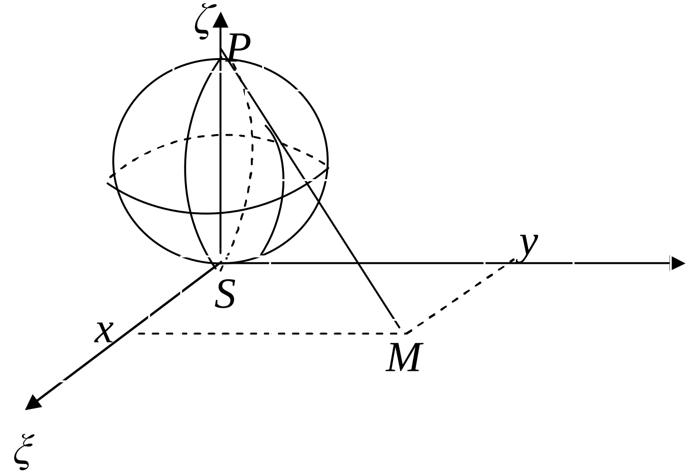
$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) = 1-\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) > 1.$$

Diýmek berlen hatar absolýut ýygnanýar.

§1.3. Stereografiki proýeksiýa we tükeniksiz daşlaşan nokat.

Kesgitleme 1.10. $|z-z_0|<\varepsilon$ deňsizligi kanagatlandyrýan kompleks tekizligindäki z – nokatlaryň köplügine z_0 nokadyň ε -etrapy diýilýär we $\rho_\varepsilon(z_0)$ bilen belgilenýär.

Kesgitleme 1.11. $|z|>R>0$ deňsizligi kanagatlandyrýan kompleks tekizlikdäki z nokatlaryň



köplügine tükeniksiz daşlaşan nokadyň R- etrapy diýilýär we $\rho_R(\infty)$ bilen belgilenýär.

(z) kompleks tekizligine $z=\infty$ nokat bilen bilelikde giňeldilen kompleks tekizligi diýilýär. Tükeniksiz daşlaşan nokadyň ýeke-täkdigini görkezeliň. Kompleks tekizlik bilen Riman sferasy diýlip atlandyrylýan sferanyň nokatlarynyň arasynda stereografiki proýeksiýanyň üsti bilen birbelgili degişlilik gurnalyň. P nokat bilen M nokady göni çyzyk bilen birikdireliň. Sfera bilen göni çyzygyň kesişme nokadyny A bilen belgiläliň. A nokat bilen M nokat özara birbelgili baglydyr. Eger M nokat islendik ugur boýunça tükeniksizlige ymtylsa, oňa degişli bolan A nokat P nokada ymtylar. Diýmek, P nokat tükeniksiz daşlaşan nokada degişli bolar, bu nokat ýeke-täkdir.

Goý, R^3 giňişlikde $0\xi\eta\varsigma$ dekart koordinatalar ulgamy berlen bolsun. Bu giňişlikde merkezi $(0,0,\frac{1}{2})$

nokatda we radiusy $\frac{1}{2}$ deň bolan S sfera berlen bolsun, ýagny

$$\xi^2+\eta^2+(\varsigma-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}.$$

(0,0,1) nokady P harp bilen belgiläliň. (z) kompleks tekizliginde hakyky oky 0ξ, hyýaly oky 0η bilen gabat geler ýaly oxy koordinatalar ulgamyny guralyň.

(z) tekizligiň $z=x+iy$ nokadyny göni çyzyk boýunça M nokat bilen birikdirip, sfera bilen kesişme nokadyny $A(\xi,\eta,\varsigma)$ bilen belgiläliň. Bu baglanyşyk, ýagny (z) tekizligiň nokatlary bilen sferanyň P nokadyndan başga nokatlarynyň arasyndaky baglanyşyk özara birbaglydyr.

Ol birbelgili birbaglylyk

$$\xi=\frac{2x}{1+|z|^2},\eta=\frac{2y}{1+|z|^2},\zeta=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \quad we \quad x=\frac{\xi}{1-\varsigma},\ y=\frac{\eta}{1-\varsigma}$$

furmulalar bilen aňladylýar.

<u>Mysal 1.15.</u> (z) tekizligindäki islendik göni çyzygyň ýa-da töweregiň sferadaky sterografiki proýeksiýasynyň töweregidigini görkeziň.

<u>Çözülişi.</u> (z) tekizligindäki islendik göni çyzygyň ýa-da töweregiň deňlemesi

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$$

görnüşde ýazylýar. Hakykatdan-da, eger $A=0$ bolsa, onda ol çyzyk göni çyzyk, $A\neq 0$ bolsa töwerekdir. Sterografiki proýeksiýadaky formulalary ulanyp, alarys:

$$A\left(\frac{\xi^2}{(1-\zeta)^2}+\frac{\eta^2}{(1-\zeta)^2}\right)+B\frac{\xi}{1-\zeta}+C\frac{\eta}{1-\zeta}+D=0,$$

ýa-da

$$A(\xi^2+\eta^2)+(B\xi+C\eta)(1-\varsigma)+D(1-\varsigma)^2=0.$$

$\xi^2+\eta^2+(\varsigma-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ deňligi göz öňünde tutup, soňky deňlikden alarys:

$$A(\frac{1}{4}-(\varsigma-\frac{1}{2})^2)+(B\xi+C\eta)(1-\varsigma)+D(1-\varsigma)^2=0,$$

$$A\varsigma(1-\varsigma)+(B\xi+C\eta)(1-\varsigma)+D(1-\varsigma)^2=0, \qquad (\varsigma\neq 1)$$

$$A\varsigma+B\xi+C\eta+D(1-\varsigma)=0.$$

Bu tekizlik bilen $\xi^2+\eta^2+(\varsigma-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ sferanyň kesişmesi gözleýän töweregimizdir.

<u>II. Bap Kompleks üýtgeýänli funksiýalar.</u>

<u>§ 2.1. Kompleks üýtgeýänli funksiýa, onuň hakyky we hyýaly bölekleri. Funksiýanyň predeli. Üznüksizlik</u>

<u>Kesgitleme 2.1.</u> (z) kompleks tekizligiň D köplüginiň her bir z elementine bir ýa-da birnäçe w

kompleks sany degişli edýän f düzgüne bu köplükde kesgitlenen funksiýa diýilýär.

$z-e$ baglanşyksyz üýtgeýän ululyk ýa-da funksiýanyň argumenti, *w-e* bagly üýtgeýän ululyk ýa-da funksiýa diýilýär.

Eger f funksiýa D köplügiň her bir z elementine diňe bir w kompleks sany degişli edýän bolsa, onda oňa birbahaly funksiýa, eger-de birden köp kompleks sany degişli edýän bolsa köpbahaly funksiýa diýilýär.

(z) kompleks tekizliginde kesgitlenen $w=z^2,\ w=\operatorname{Re} z, w=\operatorname{Im} z, w=\overline{z^2}$ funksiýalar birbahaly funksiýalardyr. (z) kompleks tekizliginde kesgitlenen $w=Argz(z\neq 0)$ we $w=\sqrt[n]{z}(n\geq 2)$funksiýalar köpbahaly funksiýalardyr. D köplüge f funksiýanyň kesgitleniş oblastsy, *f(z)*-iň ähli bahalarynyň köplügine bahalar oblasty diýilýär.

Goy, $w=f(z)$ funksiýa (z) kompleks tekizliginiň D kőplügini käbir (w) kompleks tekizliginiň Q kőplügine őwürýän bolsun. Eger D we Q kőplükleriň nokatlarynyň arasynda $w=f(z)$ funksiýanyň kőmegi bilen degişlilik bar bolsa, onda, tersine Q we D kőplükleriň nokatlarynyň arasynda-da degişlilik bardyr. $z=F(w)$ degişlilige $w=f(z)$ funksiýanyň ters funksiýasy diýilýär.

Eger bu funksiýalar birbahaly bolsalar, onda D-iň Q-a őwürmesine őzara birbahaly ýa-da birýaprakly diýilýär.

w- kompleks san bolanlygy üçin alarys:

$$w=f(z)=u+i\vartheta=u(x,y)+i\vartheta(x,y), \qquad (2.1)$$

bu ýerde $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z), \quad \vartheta(x,y)=\operatorname{Im} f(z).$

Goý, *w*=f(z*)* funksiýa D oblastda kesgitlenen birbahaly bolsun.

Kesgitleme 2.2 (Koşi) Eger $\forall\varepsilon>0$ san üçin şeýle $\delta=\delta(\varepsilon)$>0 san tapylyp, $0<|z-z_0|<\delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall z\in D$üçin $|f(z)-A|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda A sana f funksiýanyň z_0 nokatdaky predeli diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A. \qquad (2.2)$$

Kesgitleme 2.3. **(Geýne).** Eger z_0 sana ýygnanýan islendik $\{z_n\}(z_n\neq z_0)$ yzygiderlik üçin $\{f(z_n)\}$ yzygiderlik A sana ýygnanýan bolsa, onda A sana f funksiýanyň z_0 nokatdaky predeli diýilýär.

Goý, $A=B+iC, \qquad f(z)=u(x,y)+i\vartheta(x,y),$ $z_0=x_0+iy_0$ bolsunlar. Onda teorema 1.1-iň netijesini ulanyp alarys: (2.2) predeliň bar bolmaklygy

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y)=C, \qquad (2.3)$$

predelleriň bar bolmaklygy bilen deňgüýçlüdir, ýagny kompleks üýtgeýänli funksiýanyň (2.2) predeli bar bolmagy hakyky üýtgeýänli iki argumentli funksiýalaryň (2.3) predelleriniñ bar bolmagy bilen deňgüýçlüdir.

Hakyky iki üýtgeýänli funksiýalaryň predeliniň häsiýetlerini ulanyp,

$\lim_{z \to z_0} g(z) = A_1$, $\lim_{z \to z_0} h(z) = A_2$, predelleriň barlygyndan

$$\lim_{z \to z_0} (g(z) \pm h((z) = A_1 \pm A_2,$$

$$\lim_{z \to z_0} (g(z) \cdot h(z)) = A_1 \cdot A_2,$$

$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{A_1}{A_2} (A_2 \neq 0)$. predelleriň barlygyny alarys.

Kesgitleme 2.4. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle $N(\varepsilon)$>0 san tapylyp, $|z| > N(\varepsilon)$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin $|f(z) - A| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda A sana f funksiýanyň $z \to \infty$ bolandaky predeli diýilýär we şeýle ýazylýar

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A.$$

Kesgitleme 2.5. Eger z_0 nokadyň käbir etrapynda kesgitlenen f funksiýanyň z_0 nokatda predeli bar bolup, şol predel funksiýanyň z_0 nokatdaky bahasyna deň bolsa, ýagny $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ deňlik ýerine ýetse, onda f funksiýa z_0 nokatda <u>üznüksiz funksiýa</u> diýilýär.

Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san $\exists$, $0 < |z - z_0| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall z \in D$ üçün

$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ deňsizlik ýetse, onda $f(z)$ funksiýa z_0 nokatda üznüksiz funksiýa diýilýär.

Kesgitleme 2.6. Eger f (z) funksiýa D köplügiň her bir nokadynda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa D köplükde üznüksiz diýilýär.

f(z) funksiýanyň $z_0 = x_0 + iy_0$ nokatdaky üznüksizligi $u(x,y)$ we $\vartheta(x, y)$ funksiýalaryň (x_0, y_0) nokatdaky üznüksizligi bilen deňgüýçlüdir.

Kesgitleme 2.7. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp, $|z' - z''| < \delta$ şerti kanagatlandyrýan $\forall z', z'' \in D$ üçin $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda f funksiýa D köplükde <u>deňölçegli üznüksiz funksiýa</u> diýilýär.

Teorema 2.1. (Kantor) Eger $f(z)$ funksiýa ýapyk D oblastda üznüksiz bolsa, onda ol funksiýa şol oblastda deňölçegli üznüksizdir.

Mysal 2.1 $w = z^2$ funksiýa $\{r = r_0, \quad 0 \le \varphi \le \pi\}$ ýarym tőweregi $\{\rho = z_0^{\ 2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ töwerege őwürýär.

Hakykatdan-da, goý $z = r_0 e^{i\varphi}$ bolsun. Onda

$$w = r_0^2 e^{2i\varphi}.$$

Mysal 2.2 $f(z) = i\bar{z} + 2z^2$ funksiýanyň hakyky we hyýaly bőleklerini tapyň.

Gőzülişi.

$f(z)=u(x,y)+i\vartheta(x,y)=i(x-iy)+2(x+iy)^2=ix+y+2x^2+4ixy-2y^2=$
$=2x^2-2y^2+y+i(1+4y)x.$

Diýmek,

$$\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=2x^2-2y^2+y,$$
$$\operatorname{Im} f(z)=\vartheta(x,y)=(1+4y)x.$$

Mysal 2.3. $f(z)=\dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{\operatorname{Im} z}$ funksiýanyň $z=0$ nokatda predeli barmy ?

Gőzülişi. Bu soraga jogap bermek üçin kesgitleme 2.3 ulanalyň: $z_n=\dfrac{i}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ yzygiderlige garalyň $\operatorname{Re} z_n=0$ diýmek

$f(z_n)=0,\quad \{f(z_n)\}\to 0.\quad z_n'=\dfrac{1}{n}+\dfrac{i}{n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ \operatorname{Re} z_n'=\dfrac{1}{n},\ \operatorname{Im} z_n'=\dfrac{1}{n^2},$

onda $f\left(z_n'\right)=1\Rightarrow\ \{f(z'_n)\}\to 1.$ Predeli ýok.

Mysal 2.4. $w=z^2$ funksiýanyň üznüksizdigini gőrkeziň.

Gőzülişi. $\left|z^2-z_0^2\right|=\left|(z-z_0)(z+z_0)\right|$ Eger $z\to z_0$ bolsa, onda şeýle bir $M>0$ san $\exists$, $|z|<M, |z_0|<M$ deňsizlikler ýerine ýetýär. Şonuň esasynda

$$\left|z^2-z_0^2\right|\le|z-z_0|(|z|+|z_0|)<2M|z-z_0|<\varepsilon,\ |z-z_0|<\frac{\varepsilon}{2M}=\delta(\varepsilon).$$

III Bap. Diferensirlenýän funksiýalar. Önüm.

§3.1. Kompleks üýtgeýän boýunça diferensirleme. Koşi–Riman (Eýler-Dalamber) şertleri. Analitik funksiýa

Hakyky üýtgeýänli funksiýalardaky ýaly

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z},\ z, z+\Delta z\in D \qquad (3.1)$$

gatnaşyga garalyň.

Eger (3.1) gatnaşygyň $\Delta z\to 0$ bolanda ($\Delta z\to 0$ ymtylyşyna bagly bolmazdan) predeli bar bolsa, onda ol predele $f(z)$ funksiýanyň z nokatdaky önümi diýilýär we $f'(z)$ ýa-da $\dfrac{df(z)}{dz}$ bilen belgilenýär, ýagny

$$f'(z)=\frac{df(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Eger $f(z)$ funksiýanyň z nokatda $f'(z)$ önümi bar bolsa, onda ol funksiýa z nokatda differensirlenýär diýilýär.

Eger $f(z)$ funksiýanyň D oblastyň her bir nokadynda differensirlenýän bolsa, onda ol funksiýa D oblastda differensirlenýär diýilýär.

Funksiýanyň nokatda differensirlenmeginden üznüksiz gelip çykýar. Hakykatdan-da $\Delta z \to 0$ bolanda $\Delta w = \frac{\Delta w}{\Delta z}\Delta z \to 0$ bolýar. Tersine umuman nädogry.

<u>Mysal 4.1.</u> $w = f(z) = x$ funksiýa (z) kompeks tekizliginiň islendik nokadynda üznüksiz, ýöne hiç bir nokadynda differensirlenmeýär. Hakykatdan-da,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Kesgitleme görä $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ predeli bar bolsa, Δz nola ymtylyş usulyna bagly bolmaly däl. Ýöne

$\Delta z = 0 + i\Delta y \to 0$ bolanda $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to 0,$

$\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 \to 0$ bolanda $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to 1$ bolar.

Eger $f(z)$ funksiýa D oblastyň her bir nokadynda üznüksiz $f'(z)$ önümi bar bolsa, onda ol funksiýa D oblastda <u>analitik funksiýa</u> diýilýär.

Eger $f(z)$ funksiýa D oblastda birbahaly we differensirlenýän bolsa, onda bu funksiýa D oblastda endigan diýilýär.

Her bir endigan funksiýa analitikdir. Tersine umuman nädogry, sebäbi analitik bolmak üçin birbahaly bolmaklyk hökman däl.

Teorema3.1. $f(z) = u(x,y) + i\vartheta(x,y)$ funksiýanyň D oblastda analitik bolmagy üçin, bu oblastda $u(x,y), \vartheta(x,y)$ funksiýalaryň üznüksiz hususy önümleri bar bolup,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial x} \qquad (3.2)$$

şertleriň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir. Şunlukda, (3.2) şert ýerine ýetende

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad (3.3)$$

deňlikler dogrudyr. (3.2) şerte Koşi-Riman şerti diýilýär.

Subudy. Zerurlygy. Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun, ýagny $\forall z \in D$ üçin

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$ üznüksiz önüm bar

bolsun. Bu predel $\Delta z \to 0$ bagly däl (kesgitlemä gőrä), şonuň üçin $\Delta z = \Delta x$ bolsun, onda

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i\vartheta(x+\Delta x, y) - u(x,y) - i\vartheta(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{\vartheta(x+\Delta x, y) - \vartheta(x,y)}{\Delta x}\right),$$

ýagny

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \qquad (3.4)$$

Indi $\Delta z = i\Delta y$ bolsun, onda

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i\vartheta(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i\vartheta(x,y)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \frac{\vartheta(x, y+\Delta y) - \vartheta(x,y)}{\Delta y}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3.5)$$

(3.4) we (3.5) deňliklerden alarys: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y}$,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$f'(z)$ funksiýanyň D oblastda üznüksizliginden $u(x,y), \vartheta(x,y)$ funksiýalaryň ähli hususy önümleriniň D oblastda üznüksizligi gelip çykýar.

(3.4), (3.5) we (3.2) deňliklerden bolsa (3.3) deňlikler gelip çykýar.

<u>Ýeterligi.</u> Goý, $u(x,y)$ we $\vartheta(x,y)$ funksiýalaryň $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ hususy önümleri D oblastda üznüksiz we (3.2) şertler ýerine ýetýän bolsun. Onda (matanaliz dersinden belli bolşy ýaly $u(x,y)$ we $\vartheta(x,y)$ funksiýalaryň doly artdyrmalary aşakdaky ýaly kesgitlenýär:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(x,y,\Delta x,\Delta y), \qquad (3.6)$$

$$\Delta \vartheta = \vartheta(x+\Delta x, y+\Delta y) - \vartheta(x,y) = \frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \vartheta(x,y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2(x,y,\Delta x \Delta y), \qquad (3.7)$$

bu ýerde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ funksiýalar $\rho = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - a}$ görä nola çalt ymtylýar, ýagny,

$$\lim_{p \to 0} \frac{\varepsilon_i(x,y,\Delta x,\Delta y)}{p} = 0 \qquad (i = 1,2). \qquad (3.8)$$

(3.6), (3.7) den (3.2) şerti göz öňüne tutup alýarys:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\vartheta(x+x\Delta, \Delta y) - \vartheta(x,y)}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + i\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} +$$

$$+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\Delta x}{\Delta x+i\Delta y} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\Delta x+i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y} + \frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial x}(-\Delta y+i\Delta x)}{\Delta x+i\Delta y} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\Delta x+i\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Bu deňlikde $\Delta z \to 0$ bolanda predele geçip, (3.8) esasynda alarys:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial x}.$$

Teoremanyň şertine görä $\frac{\partial u}{\partial x}\ we\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ hususy önümler D oblastda üznüksiz, diýmek $f'(z)$ önüm D oblastda üznüksiz, ýagny $f'(z)$ funksiýa D oblastda analitik.

Käbir halatlarda funksiýalaryň analitikligini barlamak üçin Koşi-Riman şertlerini dekart koordinatalar sistemasynda däl-de polýar koordinatalar sistemasynda barlamak amatly bolýar.

Çylşyrymly funksiýadan önüm almak düzgünini ulanyp,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} \qquad (3.9)$$

Koşi-Riman şertini alarys. Hakykatdan-da,

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \qquad \vartheta(x,y) = \vartheta(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

üçin

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \qquad (3.10)$$

we

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}r\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi$$

ýa-da

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \qquad (3.11)$$

(3.10) we (3.11) deňliklerden (3.9)-yň birinji deňlemesi gelip çykýar

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi \qquad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi$$

ýa-da

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi \qquad (3.13)$$

(3.12) we (3.13) deňliklerden (3.9)-yň ikinji deňligi gelip çykýar.

Indi őnümi tapalyň $\left(r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x}\right)$.

(3.3)-den alarys:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r} +$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+i\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{y}{r^2}+i\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{x}{r}-\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\frac{y}{r^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)\frac{x}{r}-\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right)\frac{y}{r^2}; \qquad (3.14)$$

Bu deňlikden (3.9) (Koşi-Riman) şertini ulanyp alarys.

$$f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)\frac{x}{r}-\left(-\frac{\partial \vartheta}{\partial r}+i\frac{\partial u}{\partial r}\right)\frac{y}{r}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)\frac{x}{r}-$$

$$-i\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)\frac{y}{r}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)\frac{\bar{z}\cdot z}{r\cdot z}=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right),$$

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right).$$

Bu deňlikden (3.9)-y göz öňünde tutup,

$$f'(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

deňligi alarys.

Mysal 3.1. $f(z)=e^z$ funksiýa differensirlenýärmi ?

Çözülişi. Funksiýany

$$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$$

görnüşde ýazyp, Koşi-Riman şertini barlalyň:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x}=e^x\sin y,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial y}=e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Koşi-Riman şerti ýerine ýetýär. Diýmek, $f(z)=e^z$ funksiýa differensirlenýär.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^z,$$

diýmek $(e^z)'=e^z$.

Mysal 3.2. $w=\ln z$ funksiýa üçin Koşi-Riman şertlerini barlamaly.

Çözüwi. $w=\ln z=\ln r+i\varphi$. Bu ýerde $u=\ln r,\ \vartheta=\varphi$. Bu deňlikler esasynda

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial r}=0,\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta}=1.$$

Koşi-Riman şertiniň ýetýändigine göz ýetireris.

Mysal 3.3. Eger analitik $w=u+i\vartheta$ funksiýanyň $u(x,y)$ we $\vartheta(x,y)$ hakyky we hyýaly bölekleriniň ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolsa, onda olaryň

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=0 \qquad (3.15)$$

deňlemäni kanagatlandyrýandyklaryny görkeziň. (3.15) deňlemä Laplas deňlemesi diýilýär.

Çözülişi. Koşi-Riman şertlerinden alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}.$$

Bu deňliklerden bolsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y}=0.$$

deňlik gelip çykýar. Şeýle hem

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

deňliklerden

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}=0.$$

deňlik gelip çykýar. Laplas deňlemesiniň integralyna garmonik funksiýa diýilýär.

Koşi-Riman şertlerini kanagatlandyrýan iki garmoniki funksiýa őzara çatrymlanan garmonik funksiýa diýilýär.

Mysal 3.4. Eger

$\operatorname{Re} f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,\ f(0)=0$ bolsa,

onda $f(z)$ analitik funksiýany tapmaly.

Gőzülişi. $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$

funksiýa üçin

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2$$

(3.2) şertiň esasynda alarys:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=3x^2+12xy-3y^2.$$

Bu deňligi y boýunça integrirläliň:

$$\vartheta=\int\left(3x^2+12xy-3y^2\right)dy+\varphi(x)=3x^2y+6xy^2-y^3+\varphi(x).$$

Bu deňlik esasynda

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=6xy+6y^2+\varphi'(x)$$

Onda (3.2) şertiň ikinji deňligi esasynda

$$6x^2-6xy-6y^2=-6xy-6y^2-\varphi'(x),$$

ýagny $\varphi'(x)=-6x^2$ deňlik alynýar. Ondan bolsa integrirläp, $\varphi(x)=-2x^3+C$ deňligi alarys. Şeýlelikde,

$$\vartheta(x,y)=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C.$$

$$f(z)=\operatorname{Re} f(z)+i\operatorname{Im} f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i\left(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C\right)=$$
$$=x^3+i3x^2y-3xy^2-iy^3-2i\left(ix^3+3x^2iy-3xy^2-iy^3\right)=(x+iy)^3-2i(x+iy)^3+iC=$$
$$=(x+iy)^3(1-2i)+iC=(1-2i)z^3+iC.$$

Alarys:

$$f(0)=ic=0\Rightarrow c=0$$

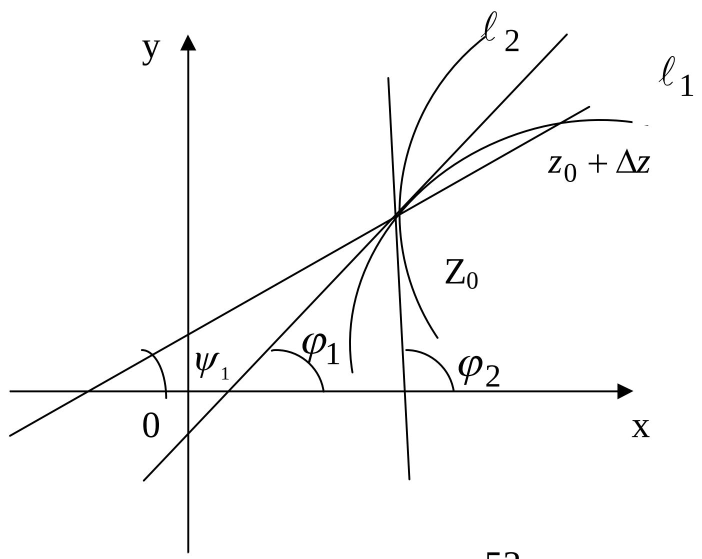
Diýmek

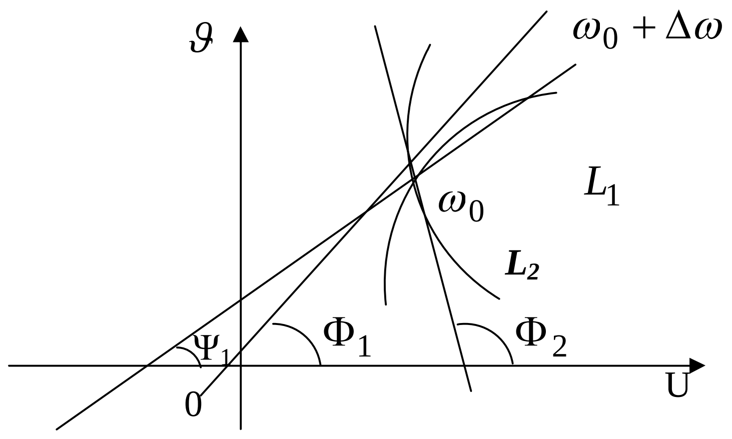
$$f(z)=(1-2i)z^3.$$

§3.2. Őnümiň argumentiniň we modulynyň geometrik manysy. Konform özgertmeler barada düşünje.

Goý, bize bahalar oblasty $E \subset (w)$ bolan, $D \subset (z)$ oblastda kesgitlenen $w = f(z)$ funksiýa berlen bolsun. f(z) funksiýanyň $z_0 \in D$ nokatda őnümi bar bolup, $f'(z_0) \neq 0$ bolsun we $w_0 = f(z_0) \in E$.

Goý, l_1 egri çyzyk (z) tekizligiň z_0 nokadyndan geçýän erkin egri bolsun. L_1 egri bolsa (w) tekizligiň w_0 nokadyndan geçýän l_1 egriniň obrazy bolsun. φ_1 bilen l_1 egrä z_0 nokatda geçirilen galtaşmanyň $0x$ ok bilen emele getirýän, Φ_1 bilen bolsa L_1 egrä w_0 nokatda geçirilen galtaşmanyň $0u$ ok bilen emele getirýän burçlaryny belgiläliň.





8-nji surat

l_1 egriniň üstünde $z_0 + \Delta z$ nokady alsak, onda oňa L_1 egride $w_0 + \Delta w$ nokat degişli bolar. Eger $z_0 + \Delta z$ nokat l_1 egri boýunça z_0 nokada ymtylsa $w_0 + \Delta w$ nokat L_1 egri boýunça w_0 nokada ymtylar. $\arg \Delta z$ we $\arg \Delta w$ degişlilikde Δz we Δw kesiji gönüleriň $0x, 0u$ oklary bilen emele getirýän burçlarydygy aýdyňdyr, ýagny $\psi_1 = \arg \Delta z$, $\Psi_1 = \arg \Delta w$.

Bu ýerden

$$\varphi_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z, \qquad \Phi_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w$$

deňlikler gelip çykýar. Onda

$$f'(z_0) = ke^{i\alpha}, \text{ ýagny } ke^{i\alpha} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

deňlikler esasynda alarys:

$$\alpha = \arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \Phi_1 - \varphi_1,$$

$$\alpha = \Phi_1 - \varphi_1 \qquad (3.16)$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly, α ululyk l_1 egriniň alnyşyna bagly bolman z_0 nokada baglydyr. Indi z_0 nokatdan geçýän l_2 egrä garalyň. l_2 egriniň obrazyny L_2 bilen belgiläliň.

Ýokardaka meňzeş hasaplamalary geçirip alarys:

$$\alpha = \Phi_2 - \varphi_2 \qquad (3.17)$$

(3.16) we (3.17) deňliklerden

$$\Phi_2 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2$$

deňlik gelip çykýar. Onda bolsa

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad (5.3)$$

deňlik alynýar.

Bilşimiz ýaly, $\varphi_1 - \varphi_2$ tapawut z_0 nokatdan geçýän l_1 we l_2 egrilere şol nokatdaky galtaşmalarynyň arasyndaky burç, $\Phi_1 - \Phi_2$ bolsa, L_1 we L_2 egrilere w_0 nokatdaky galtaşmalarynyň arasyndaky burç. Bu ýerden aşakdaky netije gelip çykýar: z_0 nokatdan geçýän islendik iki egriniň obrazlary $w_0 = f(z_0)$ nokatdan geçýän iki egridir, şunlukda berlen egrileriň z_0 nokatdaky galtaşmalarynyň arasyndaky burç olaryň obrazlaryna w_0 nokatda geçirilen galtaşmalarynyň

arasyndaky burça ululygy we ugry boýunça-da deňdir. Muňa burçuň <u>saklama häsiýeti ýa-da konserwatizm diýilýär.</u>

Goý, $f'(z_0) = ke^{i\alpha}$ bolsun, onda

$k = |f'(z_o)| \neq 0$ bolar.

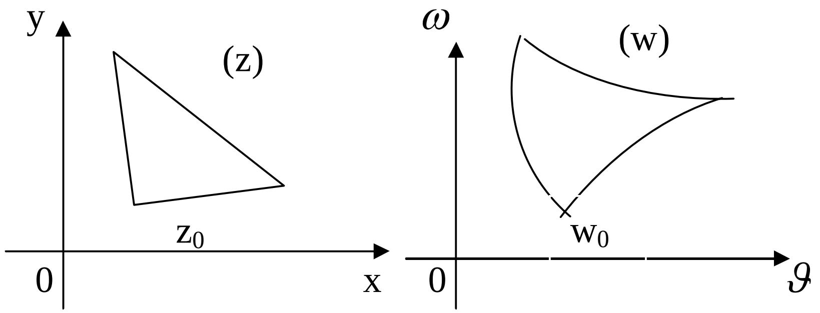
Alarys:

$k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ Bu ýerden takyklygy Δz-den ýokary bolan

$k = \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ ýa-da $|\Delta z| = k|\Delta z|$ deňligi alarys. Bu deňlik z_0 nokatdan geçýän l-egrä bagly däldir. Bu ýerden görnüşi ýaly $f(z)$ funksiýa kiçi tegelegi meňzeş tegelege öwürýär, ýagny <u>hemişelik süýnme häsiýete eýedir.</u>

Şeýlelikde, z_0 nokadyň etrabyny w_0 nokadyň etrabyna öwürýän $w_0 = f(z_0)$ $(f'(z_0) \neq 0)$ analitik funksiýa burçuň saklama we hemişelik süýnme häsiýetlerine eýedir. Munuň ýaly, öwürmä z_0 nokatdaky <u>konform öwürme</u> diýilýär.

<u>Mysal üçin</u> (z) kompleks tekizlikde bir depesi z_0 nokatda bolan tükeniksiz kiçi üçburçluk berlen bolsun. (w) tekizlikdäki obrazy egriçyzykly üçburçluk bolsun. z_0 nokada w_0 nokat degişli bolýanlygy üçin, w_0 egriçyzykly üçburçlugyň depesi bolar



9-njy surat

Bu üçburçlugyň burçlary deňdir. Degişli taraplarynyň gatnaşygy takmyn şol bir sana deňdir.

Bellik Konform öwürmäniň kesgitlemesindäki $f'(z_0)\neq 0$ şert $w=f(z)$ öwürmäniň z_0 nokatdaky ýakobiýanynyň noldan tapawutlydygyny aňladýar. Hakykatdan-da, $w=f(z)=u+i\vartheta$ öwürme

$$u=u(x,y),\ \vartheta=\vartheta(x,y)$$

öwürmelere ekwiwalentdir. Bu öwürmäniň J -ýakobianyny ýazalyň:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Koşi-Riman şertini ulanyp alarys.

$$J=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2.$$

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ deňligi göz öňüne tutup alarys.

$$J=\left|f'(z)\right|^2$$

Onda $f'(z_0)\neq 0$ şertiň esasynda $J(z_0)\neq 0$ bolar.

Kesgitleme 3.1. Eger $f(z)$ őwürme oblastnyň her bir nokadynda konform bolsa, oňa ol őwürmä bu oblastda konform őwürme diýilýär.

Mysal 3.5. $w=z^2$ őwürmäniň $z_0=1+i$ nokatdaky őwrülme burçuny we süýnme koeffisiýentini tapmaly.

Ǧőzülişi: Alarys:

$$w'=2z,\quad w'(1+i)=2(1+i)=2+2i.$$

Bu kompleks sany trigonometrik gőrnüşde ýazalyň

$$w'(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+i\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Bu deňlik esasynda

$$\alpha=\arg w'(z_0)=\frac{\pi}{4}\ \bar{\gamma}_1\qquad k=\left|w'(z_0)\right|=\sqrt{2}.$$

Alarys:

$$|w'(z)| = 1 \Leftrightarrow |2z| = 1 \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}.$$

Diýmek őwürmäniň süýnme koeffisiýenti merkezi 0 nokatda radiusi $\frac{1}{2}$-e deň tőweregiň nokatlarynda 1-e deňdir.

Mysal 3.6. Tekizligiň haýsy nokatlarynda $w = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ őwürmäniň őwürme burçy nola deň? Haýsy nokatlarda süýnme koeffisiýenti 1-e deň?

Gőzülişi. Meseläniň goýluşyna gőrä, ilki berlen őwürmäniň haýsy nokatlarda konform bolýandygyny anyklalyň.

Alarys:

$$w' = \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{-2i}{(i+z)^2}$$

Bu deňlikden gőrnüşi ýaly, berlen őwürmäniň $z = -i$ nokatdan başga nokatlarda őnümi bar we ähli nokatlarda $w'(z) \neq 0.$

Diýmek, berlen őwürme kompleks tekizliginiň $z = -i$ nokatdyndan başga nokatlarynda konformdyr. Birinji soraga jogap: $\operatorname{Arg} w'(z) = 0$ deňligi kanagatlandyrýan nokatlary tapmaly, ýagny $\operatorname{Im} w'(z) = 0$ we $\operatorname{Re} w'(z) > 0$ aňlatmalar ýerine ýetmeli. Alarys:

$$w' = \frac{-2i}{(z+i)^2} = \frac{-2i}{(x+i(y+1))^2} = \frac{-2i(x-i(y+1))^2}{(x^2+(y+1)^2)^2} =$$

$$= \frac{-2i(x^2-(y+1)^2-2ix(y+1))}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{-4x(y+1)-2i(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2} =$$

$$\frac{-4x(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^2} - i\frac{2(x^2-(y+1)^2)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2},$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} w'(z) = 0\\ \operatorname{Re} w'(z) > 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}x^2-(y+1)^2 = 0\\ -x(y+1) > 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(y+1)^2 = x^2\\ x(y+1) < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -x-1 (x \neq 0)$$

Diýmek, őwürmäniň őwürme burçy $y = -x-1$ $(z \neq -i)$ gőni çyzygyň nokatlarynda nola deň. Ikinji soraga jogap: $|w'(z)| = 1$ deňligi kanagatlandyrýan nokatlary tapmaly.

IV Bap. Ýönekeý funksiýalar we komform özgertmeler.
§4.1. Komform özgertmäniň kesgitlenilişi. Esasy prinsipleri.

Geçen bapda $w = f(z)$ funksiýanyň z_0 nokatdaky komformlygynyň kesgitlemesini beripdik. Indi ol funksiýanyň oblastda komformlygynyň kesgitlemesini bereliň.

Kesgitleme 4.1. (z) kompleks tekizligiň *D* oblastyny özära birbelgili öwürýän öwrüme *D* oblastyñ her bir nokadynda konform bolsa, onda ol öwürmä bu oblastda konform öwürmä diýilýär.

Őnümiň argumentiniň we modulynyň geometrik manysyndan, eger $w = f(z)$ funksiýa *D* oblastda birýaprakly, analitik we $f'(z) \neq 0 (\forall z \in D)$ bolsa, onda $f(z)$ őwürme *D* oblasty (w) tekizligiň käbir E oblastyna konform öwürýär diýilýär. Konform öwürmeleriň käbir prinsiplerine garalyň.

Teorema 1.1. Eger *D* oblasty E oblasta şöhlelendirýän (öwürýän) $f(z)$ funksiýa konform bolsa, onda $f(z)$ funksiýa *D* oblastda birýaprakly we analitikdir, şunlukda $\forall z \in D$ üçin $f'(z) \neq 0$.

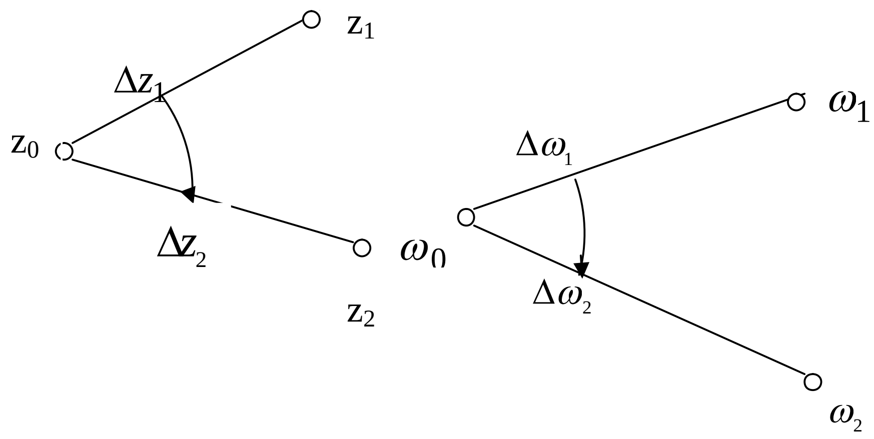
Subudy $f(z)$ funksiýa *D* oblastda konform, diýmek birbelgili funksiýa. $f(z)$ funksiýanyň *D* oblastda birbelgili funksiýalygyndan birýapraklygy gelip çykýar. Goý $z_0 \in D$ erkin nokat, z_1, z_2 nokatlar z_0 nokadyň

etrabyndaky erkin nokatlar bolsun. z_0 nokadyň etraby tükeniksiz kiçi radiusly diýip hasap edeliň. $w = f(z)$ funksiýa *D* oblastda komform öwürme bolanlygy üçin:

$$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1 \tag{4.1}$$

$$\left|\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}\right| = \left|\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}\right| = k \neq 0 \tag{4.2}$$

bu ýerde $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ we $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ we Δw_1 we Δw_2 olaryň obrazlary.



10-njy surat

Goý, $\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \alpha$ bolsun, onda

$$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\arg\Delta w_2-\arg\Delta z_2=\arg\Delta w_1-\arg\Delta z_1=\arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=\alpha \quad (4.3)$$

(4.2) we (4.3) den alarys:

$\dfrac{\Delta w_2}{\Delta z_2}=\dfrac{\Delta w_1}{\Delta z_1}=ke^{i\alpha}$ tükeniksiz kiçi takyklykda, ýagny $0(\max\{\Delta z_1,\Delta z_2\}.)$

z_1 we z_2 nokatlar z_0 nokadyň etrabyndaky islendik nokatlar bolanlygy üçin

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ predel bardyr we $f'(z_0)$ deňdir.

ýagny $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)\neq 0$

z_0 nokat D oblastyň erkin nokady, şonuň üçin $f(z)\neq 0\,\forall z\in D$ üçin. Soňky deňlikden $f(s)$ funksiýanyň D oblastda analitikligi gelip çykýar. (Üznüksizlik şerti goýman konform öwürmäniň kesgitlemesini berip bolýar. Şol şertiň goýulýandygynyň sebäbi soňky temalarda gerek bolýar).

Konform öwürme kesgitleme berenimizde burç saklama häsiýetinde diňe burçuň ululygy däl-de ugry hem saklanýardy.

Eger biz $w=\bar{z}$ öwrüme seretsek burçuň ululygy saklanyp, ugry üýtgeýändigini aýdyňdyr Diýmek, bu häsiýete analitik funksiýalaryň çatyrymlylarynyň ählisi eýedir.

$\overline{f(z)}$ öwürme ($f(z)$-analitik funksiýa) <u>ikinji jynsly konform öwürme diýilýär</u>

Aşakdaky teoremany subutsyz kabul edeliň.(Teoremanyň subudy üçin wyçýer nazaryýeti gerek).

<u>Teorema 4.2.</u> (çägiň degişlilik prinsipi).

Goý, γ ýapyk egri bilen çäklenen D oblastda berlen birbelgili analitik $f(z)$ funksiýa $\overline{D}=D+\gamma$ oblastda üznüksiz bolup, γ egrini (w) tekizlikdäki Γ ýapyk egrä özara birbelgili öwürýän bolsun. Eger bu öwrüme γ egriniň aýlanma ugruny saklaýan bolsa, onda $f(z)$ funksiýa D oblasty Γ bilen çäklenen E oblasta konform öwürýär.

<u>Teorema 4.3.</u> (Riman teorema) (z) kompleks tekizligiň birbagly D oblastynyñ çägi birden köp nokatdan durýan bolsa, onda ony $|w|<1$ birlik tegelegiň içine şöhlenendirip bolýar.

<u>1.Konform öwürmäniñ käbir häsiýetleri</u>

Tükeniksiz daşlykdaky nokady özünde saklamaýan oblastda konform öwürmäniñ kesgitlemesini beripdik.

<u>Kesgitleme 4.2</u> Giñledilen (z) kompleks tekizliginiñ D oblastyny giñeldilen (w) kompleks tekizliginiñ G oblastyna öwürýän $w=f(z)$öwürme:

1) özara birbelgili öwürme, ýagny f(z) funksiýa D oblastda birýaprakly;
2) D oblastyñ bir nokadyndan, özem bu funksiýanyñ birinji tertipli polýusyndan başga nokatlarynda f(z)

funksiýa analitik, şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda öwürme konform diýilýär.

z_0 nokadyñ etrapynda konform we analitik bolan $w = f(z)$ öwürmäniñ käbir häsiýetlerine seredeliñ. Öwürmäniñ z_0 nokatda birýaprakly bolmagy üçin $f^{\prime}(z_0) \neq 0$ bolmalydyr. Önümiñ geometriki manysyndan aşakdaky iki häsiýet gelip çykýar:

1^0. Süýnme hemişeligi. z_0 nokatdan geçýän ähli egrileriñ süýnmegi $|f^{\prime}(z_0)| - a$ deñdir;

2^0. Burçuñ saklanmagy. z_0 nokatdan geçýän ähli egriler $\arg f^{\prime}(z_0)$ burç öwülýär;

Konform öwürmäniñ aşakdaky häsiýetlerini belläp geçeliñ:

3^0.Konform öwürmäniñ ters öwürmeside konformdyr;

4^0. Eger f we g öwürmeler konform bolsalar, onda *fog* öwürme-de konformdyr.

Bu häsiýetler kesgitleme 4.2-den, birýapraklylykdan we ters funksiýadan gelip çykýar. Tükeniksiz daşlykdaky nokatda iki egriniñ arasyndaky burça kesgitleme bereliñ.

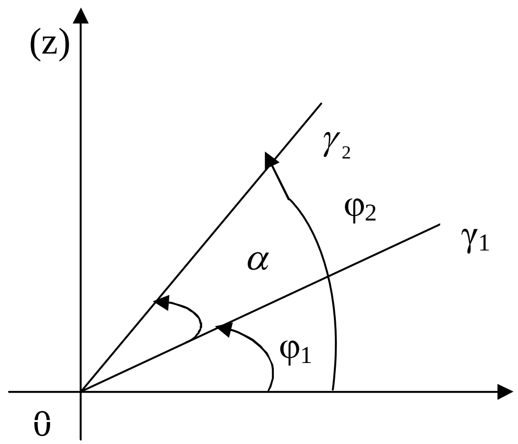
Kesgitleme 4.3. $z = \infty$ nokatdan geçýän γ_1 we γ_2 egrileriñ arasyndaky burç diýilip, bu egrilerin $\xi = 0$ nokatdaky $\xi = \frac{1}{z}$ öwürmeden alnan obrazlarynyñ arasyndaky burça aýdylýar.

Bu kesgitlemeden we 2^0-nji häsiýetden $\xi = \frac{1}{z}$ öwürmede giñeldilen kompleks tekizliginiñ

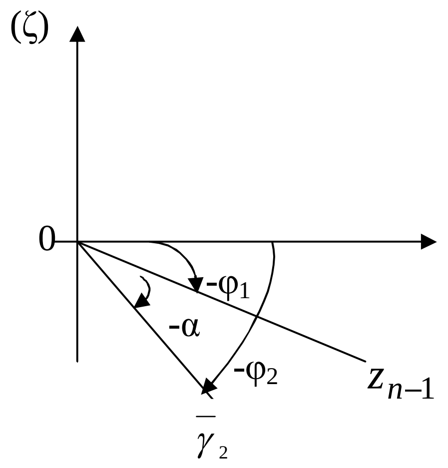
islendik nokadyndan geçýän egrileriñ arasyndaky burç saklanýandyr.

Mysal 4.1. Goý, γ_1, γ_2 şöhleler şol bir tükenikli z_0 nokatdan çykýan bolsun. Onda γ_1, γ_2 şöhleleriñ $z = \infty$ noaktdaky aralaryndaky burç z_0 nokatdaky burçunyñ ululygynyñ ters alamaty bilen alnanyna deñdir.

Subudy. Ýönekeýlik üçin $z_0 = 0$ bolsun. Goý, γ_j - şöhleler. $\arg z = \varphi_j \quad (j = 1,2)$. Onda γ_1, γ_2 şöhleleriñ $z = 0$ nokatdaky arasyndaky burç $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ deñdir (ugry γ_1 şöhleden γ_2 şöhle tarap) $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ (11-nji surat).



11-nji surat



12-nji surat

γ_1, γ_2 egriler üçin $\xi = \frac{1}{z}$ öwürmäni ulanyp, degişlilikde alnan $\overline{\gamma}_1\ \overline{\gamma}_2$ obrazlaryñ arasyndaky burçlar $\arg \xi = -\varphi_j\left(j = 1,2\right)$ boljaldygy aýdyñdyr.

Hakykatdanda, $\arg z = -\varphi_j\left(j = 1,2\right)$,onda

$$\xi = \frac{1}{|z|e\varphi_j} = \frac{1}{|z|}e^{-\varphi_j} \Rightarrow \arg \xi = -\varphi_j\left(j = 1,2\right).$$

$\xi = 0$ nokatdaky $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2$ egrileriñ arasyndaky burç $\left(-\varphi_2\right) - \left(\varphi_1\right) = -\alpha$ deñdir. (12-nji surat).

Kesgitleme 4.3 – e görä $z = \infty$ nokatdaky γ_1, γ_2 egrileriñ arasyndaky burç - α deñdir.

Kesgitleme 4.3-den we 2^0-nji häsiýetden konform öwürmäniñ aşkadaky häsiýeti gelip çykýar.

5^0. Giñeldilen kompleks tekizliginiñ D oblastyny konform öwürýän bolsa islendik nokatdan geçýän egrileriñ arasyndaky burç saklanýandyr.

Subudy. Kesgitleme 4.2 we 2^0-nji häsiýeti ulanyp, aşakdaky tassyklamany gökezeliñ:

1.Eger

$$f\left(z\right) = C_0 + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \ldots, \qquad |z| > R$$

funksiýa $z = \infty$ nokatda analitik we $C_{-1} \neq 0$ bolsa, onda $w = f\left(z\right)$ öwürmede $z = \infty$ nokatda egrileriñ arasyndaky burç saklanýar.

2. Eger z_0 (tükenikli ýa-da tükeniksiz) nokat f(z) funksiýanyñ birinji tertipli polýusy bolsa, onda $w = f\left(z\right)$ öwürmede egrileriñ z_0 nokatdaky burçlary saklanýar.

Birinji tassyklamany subut edeliñ, ikinjisi birinjä meñzeş subut edilýär.

$w = f\left(z\right)$ funksiýany $w = f\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(\xi = \frac{1}{z}\right)$ görnüşde ýazalyñ. Onda $w = C_0 + C_{-1}\xi + C_{-2}\xi^2 + \ldots$ deñligi alarys.

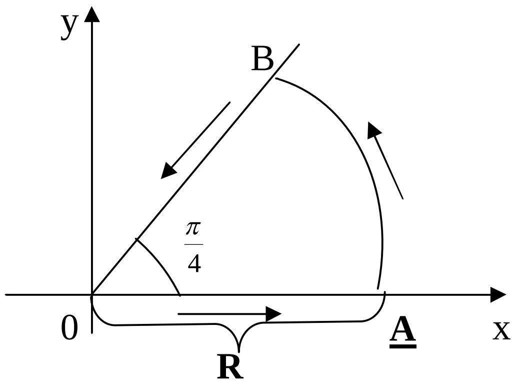
Kesgitleme 4.3-den belli bolşy ýaly $\xi = \frac{1}{z}$ öwürme $z = \infty$ nokatda egrileriñ arasyndaky burç saklanýar. $w = f\left(\xi\right)$ öwürmede $\xi = 0$ nokatda egrileriñ arasyndaky burç saklanýar, sebäbi $g^{/}\left(0\right) = C_{-1} \neq 0$. Diýmek $w = f\left(\varsigma\right)$ öwürmede $z = \infty$ nokatda egrileriñ arasyndaky burç saklanýar.

2. Bitin çyzykly funksiýa.

$$w = \alpha z + b \qquad (4.4)$$

funksiýa bitin çyzykly funksiýa diýilýär, bu ýerde $a \neq 0, b$ – käbir kompleks sanlar. (4.4) öwürmeler ähli

Bu integrallar diffraksiýa nazaryýetinde duş gelýär. Frenel intgrallaryny hasaplamak üçin $F(z)=e^{iz^2}$ kompleks üýtgeýänli kömekçi funksiýa garalyň.



25-nji surat

γ -egrini çyzgydaky ýaly alalyň: OA kesim, AB merkezi koordinatalar başlangyjy radiusy R deň bolan töweregiň dugasy, BO birinji koordinat burçuň bissektrisasyndaky $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$ (25-nji surat).

Koşi integral teoremasyna görä

$$\int_{\gamma} e^{i\eta^2}d\eta=0,$$

ýa-da

$$\int_{\gamma} e^{i\eta^2}d\eta=\int_{OA} e^{i\eta^2}+\int_{AB} e^{i\eta^2}d\eta+\int_{BO} e^{i\eta^2}=0,$$

$$I_1(R)+I_2R)+I_3(r)=0 \qquad (5.19)$$

Bu integrallary aýratynlykda hasaplaň:

$$I_1(R)=\int_{OA} e^{i\eta^2}d\eta=\int_0^R e^{ix^2}dx \qquad (5.20)$$

$$I_2(R)=\int_{AB} e^{i\eta^2}d\eta.$$

$$\eta=\mathrm{Re}^{i\varphi},\ d\eta=Rie^{i\varphi}d\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$$

orunda goýmany ulanyp, alarys:

$$I_2(R)=\int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{i2\varphi}}Rie^{i\varphi}d\varphi=Ri\int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)}e^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=Ri\int_0^{\pi/4} e^{iR^2\cos 2\varphi}\cdot e^{-R^2\sin 2\varphi}\cdot e^{i\varphi}d\varphi,\quad |I_2(R)|\le R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi}d\varphi,$$

$$\sin 2\varphi\ge\frac{2}{\pi}\cdot 2\varphi,\quad 0\le 2\varphi\le\frac{\pi}{2}$$ deňsizligi ulanyp, alarys:

$$|I_2(R)|\le R\int_0^{\pi/4} e^{\frac{2R^2}{\pi}2\varphi}d\varphi=-\frac{R\pi}{4R^2}e^{\frac{4R^2\varphi}{\pi}}\Big/_0^{\pi/4}=-\frac{\pi}{4R}\left(e^{-R^2}-1\right)=\frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right),$$

Diýmek

$$\lim_{R\to\infty} I_2(R)=0 \qquad (5.21)$$

$$I_3(R)=\int_{B0} e^{i\eta^2}d\eta,$$

$\eta = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $d\eta = e^{i\frac{\pi}{4}}dr$, r-bolsa R–den 0 –a çenli üýtgeýär

$$I_3(R) = \int_R^0 e^{ir^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^R e^{-r^2}dr = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-r^2}dr,$$

$$\lim_{R\to\infty} I_3(R) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^\infty e^{-r^2}dr = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i),$$

($\int_0^\infty e^{-r^2}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ – matematiki analiz dersinden belli)

$$\lim_{R\to\infty} I_3(R) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i) \qquad (5.22)$$

(5.19) deňlikde $R \to \infty$ bolanda (5.20), (5.21), (5.22) deňlikleri göz öňünde tutup,

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx + 0 - \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i) = 0,$$

ýa-da

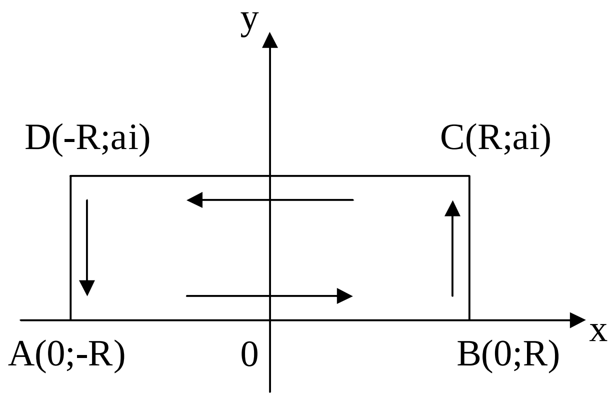
$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i),$$

$$\int_0^\infty \left(\cos x^2 + i\sin x^2\right)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \cos^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

2). $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda ax)dx \quad (\lambda > 0, a > 0).$

Bu integraly hasaplamak üçin $f(z) = e^{-\lambda z^2}$



26-njy surat

funksiýany 26-njy suratda görkezilen γ gönü- burçlyk boýunça integrirläliň $f(z)$ funksiýa ähli kompleks tekizliginde differensirlen- ýändigi üçin Koşi teoremasyny ulanyp, alarys:

$$\int_\gamma e^{-\lambda z^2}dz = \int_{AB} e^{-\lambda z^2}dz + \int_{BC} e^{-\lambda z^2}dz + \int_{CD} e^{-\lambda z^2}dz + \int_{DA} e^{-\lambda z^2}dz = 0,$$

$$I_1(R) + I_1(R) + I_3(R) + I_4(R) = 0. \qquad (5.23)$$

$$I_1(R) = \int_{AB} e^{-\lambda z^2}dz.$$

$z = x(-R \le x \le R)$ we $dz = dx$ ulanyp,

$$I_1(R) = \int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2} dx$$

integraly alarys.

$$\lim_{R\to\infty} I_1(R) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sqrt{\lambda'}x)^2} d\sqrt{\lambda}x = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \quad (5.24)$$

$$I_2(R) = \int_{BC} e^{-\lambda x^2} dz,$$

$z = R + iy(0 \le y \le a),\ z^2 = R^2 - y^2 + 2iRy,\ dz = idy,$

Alarys:

$$I_2(R) = \int_0^a e^{-\lambda\left(R^2 - y^2 + 2iRy\right)} idy = i\int_0^a e^{-\lambda\left(R^2-y^2\right)} e^{-i2\lambda Ry} dy$$

$$\left|I_2(R)\right| \le \int_0^a e^{-\lambda(R^2-y^2)} dy$$

$R > a$ bolanda

$$\left|I_2(R)\right| \le \int_0^a e^{-\lambda\left(R^2-a^2\right)} dy = ae^{-\lambda(R^2-a^2)},$$

$$\lim_{R\to\infty} I_2 = 0. \quad (5.25)$$

$$I_3(R) = \int_{CD} e^{-\lambda z^2} dz.$$

$z = x + ia, x$ üýtgeýän ululyk R–den $-R$-e çenli üýtgeýär, $dz = dx.$

$$I_3(R) = \int_R^{-R} e^{-\lambda(x+ia)^2} dx = -\int_{-R}^{R} e^{-\lambda\left(x^2-a^2+2iax\right)} dx = -e^{\lambda a^2} \int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2} e^{-i2\lambda ax} dx =$$

$$= -e^{\lambda a^2} \int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2} \left(\cos(2\lambda ax) + i\sin(2\lambda ax)\right) dx$$

(5.26)

$$I_4(R) = \int_{DA} e^{-\lambda z^2} dz.,$$

$z = -R + iy,$ üýtgeýän ululyk a–dan o-a çenli üýtgeýär, $dz = idy,$

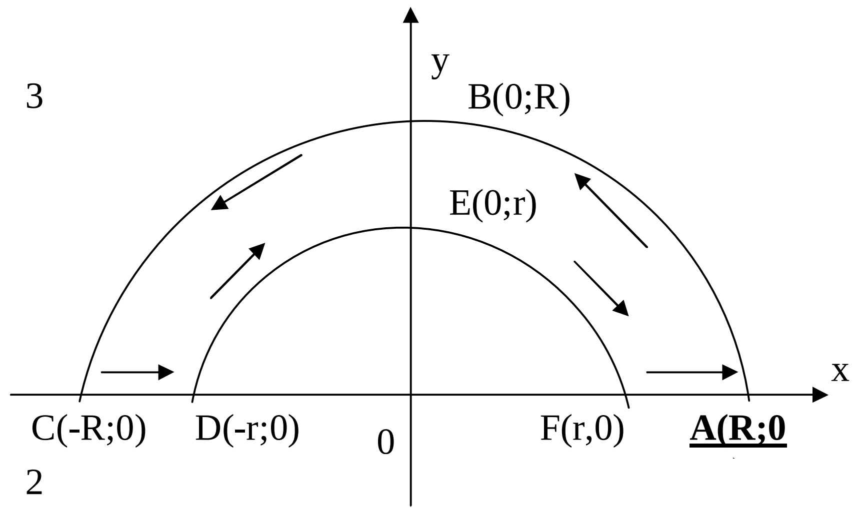
$$I_4(R) = \int_a^0 e^{-\lambda(-R+iy)^2} idy = -i\int_0^a e^{-\lambda\left(R^2-y^2-2iRy\right)} dy = -i\int_0^a e^{-\lambda x(R^2-y^2)} e^{i2\lambda Ry} dy,$$

$R > a$ bolanda

$$\left|I_4(R)\right| \le \int_0^a e^{-\lambda(R^2-y^2)} dy \le \int_0^a e^{-\lambda\left(R^2-a^2\right)} dy = ae^{-\lambda(R^2-a^2)}$$

$$\lim_{R\to\infty} I_4(R) = 0. \quad (5.27)$$

(5.23) deňlemä $R \to \infty$ predele geçip we (5.24), (5.25), (5.26), (5.27) deňlikleri göz öňüne tutup, alarys:



27-nji surat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\left(\cos(2\lambda a x)\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}e^{-\lambda a^2}.$$

3). $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ -Dirihle integraly

Bu integraly hasaplamak üçin $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ kömekçi funksiýa garalyň. Garalýan funksiýa kompleks tekizli-giniň $z=0$ nokadyndan başga nokatlaryna differensirlenýändir, hakykatdan-da

$$f'(z)=\frac{e^{iz}(iz-1)}{z^2}.$$

γ -egrini 27-nji suratdaky ýaly edip alalyň γ -ýapyk egriniň içinde $f(z)$ funksiýa differensirlenýändir, onda Koşi teoremasyny ulanyp, alarys:

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{FA}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{CD}\frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{DEF}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0,$$

$$I_1(R)+I_2(R)+I_3(R)+I_4(r)=0. \qquad (5.28)$$

Alarys:

$$I_1(R)=\int_{FA}\frac{e^{iz}}{z}dz,$$

$$z=x(r\le x\le R), dz=dx,$$

$$I_1(R)=\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx=\int_r^R\frac{\cos x}{x}dx+i\int_r^R\frac{\sin x}{x}dx \qquad (5.29)$$

$$I_2(R)=\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}dz,$$

$z = \mathrm{R}e^{i\varphi}\left(0 \le \varphi \le \pi, dz = Rie^{i\varphi}d\varphi\right),$

$$I_2(R) = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\mathrm{R}e^{i\varphi}}Rie^{i\varphi}}{\mathrm{R}e^{i\varphi}}d\varphi = i\int_0^{\pi} e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}d\varphi = i\int_0^{\pi} e^{iR\cos\varphi}e^{-R\sin\varphi}d\varphi,$$

$$|I_2(R)| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}d\varphi \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi}d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{2R}\left(e^{-R} - 1\right) = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right),$$

$$\lim_{R\to\infty} I_2(R) = 0. \qquad (5.30)$$

$$I_3(R) = \int_{CD} \frac{e^{iz}}{z}dz,$$

$z = x$, x üýtgeýän ululyk $-R$-den $-r-$çenli üýtgeýär, $dz = dx$,

$$I_3(R) = \int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{-r}^{-R}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_{-r}^{-R}\frac{\sin x}{x}dx = -\int_{r}^{-R}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_{r}^{R}\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (5.31)$$

$$I_4(R) = \int_{DEF} \frac{e^{iz}}{z}dz,$$

$z = re^{i\varphi}$, $\varphi - \pi -$den 0-a çenli üýtgeýär, $dz = rie^{i\varphi}d\varphi$,

$$I_4(R) = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi = -i\int_0^{\pi} e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}d\varphi.$$

e^{iz} funksiýa $z = 0$ nokatda üznüksiz $\forall\varepsilon > 0$ san üçin, şeýle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp,

$|z| = r < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin $\left|e^{iz} - 1\right| = \left|e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - 1\right| < \varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetmeli.

$$|I_4(r) - (-i\pi)| = \left|i\int_0^{\pi} e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)}d\varphi - \left(-i\int_0^{\pi} d\varphi\right)\right| \le \int_0^{\pi}\left|e^{ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - 1\right|d\varphi < \varepsilon\pi,$$

ýagny

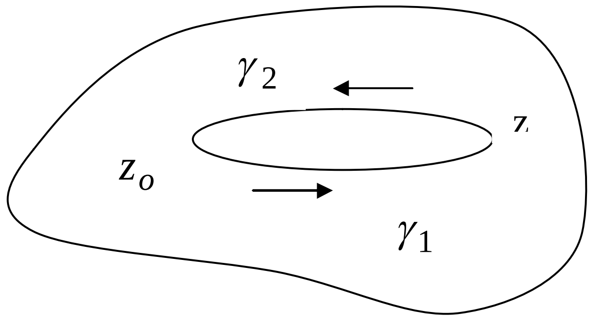
$$\lim_{r\to 0} I_4 = -\pi i. \qquad (5.32)$$

(5.28) deňlige $R \to \infty, r \to 0$ bolanda predele geçip we (5.29), (5.30), (5.31), (5.32) deňlikleri göz öňüne tutup, alarys:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx + 0 - \int_0^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx + i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \pi i = 0$$

$$2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi i \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Goý, birbahaly $f(z)$ funksiýa birbagly D oblastda analitik bolsun. Başlangyjy we ahyry degişlilikde $z_0, z \in D$ nokatlar bolan $\gamma_1, \gamma_2, \subset D$



28-nji surat

egriler ýapyk egrieri emele getirýär.

$$\int\limits_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz$$

Diýmek analitik funksiýanyň integraly egrä bagly däl-de egriniň başlangyç we ahyrky nokatlaryna baglydyr. Şonuň üçin berlen integraly

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta -$$ görnüşde ýazalyň.

z_0 berlen nokat bolsa, onda seredýän integralymyz z bagly funksiýadyr:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta \,.$$

$F(z)$ funksiýanyň D oblastda analitik we $F'(z) = f(z)$ bolýandygyny görkezeliň.

$z, z\Delta z \in D$ üçin alarys:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\eta) - \int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta\right) = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\eta)d\eta$$

(5.33)

Indi

$\tau = \dfrac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)$ tapawudyň $\Delta z \to 0$ bolanda predeliniň nola deňdigini görkezeliň.

$$\tau = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\eta)d\eta - \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\eta = \frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\eta) - f(z)\right]d\eta$$

ýa-da

$$|\tau| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z} \left|f(\eta) - f(z)\right| |d\eta|\right|. \qquad (5.34)$$

$f(z)$ funksiýa D oblastda üznüksiz: $\forall\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp, $|\Delta z| < \delta$ bolanda $|f(\eta) - f(z)| < \varepsilon.$

Bu deňsizligi göz öňüne tutup, (5.30) – dan alarys:

$$|\tau| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \tau = 0 \Rightarrow$$

$$F'(z) = f(z).$$

Kesgitleme.5.2 D oblastda analitik $F(z)$ funksiýa $\forall z \in D$ üçin $F'(z) = f(z),$ deňligi kanagatlandyrýan bolsa, onda $F(z)$ funksiýa D oblastda $f(z)$ funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

Kesgitlemä görä $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta$ funksiýa $f(z)$ funksiýanyň asyl funksiýasydyr.

$f(z)$ funksiýanyň islendik asyl funksiýasyny

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta + C$$

görnüşde ýazyp bolar. Hakykatdan-da

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta = u(x,y)+i\vartheta(x,y)=\varphi(z).$$

Alarys:

$$\varphi'(z)=F'(z)-f(z)=0.$$

Başgaça

$$\varphi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Soňky iki deňlikdir

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=\frac{\partial \vartheta}{\partial u}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \forall z\in D$$

$u(x,y),\vartheta(x,y)$ funksiýalar differensirlenýän, onda $u(x,y)=C_1,\ \vartheta(x,y)=C_2$ ýa-da

$$\varphi(z)=C_1+C_2=C$$

Diýmek $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta + C$ deňlik dogry.

Goý, $z=z_0$ bolsun, onda $F(z_0)=C$. Diýmek

$$\int_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta = F(z)-F(z_0)$$

VI Bap. Koşi integral formulasy. Koşi formulasyndan netijeler. Analitik funksiýanyň modulynyň maksimum prinsipi.

§6.1. Koşi integral formulasy. Koşi formulasyndan netijeler.

1. Koşi integral formulasy.

Koşi integral teoremasyndan kompleks üýtgeýänli funksiýa üçin möhüm bir formula bolan Koşi formulasyny alyp bolýar.

Teorema 6.1. Goý, birbahaly $f(z)$ funksiýa birbagly D oblastda analitik bolsun. Onda z nokady içinde saklaýan islendik $\gamma\subset D$ ýapyk egri üçin

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta \qquad (6.1)$$

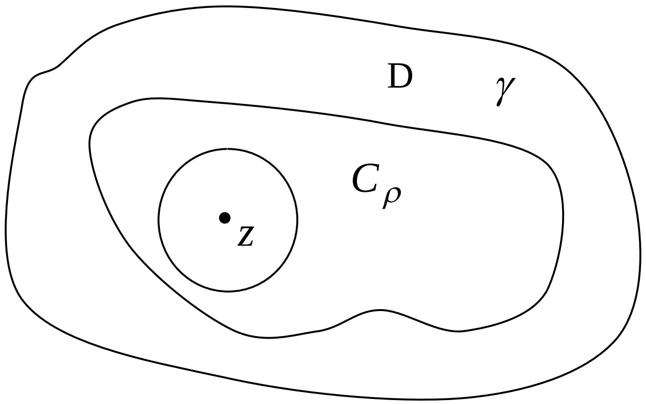
formula dogrydyr.

Eger mundan başga $f(z)$ funksiýa $\overline{D}=D+\Gamma$ ýapyk oblastda üznüksiz bolsa, onda $\forall z\in D$ üçin

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta \qquad (6.2)$$

formula dogrydyr.

Subudy. Teoremanyň şertine görä $f(\eta)$ funksiýa D oblastda analitik, diýmek $\dfrac{f(\eta)}{\eta - z}$ funksiýa D oblastynyñ $\eta = z$ nokadyndan



29-njy surat

başga nokatlarynda analitikdir.

$|\eta - z| < \rho$ tegelek özüniň $C_\rho = \{\eta : |\eta - z| = \rho\}$ çägi bilen γ ýapyk egriniň üçinde saklanar ýaly edip ρ–ny saýlap alalyň. Daşyndan γ, içinden C_ρ ýapyk egriler bilen çäklenen $D_{\gamma,\rho}$ köpbagly oblastda $\dfrac{f(\eta)}{\eta - z}$ funksiýa analitikdir. Köpbagly oblast üçin Koşi teoremasyny ulanyp

$$\int_{\gamma^+ + C_\rho^-} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = 0,$$

ýa-da

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \int_{C_\rho^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta \qquad (6.3)$$

deñligi alarys.

Bu deňligiň sag bölegindäki integraly hasaplalyň:

$$\int_{C_\rho^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \int_{C_\rho^+} \frac{f(\eta) - f(z) + f(z)}{\eta - z} d\eta = \int_{C_\rho^+} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta + \qquad (6.4)$$
$$+ f(z) \int_{C_\rho^+} \frac{d\eta}{\eta - z} = I_2 + f(z) I_1.$$

Mysal 5.10-dan belli bolşy ýaly $I_1 = 2\pi i$. Indi

$$I_2 = \int_{C_\rho^+} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta.$$

integrala garalyň.Teoremanyň şertine görä $f(\eta)$ funksiýa z nokatda üznüksiz, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp, $|\eta - z| < \delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin

$$|f(\eta) - f(z)| < \varepsilon$$

deňsizlik dogrydyr. $\rho \le \delta$ üçin alarys:

$$|I_2| \le \int_{C_\rho^+} \frac{|f(\eta) - f(z)|}{|\eta - z|} |d\eta| < \frac{\varepsilon}{p} \int_{C_\rho^+} |d\eta| = \frac{\varepsilon}{p} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \Rightarrow I_2 = 0.$$

I_1, I_2-iň bahalaryny (6.4)-de ornunda goýup,

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = 2\pi i f(z)$$

deñligi alarys. Bu deñlikden (6.1) formulanyñ gelip çykýandygy aýdyñdyr.

Teoremanyň ikinji bölegini subut etmek üçin teorema 5.1-iň ikinji bölegi ulanmak ýeterlikdir.

Mysal 6. 1. $\int\limits_{|\eta-5|=2} \frac{e^{\eta}}{\eta-4}d\eta$ integraly hasaplaň.

Çözülişi e^{η} funksiýa bütin kompleks tekizliginde analitik. $\eta = 4$ nokat $|\eta-5| = 2$ töweregiň içinde saklanýar. (6.1) formulany ulanyp alarys:

$$\int\limits_{|\eta-5|=2} \frac{e^{\eta}}{\eta-4}d\eta = 2\pi i e^{4}.$$

Mysal 6.2. $\int\limits_{|\eta-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi\eta}{4}}{\eta^{2}-1}d\eta$ integraly hasaplaň.

Çözülişi $\frac{\sin\frac{\pi\eta}{4}}{\eta+1}$ funksiýa $|\eta-1|<1$ tegelekde analitik $\{|\eta-1|<1\}\cup\{|\eta-1|=1\}$ oblastda üznüksiz. $\eta=1$ nokat $|\eta-1|=1$ tegelegiň içinde saklanýar (6.2) formulany ulanyp alarys:

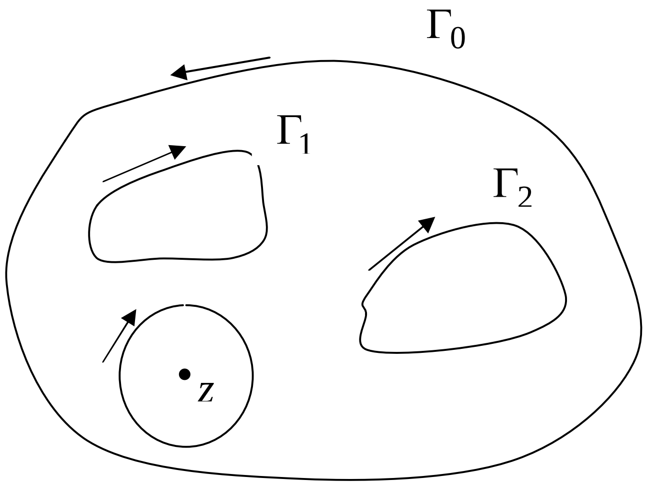
$$\int\limits_{|\eta-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi\eta}{4}}{\eta^{2}-1}d\eta \int\limits_{|\eta-1|=1} \frac{\frac{\sin\frac{\pi\eta}{4}}{\eta+1}}{\eta-1} = d\eta = 2\pi i\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

Koşi formulasy diňe birbagly oblast üçin däl-de köpbagly oblast üçin hem dogrydyr. Hakykatdan-da, D

oblast daşyndan Γ_0 içinden, ýönekeýlik üçin, Γ_1 we Γ_2 ýapyk egriler bilen çäklenen bolsun. Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik, $\overline{D} = D + \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$ oblastda üznüksiz bolsun. Onda $\forall z \in D$ üçin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta \qquad (6.5)$$

formula dogrydyr, bu ýerde $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2$. Teorema 6.1-däki ýaly $|\eta - z| < p$ tegelek özüniň



30-njy surat

$C_{\rho} : |\eta - z| = \rho$ çägi bilen D oblast degişli bolar ýaly ρ–ny saýlap alalyň. Köpbagly oblast üçin Koşi teoremasyny ulanyp alarys:

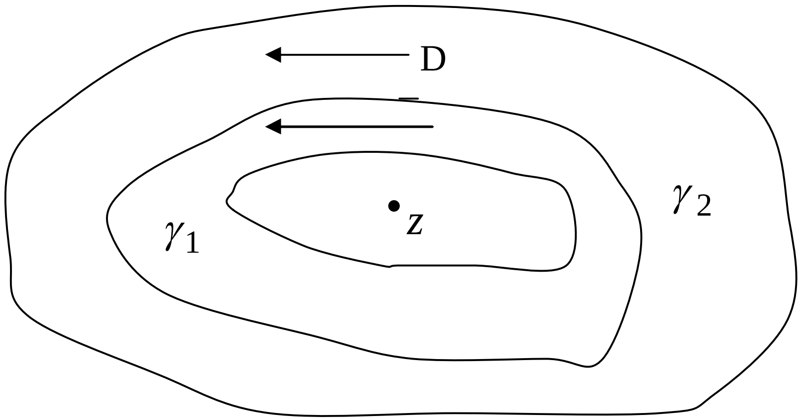
$$\int\limits_{\Gamma+C_{\rho}^{-}}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \int\limits_{C_{\rho}^{+}}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta$$

$f(\eta)$ funksiýa C_ρ^+ töweregiň içinde analitik

Şonuň üçin teorema 6.1-iň tassyklamasyny ulanyp (6.5) deňligi alarys.

2.Koşi formulasyndan netijeler. Analitik funksiýanyñ modulynyñ maksimum prinsipi

Netije 6.1. (6.5) formulanyň hususy halyna garalyň. Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun. $\gamma_1 \in D$ ýapyk egri, $\gamma_2 \in D$ ýapyk egriniň içinde saklanýan bolsun.



31-nji surat

D_{γ_1} oblast γ_1 egri bilen çäklenen bolsun. Onda $\forall z \in D_{\gamma_4}$ nokat üçin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta. \qquad (6.7)$$

Bellik 6.1. Eger z nokat D oblastnyñ daşynda bolsa, onda $\dfrac{f(\eta)}{\eta - z}$ funksiýa bu oblastda analitikdir, Koşi teoremasyna görä

$$\int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = 0$$

Diýmek

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \begin{cases} f(z),\ eger\ z \in D, \\ 0,\ eger\ z \notin D. \end{cases}$$

Teorema 6.2 (orta baha hakynda). Goý, $f(z)$funksiýa $K : |z - z_0| < R$ tegelekde analitik we $\overline{K}$ tegelekde üznüksiz bolsun. Onda bu funksiýanyň tegelegiň merkezindäki bahasy onuň töwerekdäki bahalarynyň orta arifmetiki bahasyna deňdir, ýagny

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}\right) d\varphi \qquad (6.8)$$

Subudy. (6.2) formuladaky Γ egriniň ornuna merkezi $z_0$radiusy R-e deň bolan töwerege alalyň. Onda $\eta = z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi, d\eta = Rie^{i\varphi} d\varphi$ bolar. Alarys:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi})}{\mathrm{Re}^{i\varphi}} Rie^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi}) d\varphi.$$

Teorema 6.3. (Analitik funksiýanyň modulynyň maksimum prinsipi). Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik we $\overline{D} = D + \Gamma$ oblastda üznüksiz bolsun. Onda, eger $\forall z \in \overline{D}$ üçin $f(z) = const$ bolmasa $f(z)$ funksiýanyň moduly diňe D oblastyň Γ çägine maksimuma eýedir.

Subudy.

$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + \vartheta^2(x,y)}$ funksiýa $\overline{D}$ oblastda üznüksiz, şonuň üçin matematiki derňew dersinden belli bolan Weýerştrass teoremasyna görä ol funksiýa $\overline{D}$ oblastynyň käbir z_0 nokadynda maksimuma eýedir. Ýagny

$$\mathrm{M} = |f(z_0)| \geq |f(z)|, \forall z \in \overline{D}, z_0 = x_0 + iy_0. \quad (6.9)$$

Goý, z_0 nokat D oblastyň içki nokady diýip guman edeliň. Radiusy R merkezi z_0 nokat bolan $\overline{K_0} = K_0 + C_R \subset D$ tegelege guralyň. Orta baha hakyndaky teoremany ulanyp alarys:

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|dz = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\varphi})d\varphi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0 + R_0 e^{i\varphi}\right)\right|d\varphi,$$

ýa-da

$$\int_0^{2\pi}\left[\left|f\left(z_0 + R_0 e^{i\varphi}\right)\right| - |f(z_0)|\right]d\varphi \geq 0 \qquad (6.10)$$

Bu deňsizlikden C_{R_0} töweregiň ähli nokatlary üçin

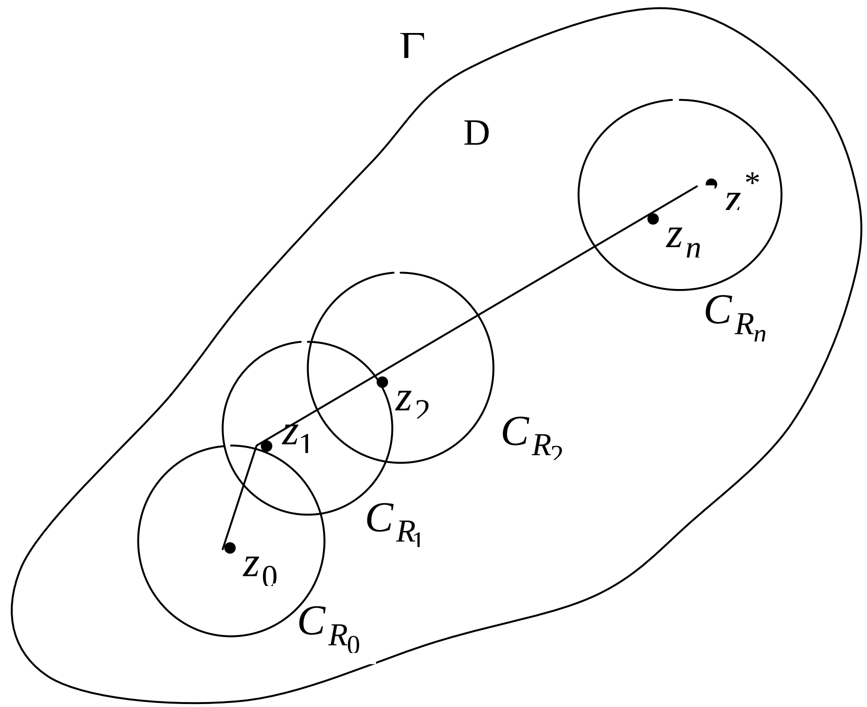
$$\left|f\left(z_0 + R_0 e^{i\varphi}\right)\right| \geq |f(z_0)| = \mathrm{M}$$

Bu deňsizlik diňe deňlik bolanda dogrydyr, ýagny

$$\left|f\left(z_0 + R_0 e^{i\varphi}\right)\right| = |f(z_0)|, \forall z_0 + R_0 e^{i\varphi} \in C_{R_0}.$$

Suňa meňzeş deňligi islendik, merkezi z_0 radiusy $R_1 < R_0$ bolan C_{R_1} töwerek üçin alyp bolýar. Diýmek,

$$|f(z_0)| = |f(z)| = \mathrm{M}, \forall z \in \overline{K_0}.$$



32-nji surat

Goý, $z^* \in D$ erkin nokat bolsun. z_0 nokat bilen z^* nokady D oblasta degişli bolan l egri birikdireliň. Goý, $d = \min\limits_{\substack{\eta\in\Gamma \\ \xi\in l}} |\eta - l|$ bolsun.

$|f(z^*)| = \mathrm{M}$ bolýandygyny görkezeliň.

l egriniň C_{R_0} töwerek bilen kesişme nokadyny z_1 bilen belgiläliň Merkezi z_1 nokat, radiusy $R_1 < d$ bolan C_{R_1} töweregi guralyň. $z_1 \in \overline{K_1}$ bolandygy üçin $|f(z_1)| = \mathrm{M}$. Ýokarka meňzeşlikde $\forall z \in \overline{K_1}$ üçin $|f(z)| = \mathrm{M}$ üçin deňligi alarys. Şuňa meňzeşlikde, tükeniksiz ädimden soň z^* nokady özünde saklaýan $\overline{K_{R_n}}$ tegelegi alarys we $|f(z^*)| = \mathrm{M}$ z^* nokat D oblastyñ erkin nokady, şonuň üçin $\forall z \in D$ üçin $|f(z)| = \mathrm{M}$

$$\mathrm{M}^2 = u^2(x,y) + \vartheta^2(x,y).$$

Bu deňligi ilki x soňra y boýunça differensirläliň:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, u\frac{\partial u}{\partial y} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$$

Koşi-Riman şertini ulanyp.

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \vartheta\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

deňlikleri alarys.

Eger u we ϑ şol bir wagtda nola deň bolmasa, alarys:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0,$$

ýagny

$u = C_1, \vartheta = C_2 \Rightarrow f(z) = C_1 + iC_2 = C.$

Eger u we ϑ şol bir wagtda nola deň bolsa onda $f(z) = 0$ bolar.

Teoremanyň şertine görä $f(z)$ hemişelik däl, diýmek $|f(z)|$ özüniň maksimumyny D oblastynyñ çäginde eýe.

Bellik 6.2. Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik we $\overline{D} = D + \Gamma$ oblastda üznüksiz bolsun. Onda eger $\forall z \in D$ üçin $f(z) = const$ bolmasa, $f(z)$ funksiýanyň moduly diňe D oblastynyñ Γ çäginde minimuma eýedir.

Bu tassyklama, subut edilen teorema 6.3-iň tassyklamasyny $\dfrac{1}{f(z)}$ funksiýa ulanmak ýeterlikdir.

§ 6.2. Koşi görnüşli integral. Analitik funksiýanyň tükeniksiz differensirlenmegi

1.Koşi görnüşli integral

Funksiýalar nazaryýetinde esasy orny Koşi integralynyň umumylaşdyrmasy bolan Koşi görnüşli integral eýeleýär.

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-z}d\eta \qquad (6.11)$$

integrala Koşi görnüşli integral diýilýär. $\varphi(\eta)$ funksiýa γ egride üznüksiz bolanda, $F(z)$ funksiýanyň analitiklik häsiýetlerini derňäliň.

Eger γ ýapyk egri bolup, z nokady öz içinde saklaýan bolsa, onda $F(z)=\varphi(z)$ bolar.

Eger γ ýapyk egri bolup, z nokat onuň daşynda bolsa, onda $F(z)=0$ bolar.

Indi z nokat γ egrä degişli bolsa, Koşi görnüşli integralyň özüni alyp barşyna garalyň. Bu ýagdaýda Koşi görnüşli integral umuman dargaýar, Sebäbi integral aşagyndaky funksiýa $\eta=z$ bolanda tükeniksizlige deň. Emma $\varphi(\eta)$ funksiýa käbir goşmaça şert goýulanda (6.11) integralyň doly kesgitli manysy bardyr.

Kesgitleme 6.1. Eger şeýle bir $M>0$ san tapylyp, γ egriniň η_0 nokadyna golaý ähli nokatlarynda

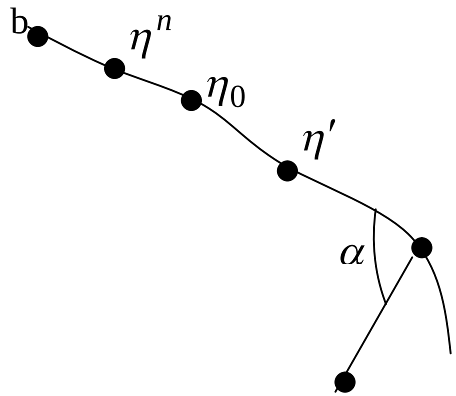
$$|\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)|\le M|\eta-\eta_0|^{\mu} \qquad (0<\mu<1)$$

(6.12)

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\varphi(\eta)$ funksiýa γ egriniň η_0 nokadynda μ görkezijili Gýolber şertini kanagatlandyrýar diýilýär.

Indi bolsa, ýokarky şertde $z=\eta_0$ nokatda Koşi görnüşli integralyň manysynyň bardygyny görkezeliň.

Ilki bilen η_0 nokat γ egriniň burç nokady däl diýip guman edeliň. η', η'' bilen $|z-\eta_0|=r$ töweregiň γ egri bilen kesişme nokadyny belgiläliň. Goý, η' we η'' nokatlaryň arasyndaky gyra l bolsun



33-nji surat

Alarys:

$$\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta=\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)+\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta=$$

$$=\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta+\varphi(\eta_0)\int_{\gamma-l}\frac{d\eta}{\eta-\eta_0}.$$

(6.13)

Ikinji integraly hasaplalyň:

$$\int_{\gamma-l}\frac{d\eta}{\eta-\eta_0}=\ln(\eta-\eta_0)\Big|_a^{\eta'}+\ln(\eta-\eta_0)\Big|_{\eta''}^{b}=\ln(\eta'-\eta)-\ln(a-\eta_0)+\ln(b-\eta_0)-$$

$$-\ln(\eta''-\eta_0)=\ln\frac{b-\eta_0}{a-\eta_0}-\ln\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}. \qquad (6.14)$$

$|\eta'-\eta_0|=|\eta''-\eta_0|$ deňligi göz öňüne tutup alarys:

$$\ln\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}=\ln\left|\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}\right|+i\arg\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}=i\arg\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}, \qquad (6.15)$$

$$\lim_{r\to 0}\ln\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}=-i\pi$$

Gýolder şertini ulanyp alarys:

$$\left|\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}\right|\le\frac{M}{|\eta-\eta_0|^{1-\mu}}, \qquad \eta\to\eta_0,$$

onda (6.13) deñligiñ birinji integraly

$$\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta=\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta-$$

$$\int_{l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta$$

görnüşi alar.

$$\left|\int_{l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}dn\right|\le M\int_{l}\frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_0|^{1-\mu}}\le 2MA\int_0^r\frac{dt}{t^{1-\mu}}=\frac{2MAr^{\mu}}{\mu},$$

$$|d\eta|=ds\le Adt \qquad t=|\eta-\eta_0|$$

onda

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta=\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta \qquad (6.16)$$

(6.14), (6.15), (6.16) göz öňüne tutup (6.13)-den alarys:

$$\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta=\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta+\varphi(\eta_0)\ln\frac{b-\eta_0}{a-\eta_0}+i\pi\varphi(\eta_0)+0(r) \qquad (6.17)$$

bu ýerde $r\to 0\Rightarrow 0(r)\to 0.$

Soňky deňligiň sag bőleginden görnüşi ýaly $r\to 0$ bolanda predeli bardyr, ýagny $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\gamma-l}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta.$ Bu predele integralyň esasy bahasy diýilýär.

(6.17) deňlige integralyň aýratyn integraly diýilýär.

Diýmek, Koşi gőrnüşli integralyň esasy bahasy

$$F(\eta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)-f(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta+$$

$$+\frac{\varphi(\eta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\eta_0}{a-\eta_0}+\frac{\varphi(\eta_0)}{2}$$

Eger γ ýapyk egri bolsa, onda

$$F(\eta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)-f(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta+\frac{\varphi(\eta_0)}{2}.$$

Eger η_0 nokat γ egriniň burç nokady bolsa, (33-nji surat)onda

$$\lim_{r\to 0}\frac{\eta''-\eta_0}{\eta'-\eta_0}=-i\alpha$$ bolar, ýagny

$$F(\eta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\eta)-f(\eta_0)}{\eta-\eta_0}d\eta+\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\eta_0)+\frac{\varphi(\eta_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-\eta_0}{a-\eta_0}.$$

Mysal.6.3. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ integrala garalyň. Belli bolşy ýaly bu integral ýokdyr. Emma aýratyn halda integralyň manysy bardyr.

$$\lim_{r-0}\left\{\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x}+\int_{r}^{1}\frac{dx}{x}\right\}=\lim_{r\to 0}\{\ln r-\ln r\}=0.$$

Indi $F(z)$ funksiýanyň analitikdigini subut edeliň.

2.Analitik funksiýanyñ tükeniksiz differensirlenmegi.

Teorema 6.4 Eger $\varphi(\eta)$ funksiýa bölek endigan γ egride üznüksiz bolsa, onda (6.11) Koşi görnüşli integral γ egriniň nokatlaryny özünde saklamaýan D birbagly oblastda analitikdir, şunlukda

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta \qquad (6.18)$$

Mundan başgada γ egriniň nokatlaryny özünde saklamaýan D oblastda $F(z)$ funksiýany islendik önümi bardyr, ýagny

$$F^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^{n+1}}d\eta, \qquad n=1,2... \qquad (6.19)$$

Subudy. Teoremany subut edilende biz D oblast diýilende γ egriniň nokatlaryny özünde saklamaýan oblast diýip düşüneris.

Goý, $z, z+h\in D$ erkin nokatlar bolsun. Aşakdaky gatnaşyga garalyň.

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}, \qquad (6.20)$$

z berlen nokat bolup $h\to 0$ bolanda (6.20) gatnaşygyň tükenikli predeliniň bardygyny görkezeliň.

Alarys:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-z-h}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)d\eta}{\eta-z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h}\int_\gamma\frac{\eta-z-\eta+z+h}{(\eta-z-h)(\eta-z)}\varphi(\eta)d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z-h)(\eta-z)}. \qquad (6.21)$$

Häzir integralyň aşagyna gőnüden-gőnü $h\to 0$ bolanda predele geçip alarys:

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^2}.$$

Teoremanyň birinji bölegini doly subut etmek üçin integralyň aşagyna predele geçmegiň dogrydygyny esaslandyrmak ýeterlikdir.

Alarys:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z-h)(\eta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^2}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma}\left(\frac{1}{(\eta-z-h)(\eta-z)}-\frac{1}{(\eta-z)^2}\right)\varphi(\eta)d\eta\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma}\frac{\eta-z-\eta+z+h}{(\eta-z-h)(\eta-z)^2}\varphi(\eta)d\eta\right|\leq\frac{|h|}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{|\varphi(\eta)||d\eta|}{|\eta-z-h||\eta-z|^2}. \quad (6.22)$$

Teoremanyň şertine görä $\varphi(\eta)$ funksiýa γ egride üznüksiz, şonuň üçin $|\varphi(\eta)|<M$. γ egriden z nokada çenli aralygy $2d(d>0)$ bilen belgiläliň ($j-$egriniň nokatlary bilen z nokada çeli aralyklaryň minimumy).

Alarys: $|\eta-z|>d, |\eta-z-h|>d,$ eger $|h|$ ýeterlik kiçi bolanda (6.22) deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z-h)(\eta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^2}\right|<\frac{|h|Ml}{2\pi d^3},$$

bu ýerde l ululyk γ egriniň uzynlygy. $h\to 0$ bolanda soňky deňsizligiň sag bőlegi nola ymtylýar. Bu bolsa teoremanyň birinji bölegini subut edýär.

Indi bolsa, $n=2$ bolanda (6.19) deňligiň dogrydygyny subut edeliň. Şonuň üçin (6.18) –den alarys:

z_{n-1}

$$\frac{\quad+h)-F'(z)}{h}-\frac{2!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^3}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z-h)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^2}\right]-$$

$$-\frac{2!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^3}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi(\eta)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(\eta-z-h)^2}-\frac{1}{(\eta-z)^2}\right)-\frac{2}{(\eta-z)^3}\right]d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi(\eta)\left[\frac{\eta^2-2\eta z+z^2-\eta^2-z^2-h^2+2\eta z+2\eta h-2zh}{h(\eta-z-h)^2(\eta-z)^2}-\frac{2}{(\eta-z)^3}\right]d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi(\eta)\frac{3h^2\eta-3h^2z-2h^3}{h(\eta-z-h)^2(\eta-z)^3}d\eta=\frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi(\eta)\frac{3(\eta-z)-2h}{(\eta-z-h)^2(\eta-z)^3}d\eta.$$

Soňky deňlikde modula geçip, alarys:

$$\left|\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}-\frac{2}{2\pi!}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta\right|<\frac{|h|M}{2\pi d^5}\int_{\gamma}(3|\eta-z|+2|h|)|d\eta|<\frac{|h|MM_1}{2\pi d^5}l<M_2|h|$$

Bu ýerde $M_1=(3|\eta-z|+2|h|), M_2=\frac{MM_1 l}{2\pi d^3}$. $h\to 0$ bolanda deňsizligiň sag bőlegi nola ymtylýar. Bu bolsa $n=2$ bolanda (6.19) deňlik subut edýär. Matematika induksiýa usulyny ulanyp islendik natural n san üçin (6.19) deňligiň dogrydygyny subut etmek bolar.

§6.3. Analitik funksiýanyň önümleri üçin formula. Morer we Liuwill teoremalary

Geçen mowzukda subut edilen teoremada analitik funksiýa üçin esasy bir häsiýeti subut edeliň. Biz D oblastda üznüksiz önümi bar bolan funksiýa şol oblastda analitik funksiýa diýilýär diýip kesgitleme beripdik. Hakyky üýtgeýänli funksiýada funksiýanyň tükenikli önümi bar bolanlygyndan, ol önümiň üznüksizligi umuman gelip çykmaýar. Emma kompleks üýtgeýänli funksiýada tükenikli önümi bar bolsa, ol önümiň üznüksizdir.

Teorema 6.5. Eger D oblastda birbelgili kompleks üýtgeýänli funksiýanyň birinji önümi bar bolsa, onda şol oblastda ol funksiýanyň tükeniksiz köp önümi bardyr.

Bellik 6.2 Diňe bir önümi bar bolman ol önümleriň üznüksizligi hem bu teoremada gelip çykýar. Diýmek, eger f(z) funksiýa D oblastda differensirlenýän bolsa, onda ol şol oblastda analitikdir.

Subudy Goý, $z \in D$ erkin nokat bolsun. $\gamma \subset D$ bölek endigan ýapyk egri $z \in D$ nokady öz içinde saklaýan bolsun, onda

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta$ Koşi formulasy dogrudyr.

Teorema 6.4.–iň netijesini ulanyp

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}d\eta, \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (6.23)$$

formulany alarys. Bu formula analitik funksiýanyň önümleri üçin formuladyr.

Mysal 6.4

$$\int\limits_{C}\frac{\sin\eta}{(\eta - \frac{\pi}{3})^4}d\eta$$

integraly hasaplamaly, bu ýerde $C: |z - i| = 4$

Çözülişi. $\sin\eta$ funksiýa $|z - i| \le 4$ tegelekde analitikdir. $\frac{\pi}{3}$ nokat $|z - i| \le 4$ tegelegiň içine degişlidir. Diýmek $f(\eta) = \sin\eta, z = \frac{\pi}{3}, n = 3.$ (6.23) formulany ulanyp alarys:

$$\int\limits_{C}\frac{\sin\eta}{(\eta - \frac{\pi}{3})^4}d\eta = \frac{2\pi i}{3!}(\sin\eta)'''\Big|_{\eta=\frac{\pi}{3}} = -\frac{2\pi i}{3!}\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi i}{6}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}i.$$

Teorema 6.5 (Morer teoremasy). Eger f(z) funksiýa birbagly D oblastda üznüksiz bolup, $\forall\gamma \subset D$ ýapyk egri boýunça integraly nola deň bolsa, onda ol funksiýa D oblastda analitikdir.

Subudy. Geçen bölümçede alnan netijä görä

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta$$

funksiýa analitikdir we $F'(z) = f(z)$.

Analitik funksiýanyň tükeniksiz köp önümi bar bolanlygy üçin $F''(z) = f'(z)$.

Bu deňlikden teoremadan tassyklamasy gelip çykýar.

Ýene-de (6.23) furmula gaýdyp geleliň.

Goý, γ töwerek bolup $z = z_0$ bu töweregiň merkezi bolsun. Bu tegelegiň radiusyny R bilen belgiläliň. Onda (6.23) –den alarys:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}d\eta\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{n+1}}|d\eta| \le$$

$$\le \frac{n! M 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{n! M(R)}{R^n},$$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n! M(R)}{R^n}, \qquad (n = 0,1,2,...)$$

bu ýerde $M(R) = \max_{\eta\in\gamma}|f(\eta)|.$

Bu deňsizlik D oblastnyň islendik z nokady üçin hem dogrydyr, ýagny

$$\left|f^{(n)}(z\right| \le \frac{n! M(R)}{R^n}, \qquad (n = 0,1,2,...) \qquad (6.24)$$

Bu ýerde radiusy R merkezi z nokat bolan we D oblastda degişli bolan γ tőwerek.

(6.24) deňsizlige Koşi deňsizligi diýilýär.

<u>Teorema 6.6.</u> <u>(Liuwill teoremasy).</u> Eger f(z) funksiýa kompleks tekizliginde analitik we çäklenen bolsa, onda ol funksiýa hemişelikdir.

<u>Subudy.</u> Goý, $|f(z)| < M$ bolsun. Merkezi z radiusy R bolan töwerek guralyň. (12.2) furmulany n=1 bolanda ulanyp alarys:

$$|f'(z)| \le \frac{M(R)}{R} \le \frac{N}{R}.$$

Bu ýerde N-san R-e bagly däl. $R \to \infty$ bolanda, alarys $|f'(z)| = 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = C = const.$

<u>VII Bap.Analitik funksiýalaryñ yzygiderligi we hatarlary.</u>

<u>§7.1. Funksional yzygiderlikler</u>

Agzalary (z)kompleks tekizligiñ D oblastynda kesgitlenen funksiýalar bolan

$$u_1(z), u_2, ... u_n(z), ... \qquad (7.1)$$

yzygiderlik berlen bolsun. Beýle yzygiderlige funksiýalar yzygiderligi ýa-da funksional yzygiderlik diýilýär we ol $\{u_n(z)\}$görnüşde belgilenýär.

<u>Kesgitleme.7.1</u> Eger $z_0 \in D$kompleks san üçin $\{u_n(z_0)\}$kompleks san yzygiderliginiñ predelli bar bolsa, onda (7.1) yzygiderlige $z = z_0$nokatda ýygnanýan funksional yzygiderlik diýilýär.

Eger$\{u_n(z_0)\}$ kompleks san yzygederligi dargaýan bolsa, onda (7.1) yzygiderlige $z_0$nokatda dargaýan funksional yzygiderlik diýilýär.

Eger (7.1)yzygiderlik D oblastyñ her bir nokadynda ýygnanýan bolsa, onda oña D oblastda ýygnanýän yzygiderlik diýilýär.

Eger (7.1)yzygiderlik D oblastyñ ýygnanýan bolsa, onda her bir $z \in D$üçin $\lim_{n\to\infty} U_n(z)$predel bardyr we ol predel, umuman aýdylanda, z nokatda baglydyr. Şonuñ üçin ol predel D köplükde kesgitlenen käbir $u(z)$ funksiýalardyr:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z) \qquad (7.2)$$

Kesgitleme 7.2. Eger $\forall\varepsilon > 0$ we her bir $z \in D$ üçin $N(\varepsilon, z)$ nomer tapylyp, $\forall n > N$ üçin $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$ deñsizlik ýerine ýetse, onda $\{u_n(z)\}$ yzygiderlige D oblastda $u(z)$ funksiýa ýygnanýän yzygiderlik diýilýär.

Bu kesgitlemede $N = N(\varepsilon, z)$ ýazylmagynyñ sebäbi, ol ýazgy $\forall\varepsilon > 0$ we her bir $z \in D$ üçin olara degişli N belginiñ bolmalydygyny añladýar.

Kesgitleme7.3. Eger $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N = N(\varepsilon)$ san taplylyp, $\forall n > N$ we $\forall x \in D$ üçin

$$|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon \qquad (7.3)$$

deñsiz ýerine ýetse, onda (7.1) yzygiderlige D oblastda $U(z)$ funksiýa deñölçegli ýygnanýan yzygiderlik diýilýär.

Teorema 7.1.(Koşiniñ kriterisi). $\{u_n(z)\}$ yzygiderligiñ D oblastda deñölçegli ýygnanmagy üçin $\forall\varepsilon > 0$ üçin $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $\forall n > N$, $\forall p$ natural san we $\forall z \in D$ üçin

$$|u_{n+p}(z) - u_n(z)| < \varepsilon \qquad (7.4)$$

deñsizligiñ ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy.Zerurlyk. Goý, $u_n(z) \Rightarrow u(z), z \in D$ bolsun, onda kesgitleme 7.3-den $\forall\varepsilon > 0$ üçin N nomer tapylyp, $\forall n > N$ we $\forall z \in D$ üçin

$$|u_n(z) - u(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

deñsizlik ýerine ýetýär. Şoña göra, eger $n > N$ we p – natural san bolsa, onda $\forall z \in$ üçin

$$|u_{n+p}(z) - u_n(z)| = |u_{n+p}(z) - u(z) + u(z) - u_n(z)| \le |u_{n+p}(z) - u(z)| + |u(z) - u_n(z)| < \varepsilon,$$

ýagny (7.4) deñsizlik ýerine ýetýandir.

Ýeterlik. Eger (7.4) şert ýerine ýetýän bolsa, onda her bir bellenen $z \in D$ üçin $\{u_n(z)\}$ san yzygiderligi Koşi kriterisi esasynda predeli bardyr. Ol yzygiderligiñ D oblastdaky predelini $u(z)$ bilen belgiläliñ we $u_n(z) \Rightarrow u(z), z \in D$ bolýandygyny görkezeliñ. (7.4) şertiñ esasynda $\forall\varepsilon > 0$ üçin N, nomer tapylyp, $\forall n > N$ we $\forall p$ natural san we $\forall z \in D$ üçin

$$|u_{n+p}(z) - u_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (7.5)$$

deñsizlik ýerine ýetýär. $\lim_{p\to\infty} u_{n+p}(z) = u(z)$ bolýandygy üçin (7.5) deñsizlikde $p \to \infty$ bolanda predele geçip, $\forall n > N$ we $\forall z \in D$ üçin

$$|u(z) - u_n(z)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

deñsizligi alarys. Bu bolsa $u_n(z) \Rightarrow u(z), z \in D$ bolýandygyny añladýar.

Funksional yzygiderligiñ deñölçegli ýygnanmaklygynyñ kesgitlemesini ulanyp, aşakdaky häsiýetleri añsat görkezmek bolar.

1^0 Eger $\{u_n(z)\}$ we $\{\vartheta_n(z)\}$ yzygiderlikler D oblastda degişlilikde $u(z)$ we $\vartheta(z)$ funksiýalara deñölçegli ýygnanýan bolsalar, onda $\forall\alpha,\beta$ kompleks sanlar üçin $\{\alpha U_n(z)+\beta\vartheta_n(z)\}$ yzygiderlik şol oblastda $\alpha u(z)+\beta\vartheta(z)$ funksiýa deñölçegli ýygnanýandyr;

2^0. Eger $\{u_n(z)\}$ yzygiderlik D oblastda $u(z)$ funksiýa deñölçegli ýygnanýan bolup, $\vartheta(z)$ şol oblastda çäkli funksiýa bolsa, onda $\{\vartheta(z)u(z)\}$ funksiýa deñölçegli ýygnanýandyr.

§7.2 Funksional hatar. Ýygnanmagyň görnüşleri.
1.Funksional hatar

Agzalary (z) kompleks tekizliginiñ käbir D oblastynda kesgitlenen funksiýalar bolan $\{u_n(z)\}$ yzygiderlik berlen bolsun, onda $z-e$ bagly funksiýalar bolan

$$u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z) \qquad (7.6)$$

añlatma funksional hatar diýilýär.

Eger $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z_0)$ san hatary ýýgnanýan bolsa, (7.6) funksional hatara z_0 nokatda ýygnanýar diýilýär.

D oblastyñ islendik z nokadynda (7.6) hatar ýygnanýan bolsa, onda bu hatara D oblastda ýygnanýar diýilýär.

Başgaça, goý

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$$

bolsun. $\{S_n(z)\}$ yzygiderlige (7.6) hataryñ ilkinji n-agzalarynyñ bölekleýin jeminiñ yzygiderligi diýilýär.

Eger (7.6) hataryñ bölekleýin jeminiñ $\{S_n(z)\}$ yzygiderliginiñ her bir $z\in D$ nokatda predeli bar bolsa, onda (7.6) hatara D oblastda ýygnanýan hatar diýilýär. Şunlukda $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)$ predel funksiýa (7.6) hataryñ jemi diýilýär,ýagny

D oblastyñ islendik z nokadynda (7.6) hatar ýygnanýan bolsa, onda ol hatara D oblastda ýygnanýar diýilýär.Ýygnanýan hataryň jemini f(z) bilen belgiläliň, ýagny

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

Kesgitleme 7.4. Eger $\forall\varepsilon>0$ san üçin şeýle bir $N=N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $\forall n\geq N$ *we* $\forall z\in D$ üçin

$$\left|f(z)-\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right|<\varepsilon$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda (7.6) hatara D oblastda deňölçegli ýygnanýar diýilýär.

$r_n(z)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)$ belgilemäni girizip, (7.6) hataryň deňölçegli ýygnalmagyny gysgaça aşakdaky görnüşde kesgitläp bolýar: $\forall n\geq N$ bolanda $|r_n(z)|<\varepsilon$ ýerine ýetse (7.6) hatara deňölçegli ýygnanýar diýilýär.

Teorema 7.2. **(Koşi kriteriýesi).** (7.6) hataryň D oblastda denölçegli ýygnanmagy üçin $\forall\varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $\forall n \geq N$ we islendik p natural sanlar üçin

$$\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon, z \in D, \qquad (7.7)$$

deňsizligiň ýerine ýetmegi zerur we ýeterlikdir.

Subudy: 1) Zerurlyk Goý, (7.6) hatar D oblastda deňölçegli ýygnanýan bolsun, ýagny $\forall\varepsilon > D$ san üçin şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $\forall z \in D$ we $\forall n \geq N$, m natural sanlar üçin

$$\left|f(z) - S_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|f(z) - S_{n+m}(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

deňsizlikler ýerine ýetýär. $\forall n \geq N$ *we* m natural, san üçin alarys:

$$\left|S_{n+m}(z) - S_n(z)\right| \leq \left|S_{n+m}(z) - f(z)\right| + \left|f(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon$$

.

2)Ýeterlik (7.7) deňsizlikden $\{S_n(z)\}$ yzygiderligiň ýygnanýandygy gelip çykýar, ýagny $\forall z \in D$ üçin

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = f(z)$$

(7.7) şertiñ esasynda $\forall\varepsilon > 0$ üçin N nomer tapylyp, $\forall n, \forall p -$natural san we $\forall z \in D$ üçin $\left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soñky deñsizlige $p \to \infty$ bolanda predele geçip alarys:

$$\lim_{m\to\infty}\left|S_{n+m}(z) - S_n(z)\right| = \left|f(z) - S_n(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Teorema 7.3. **(Weýerştrassyň nyşany)** Eger D oblastda (7.6) hataryň agzalary üçin

$$\left|u_n(z)\right| \leq \left|a_n\right| \qquad (7.8)$$

deňsizlik ýerine ýetip

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right| \qquad (7.9)$$

san hatary ýygnanýan bolsa, onda D oblastda (7.6) hatar deňölçegli ýygnanýandyr.

Subudy. (7.9) hataryň ýygnanýandygyndan alarys: $\forall\varepsilon > 0$ san üçin, şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp $\forall n \geq N$, p=1,2,3,... üçin

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

deňsizlik dogrudyr (san hatary üçin Koşi kriteriýesi).
(7.8) deňsizligi ulanyp alarys:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m}\left|u_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

Bu deñsizlikden Koşi kpiteriýesine görä (7.6) hatar deñölçegli ýygnanýar.

Weýerştrasyñ nyşany dine ýeterlik şertdir.

2. Deňölçegli ýygnalýan hatarlaryň häsiýetleri

Teorema 7.4. $u_n(z)$ funksiýalar D oblastda üznüksiz bolup, (7.6) hatar f(z) funksiýa D oblastda deňölçegli ýygnalýan bolsa, onda f(z) funksiýa D oblastda üznüksizdir.

Subudy. Goý, $z, z+\Delta z \in D$ bolsun. (7.6) hatar D oblastda deňölçegli ýygnanýandygy üçin, $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp, $n \geq N$ bolanda

$$\left| f(z+\Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \left| f(z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(7.10)

deňsizlikler ýerine ýetýändirler.

$u_k(z)$ funksiýalaryň D oblastda üznüksizligi üçin, $\forall \varepsilon > 0$ san üçin $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tapylyp, $|\Delta z| < \delta$ bolanda

$$\left| \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \left| u_k(z+\Delta z) - u_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (7.6)$$

deňsizlik dogrydyr.

(7.10), (7.11) deňsizlikleri ulanyp alarys:

$$|f(z+\Delta z) - f(z)| = \left| f(z+\Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) + \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} u_k(z) - f(z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z) \right| \leq \left| f(z+\Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) \right| +$$

$$+ \left| f(z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z+\Delta z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Teorema7.5. $u_n(z)$ funksiýalar D oblastda üznüksiz bolup (7.6) hatar f(z) funksiýa D oblastda

deňölçegli ýygnanýan bolsa, onda islendik bölek endigan $\gamma \subset D$ egri üçin

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(z)dz$$

deňlik dogrydyr. (7.6) hatary agzama-agza integrirläp bolýar).

Subudy. Teoremanyň şertine görä (7.6) hatar D oblastda deňöçegli ýygnanýar, ýagny $\forall \varepsilon > 0$ san üçin şeýle bir $N = N(\varepsilon)$ nomer tapylyp

$$\forall n \geq N \;\; we \;\; \forall z \in D \text{ üçin } |r_n(z)| < \frac{\varepsilon}{\ell}$$

deňsizlik ýerine ýetýär, bu ýerde ℓ-san γ egriniň uzynlygy.

Alarys:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma} u_k(z)dz \right| = \left| \int_{\gamma} r_n(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} |r_n(z)||dz| < \varepsilon$$

Teorema7.6 (Weýerştrass teoremasy) Goý, $u_n(z)$ funksiýalar D oblastda analitik bolsun, (7.6) hatar islendik ýapyk $\overline{D}' \subset D$ oblastda f(z) funksiýa deňölçegli ýygnalýan bolsa, onda:

1) f(z) funksiýa D oblastda analitikdir;
2) $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \forall z \in D;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ hatar islendik $\overline{D'} \subset D$ oblastda deňöçegli ýýgnalýandyr.

Subudy. 1) Goý , $\gamma \subset D$ erkin ýapyk kontur. Onuň bilen çäklenen G_γ oblast $D_\gamma \subset D$ bolsun. Teorema 7.5-iñ netijesini ulanyp, alarys:

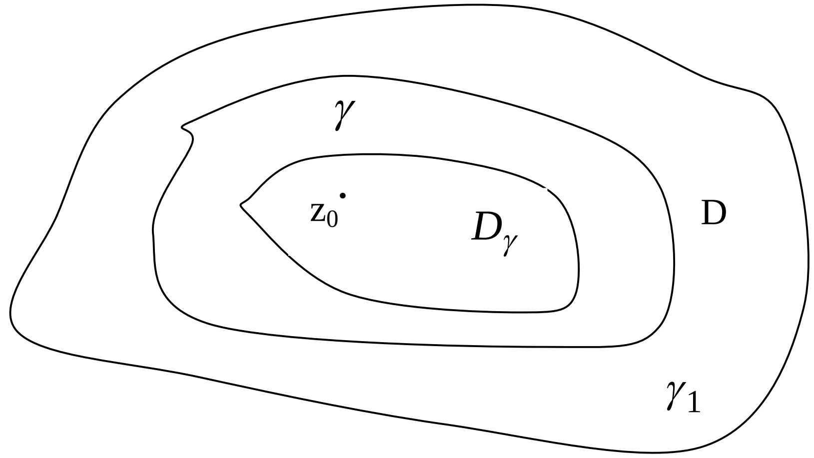
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma u_n(z)dz$$

Teoremanyň şertine görä $u_n(z)$ funksiýalar D oblastda analitik, şonuň üçin

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad (\int_\gamma u_n(z)dz = 0, n = 0,1,2,...)$$

$\gamma \subset D$ erkin ýapyk egri. Şonuň üçin Morer teoremasyndan f(z) funksiýanyň D oblastda analitikdigi gelip çykýar.

2) Goý, $\gamma \subset D$ erkin ýapyk kontur bolsun.



34-nji surat

$z_0 \subset D_\gamma \subset D$ erkin nokat. $d = \min_{z \in \gamma} |z - z_0|$,

$\varphi(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^{k+1}}, z \in \gamma$ funksiýa çäklenendir, hakykatdan-da

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|z - z_0|^{k+1}} \le \frac{1}{d^{k+1}} = M_k, \forall z \in \gamma$$

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \qquad (7.12)$$

hatar γ egride deňöçegli ýygnalýandyr. 7.5-nji teoremany ulanyp alarys:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \quad \text{ýa-da}$$

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz \Rightarrow f^{(k)}(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(k)}(z_0)$$

z_0 nokat D oblastyñ erkin nokady bolanlygy üçin $\forall z \in D$ üçin

$f^{(k)}(z)=\sum^{\infty}u_n^{(k)}(z)$deňlik $\forall$ natural k san üçin dogrydyr.

3) Goý γ-ýapyk kontur $D_\gamma \subset D$ oblastyñ çägi bolsun. $d=\min\limits_{\substack{\eta\in G\\ z\in\gamma}}|\eta-z|$ γ_1 ýapyk egri γ-ýapyk egrini öz içinde saklasyn. Onda

$\min\limits_{\substack{n\in G\\ z\in\gamma}}|\eta-z|<\frac{d}{2}.$ $r_n(z)-D$ oblastda analitikdir. Şonuň üçin (6.23) formulany ulanyp $\forall z\in\overline{D_\gamma}=D_\gamma+\gamma$ üçin alarys:

$$r_n^{(k)}(z)=\sum_{m=n+1}^{\infty}u_m^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{r_n(\eta)}{(\eta-z)^{k+1}}d\eta \qquad (7.13)$$

$r_n(z)$- (7.6) hataryň galyndysy. (7.6) hatar γ_1 egride deňölçegli ýygnalýar, ýagny $\forall\varepsilon>0$ san üçin şeýle bir $N(\varepsilon)$ san tapylyp $\forall\eta\in\gamma_1$ *we* $\forall n\geq N$ üçin $|r_n(z)|<\varepsilon.$ 7.13)-den alarys:

$$\left|r_n^{(k)}(z)\right|\leq\frac{k!}{2\pi}\int_{\gamma_1}\frac{|r_n(\eta)|}{|\eta-z|^{k+1}}\leq\frac{k!}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon\ell}{\left(\frac{d}{2}\right)^{k+1}}=\varepsilon_1,\ell-\gamma_1 \text{ egriniñ}$$

uzynlygy

$\forall n\geq N(\varepsilon),\forall z\in\overline{G_\gamma}.$ Diýmek, $\sum_{n=0}^{\infty}u_n^{(k)}(z)$ hatar $\overline{D_\gamma}$ oblastda deñölçegli ýygnalýar, şeýlelikde $\overline{D_\gamma}-D$ oblastyñ erkin bölek oblasty.

Bellik 7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ hatar $|z|\leq 1$tegelekde deñölçegli ýygnalýar, emma onuñ önümi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$ $z=1$ bolanda dargaýar. Şonuñ üçin teoremanyñ 3) tassyklamasy $D_y\subset D$ üçin dogrydyr.

Teorema 7.7. (Weýerştrassyñ ikinji teoremasy) Goý, $u_n(z)$ funksiýalar D oblastda analitik we $\overline{D}$ oblastda üznüksiz bolup, (7.6) hatar bu oblastyñ çägine deñölçegli ýygnalýan bolsa, onda (7.6) hatar $\overline{D}$oblastda deñölçegli ýygnalýandyr.

Subudy. $S_{n+m}(\eta)-S_n(\eta)$-tapawut tükenikli D oblastda analitik we $\overline{D}$oblastda üznüksiz funksiýalardan durýar. (7.6) hataryñ Γegride deñölçegli ýygnalýandygy üçin $\forall\varepsilon>0$san üçin $N(\varepsilon)$ san tapylyp $\forall\eta\in\Gamma,\forall n\geq N$we erkin natural ρüçin

$$|S_{n+p}(\eta)-S_n(\eta)|=|u_{n+p}(\eta)+...+u_{n+1}(\eta)|<\varepsilon$$

Analitik funksiýanyñ modulynyñ maksimum prinsipini ulanyp $\forall n\geq N$, natural p we $\forall z\in\overline{D}$ üçin $|S_{n+m}(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ deñsizligi alarys. Koşi kriteriýasinde (7.6) hataryñ $\overline{D}$oblastda deñölçegli ýygnalýandygyny alarys.

§7.3 Derjeli hatarlar

1.Derejeli hataryn kesgitlenişi we ýygnanmagy

Funksional hatarlaryñ içinde öwrenmekde has ýönekeýi we şonuñ bilen birlikde amalyýetde has köp ulanylýany

$$\sum_{n-0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (7.14)$$

görnüşili hatardyr. Bu hatara derejeli hatar diýilýär, C_n sanlara ol hataryñ koeffisiýentleri diýilýär. (7.14) hatardan $\xi = z - z_0$ bolanda alynýan

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n \qquad (7.15)$$

hatara hem derejeli hatar diýilýar. Bu derejeli hatarlary derñemeklik birmeñzeşdir.

Teorema 7.8 (Abel). Goý, (7.14) hatar $z_1 \neq z_0$ nokatda ýygnalýan bolsun.

Onda ol hatar $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ nokat üçin obsolýut ýygnanýar we $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$ tegelekde deňölçegli ýygnalýar.

Eger (7.14) hatar $z_1 \neq z_0$ nokatda dargaýan bolsa, $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ nokatda ol hatar dargaýar.

Subudy. Teoremanyň şertine görä $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z_1 - z_0)^n$ hatar ýygnanýar, şonuň üçin

$\lim_{n\to\infty} C_n (z_1 - z_0)^n = 0$. Diýmek, $\{C_n (z_1 - z_0)^n\}$ yzygiderlik çäklenendir, ýagny şeýle bir M sany taplylyp, $\forall n$ üçin

$$|C_n (z_1 - z_0)^n| < M, \qquad (7.16)$$

Goý, z san $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ deñsziligi kanagatlandyrýan erkin nokat bolsun. Onda

$$|C_n (z - z_0)^n| = \left|C_n (z_1 - z_0)^n \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| = |C_n (z - z_0)^0| \cdot \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|,$$

$$|C_n (z - z_0)^n| < M q_1^n, \qquad (7.17)$$

bu ýerde $q_1 = \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$ (7.17) deñsziligiñ sag bölegi tükeniksiz kemelýan geometriki progessiýanyñ umumy agzasydyr. Diýmek (7.14) hatar $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ tegelekde absolýut ýygnanaýandyr.

Eger z nokat $|z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0|$ tegelege degişli bolsa, onda

$$|C_n (z - z_0)^n| \leq M \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| \leq M q_2^n,$$

bu ýerde $q_2 = \frac{r}{|z_1 - z_0|} < 1$ añlatma z-e bagly däl.Şonuñ üçin funksional hatar üçin Weýerştras teoremasyndan (7.14) hataryñ deñölçegliýygnanýandygy gelip çykýar.

Indi teoremanyň ikinji bölegini subut edeliň. Goý (7.14) hatar z_1 nokatda dargap $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$

deňsizligi kanagatlandyrýan z_2 nokatda ýygnanýan bolsun. Onda teoremanyň birinji böleginden z_1 noklatda (7.14) hataryň ýygnanýandygy gelip çykýar. Bu garşylyk teoremanyň ikinji bölegini subut edýär.

2.Derejeli hataryñ ýygnanama radiusy we tegelegi.

Abel teoremasyndan derejeli hataryñ ýygnanma oblasty barada netije çykarmak bolar. $z = z_0$ nokat (7.14) derejeli hataryñ ýygnanma oblastyna elmydama degişli boljagy aýdyñdyr.

Eger $|z = z_0| < R$ tegelekde (7.14) hatar ýygnanayp, $|z - z_0| > R$ oblastda dargaýan bolsa, onda R sana derejeli hataryñ ýygnanma radiusy diýilýär. $|z = z_0| < R$ tegelege (7.14) hataryñ ýygnanama tegelegi diýilýär.

Her bir berlen z sana degişli bolan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|C_n(z - z_0)^n\right| \qquad (7.18)$$

hatara garalyñ.

Matematiki analiz dersinden belli bolan Dalamber nyşanyny (7.18) hatara ulanyp, alarys:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{C_n(z-z_0)^n}\right| = |z - z_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = |z - z_0|\cdot L$$

Eger $|z - z_0|L < 1$ bolsa (7.18) hatar ýygnanýar, eger $|z - z_0|L > 1$ bolsa dargaýar.

Diýmek

$$|z - z_0| < \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_n + 1}\right|$$

şert ýerine ýetse (7.18) hatar ýygnanýar, şeýleleikde (7.14) hatar absolýut ýygnanýar, eger

$$|z - z_0| < \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_n + 1}\right|$$

bolsa (7.14) hatar (7.18) hatar ýaly dargaýar.

Şeýlelikde (7.14) hataryñ ýygnanma radiusy

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \qquad (7.19)$$

formuladan kesgitlenýär.

(7.18) hatara Koşi nyşanyny ulanyp, alarys:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|C_n(z - z_0)^n\right|}} = |z - z_0|\overline{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}} = |z - z_0|\cdot l.$$

Eger $|z - z_0|l < 1$ bolsa (7.18) hatar ýygnanýar, (7.14) hatar absolýut ýygnanýar, eger $|z - z_0|l > 1$ bolsa (7.18) hatar dargaýar.

Şeýleleikde (7.14) hataryñ ýygnanma radiusy

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}} \qquad (7.20)$$

formuladan kesgitlenýär, bu formula Koşi-Adamar formulasy diýilýär.

Mysal 7.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}z^n(a>1)$ hataryñ ýygnanama oblastyny tapmaly.

Çözülişi: (7.19) formulany peýdalanyp, alarys:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!}=\frac{a^{2n+1}}{n+1}=\infty,$$

diýmek berlen derejeli hatar ähli (z) kompleks tekizliginde ýygnanýar.

Mysal 7.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$ hataryñ ýygnanma oblastyny tapmaly .

Çözülişi: (7.20) formulany peýdalanyp, alarys:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e},$$

ýagny berlen hatar $|z|<\frac{1}{e}$ tegelekde ýygnanýar.

3.Derejeli hataryñ käbir häsiýetleri

Derejeli hataryñ $u_n(z)=C_n(z-z_0)^n$ agzalary ähli (z) kompleks tekizliginde analitikdir. Mundan başga Abel teoremasyna görä berlen derejeli hataryñ ýygnanma tegeleginde saklanýan islendik ýapyk tegelekde berlen hatar deñölçegli ýygnanýandyr. Şonuñ üçin 7.6-njy we 7.5-nji teoremelary ulanyp, aşakdaky teoremalary alarys:

Teorema7.9. Eger (7.14) hatar $|z-z_0|<R$ tegelekde f(z) funksiýa ýygnanýan bolsa, onda: 1) f(z) funksiýa $|z-z_0|<R$ tegelekde analitikdir;2) (7.14) hatary tükeniksiz gezek agzama agza differensirläp bolýar, şunlukda ýygnanma radiusy üýtgemeýär.

Bu teoremany doly subut etmek üçin, differensirlanimizde alnan hataryñ ýygnanma radiusynyñ R-e deñdegini görkezmek ýeterlikdir:

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{nC_n}{(n+1)C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_n+1}\right|=R.$$

Galanlary matematiki induksiýa usuly bilen görkezilýär.

Teorema7.10. Eger (7.14) hatar $|z-z_0|<R$ tegelekde ýygnanýan bolsa, onda ony agzama agza integrirläp bolýar, şunlukda ýygnanma radiusy üýtgemeýär.

Subudy. Bu teoremany doly subut etmek üçin, integrirlemekde alnan hataryñ ýygnanma radiusynyñ üýtgemeýändigini subut etmek ýeterlikdir:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|C_n|}{n+1}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}}=R$$

Galanlary matematiki induksiýa usuly bilen subut edilýär.

Goý,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \qquad (|z-z_0|<R) \qquad (7.21)$$

bolsun. Differensirläp alarys:

$$f^{/}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$f^{//}(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n(z-z_0)^{n-2},$$

$$f^{w}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)C_n(z-z_0)^{n-k},$$

Bu deñliklerden $z=z_0$ bolanda alarys:

$f(z_0)=C_0,\ f^{/}(z_0)=1\cdot C_1,\ f^{//}(z_0)=2\cdot 1\cdot C_2,\ldots,\ f^{Ck}(z_0)=k(k-1)\ldots 1\cdot C_k,\ldots$

Alarys:

$$C_0=f(z_0), C_1=\frac{f^{/}(z_0)}{1}, C_2=\frac{f^{//}(z_0)}{2},\ldots, C_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{K},\ldots$$

Alnan deñlikleri göz öñünde tutup, (7.21) deñligi aşakdaky görnüşde ýazalyñ:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n}(z-z_0)^n \qquad (7.22)$$

Bu hatara Teýlor hatary diýilýär.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n}z^n$$

Makleron hatary diýilýär.

Indi käbir funksiýalaryñ derejeli hatara dagydylyşyny ýatlap geçeliñ:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(2n)!}.$$

Bu hatarar ähli (z) kompleks tekizlikde ýygnanýar.

$$(1+z)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, |z|<1$$

$$ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}, |z|<1.$$

4.Analitik funksiýalaryñ derejeli hatara dargadylyşy, dagytmagyñ ýeke-täkligi

Tegelekde analitik bolan funksiýany derejeli hatara dargadyp bolýandygy hakynda Teýlor teoremasyny subut edeliñ.

Teorema 7.11 $|z-z_0|>R$ tegelekde analitik bolan islendik analitik funksiýany bu tegelegiñ içinde ýeke-täk usul bilen (7.14) görnüşdäki derejeli hatara dargadyp bolýar.

Subudy. Goý, z nokat $|z-z_0|>R$ tegelegiñ işindäki nokat bolsun. z nokady öz içinde saklar ýaly

$|z-z_0|=r$ $(r<R)$ töweregi guralyñ. (35-nji surat).

Bu töweregi γ bilen belgiläliñ. f(z) funksiýa $|z-z_0|\le r$ tegelekde analitikligini peýdalanyp, Koşi formulasyny ulanalyñ:

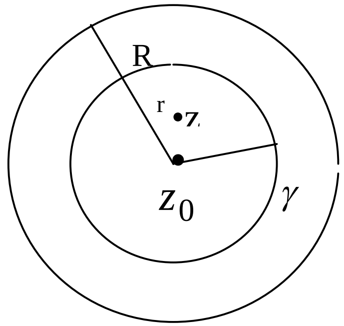
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\eta)\frac{1}{(\eta-z_0)-(z-z_0)}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}d\eta,$$

bu ýerde integral γ egriniñ položitel ugry boýunça alynýar.

$$\left|\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|\eta-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$$

bolandygy üçin

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\eta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^n$$



35-nji surat

añlatma tükeniksiz kemelýän geometriki progresiýadyr. Alarys:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^n d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta\right)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

bu ýerde

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta, n=0,1,2,\ldots \qquad (7.23)$$

Dagytmagyñ ýeke täkligini görkezmek üçin, goý f(z) funksiýa ýene-de

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

görnüşde dagydylypdyr diýip guman edeliñ. (7.23) we analitik funksiýanyñ önümleri üçin formulany peýdalany

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n} = bn$$

deñligi alarys.

Mysal 7.3. $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(|z|<1\right)$ dagytmany peýdalanyp

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n\left(|z|<1\right)$$

formulany subut etmeli.

Çözülişi. Berlen dagytmada z-iñ ornuna –z goýup, alarys:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad \left(|z|<1\right)$$

Bu deñlikden iki gezek önüm alalyñ:

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}$$

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)z^n \qquad \left(|z|<1\right).$$

Mysal 7.4. $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ funksiýany z=0 nokatda Teýlor hataryna dagytmaly.

Çözülişi. Berlen funksiýa ähli kompleks tekizliginiñ $z_1=2$ we $z_2=3$ nokatlaryndan başga nokatlarynda analitikdir. Teýlor teoremasyna görä berlen funksiýany $|z|<2$ tegelekde derejeli hatara dagydyp bolýar. Funksiýany ýönekeý droblara dagydyp, alarys:

$$f(z)=(2z-5)\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}\right)$$

Alarys:

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^{n},\qquad |z|<3;$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n},\qquad |z|<2.$$

$|z|<2$ tegelekde berlen funksiýnayñ dagytmasy aşakdaky görnüşde bolar:

$$f(z)=(2z-5)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^{n+1}-$$

$$-5\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2}{3^{n}}\right)z^{n}-5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2^{n+1}}-\frac{5}{3^{n+1}}\right)z^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n}-\frac{5}{6}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^{n}.$$

Ýygnanma radiusyny tapalyñ:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{3^{n+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\left(3^{n+1}+2^{n+1}\right)}{3^{n+2}+2^{n+2}}=6\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{3^{n+2}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right)}=2.$$

VIII Bap. Loran hatary

§8.1. Loran hatary, onuñ ýygnanma oblasty. Loran hatary, onuň ýygnanma oblasty. Loran koeffisiýentleri üçin formula.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{18.1}$$

hatara Loran hatary diýilýär, bu ýerde c_n, z_0 berlen kompleks sanlar.

Loran hataryny

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

iki hataryň jemi görnüşinde ýazalyň.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ – adaty derejeli hatar, oňa Loran hatarynyň dogry bölegi diýilýär.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – Loran hatarynyň esasy bölegi diýilýär.

Teorema 8.1. Eger Loran hatarynyň $\{c_n\}$ koeffisiýentleri üçin

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{18.2}$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda ol hataryň ýygnanma oblasty

$$r < |z - z_0| < R \qquad (17.3)$$

halka bolup, onuň $f(z)$ jemi bu halkada analitikdir, şunlukda $\{c_n\}$ koeffisiýentler $f(z)$ jemiň üsti bilen

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (18.4)$$

formula bilen aňladylýar, bu ýerde

$\gamma_{r_0} = \{z : |z - z_0| = r_0\}$ $(r < r_0 < R)$ töwerek.

Subudy. (8.1) hataryň

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (18.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad (18.6)$$

hatarlaryň jemine deňdigini biz agzap geçipdik. Derejeli hatarlar diýen mowzukdan belli bolşy ýaly (8.5) hataryň ýygnanma oblasty

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \qquad (18.7)$$

tegelekdir. Bu tegelekde onuň $f_1(z)$ jemi analitikdir.

(8.6) hatarda $\dfrac{1}{z - z_0} = \vartheta$ belgilemäni girizip

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\vartheta^n \text{ hatary alarys.}$$

Bu hataryň ýygnanma oblasty

$$|\vartheta| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \text{ tegelekdir.}$$

Belgilemäni ulanyp, (8.6), hataryň

$$|z - z_0| = \frac{1}{|\vartheta|} > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|} = r \qquad (17.8)$$

ýygnanma oblastyny alarys. Bu oblastda garalýan hataryň $f_2(z)$jemi analitikdir.

(20.7) we (20.8) görnüşi ýaly (20.1) hataryň ýygnanma oblasty (8.3) halkadyr. Bu halkada (8.1) hataryň $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ jemi analitikdir:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \qquad (\text{`}18.9)$$

Bu deňligi $(z - z_0)^{-m-1}$ $(m = 0, \pm1, \ldots)$ köpeldip we $\gamma_{r_0} = \{z : |z - z_0| = r_0\}$ $(r < r_0 < R)$ töwerek boýunça integrirläp alarys:

$$\int_{\gamma} f(\eta)(\eta - z_0)^{-m-1} d\eta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma} (\eta - z_0)^{n-m-1} d\eta \qquad (18.10)$$

temada belli bolşy ýaly

$$I_n = \begin{cases} 2\pi i, \ eger\ n = -1, \\ 0, eger\ n \neq -1. \end{cases}$$

Bu deňligi göz öňüne tutup, (8.10)-dan alarys:

$$C_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{m+1}} d\eta \quad (m = 0, \pm1, \ldots)$$

Mysal 8.1. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+1}$ hataryň ýygnanma oblastyny tapyň.

Çözülişi. (8.2)-den alarys:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+1}{3^n+1}=3,$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{-n}+1}{3^{-n-1}+1}\right|=1.$$

Diýmek berlen hataryň ýygnanma oblasty $1<|z|<3$ halkadyr.

Mysal 2.

$$\dots+\frac{1}{z^n}+\dots+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\dots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\dots$$

hataryň ýygnanma oblastyny we jemini tapyň.

Çözüşi. Berlen hataryň dogry bölegi

$\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\dots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\dots$ geometriki pogressiýadyr. Bu geometriki progressiýanyň maýdalawjysy $\frac{z}{2}$ deňdir. Eger $\left|\frac{z}{2}\right|<1\Rightarrow|z|<2$ bolsa, onda ol tükeniksiz kemelýän geometriki progressiýadyr, onuň jemi

$$f_1(z)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2-z}\quad(|z|<2).$$

Berlen hataryň hem esasy bölegi maýdalawjysy $\frac{1}{z}$ deň bolan $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\frac{1}{z^n}+\dots$ geometriki progressiýadyr. Eger $\left|\frac{1}{z}\right|<1\Rightarrow|z|>1$ bolanda ol tükeniksiz kemelýän geometriki progressiýadyr, onuň jemi

$$f_2(z)=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z-1}.$$

Berlen hatar $1<|x|<2$ halkada ýygnanýar, onuň jemi

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\frac{1}{2-z}+\frac{1}{z-1}=\frac{z-1+2-z}{(2-z)(z-1)}=\frac{1}{(2-z)(z-1)}.$$

Bellik. Eger $r\geq R$ bolsa, onda oblast emele gelmeýär, diýmek ähli kompleks tekizliginde Loran hatary dargadylýar.

2. Analitik funksiýanyň Loran hataryna dagytmasy. Dagytmanyň koeffisientleri üçin formulasy.

Indi halkada analitik funksiýany Loran hataryna dargadyp bolýarmy diýen soraga jogap bereliň.

Teorema 8.2. (Loran). $r<|z-z_0|<R$ halkada analitik $f(z)$ funksiýany ýeke-täk usul bilen

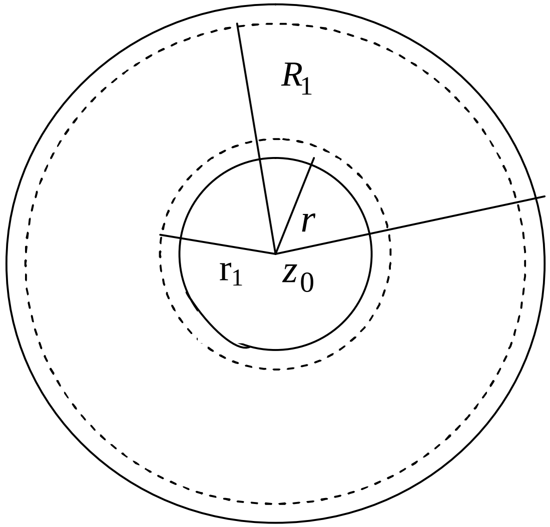
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$ Loran hataryna

dargadyp bolýar, bu ýerde

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\tau}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots \qquad (8.11)$$

formulanyň kömegi bilen kesgitlenýär, bu ýerde γ_{r0}- erkin $|z-z_0|=r_0$ $(\tau<\tau_0<R)$ töwerek.

Subudy. Goý, z nokat $r<|z-z_0|<R$ halkanyň erkin nokady bolsun. z nokady içinde saklaýan $r_1\le|z-z_0|\le R_1(r<r_1, R_1<R)$ halkany guralyň, bu halka öňki halkada saklaýandygy üçin, alnan halkada $f(z)$ funksiýa analitikdir.



36-njy surat

Koşi formulasyny ulanyp

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{r_1}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta=f_1(z)+f_2(z) \quad 8.12)$$

deňligi alarys, bu ýerde $C_{r_1}=\{z:|z-z_0|=r'\}$, $C_{R_1}=\{z:|z-z_0|=R_1\}$.

Alarys:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+_{R'}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+_{R'}}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0-(z-z_0)}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+_{R_1'}}\left(\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\bullet\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}\right)d\eta,$$

$\left|\dfrac{z-z_0}{\eta-z_0}\right|<1$ bolandygy üçin $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\eta-z_0}}$ tükeniksiz kemelýän geometriki progressiýanyñ jemidir, ýagny:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R_1'}} f(\eta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R_1'}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta\right)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

bu ýerde

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{R_1}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta\,(n=0,1,2,...). \tag{8.13}$$

Soňky alnan hatar $|z-z_0|<R$ tegelekde ýygnanýar.

Alarys:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{r_1}}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{r_1}}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0-(z-z_0)}d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^-_{r_1}}\left(\frac{f(\eta)}{-(z-z_0)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\eta-z_0}{z-z_0}}\right)d\eta,$$

$\left|\dfrac{\eta-z_0}{z-z_0}\right|<1$ göz öňüne tutup, alarys:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{r_1'}}\frac{f(\eta)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\eta-z_0}{z-z_0}\right)^n d\eta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{r_1'}}f(\eta)(\eta-z_0)^n d\eta\right)(z-z_0)^{-n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{r_1}}f(\eta)(\eta-z_0)^{n-1}d\eta\right)(z-z_0)^{-n}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{r'}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{-n+1}}d\eta\right)(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c-n}{(z-z_0)^n}$$

bu ýerde

$$c-n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+_{r_1}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{-n+1}}d\eta,\quad n=1,2,...$$

ýa-da

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r'}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\quad n=-1,-2,... \tag{18.14}$$

(8.13) we (8.14)-den

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_0}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\quad n=0,\pm1,...$$

deñlikleri alarys.

Indi dargatmanyñ ýeke-täkligini görkezeliñ. Tersine guman edeliñ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{C}_n(z-z_0)^n$$

Bu deñligi $(z-z_0)^{-m-1}(m=0,\pm 1,\ldots)$ köpeldip we γ_{r_0} töwerek boýunça integrirläp, alarys.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{\gamma_{r_0}} (z-z_0)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C} \int_{\gamma_{r_0}} (z-z_0)^{n-m-1} ds.$$

$(*)$ peýdalanyp

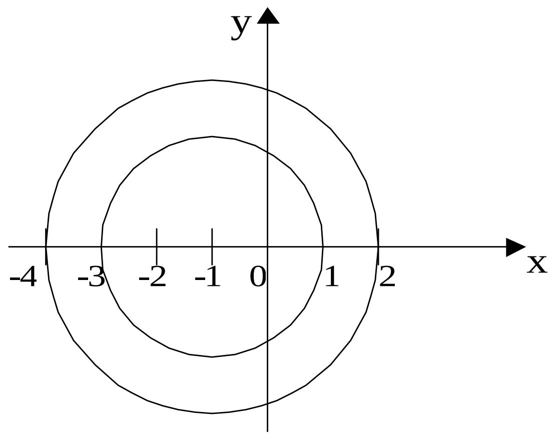
$C_n \cdot 2\pi i = \tilde{C}_n \cdot 2\pi i \Rightarrow C_n = \tilde{C}_n$ deñligi alarys

Mysal 2.3. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ funksiýany $2<|z+1|<3$ halkada Loran hataryna dargatmaly.

Çözlüşi $z_1=1,\ z_2=2$ berlen funksiýanyñ maydalawjysynyñ nollarydyr. Bu nokatlar halkanyñ çäginde degişlidir. Loran teoremasynyñ hemme şertleri ýerine ýetýär, şonuñ üçin bu funksiýany $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z+1)^n$ görnüşli hatara dargadyp bolýar.

Berlen funksiýany aşakdaky görnüşde ýazalyñ:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$



37-nji surat

Birinji funksiýa $|z+1|<3$ tegelekde analitikdir. Şonuñ üçin derejeli hatara dargadalyñ :

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}},$$

şerte görä $\left|\dfrac{z+1}{3}\right|<1$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

$\dfrac{1}{z-2}$ funksiýa $|z+1|>2$ ýaýlada analitikdir, şonuñ üçin ony $(z+1)-$iñ derejesi görnüşinde dargadyp bolýar.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z+1)-2}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}},$$ şerte görä

$$\left|\frac{2}{z+1}\right|<1$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n},$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^n}{2^{n-1}},\ 2<|z+1|<3$$

Mysal 8.4. $\forall k\in R$ üçin

$$\sin k\left(z+\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n\left(\forall z:0<|z|<\infty\right)$$ deňligiň dogrydygyny subut etmeli, bu ýerde

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2k\cos\theta)\cos n\theta d\theta,n=0,\pm1,\ldots$$

Gözlüşi. Berlen funksiýa $0<|x|<\infty$ halkada analitik, ýagny Loran teoremasynyň şertleri ýerine ýetýär, diýmek Loran hataryna dargadyp bolýar. (21.1) formulany ulanyp, alarys:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\sin k\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)}{\eta^{n+1}}d\eta,\ n=0,\pm1,\ldots,$$

bu ýerde $\gamma_1=\{z:|z|=1\}$.

$\eta=e^{i\theta}$ $(0\le 0\le 2\pi)$ orunda goýmany ulanyp, alarys:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin k\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\left(2\cdot\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)e^{-in\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2k\cos\theta)e^{-in\theta}d\theta,$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2k\cos\theta)e^{-in\theta}d\theta\ \ (n=0,\pm1,\ldots)$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly $c_n=c_{-n}\,(n=0,1,2,\ldots)$.

$$c_n+c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{1}\sin(2k\cos\theta)\left(e^{-in\theta}+e^{+in\theta}\right)d\theta\Rightarrow$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2k\cos\theta)\cos n\theta d\theta.$$

3.Loran hatarlarynyñ koeffisiýentleri üçin Koşi deñsizligi.

Teorema 8.3. Goý, $f(z)$ funksiýa $r<|z-z_0|<R$ halkada analitik bolsun. Onda $f(z)$ funksiýanyñ

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

Loran hatarynyñ koeffisiýentleri üçin

$$|c_n|\le\frac{M}{r_0^n},n=0,\pm1,\pm2,...,$$

deñsizlik dogrudyr, bu ýerde $M=\max\limits_{z\in\gamma_{r_0}}|f(z)|$,

$\gamma_{R_0}:|z-z_0|=r_0,\ r<r_0<R.$

Subudy. (8.11) formuladan alarys:

$$|c_n|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z-z_0|=r_0}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz|\le\frac{M}{2\pi r_0^{n+1}}\int\limits_{|z-z_0|=r_0}|dz|=\frac{M}{r_0^n}.$$

IX Bap.Ýeke-täklik teoremasy we maksimum prinsipi.

§9.1. Analitik funksiýanyň nollary, nollaryñ tertibi

Kompleks üýtgeýänli funksiýalar nazaryýetinde, eger $f(z)$ analitik funksiýanyň bahalaryny oblastnyň ähli nokatlarynda berilmände-de kesgitläp bolýar. Mysal üçin: $f(z)$ analitik funksiýanyň bahalary berlen oblastnyň çäginde berlen bolsa, onuň oblastnyň içindäki

bahalaryny Koşi integral formulasynyň kömegi bilen kesgitläp bolýandygy bize öňki mowzuklardan bellidir.

Analitik funksiýany ähli oblastda kesgitlemek üçin, funksiýa barada "iň az" maglumat gerek diýen soragyň ýüze çykmagy tebigydir.

Eger $f(z_0)=0$ bolsa, onda $z=z_0$ nokada $f(z)$ funksiýanyň noly diýilýär.

1). Goý, $z_0\ne\infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň noly bolsun. $f(z)$ funksiýany $z=z_0$ nokadyň etrabynda Teýlor hataryna dargydalyň, ýagny

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n. \qquad (9.1)$$

Eger $z=z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň noly bolsa, onda $C_0=f(z_0)=0$ bolar.

Goý, (8.1) formulada $C_0=C_1=...=C_{m-1}=0, C_m\ne0$ bolsa, ýagny

$$f(z)=C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+..., \qquad (9.2)$$

onda m san $z=z_0$ nokadyň $f(z)$ funksiýanyň nolynyň tertibini aňladýar. $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ formuladan görnüşi ýaly funksiýanyň $z=z_0$ nokatdaky noldan tapawutly iň kiçi önümi, $z=z_0$ nokadyň $f(z)$ funksiýanyň nolynyň tertibini aňladýar.

(9.2) deňligi

$$f(z)=(z-z_0)^m\left[C_m+C_{m+1}(z-z_0)+\dots\right] \quad (9.3)$$

görnüşde ýazalyň, bu ýerde $h(z)=C_m+C_{m+1}(z-z_0)+\dots$ hataryň ýygnanma radiusy (9.1) hataryň ýygnanma radiusyna deňdigi aýdyňdyr, şunlukda $h(z_0)=C_m\neq 0$.

Diýmek $z=z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolsa, onda

$$f(z)=(z-z_0)^m h(z), h(z_0)\neq 0 \quad (9.4)$$

formula dogrydyr, bu ýerde $h(z)$ funksiýa $z=z_0$ nokatda analitikdir.

Tersine, eger $f(z)$ funksiýany 9.4) görnüşde ýazyp bolsa, bu ýerde $h(z)$ funksiýa $z=z_0$ nokatda analitik, onda (9.3), (9.2) formulalar hem dogrydyr, ýagny $z=z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli nolydyr.

2). Goý, $z=\infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň noly bolsun. $f(z)$ funksiýanyň $z=\infty$ nokatda analitik bolanlygy üçin

$$f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{z} \quad (9.5)$$

deňlik dogrydyr. Şerte görä $C_0=f(\infty)=0$.

Goý, (9.5) hataryň koeffisiýentleri üçin $C_0=C_1=\dots=C_{m-1}=0, C_m\neq 0$ şert ýerine ýetsin,

ýagny $z=\infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m- tertipli noly bolsun. Onda

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{C_n}{z^n}=\frac{1}{z^m}\left(C_m+\frac{C_{m+1}}{z}+\dots\right), \quad (9.6)$$

bu deňlikden alarys:

$$f(z)=z^{-m}\psi(z), \psi(\infty)=C_m\neq 0, \quad (9.7)$$

bu ýerde $\psi(z)$ funksiýa $z=\infty$ nokatda analitikdir. $\left(\psi(z)=C_m+\dfrac{C_{m+1}}{z}+\dots\right)$.

Tersine, eger $f(z)$ funksiýany (9.7) görnüşde ýazyp bolsa, bu ýerde $\psi(z)$ funksiýa $z=\infty$ nokatda analitik, onda (9.6) formula hem dogrydyr, ýagny $z=\infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli nolydyr.

Bu ýerden aşakdaky tassyklamalar gelip çykýar.

Teorema 9.1. $z=z_0\neq\infty$ nokadyň $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolmagy üçin, ol funksiýanyň (9.4) görnüşde ýazyp bolmagy zerur we ýeterlikdir, bu ýerde $h(z)$ funksiýa z_0 nokatda analitik we $h(z_0)\neq 0$.

Teorema 9.2. $z=\infty$ nokadyň $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolmagy üçin, ol funksiýanyň (9.7) görnüşde ýazyp bolmagy zerur we ýeterlikdir, bu ýerde $\psi(z)$ funksiýa $z=\infty$ nokatda analitik we $\psi(\infty)\neq 0$.

Netije 9.1. Eger $z = z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolsa, onda $g(z) = [f(z)]^p$ ($p \geq 1-$bütin san) funksiýanyň nolynyň tertibi pm bolar.

Mysal9.1. $z = k\pi(k = 0,\pm1,\pm2,...)\sin z$ funksiýanyň birinji tertipli noly-dygyny görkeziň.

Çözüwi. $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + ...$ dagytmany ulanyp, alarys:

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - k\pi) = (-1)^k \left[(z - k\pi) - \frac{(z - k\pi)^3}{3!} + ... + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \frac{(z - k\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... = \right.$$

$$= (z - k\pi)\left[(-1)^k \left(1 - \frac{z - k\pi}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{(z - k\pi)}{(2n-1)!} + ...\right)\right] = (z - k\pi)h(z),$$

bu ýerde

$$h(z) = (-1)^k \left(1 - \frac{z - k\pi}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{(z - k\pi)^{2n-2}}{(2n-1)!} + ...\right),$$

$h(k\pi) = (-1)^k \neq 0,$ diýmek $z = k\pi -$berlen funksiýanyň birinji tertipli nolydyr.

Mysal 9.2. $z = 0$ nokadyň $1 - \cos z$ funksiýanyň ikinji tertipli nolydygyny görkezeliň.

Çözülişi. Hakykatdan-da, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - ...$ dagytmany ulanyp, alarys:

$$1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + ... = z^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + ...\right) = z^2 h(z),$$

bu ýerde $h(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + ..., h(0) = \frac{1}{2!} \neq 0,$ diýmek $z = 0 -$berlen funksiýanyň ikinji tertipli nolydyr.

Teorema 9.3. Goý, $f(z)$ funksiýa $z = z_0$ nokatda analitik bolsun. Onda ýa $z = z_0$ nokadyň käbir etrabynda $f(z) \equiv 0,$ ýa-da $z = z_0$ nokadyň käbir etraby bar bolup, ol etrapda $z = z_0$ nokatdan başga $f(z)$ funksiýanyň noly ýokdyr.

Subudy. Iki halyň bolmagy mümkin: 1) (9.1) hataryň ähli koeffisiýentleri nola deň bolmagy, onda $z = z_0$ nokadyň käbir etrabynda $f(z) = 0,$ 2) şeýle bir $m \geq 1$ san tapylyp, $C_0 = C_1 = ... = C_{m-1} = 0, C_m \neq 0.$

Ikinji ýagdaýda $z = z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolar, ýagny $f(z) = (z - z_0)^m h(z),$ bu ýerde $h(z)$ funksiýa $z = z_0$ nokatda analitik we $h(z_0) \neq 0.$ $h(z)$ funksiýanyň üznüksizliginden we $h(z_0) \neq 0.$şertden, $z = z_0$ nokadyň käbir etrabynda $h(z) \neq 0.$ Diýmek $z = z_0$nokadyň käbir etraby tapylyp, şol etrapda $f(z)$ funksiýanyň $z = z_0$ nokatdan başga noly ýokdyr.

Mysal 9.3. $z = 0$ nokat $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$ funksiýanyň näçinji tertipli noly.

Çözülişi. Berlen funksiýany $z = 0$ nokatda Teýlor hataryna dargadalyň. Şonuň üçin

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$ dargatmany ulanalyň.

$$f(z) = z^2\left(e^{z^2} - 1\right) = z^2\left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots - 1\right) = z^2\left(z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots\right) =$$

$$z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \ldots\right) = z^4\varphi(z), \quad f(z) = z^2(e^{z^2} - 1) = z^4\varphi(z)$$

bu ýerde $\varphi(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \ldots$ funksiýa $z = 0$ nokatda analitik we $\varphi(0) = 1 \neq 0$. Diýmek n=4, ýagny $z = 0$ nokat berlen funksiýanyň 4-tertipli noludyr.

Mysal9.4. $z = 0$ nokat $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ funksiýanyň näçinji tertipli noly.

Çözülişi. Berlen funksiýany $z = 0$ nokatda Teýlor hataryna dargadalyň. Şonuň üçin

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$ dargatmany ulanalyň.

$$f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6) = 6\left(z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - \frac{z^{21}}{7!} + \ldots\right) + z^9 - z6z^3 =$$

$$= \frac{z^{15}}{20} - \frac{z^{21}}{840} + \ldots = z^{15} \cdot \frac{1}{20}\left(1 - \frac{z^6}{42} + \ldots\right),$$

$$f(z) = z^{15}\varphi(z), \quad \text{bu ýerde} \quad \varphi(z) = \frac{1}{20}\left(1 - \frac{z^6}{42} + \ldots\right)$$

funksiýa $z = 0$ nokat berlen funksiýanyň 15 tertipli nolydyr.

§9.2.Ýeke-täklik teoremasy we onuň netijeleri.

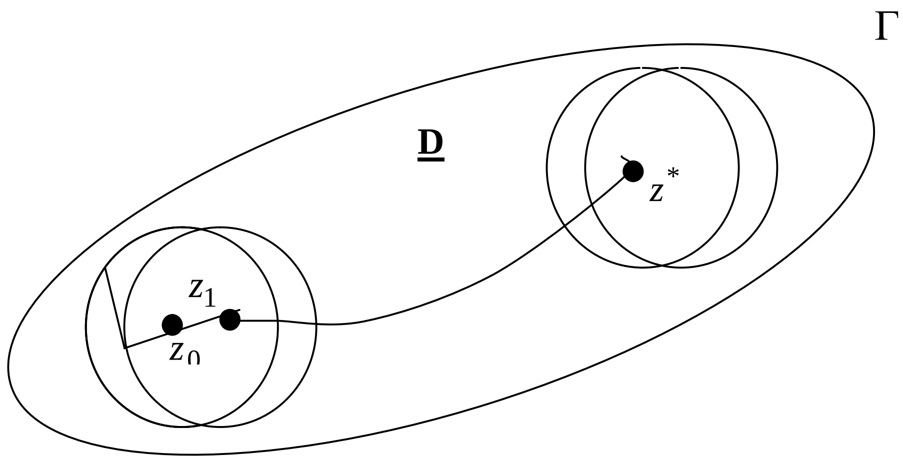
Teorema 9.4. (Ýeke-täklik teoremasy). Goý $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun. Eger D oblastyñ dürli nokatlaryndan ybarat bolan, $z = z_0 \in D$ nokada ýygnanýan, $\{z_n\}$ yzygiderlik üçin $f(z) = 0$ bolsa, onda $\forall z \in D$ üçin $f(z_n) \equiv 0$.

Subudy. $f(z)$ funksiýany z_0 nokadyň etrabynda Teýlor hataryna dagydyp,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \qquad (9.6)$$

ähli koeffisiýentleriniň nola deňdigini görkezeliň. Eger tersine guman etsek, onda z_0 nokadyň, käbir etraby tapylyp, $f(z) \neq 0 (z \neq z_0)$ bolar. Bu bolsa teoremanyň şertine garşy bolar. Diýmek (9.6) hataryň ähli C_n koeffisiýentleri nola deňdir. (9.6) hataryň

$K_{\rho_0} = \{z : |z - z_0| < \rho_0\}$ tegelekde ýygnanýandygy aýdyňdyr, bu ýerde $\rho_0 - z_0$ nokatdan D oblastnyň çägine çenli uzaklyk. Diýmek K_{ρ_0} tegelekde $f(z) \equiv 0$.



38-nji surat

Goý, z^* nokat D oblastnyň erkin nokady bolsun. $f(z^*) = 0$ bolýandygyny görkezeliň. z_0 nokat bilen z^* nokady D oblast degişli bolan l egri bilen birikdireliň. D oblastnyň Γ
çägi bilen l egriniň arasyndaky uzaklygy ρ bilen belgiläliň.
$\rho > 0$ boljakdygy aýdyňdyr. Merkezleri l egrä degişli

we $|z_i - z_{i-1}| < \dfrac{\rho}{2} \left(i = \overline{1, n}\right)$ şerti kanagatlandyrýan

degişlilikde $z_0, z_1, ..., z_n = z^*$ nokatlar bolan

$K_0, K_1, ... K_n$ tegelekleri guralyň. Ähli $K_i\,(i = \overline{0, n})$ tegelekleriň D oblast degişli boljagy düşnüklidir. K_{i+1} tegelegiň z_{i+1} merkezi K_i tegelege degişlidir. $\rho_0 \geq \rho$ bolanlygy üçin K_0 tegelek K_{ρ_0} tegelege degişlidir we $\forall z \in K_0$ üçin $f(z) \equiv 0$. $f(z)$ funksiýany z_1 nokatda Teýlor hataryna dargadalyň:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{C}(z - z_1)^n.$$

K_1 tegelegiň D oblastda degişli bolandygy üçin bu hatar K_1 tegelekde ýygnanýandyr. K_1 tegelegiň z_1 merkezi K_0 degişli bolandygy üçin z_1 nokadyň etrabynda $f(z) \equiv 0$ deň, şeýlelikde öňki usul bilen $\forall z \in K_1$ üçin $f(z) \equiv 0$ alarys. Bu pikirlenmäni dowam edip ähli $K_i\,(i = \overline{0, n})$ tegeleklerde $f(z) \equiv 0$ bolýandygyny alarys, şeýlelikde $z^* \in K_n$ bolandygy üçin $f(z^*) = 0$. Teorema subut edildi.

<u>Netije 9.2.</u> Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun. Eger predel nokady $z_0 \in D$ bolan $G \subset D$ köplükde $f(z) \equiv 0$ bolsa, onda $\forall z \in D$ üçin $f(z) \equiv 0$ bolar.

<u>Subudy.</u> Predel nokadyň kesgitlemesine görä, $z_n \in G$ we $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ şertler ýerine ýeter ýaly dürli nokatlardan bolan $\{z_n\}, n = 1,2,...$ nokatlar tapylýar. Diýmek, $z_n \in D(n = 1,2,...)$ yzygiderlik üçin $f(z_n) = 0$. Ýeke – täklik teoremasyna görä $\forall z \in D$ üçin $f(z) \equiv 0$ bolar.

Netije 9.3. Goý, $f(z)$, $g(z)$ funksiýalar D oblastda analitik bolsunlar. Eger predel nokady $z_0 \in D$ bolan $G \subset D$ köplükde $f(z) \equiv g(z)$ bolsa, onda $\forall z \in D$ üçin $f(z) \equiv g(z)$ bolar.

Subudy. $h(z) = f(z) - g(z)$ funksiýada D oblastda üznüksiz we $\forall z \in G$ üçin $h(z) \equiv 0$. Netije 1 esasynda $\forall z \in D$ üçin $h(z) \equiv 0$ bolar. Diýmek, $\forall z \in D$ üçin $f(z) \equiv g(z)$ bolar.

Bellik9.1. $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ funksiýa garalyň $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ deňligi kanagatlandyrýan $z_n = \frac{1}{n\pi}(n = \pm1,\pm2,...)$ yzygiderlik üçin $f(z_n) = 0$ bolýandygy aýdyňdyr, ýöne $f(z) \not\equiv 0$. Bu alnan netije subut edilen ýeke-täklik teoremasyna garşy däldir. Sebäbi $z_0 = 0$ nokatda berlen funksiýa analitik däldir.

Bellik 9.2. Ýeke – täklik teoremasynyň we Netije 1, 2-iň tassyklamalary D oblastnyň ornuna giňeldilen kompleks tekizligini alanyňda-da dogrydyr.

Köp halatlarda ýeke – täklik teoremasyny aşakdaky görnüşde ulanmak amatlydyr:

Netije 9.4. Goý, $f(z)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun. Eger $f(z)$ funksiýa D oblast degişli bolan käbir l egride ýa-da K tegelekde nola deň bolsa, onda $\forall z \in D$ üçin $f(z) \equiv 0$ bolar.

Mysal 9.5 $|z| < 1$ tegelekde

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} egern \neq 1, \\ 0 \; eger \; n = 1, \end{cases}$$

şerti kanagatlandyrýan analitik funksiýa barmy?

Çözülişi. $|z| < 1$ tegelekde analitik bolan $w = z^2$ funksiýa garalyň Gözleýän $f(z)$ funksiýamyz bar diýip guman edeliň Bu iki funksiýalaryň $z_n = \frac{1}{n}(n = 2,3,...)$ nokatlardaky bahalaryny deňeşdireliň Bu iki funksiýanyň z_n nokardaky bahasy $\frac{1}{n^2}$ deňdir.

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0.$ Diýmek ýeke-täklikteoremasyna görä $|z| < 1$ tegelekde funksiýamyz $f(z) \equiv z^2$ bolar. Berlişine görä $f(1) = 0.$ Ýöne alan funksiýamyz üçin:

$$f(1) = z^2\Big/_{z=1} = 1.$$

Alnan garşylyk gözleýän analitik funksiýamyzyň ýokdygyny görkezýär.

Mysal9.6. $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+\cos^2\frac{n\pi}{2}}$ şerti kanagatlandyrýan, $z=0$ nokatda analitik funksiýa barmy,

Çözülişi. Goý, şeýle $f(z)$ funksiýa bar bolsun. Bu funksiýa $z=0$ nokatda analitik bolanlygy üçin käbir $K:|z|<r$ tegelekde-de analitikdir. Bu tegelekde analitik bolan $w=z$ funksiýa garalyň $\lim_{n\to\infty} z_n=0\left(z_n=\frac{1}{n}\right)$ bolanlygy üçin, käbir N nomerden başlap z_n nokatlar K tegelege degişli bolar. n-täk sanlar bolanda $\frac{1}{n}$ nokatlaryň köplügini D bilen belgiläliň. $w=f(z)$ we $w=z$ funksiýalar.

§9.3.Şwarsyñ lemmasy

Analitiki funksiýanyñ modulynyñ maksimum prinsipinden birnäçe wajyp netijeler gelip çykýar.

Lemma 9.1. (Şwars). Eger f(z) funksiýa birlik tegelekde birbahaly we analitik bolup, f(0)=0, $|f(z)|\le 1(|z|<1)$ şertleri kanagatlandyrýan bolsa, onda ol $|f'(0)|\le 1,\quad |f(z)|\le|z|\quad (|z|<1)$ şertleri hem

kanagatlandyrýandyr. Şunlukda $|f'(0)|=1$ ýa-da $|f(z_0)|=|z_0|$ (iñ bolmanda $|z|<1$tegelegiñ bir $z_0(z_0\ne 0)$nokadynda) deñlik diñe $f(z)=e^{i\alpha}z$ bolanda ýerine ýetýär (α – hakyky san).

Subudy. Goý, $f(z)=C_1z+C_2z^2+...(|z|<1)$bolsun. Alarys:

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}=C_1+C_2z+....$$

Bu funksiýa $\varphi(0)=C_1=f'(0)$ şerti kanagatlandyrýan $|z|<1$ tegelekde analitik funksiýadygy aýdyñdyr.

Birlik tegelegiñ haýsyda bolsa bir z' nokadynda $\varphi(z)$ funksiýnyñ bahasyna seredeliñ: eger r san $|z'|<r<1$ şerti kanagatlandyrýan bolsa onda

$$|\varphi(z')|\le\max_{|z|=r}|\varphi(z)|$$

deñsizlik ýerine ýetýär, ýöne teoremanyñ $|f(z)|<1$ şertini göz öñünde tutup

$$\max_{|z|=r}|\varphi(z)|=\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1}{r},$$

deñsziligi alarys. Diýmek $|\varphi(z')|\le\frac{1}{r}.\quad r\to 1$ bolanda soñky deñsizliklerden alarys:$|\varphi(z')|\le 1.$

Hususy halda, $z'=0$bolanda $|\varphi(0)|=|f'(0)|\le 1$we $z'=z_0\ne 0$bolanda $|\varphi(z_0)|=\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right|\le 1$, ýagny $|f(z_0)|\le|z_0|$ deñsizlikleri alarys.

$f'(0)=1$ ýa-da $|f(z_0)|=|z_0|$ deñlik birlik tegelegiñ käbir nokadynda ýerine ýetse, onda analitik $\varphi(z)$ funksiýanyñ moduly özüniñ maksimumyna birlik tegelegiñ çäginde eýedir, ol hem bire deñdir. Bu ýagdaý diñe $\varphi(z)\equiv const=e^{i\alpha}$ bolanda, ýagny $f(z)=e^{i\alpha}z$.

X Bap. Birbahaly üzňe aýratyn nokatlar

1. Üzňe birbahaly aýratyn nokatlaryň görnüşleri.

Kesgitleme10.1. Eger $f(z)$ funksiýa $0<|z-z_0|<R$ halkada analitik bolup, $z_0(z_0\neq\infty)$ nokatda analitik bolmasa, onda z_0 nokatda $f(z)$ funksiýanyň üzňe aýratyn nokady diýilýär.

Kesgitleme10.2. Eger $f(z)$ funksiýa $R<|z|<\infty$ oblastda analitik bolsa, onda tükeniksiz daşlaşan nokada bu funksiýanyň birbahaly üzňe aýratyn nokady diýilýär.

z_0 nokadyň etrabynda $f(z)$ funksiýanyň özüni alyp barşyny öwreneliň. Geçen temadan belli bolşy ýaly bu funksiýany $0<|z-z_0|<R$ halkada Loran dargadyp bolýar. Üç ýagdaýyň bolmagy mümkin:

a) $(z-z_0)$ tapawudyň otrisatel derejeli agzalary saklamaýan;

b) $(z-z_0)$ tapawudyň otresatel derejeli tükenikli agzalary özünde saklaýan;

w) $(z-z_0)$ tapawudyň otrisatel derejeli tükeniksiz köp agzalary özünde saklaýan.

Bu ýagdaýlaryň her birine aýratyn seredeliň.

a) bu ýagdaýda Loran hatary adaty derejeli hatar bolýar, ýagny

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

$z\to z_0$ bolanda $f(z)$ funksiýanyň predeli bar bolup, onuň c_0 deň boljakdygy aýdyňdyr.

Eger $f(z)$ funksiýa z_0 nokatda kesgitlenmedik bolsa, onda bu nokada $f(z)$ funksiýanyň düzeldip bolýan aýratyn nokady diýilýär.

Eger $f(z_0)=C_0$ diýsek onda $f(z)$ funksiýa z_0 nokatda analitik bolar. Şeýlelikde $f(z)$ funksia $|z-z_0|<R$ tegelekde analitik bolar.

Bu aýdylanlardan aşakdaky tassyklama gelip çykýar:

Teorema 10.1. Eger z_0 nokat $f(z)$ analitik funksiýanyň düzeldip bolýan üzňe aýratyn nokady bolsa, onda $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, şunlukda $|c_0|<\infty$.

$f(z)$ funksiýa özüniň düzeldip bolýan üzňe aýratyn nokadynyň etrabynda çäklenendir we

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z) \qquad (10.1)$$

görnüşde ýazyp bolmagy mümkin, bu ýerde $m\geq 0$, $\varphi(z_0)\neq 0$. Eger $m>0$

bolsa, onda $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=0,$ şonuň üçin m san z_0 nokadyň $f(z)$ funksiýanyň nolunyň tertibidir.

Teorema10.2. Eger $f(z)$ funksiýa $0<|z-z_0|<R$ halkada analitik we çäklenen bolsa onda z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň düzeldip bolýan üzňe aýratyn nokadydyr.

Subudy. $f(z)$ funksiýany z_0 nokadyň etrabynda Loran hataryna dargadalyň:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\ n=0.\pm1,...,$$

bu ýerde $\gamma_{r_0}=\{z:|z-z_0|=r_0\}\ (0<r_0<R)$.

Alarys:

$$|C_n|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma r0}\frac{|f(\eta)|}{|\eta-z_0|^{n+1}}|d\eta|<\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}=\frac{M}{\rho^n},$$

bu ýerde $|f(\eta)<M.|$ Bu deňsizligiň çep bölegi ρ bagly däl, şonuň üçin $n<0$ bolsa $c_n=0.$ bolar.

Mysal10.1. $z=0$ nokat $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ funksiýanyň düzeldip bolýan aýratyn nokadydygyny görkeziň.

Çözülişi $f(z)$ funksiýa $z=0$ nokatdan başga nokatlarda analitikdir we

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to0}\frac{z-\frac{z^3}{3!}+...}{z}=\lim_{z\to0}\left(1-\frac{z^2}{3!}+...\right)=1.$$

b) bu ýagdaýda Loran hatary

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \qquad (10.2)$$

görnüşi alar. Bu ýagdaýda z_0 nokada $f(z)$ funksiýanyň $m-$ tertipli polýusy diýilýär.

Teorema 10.3. Eger z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň polýusy bolsa, onda $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$ bolar.

Subudy. (10.2)-den alarys:

$$f(z)=\frac{C-m}{(z-z_0)^m}+\frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+...+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left(C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+...+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\ \text{bu ýerde} \qquad (10.3)$$

$$\varphi(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+...+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}.$$

$\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=C_{-m}\neq 0$ bolandygy üçin

$\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty.$

(10.3) deňligi

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\ \psi(z)=\varphi(z)+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^{n+m},\ \psi(z_0)\neq 0. \quad (10.4)$$

görnüşde ýazalyň.

Teorema 10.4. Eger $f(z)$ funksiýa özüniň üzňe aýratyn z_0 nokadynyň etrabynda analitik bolup, onuň moduly $z-$iň z_0-a ymtylyş usulyna bagly bolmazdan tükeniksiz ösýän bolsa, onda z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň polýasydyr.

Subudy. Teoremanyň şertine görä islendik $A>0$ san üçin z_0 nokadyň şeýle bir ε etraby tapylyp $|f(z)|>A$ deňsizlik ýerine ýetýär. $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ funksiýa garalyň. z_0 nokadyň ε etrabynda $g(z)$ funksiýa analitikdir we $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=0$. Teorema 10.3 tassyklamasyna görä z_0 nokat $g(z)$ funksiýanyň düzeldip bolýan üzňe aýratyn nokadydyr. (19.1) deňligi ulanyp, alarys:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m\varphi(z)},\quad \varphi(z_0)\neq 0.$$

ýa-da

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},\ \psi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}-$$ analitik funksiýa.

Bu deňlikden z_0 nokadyň $f(z)$ funksiýanyň *m*-tertipli nolydygy gelip çykýar.

Mysal 10.2. $z=-1$ nokadyň $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ funksiýaňyň polýusydygyny görkeziň .

Çözülişi. Berlen funksiýa $z=-1$ nokatdan başga nokatlarda analitikdir we $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{z+1}=\infty$

w) bu ýagdaýda Loran hatary

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n(z-z_0)^n$$

görnüşi alar. Bu ýagdaýda z_0 nokada $f(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokady diýilýär.

Teorema 10.5. (Sohoskiý). Goý z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokady bolsun. Onda $\forall A$ kompleks san üçin, z_0 nokada ýygnanýan $\{z_n\}$ yzygiderlik tapylyp, $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$ deňlik ýerine ýetýändir.

Subudy. Goý, $A=\infty$ bolsun. $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\infty$ deňligi kanagatlandyrýan z_0 nokada ýygnanýan $\{z_n\}$

yzygiderlik tapylmaýar diýip guman edeliň Bu diýildigi z_0 nokadyň etrabynda $f(z)$ funksiýa çäklenen, ýagny $n \le 1$ bolanda $C_n = 0$. Bu diýildigi z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň düzeldip bolýan üzňe aýratyn nokady diýildigidir, bu bolsa teoremanyň şertine garşy gelýär.

Indi, goý, $A \ne \infty$ bolan. Eger käbir $\{z_n\}$ $(z_n \ne z_0)$ yzygiderlik üçin $f(z_n) = A$ bolsa, onda teorema subut edildigi bolardy. Şonuň üçin z_0 nokadyň käbir etrabynyň $\forall z \ne z_0$ nokatlary üçin $f(z) \ne A$ bolsun. Bu ýagdaýda $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$ funksiýa z_0 nokadyň käbir etrabynda analitikdir. z_0 nokadyň $g(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydygyny görkezeliň. z_0 nokat $g(z)$ funksiýanyň polýusy ýa-da düzeldip bolýan aýratyn nokady diýip guman edeliň.

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A} = \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)},$$ bu ýerde

$m \ge 0$ we $\varphi(z_0) \ne 0$.

ýa-da

$$f(z) - A = (z - z_0)^m \varphi(z).$$

Bu bolsa, z_0 nokadyň $f(z)$ funksiýanyň düzeldip bolan aýratyn
nokadydygyny aňladýar, teoremanyň şertine garşy gelýär. Şeýlelikde z_0 nokat $g(z)$funksiýanyň tüýs

aýratyn nokadydyr. Teoremanyň subudynyň birinji bölegine görä şeýle bir $\{z_n\}\{z_n \ne z_0\}$ yzygiderlik tapylyp $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$. Şol yzygiderlik üçin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(z_n) - A} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Teorema 10.6. z_0 nokadyň $f(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokady bolmagy üçin $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ predeliň ýok bolmagy zerur we ýeterlikdir

Bu teoremanyň subudy teorema 1 we teorema 3-den gelip çykýar.

Mysal 10.3. $z = 0$ nokadyň $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydygyny görkeziň.

Çözülişi, Goý, $z = x$ bolsun. Onda

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

eger $z = iy$ bolsa, onda

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{i^2 y^2}} = \lim_{y\to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Mysal 10.4. $z = z_0$ nokat $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiýanyň tüýs aýratyn noka-dydygyny görkezeliň

Çözülişi. $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiýany $z=z_0$ nokatda Loran hataryna dargadalyň:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}.$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly Loran hatarynyň esasy bölegi tükeniksiz köp agzany saklaýar.

Mysal 10.5. $z=\infty$ nokat $f(z)=\cos z$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydygyny görkezeliň

Çözülişi. Alarys

$$f(z)=\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Diýmek $z=\infty$ nokatda Loran hatarynyň esasy bölegi tükeniksiz köp agzalary saklaýar.

Mysal 10.6. z_0 nokadyň $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydygyny we islendik A nokat üçin teorema ýaly $\{z_n\}$ yzygiderligiň bardygyny görkezeliň.

Çözülişi. Goý, $A\neq\infty$ bolsun, onda $z_n=\frac{i}{n}$ yzygiderlik üçin alarys:

$$\lim_{n\to\infty}z_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{z_n}=-\lim_{n\to\infty}shn=\infty=A.$$

z_{n-1}

Goý, indi $A\neq 0$ bolsun. $\{z_n\}$ yzygiderligi tapmak üçin $\sin\frac{1}{z}=A$ deňlemäni çözmeklige synalyşalyň.

Alarys:

$$\frac{1}{z}=Arc\sin A=\frac{1}{i}Ln\left(iA+\sqrt{1-A^2}\right),$$

$$z=\frac{i}{Ln\left(iA+\sqrt{1-A^2}\right)}=\frac{i}{\ln\left(iA+\sqrt{1-A^2}\right)+2m\pi i},\ m=0,\pm1,....$$

$$z_n=\frac{1}{\ln\left(iA+\sqrt{1-A^2}\right)+2n\pi i}\qquad (n=1,2,..)$$

yzygiderligi alalyň, bu ýerde $\sqrt{1-A^2}$ haýsynda bolsa bir bahasy alynýar. Guran $\{z_n\}$yzygiderligimiz aşakdaky teoremanyň

$$\lim_{n\to\infty}z_n=0,\qquad f(z_n)=A,\qquad n=1,2,...$$

Diýmek

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A.$$

Mysal 10.7. $z=0$ nokadyň $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydygyny mysal 10.3-de görkezipdik. Sohoskiý teoremanyň şertini we tassyklamasyny barlamaly.

Çözüwi. $A=\infty$ bolanda $z_n=\frac{1}{n}$ diýip alarys:

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty} e^n=\infty$$

Goý, $A=0$ bolsun, onda $z_n=\frac{1}{n}$. Alarys:

$$\lim_{n\to\infty} z_n=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)=\lim_{n\to\infty} e^n=0.$$

Goý, $A=\infty$ we $A\neq 0$ bolsun. $\{z_n\}$yzygiderligi tapmak üçin

$$e^{\frac{1}{z}}=A$$

deňlemäni çözeliň. Alarys:

$$\frac{1}{z}=LnA,$$

$$z=\frac{1}{z}=\frac{1}{\ln A+2m\pi i},m=0,\pm,...$$

$$z=\frac{1}{\ln A+2n\pi i},(n=1,2,...)\text{diýip, alarys:}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)=A.$$

<u>Teorema 10.7</u> (Pikar). Eger z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokady bolsa, onda her bir $A\neq\infty$ üçin, $A=A_0$ baha üçin, kadadan çykma

bolmagy mümkin, z_0 nokada ýygnanýan dürli nokatlardan bolan yzygiderlik $f(z)=A$ deňlemäniň çözüwidir.

Bu teoremanyň subudyna aşakdaky mysallarda gözýetireliň

<u>Mysal 10.7</u> $z=\infty$ nokat $f(z)=e^z$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokadydyr.

$$e^z=A(A\neq 0)$$

deňlemäni çözeliň.

$$z_m=LnA=\ln A+i(\arg A+2m\pi),m=0,\pm1,...$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly $z=\infty$ nokadyň etrapynyň tükeniksiz köp nokadynda e^z funksiýa A deňdir. e^z funksiýa A=0 baha eýe däldir

<u>XI Bap. Wyçetler. Argument prinsipi.</u>

§ <u>11.1. Wyçetiň kesgitlenişi.</u>

<u>Wyçetleri hasaplamaklyk üçin formulalar.</u>

<u>1. Wyçetiñ kesgitlenişi</u>

Goý, $f(z)$ funksiýa $0<|z-z_0|<R$ halkada analitik bolsun. Bu funksiýany

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

Loran hataryna dargadalyň.

Kesgitleme 11.1. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\eta)d\eta$ kompleks sana $f(z)$ analitik funksiýanyň üzňe aýratyn z_0 nokadyna görä wyçeti diýilýär we $res[f(z), z_0]$ bilen belgilenýär, bu ýerde γ egri z_0 nokady öz içinde saklaýan we funksiýanyň analitik oblastsyna degişli bolan ýapyk egri.

$f(z)$ funksiýany z_0 nokadyň etrabynda Loran hataryna dagytmasynyñ koeffisiýentleri üçin formulany ulanyp

$$res[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\eta)d\eta = c_{-1} \qquad (11.1)$$

deňligi alarys.

Mysal 11.1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ funksiýanyň $z = 0$ nokada görä wyçetini tapyň.

Gözülişi. Berlen funksiýany $z = 0$ nokatda Loran hataryna dargadalyň:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

bu deňlikde $c_{-1} = 1$, diýmek $res\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1.$

Mysal 11.2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ funksiýanyň $z = 0$ nokada görä wyçetini tapyň.

Gözülişi.

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z}{7!} + \dots,$$

$$c_{-1} = \frac{1}{5!}, \text{ diýmek } res\left[\frac{\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}$$

Mysal 11.3. $f(z) = z\cos\frac{1}{z+1}$ funksiýanyň $z = 1$ nokada görä wyçetini tapyň.

Gözülişi.

$$z\cos\frac{1}{z+1} = [(z+1)-1]\left(1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \frac{1}{4!(z+1)^4} - \dots\right) =$$

$$= (z+1) - \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z+1)^2} + \dots,$$

$$c_{-1} = -\frac{1}{2}, \text{ diýmek } res\left[z\cos\frac{1}{z+1}, -1\right] = -\frac{1}{2}.$$

2. Wyçetleri hasaplamak üçin formulalar

Wyçetiň $z_0(z_0 \neq \infty)$ nokada görä başga birnäçe hasaplanyş usullaryna garalyň:

a). Goý, z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň birinji tertipli polýusy bolsun, ýagny

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Bu deňligi $(z-z_0)$ tapawuda köpeldip, soňra $z\to z_0$ predele geçip, alarys:

$$f(z)(z-z_0)=C_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^{n+1}$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=C_{-1},$$

$$res[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0). \qquad (11.2)$$

Mysal 11.4. $f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^3-z}$ funksiýanyň üzňe aýratyn nokatlaryna görä wyçetlerini hasaplaň.

Çözülişi. Ilki bilen berlen funksiýanyň üzňe aýratyn nokatlaryny tapalyň:

$$z^3-z=0\Rightarrow z(z^2-1)=0\Rightarrow z_1=0, z_2=1, z_3=-1.$$

Bu nokatlar berlen funksiýanyň birinji tertipli polýuslardyr.

(11.2) formulany ulanyp, alarys:

$$res[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+z-1}{z(z^2-1)}\cdot z\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+z-1}{z^2-1}=1,$$

$$res[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{z^2+z-1}{z(z-1)(z+1)}\cdot(z-1)\right)=\lim_{z\to -1}\frac{z^2+z-1}{z(z+1)}=\frac{1}{2},$$

$$res[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\left(\frac{z^2+z-1}{z(z-1)(z+1)}\cdot(z+1)\right)=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-1}{z(z-1)}=-\frac{1}{2}.$$

b) Goý, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ bolsun, bu ýerde $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0$.

Onda (11.2) formulany ulanyp,

$$res\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-z_0)\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

$$res\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},z_0\right]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \qquad (11.3)$$

formulany alarys.

Mysal 11.5. $z=k\pi(k=0,\pm1,...)$ nokatlarda $f(z)=ctg\, z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ funksiýanyň wyçetlerini tapmaly.

Çözülişi. (11.3) formulany ulanyp, alarys:

$$res\left[\frac{\cos z}{\sin z},k\pi\right]=\left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=k\pi}=\frac{\cos k\pi}{\cos k\pi}=1.$$

w) z_0 nokat $f(z)$ funksiýanyň $m\geq 2$ tertipli polýusy bolsun, ýagny

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+...+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Bu deňligiň iki bölegini hem $(z-z_0)^m$ köpeldip, soňra $(m-1)$ gezek differensirläp, $z\to z_0$ predele geçip, alarys:

$$(m-1)!c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left((z-z_0)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}},$$

ýa-da

$$res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left((z-z_0)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}}. \qquad (11.4)$$

Mysal 11.6. $z=i$ nokada görä $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^m}$

Funksiýanyň wyçetlerini tapyň.

Gözülişi. $z=i$ nokat berlen funksiýanyň m tertipli polýusydyr.(11.4) formulany ulanyp, alarys:

$$res\left[\frac{1}{(1+z^2)^m},i\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left((z-i)^m\cdot\dfrac{1}{(z-1)^m(z+i)^m}\right)}{dz^{m-1}}=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left((z+1)^{-m}\right)}{dz^{m-1}}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(-m(-m-1)\ldots(-m-m+\right.$$

$$\left.+2)(z+i)^{-2m+1}\right)=\frac{(-1)^{m-1}m(m+1)\ldots(2m-2)}{(m-1)!}(2i)^{-2m+1}=-i\frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Kesgitleme 11.2. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-}f(\eta)d\eta$ kompleks sana $f(z)$ funksiýanyň $z=\infty$ nokada görä wyçeti diýilýär, bu

ýerde γ ýapyk egri özüniň daşynda $f(z)$ funksiýanyň $z=\infty$ nokatdan başga aýratyn nokatlaryny saklamaýar, ýagny

$$res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-1}f(\eta)d\eta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+}f(\eta)d\eta=-c_{-1} \qquad (11.5)$$

Goý, $z=\infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli noly bolsun. Onda tükeniksiz daşlaşan nokadyň etrabynda Loran hatary

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{z^m}+\frac{c_{-(m+1)}}{z^{n+1}}+\ldots$$

görnüşi alar, bu ýerde $C_{-m}\neq 0.$ $z\to\infty$ bolanda asimptotik formulasy

$$f(z)\sim\frac{A}{z^m}\left(A=c_{-n}\neq 0\right)$$

görnüşi alar. Eger m=1 bolsa, onda $res[f(z),\infty]=-c_1=-A,$ eger $m\geq 2$ bolsa, onda $res[f(z),\infty]=0.$

Şeýlelikde

$$f(z)\sim\frac{A}{z}(z\to\infty)\Rightarrow res[f(z),\infty]=-A. \qquad (11.6)$$

$$f(z)\sim\frac{A}{z^m}(z\to\infty,m\geq 2)\Rightarrow res[f(z),\infty]=0 \quad (11.7)$$

Mysal 11 .7. $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\ldots$ funksiýa üçin $c_{-1}=1,$ diýmek $res[f(z),\infty]=-1.$

Mysal 11.8. $z=\infty$ nokat $f(z)=\dfrac{1}{z+2}\cos\dfrac{1}{z}$ funksiýanyň birinji tertipli nolydyr: $f(z)\sim\dfrac{1}{z}\,(z\to\infty)$. (20.6) formuladan $res[f(z),\infty]=-1$ deňligi alarys.

Mysal 11.9. $z=\infty$ nokat $f(z)=\dfrac{z}{z^3+1}\sin\dfrac{1}{z}$ funksiýanyň üçinji tertipli noludyr: $f(z)\sim\dfrac{1}{z^3}\,(z\to\infty)$. (20.7) formuladan $res[f(z),\infty]=0$ deňligi alarys.

§ 11.2. Wyçetler baradaky teoremalar Kesgitli integrallary hasaplamaklykda wyçetleriň ulanylyşy.

1.Wyçetler baradaky teoremalar.

Teorema 11.1. (Wyçetleriň esasy teoremasy). Goý, $f(z)$ funksiýa birbagly D oblastyñ $z_1, z_2,...z_N$ nokatlaryndan başga nokatlarynda analitik bolsun. Onda $z_1, z_2,...z_N$ nokatlary öz içinde saklaýan islendik $\gamma\subset D$ ýapyk egri üçin

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N}res[f(z),z_k] \quad (11.8)$$

deňlik dogrydyr.

Subudy. Goý, $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_N$ degişlilikde merkezi $z_1,z_2,...,z_N$ we radiuslary ýeterlik kiçi $r_1,r_2,...r_n$ bolan D oblasta degişli töwerekler bolsun. Töwerekleriň ugry sagat diliniň aýlanýan ugruna garşy edip alalyň.

Goý, $\gamma\subset D$ egri $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_N$ töwerekleri öz çinde saklaýan erkin ýapyk egri bolsun.

Şeýleikde daşyndan γ içinden $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_N$ egriler bilen çäklenen köpbagly oblastda f(z) funksiýa analitikdir. Köpbagly oblast üçin Koşi teoremasyny ulanalyñ.

$$\int_{\gamma+\sum_{K=1}^{N}\gamma_k} f(z)dz=0$$

ýa-da

$$\int_{\gamma+} f(z)dz+\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_k^-} f(z)dz=0\left(\int_{l_k^+} f(z)dz+\int_{l_k^-} f(z)dz=0,\ k=\overline{1,N}\right),$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_k} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N}res[f(z),z_k].$$

Mysal 11.10. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z+1}{(z-1)\sin z}dz$ integraly hasaplaň.

Çözülişi. Integral aşagyndaky funksiýanyň aýratyn nokatlary $z=1, z=k\pi(k=0,\pm1,...)$ aýdyňdyr. $|z|=2$

töweregiň içinde diňe $z=1, z=0$ nokatlar saklanýandyr. Şonuň üçin (21.1) furmuladan alarys:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{(z-1)\sin z}dz = 2\pi i\left(res\left[\frac{z+1}{(z-1)\sin z},0\right]\right)+res\left[\frac{z+1}{(z-1)\sin z},1\right]\Bigg) =$$

$$= 2\pi i\left(res\left[\frac{\frac{z+1}{z-1}}{\sin z},0\right]+res\left[\frac{\frac{z+1}{\sin z}}{z-1},1\right]\right) = 2\pi i\left(\frac{\frac{z+1}{z-1}}{\cos z}\Bigg|_{z=0}+\frac{\frac{z+1}{\sin z}}{1}\Bigg|_{z=0}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(-1+\frac{2}{\sin 1}\right) \approx 8{,}65i.$$

Teorema 11.2. Eger $f(z)$funksiýa ähli kompleks tekizligiň

$z_1, z_2, ..., z_{N-1}, z_N = \infty$ nokatlaryndan başga ähli nokatlarynda analitik bolsa, onda

$$\sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] = 0 \qquad (11.9)$$

dňlik dogrydyr.

Subudy. γ ýapyk egrini $z_1, z_2, ..., z_{N-1}$ nokatlary içinde saklar ýaly edip saýlap alyp, teorema 11.1. ulanyp

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N-1} res[f(z), z_k]$$

deňligi alarys. Bu deňlikden alarys:

$$-\int\limits_{\gamma-} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N-1} res[f(z), z_k]$$

ýa-da

$$2\pi i res[f(z),\infty] = 2\pi i\sum_{k=1}^{N-1} res[f(z), z_k] \Rightarrow (11.9)$$

Mysal 11.11.

$\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}dz$ integraly hasaplaň

Çözülişi. Integral aşagyndaky funksiýanyň aýratyn nokatlaryny tapalyň:

$$(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4 = 0 \Rightarrow (2z^2+1)^2 = 0, (3z^4+1)^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = -\frac{1}{2}, z^4 = -\frac{1}{3} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2}e^{i(1+2k)\pi},$$

$$z^4 = \frac{1}{3}e^{i(1+2k)\pi} \Rightarrow z_k = \sqrt{\frac{1}{2}e^{i\frac{1+2k}{2}}}\ (k=0,1), z_{3+k} = \sqrt{\frac{1}{3}e^{i\frac{1+2k}{4}\pi}}$$

$(k = 0,1,2,3)$.

Bu nokatlaryň hemmesi $|z|<1$ tegelege degişlidir. Diýmek

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4} = 2\pi i - \sum_{k=1}^{6} res\left[\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}, z_k\right]$$

Teoremanyň 2-iň tassyklamasy ulanyp,

$$res\left[\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4},\infty\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{6} res\left[\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}, z_k\right] \qquad (11.10)$$

deňligi alarys.

Bu deňlikden görnüşi ýaly bize integral aşagyndaky funksiýanyň ∞ nokada görä wyçetini tapmak ýeterlikdir

Alarys:

$$\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}=\frac{z^{21}}{2^3z^6\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^3\cdot 3^4\cdot z^6\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^4}=$$

$$=\frac{z^{21}}{648z^{22}\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^4}=\frac{1}{648z}\left(1+\frac{1}{2z^2}\right)^{-3}\left(1+\frac{1}{3z^4}\right)^{-4}=$$

$$=\frac{1}{648z}\left(1+\frac{-3}{1!}\cdot\frac{1}{2z^2}+\dots\right)\left(1+\frac{-4}{1!}\cdot\frac{1}{3z^4}+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{648z}\left(1-\frac{3}{2z^2}+\dots\right)=\frac{1}{648z}-\frac{1}{432}\cdot\frac{1}{z^2}+\dots,$$

$$C_{-1}=\frac{1}{648}\Rightarrow res\left[\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4},\infty\right]=-\frac{1}{648}.$$

Bu deňligi göz öňüne tutup, (11.10)-den alarys:

$$\int_{|z|=1}\frac{z^{21}}{(2z^2+1)^3(3z^4+1)^4}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{648}=\frac{\pi i}{324}$$

2. Kesgitli integraly hasaplamaklykda wyçetleriñ ulanylyşy

$$I=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi \qquad (11.11)$$

görnüşli integrala garalyň.

Berlen integrala $z=e^{i\varphi}$ ornunda goýmany ulanalyň. Alarys:

$$dz=ie^{i\varphi}d\varphi,\ d\varphi=-i\frac{dz}{z},\ \cos\varphi=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \qquad (11.12)$$

Eger φ argument 0-dan $2\pi-e$ çenli üýtgese $z-$ululyk $|z|=1$ töwerekde üýtgeýär (özem položitel ugur boýunça).

(11.11) integral

$$I=\int_{|z|=1}R_1(z)dz$$ görnüşi alar, bu ýerde

$$R_1(z)=-\frac{i}{z}R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]-\text{rasional}$$

funksiýa .

Teorema 11.1. ulanyp, alarys

$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res[R_1(z), z_k]$, bu ýerde $z_1, z_2, ..., z_n$ – nokatlar $R_1(z)$ rasional funksiýanyň $|z| < 1$ tegelekdäki polýuslary

Mysal 11.12. $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos\varphi}$ integraly hasaplaň.

Çözülişi. $z = e^{i\varphi}$ ornunda goýmany ulanalyň. (11.12) peýdalanyp, alarys:

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

Integral aşagyndaky funksiýanyň polýuslaryny tapalyň.

$$z^2 + 4z + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -2 + \sqrt{3},\ z_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Bulardan diňe z_1 nokat $|z| < 1$ tegelege degişlidir. (11.1) formulany ulanyp, alarys:

$$I = -2i \cdot 2\pi i\, res\left[\frac{1}{z^2 + 4z + 1}, z_1\right] = -4\pi i \cdot \left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=z_1} = \frac{4\pi}{2} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{3}+2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

3. Käbir kesgitsiz integrallary hasaplamaklykda wyçetleriň ulanylyşy.

1. Bu bölümçede

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

görnüşli integrala garalyň.
Ilki bilen aşakdaky lemmany subut edeliň

Lemma 11.1. Eger $f(z)$ funksiýa $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizligiň $z_1, z_2, ..., z_N$ nokatlaryndan başga nokatlarynda analitik bolup, $\forall |z| > R$ nokatlar üçin $|f(z)| < M / |z|^{1+\delta}$ ($M, \delta > 0$ hemişelikler) deňsizlik ýerine ýetýän bolsa, onda $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(\eta)d\eta = 0,$ bu ýerde $C_R - \operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlikdäki $|z| = R$ ýarym töwerek.

Subudy. $\int_{C_R} f(\eta)d\eta -$integrala $\eta = \mathrm{R}e^{i\varphi}$ belgilemäni girizip alarys:

$$\left|\int_{C_R} f(\eta)d\eta\right| = \left|\int_0^{\pi} f(\mathrm{R}e^{i\varphi})Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \le \int_0^{\pi} \left|f(\mathrm{R}e^{i\varphi})Rie^{i\varphi}\right| d\varphi < \frac{RM}{R^{1+\delta}} \int_0^{\pi} d\varphi = \frac{M\pi}{R^{\delta}}.$$

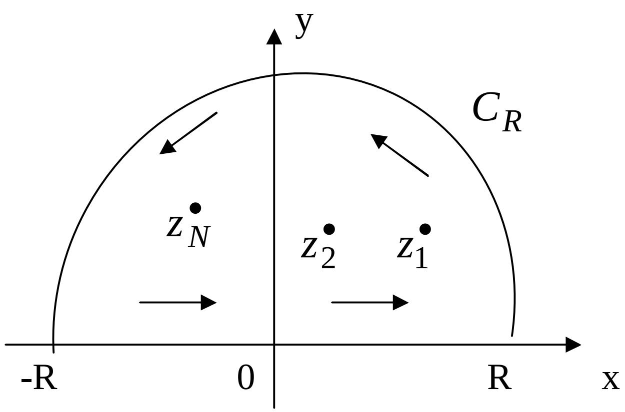
Bu deňsizlikden, lemma 1-iň tassyklamasyny alarys.

Teorema 11.3. Eger $f(x)$ funksiýa $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlige analitik dowam etdirilen bolup, analitik dowam etdirilen $f(z)$ funksiýa lemma 1-iň şertlerini kanagatlandyrýan bolsa, onda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] \qquad (11.13)$$

deňlik dogrydyr.

Subudy. $C_R^+ + [-R, R]$ ýarym bölek endigan egri öz içinde $z_1, z_2, ..., z_N$ üzňe aýratyn nokatlary öz içinde saklar ýaly $R-i$ ýeterlik uly edip saýlap alalyň. Teorema 1-iň tassyklamasyny ulanyp,



39-njy surat

$$\int_{C_R^+ + [-R,R]} f(\eta)d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$$

deňligi alarys. Bu deňligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\int_{C_R^+} f(\eta)d\eta + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k],$$

$R \to \infty$ bolanda lemma 1-iň tassyklamasyny ulanyp, (21.6) formulany alarys.

Mysal 11.13. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$ integraly hasaplaň.

Çözülişi: Integral aşagyndaky funksiýa drob rasional funksiýa bolup, teorema 1-iň hemme şertleri ýerine ýetýär, şonuň üçin (21.6) formulany ulanyp bolýar. Integral aşagyndaky funksiýanyň $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlige analitik dowam etdirilen $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ – funksiýanyň aýratyn nokatlaryny tapalyň:

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow \quad z_k = \sqrt[6]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \left(k = \overline{0,5}.\right)$$

Bu ýerden görnüşi ýaly $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ nokatlar $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlige degişli.

(21.6) formulany ulanyp, alarys;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} res\left[\frac{1}{z^6+1}, z_k\right] = 2\pi i\left(\frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{z_2^5}\right) =$$

$$= \frac{2\pi i}{6}\left(\frac{z_0}{z_0^6} + \frac{z_1}{z_1^6} + \frac{z_2}{z_2^6}\right) = \frac{\pi i}{3}(z_0 + z_1 + z_2) = \frac{\pi i}{3}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + 0 + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Bellik 11.1. Eger $f(x)$ jübüt funksiýa bolsa, onda (11.3) formula

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{N} res\left[f(z), z_k\right]$$

görnüşi alar.

Bellik 11.2. Teorema 11.3-e meňzeşlikde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left[f(z), z_k\right] \quad \left(z_k \in \operatorname{Im} z < 0, k = \overline{1, N}\right)$$

formulany subut edip bolýar.

2. Indi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$$

görnüşli integrala garalyň.

Lemma 11.2. (Žordan). Goý, $\alpha > 0$ bolup, aşakdaky şertler ýerine ýetýän bolsun:

1) $f(z)$ funksiýa $\operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \geq R_0 > 0$, oblastda üznüksiz;

2) $R \to \infty$ bolanda $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |f(z)| \to 0,$

bu ýerde $C_R - |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0$ ýarym töwerek. Onda

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0 \qquad (11.14)$$

Subudy. Goý, $z \in C_R,\ R > R_0.$ Onda $z = \operatorname{Re}^{i\varphi}$,

$0 \leq \varphi \leq \pi, dz = i \operatorname{Re}^{i\varphi} d\varphi,$

$$\left|e^{i\alpha z}\right| = \left|e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}\right| = e^{-\alpha R \sin\varphi}.$$

$\sin\varphi -$funksiýanyň $\varphi = \frac{\pi}{2}$ şöhlä görä simmetrikligini we $\sin \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ deňsizligi ulanyp, alarys;

$$\left|\int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{i\alpha(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)} f\left(\operatorname{Re}^{i\varphi}\right) Rie^{i\varphi} d\varphi\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin\varphi} \left|f\left(\operatorname{Re}^{i\varphi}\right)\right| Rd\varphi \leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2R\sin\varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq 2RM(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = -2RM(R) \frac{\pi}{2\alpha R}\left(e^{-\alpha R} - 1\right) =$$

$$= \frac{M(R)\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \leq \frac{\pi}{\alpha} M(R).$$

Bu deňsizlikden (11.14) deňlik gelip çykýar.

(11.13) deňlikden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left[e^{i\alpha z} f(z), zk\right] \qquad (11.16)$$

deňlik gelip çykýar, bu ýerde $z_1, z_2, ..., z_N$ nokatlar $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlikdäki $f(z)$ funksiýanyň aýratyn nokatlary.

Bellik 11.3. Eger $\alpha < 0$ bolsa C_R ýarym töwerege hakyky oka görä simmetrik bolan ýarym töwerek bilen çalşyryp

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{N} res\left[e^{i\alpha z} f(z), zk\right]$$

deňligi alarys, bu ýerde $z_1, z_2, ..., z_N$ nokatlar $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlikdäki $f(z)$ funksiýanyň aýratyn nokatlary.

Bellik 11.4. Hakyky üýtgeýän argumentli hakyky $f(z)$ funksiýa we $\alpha > 0$ bolanda (21.8) formuladan alarys:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx = -2\pi \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{N} res\left[e^{i\alpha z} f(z), z_k\right], \quad (11.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 2\pi \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{N} res\left[e^{i\alpha z} f(z), z_k\right].$$

Mysal11.4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}dx$ integraly hasaplaň.

Çözülişi. $f(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+5}$ funksiýanyň üzňe aýratyn nokatlaryny tapalyň.

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

$z_1 = 1 + 2i$ nokat $\operatorname{Im} z > 0$ ýarym tekizlige degişlidir. (21.9) formulany ulanyp, alarys:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2-2x+5}dx = -2\pi \operatorname{Im}\left(res\left[e^{i5z}\frac{z-1}{z^2-2z+5}, z_1\right]\right) =$$

$$= -2\pi \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i5z}(z-1)}{(z^2-2z+5)'}\right]\Bigg|_{z=1+2i} = -2\pi \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i5z}(z-1)}{2z-2}\right)\Bigg|_{z=1+2i} =$$

$$= -2\pi \operatorname{Im}\frac{e^{i5(1+2i)}(1+2i-1)}{2(1+2i-1)} = -\pi \operatorname{Im} e^{-10+5i} =$$

$$= -\pi \operatorname{Im}\left(e^{-10}(\cos 5 + i\sin 5)\right) = -\pi e^{-10}\sin 5.$$

§ 11.3 Logarifmik wyçet. Argument prinsipi. Ruşe teoremasy

1. Logarifmik wyçet

$[Lnf(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ aňlatma $f(z)$ funksiýanyň logarifmik önümi diýilýär. Logarifmik önümiň $z = z_0$ nokatdaky wyçetine $f(z)$ funksiýanyň bu nokatdaky logorifmik wyçeti diýilýär. Eger $f(z)$ funksiýa $z = z_0$ nokatda analitik bolsa, onda bu nokatda $f'(z)$-analitikdir; eger $z = z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň noly bolmasa, onda bu funksiýanyň logarifmik önümi bu nokatda analitikdir. $f(z)$ funksiýanyň nollary $\frac{f'(z)}{f(z)}$ funksiýanyň polýuslarydyr. Hakykatdan-da, goý $z = z_0$

nokat $f(z)$ funksiýanyň n tertipli noly bolsun, ýagny $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$, bu ýerde $\varphi(z)$ funksiýa $z=z_0$ nokatda analitik we $\varphi(z_0)\neq 0$. Alarys:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z)+(z-z_0)^n\varphi'(z)}{(z-z_0)^n\varphi(z)}=\frac{n}{z-z_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},\varphi(z_0)\neq 0 \quad (11.18)$$

Bu deňlikden görnüşi ýaly $z=z_0$ nokat logarifmik önümiň birinji tertipli polýusydyr.

Eger $z=z_1$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli polýusy bolsa, ýagny $z=\frac{\psi(z)}{(z-z_1)^m}\psi(z_1)\psi\neq 0$, onda

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\dfrac{\psi'(z)(z-z_1)^m-m(z-z_1)^{m-1}\psi(z)}{(z-z_1)^{2m}}}{\dfrac{\psi(z)}{(z-z_1)^m}}=-\frac{m}{z-z_1}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)},\psi(z_1)\neq 0. \quad (11.19)$$

Diýmek $f(z)$ funksiýanyň polýusy $\frac{f'(z)}{f(z)}$ funksiýanyň birinji tertipli polýusydyr. (11.18), (11.19) deňliklerden görnüşi ýaly:

1) eger $z=z_0$ nokat $f(z)$ funksiýanyň n tertipli noly bolsa, onda

$$res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_0\right]=n; \quad (11.20)$$

2) eger $z=z_1$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli polýusy bolsa, onda

$$res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_1\right]=-m. \quad (11.21)$$

Teorema 11.4 Eger $f(z)$ funksiýa D oblastyñ tükenikli sany nokatlaryndan başga nokatlarynda analitik bolsa, onda bu nokatlary öz içinde saklaýan islendik ýapyk $\gamma\subset D$ egri üçin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P \quad (11.22)$$

formula dogrydyr, bu ýerde N we P degişlilikde D oblastdaky $f(z)$ funksiýanyň nollarynyň, polýuslarynyň sany.

Subudy. Goý, $a_1,a_2,...,a_R^{\in D}$ nokatlar degişlilikde $f(z)$ funksiýanyň $n_1,n_2,...n_R$ tertipli noly bolsunlar. $b_1,b_2,...b_l\in D$ nokatlar degişlilikde $f(z)$ funksiýanyň $P_1,P_2,...P_l$ tertipli polýuslary bolsunlar. Onda wyçetin esasy teoremasyny we (11.20), (11.21) formulalary ulanyp, alarys:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{n} res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_n\right]=\sum_{n=1}^{k} res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a_n\right]-\sum_{n=1}^{l} res\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b_n\right]=$$

$$=n_1+n_2+...+n_k-P_1-P_2-...-P_l=N-P.$$

<u>Netije 11.1.</u> Eger $f(z)$ funksiýa $\overline{D}-D+\Gamma$ oblastda analitik we Γ egriniň hiç bir nokadyndan–da deň däl bolsa, onda bu funksiýanyň D oblastdaky nollarynyň sany.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \text{ deňdir.}$$

Hakykatdan–da $P=0$ bolanda (11.22) –den

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N \qquad (11.23)$$

deňligi alarys (γ –ornuna Γ –goýluşy aýdyňdyr).

<u>2.Argument prinsipi. Kuşy teormasy</u>

<u>Netijede 11.2.</u> Teorema 11.4-iň ähli şertleri ýerine ýetende (11.22) deňligi

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\arg f(z)=N-P \qquad (11.24)$$

görnüşde ýazyp bolýar.

<u>Subudy.</u> Şerte görä $f(z)$ funksiýa γ egriniň z nokadynyň käbir etrapynda $f(z)\neq 0.$

Alaryş:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}dLnf(z)=\frac{1}{2\pi i}\Delta_{\gamma}Lnf(z), \qquad (11.25)$$

bu ýerde $\Delta_{\gamma}Lnf(z)-Lnf(z)$ funksiýanyň z nokadyň γ egriniň položitel ugry boýunça aýlanmagyndaky artdyrmasy.

$\Delta_{\gamma}\ln|f(s)|=0$ göz öňüne tutup,

$$\Delta_{\gamma}Lnf(z)=\Delta\gamma\ln|f(z)|+i\Delta_{\gamma}\arg f(z)$$

deňlikden

$$\Delta_{\gamma}Lnf(z)=i\Delta\arg f(z)$$

deňligi alarys. Bu deňligi göz öňüne tutup (11.25) deňlikden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma}\arg f(z)$$

deňligi alarys. (22.5) deňligi göz öňünde tutup, soňky deňlikden (11.24) formulany alarys.

(11.24) formula argument prinsipi diýilýär.

Teorema 11.5. **(Ruşe).** Goý, $f(z), g(z)$ funksiýalar çäklenen birbagly D oblastda analitik bolup, ol oblastnyň γ çäginiň ähli nokatlarynda

$$|f(z)| > |g(z)|. \qquad (11.25)$$

deňsizlik ýerine ýetýän bolsun. Onda D oblastda $f(z)$ we $F(z) = f(z) + g(z)$ funksiýalaryň nollarynyň sany özara deňdir.

Subudy. (11.25) şertden, $\forall z \in \gamma$ üçin $f(z) \neq 0$ gelip çykýar. Mundan başga

$$|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \Rightarrow F(z) \neq 0, \quad \forall z \in \gamma .$$

N_F we N_f bilen degişlilikde $F(z), f(z)$ funksiýalaryň D oblastdaky nollarynyň sanyny belgiläliň. $P = 0$ bolanda (11.24) formulany ulanyp

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg F(z) \qquad (11.26)$$

deňligi alarys. $\forall z \in \gamma$ üçin $f(z) \neq 0$ şerti ulanyp alarys:

$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Onda

$$\Delta_\gamma \arg F(z) = \Delta_\gamma \arg f(z) + \Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right). \qquad (11.27)$$

Bu deňligiň sag bölegindäki ikinji goşulyjynyň nola deňdigini görkezeliň. Hakykatdan-da, $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ funksiýanyň grafigi z nokat γ egri boýunça hereket edende $|w - 1| < 1$ tegelegede degişli bolan ýapyk γ egrini emele getirer Bu egri $z = 0$ nokadyň daşyndan aýlanmaýar. Şonuň üçin

$\Delta_\gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$ bolar. Bu deňligi göz öňüne tutup (11.27)-den alarys:

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg F(z) = \frac{1}{2\pi} \arg f(z) = N_f .$$

Mysal 11. 5. $|z| < 1$ tegelekde

$$z^9 - 6z^4 + 3z - 1 = 0$$

deňlemäniň kökleriniň sanyny tapyň.

Çözülişi. $f(z) = -6z^4, \quad g(z) = z^9 + 3z - 1$ belgilemeleri girizeliň. Bu ýerde $\gamma : |z| = 1$, onda

$$\left|f(z)\right| = 6|z|^4 = 6, \left|g(z)\right| = \left|z^9 + 3z - 1\right| \le |z|^9 + 3|z| + 1 = 5,$$

$\forall z \in \gamma$ üçin $\left|f(z)\right| > \left|g(z)\right|$.

Ruşe teoremasyna görä berlen deňlemäniň $|z| < 1$tegelekdäki kökleriniň sany $f(z) = -6_z^4 = 0$ deňlemäniň kökleriniň sanyna deňdir, ýagny 4 sany köki bardyr. **<u>Teorema 11.6.</u> (Algebranyň esaslary teoremasy).** Kompleks koeffisiýentli n derejeli köpagzanyň nollarynyň sany *n*-e deňdir.

<u>Subudy.</u> Goý,

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \left(a_0 \ne 0\right)$$

bolsun.

$$f(z) = a_0 z^n, g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

belgilemeli

girizeliň. Onda

$P_n(z) = f(z) + g(z) = F$ bolar.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{ff(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{n-1}\left(a_1 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-2}} + \frac{a_n}{z^{n-1}}\right)}{a_0 z^n} = 0$$

bolýandygy üçin şeýle bir $R > 0$ tapylyp $|z| \ge R$ deňsizligi kanagatlandyrýan $\forall z$ üçin

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

deňsizlik ýerine ýetýändir. γ egriniň ornuna $|z| = R$ töweregi alsak, onda $f(z) = a_0 z^n$ funksiýanyň $|z| < R$tegelekde n sany noly bardyr. Diýmek

$$N_F = N_{p_n} = n.$$

<u>XII Bap. Analitik dowam etdirme</u>

§12.1. <u>Gös-göni analitik dowam.</u>

<u>Derejeli hatarlaryň kömegi bilen dowam.</u>

<u>Riman üsti barada düşünje.</u>

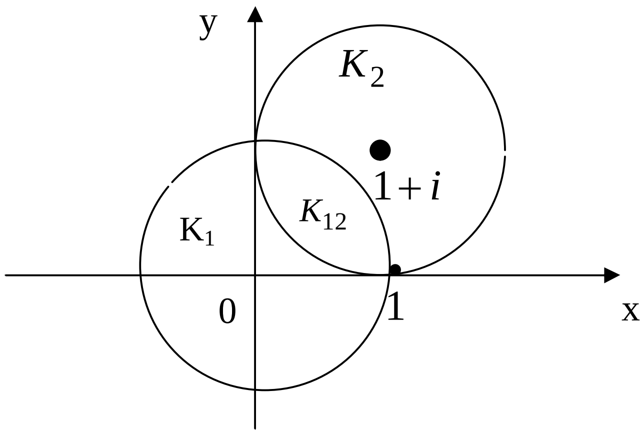
Ilki bilen aşakdaky mysala garalyň:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad f_2(z) = i\sum_{n=0}^{\infty}\left[i(z - 1 - i)\right]^n$$

funksiýalar degişlilikde $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ we $K_2 = \{z : |z-(1+i)| < 1\}$ tegelekde analitikdir. Bu tegelekleriň umumy $K_{12} = K_1 \cap K_2$ böleginde

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad f_2(z) = \frac{i}{1-i(z-1-i)} = \frac{1}{1-z}$$

bolar. Şonuň üçin $K_1 \cup K_2$ oblastda kesgitlenen bir analitik funksiýa hakynda gürrüň ederis. Ol funksiýa $\frac{1}{1-z}$ $-$dir.



40-njy surat

Kesgitleme 12.1. Eger :

1) $f(z)$ funksiýa D oblastda kesgitlenen;
2) $F(z)$ funksiýa D oblasty özünde saklaýan G oblastda analitik;
3) $\forall z \in D$ üçin $f(z) = F(z)$,

şertler ýerine ýetse, onda F funksiýa f funksiýanyň D oblastdan G oblastda analitik dowamy diýilýär.

Funksiýanyň analitik dowamyny başgaça aşakdaky ýaly düşündireliň.

Goý, $f_1(z)$, $f_2(z)$ funksiýalar degişlilikde D_1 we D_2 oblastlarda analitik bolsunlar. Goý, $D_{12} = D_1 \cap D_2$ (D_{12} $-$ käbir oblast ýa-da egri) bolsun. Eger $f_1(z)$ we $f_2(z)$ funksiýalar D_{12} oblastda gabat gelseler, onda

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & eger\ z \in D_1, \\ f_2(z), & eger\ z \in D_2'', \end{cases}$$

funksiýa $D = D_1 \cup D_2$ oblastda analitikdir. Bu oblastda $F(z)$ funksiýa $f_1(z)$ $(f_2(z))$ funksiýanyň D oblast analitik dowamy diýilýär.

Başgaça, $f_2(z)$ $(f_1(z))$ funksiýa $f_1(z)$ $(f_2(z))$ funksiýanyň D_2 (D_1) oblast analitik dowamy diýilýär.

$f_1(z)$ $(f_2(z))$ funksiýanyň D oblast analitik $F(z)$ dowamy ýeketäkdir. Hakykatdan-da, goý D_1 oblastda $f_1(z)$ deň bolan iki analitik dowamy bar bolsun diýeliň. Bu bolsa geçen mowzukdaky analitik funksiýanyň ýeke-täklik teoremasyna garşy gelýär. Şeýlelikde analitik dowam ýeke-täkdir.

$e^z, \sin z, \cos z, \ln z$ funksiýalar hakyky okda kesgitlenen, degişlilikde $e^x, \sin x, \cos x, \ln x (x > 0)$ funksiýalaryň kompleks tekizligine analitik dowamydyr.

Eger $f_1(z)$ we $f_2(z)$ funksiýalar degişlilikde D_1, D_2 oblastlarda kesgitlenen bolup, $D_{12} = D_1 \bigcap D_2$ oblastnyň ähli nokatlarynda gabat gelmän, olaryň böleginde gabat gelsinler. Bu oblastda analitik dowam dürli bolar. Mysal üçin, goý $f_1(z)$ we $f_2(z)$ funksiýalaryň D'_{12} oblastda gabat gelip, D''_{12} oblastda dürli bahalary eýe bolsunlar.

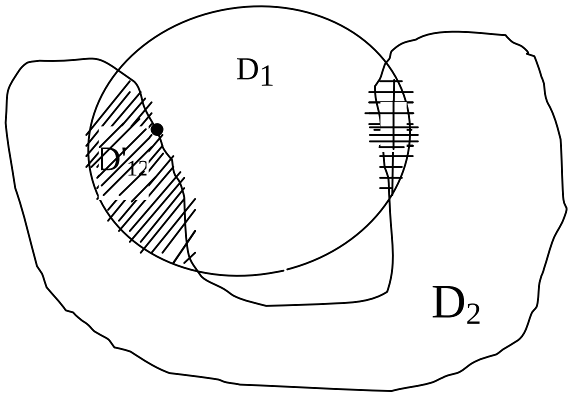
$\hat{D} = (D_1 \bigcup D_2)/D''_{12}, D''_{12} = D_{12}/D'_{12}$ belgilemeleri girizeliň. Őňden belli bolşy ýaly $\hat{D}$ oblastda D_1/D''_{12} oblastda kesgitlenen $f_1(z)$ funksiýanyň $\hat{F}(z)$ analitik dowamy bardyr, şunlukda $\forall z \in D_1/D'_{12}$ üçin $\hat{F}(z) = f_1(z)$ we $\forall z \in D_2/D'_{12}$ $\hat{F}(z) = f_2(z)$

$\hat{F}(z)$funksiýa aşakdaky iki usul bilen D oblast analitik dowam etdirilýär

$$F_1(z) = \begin{cases} \hat{F}(z), & eger\, z \in \hat{D}, \\ f_1(z), & eger\, z \in D''_{12}, \end{cases}$$

ýa-da

$$F_2(z) = \begin{cases} \hat{F}(z), & eger\, z \in \hat{D}_{11}, \\ f_2(z), & eger\, z \in D''_{12} \end{cases}$$



41-nji surat

D oblastda köpbahaly analitik F(z) funksiýa seretmeklik zerurlygy ýüze çykýar, ýagny $D''_{12} \subset D$ oblastnyň şol bir nokadynda dürli bahalara eýe bolýan funksiýa. Bu ýagdaýda şol bir $z_0 \in D''_{12}$ nokatda $f_1(z_0)$ we $f_2(z_0)$ bahalara eýe bolýan ikibahaly $F(z)$funksiýa seretmeli.

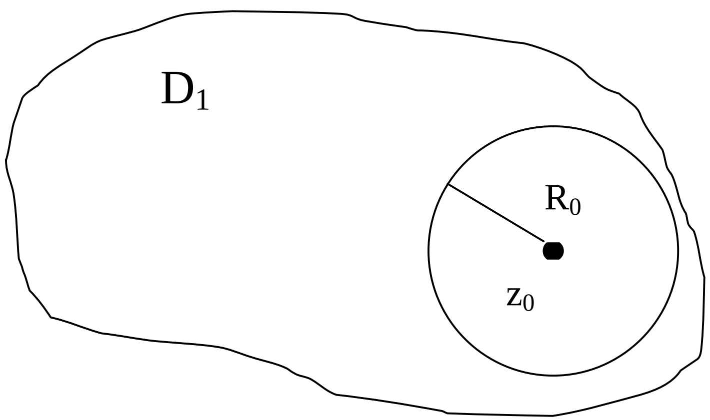
Şonuň üçin D_1 we D_2 oblastlaryň umumy D'_{12} oblastsyny ýelimläliň. Şeýlelikde biz D''_{12}oblast biri-biriniň üstünde ýerleşen adaty däl oblast alarys. Alnan oblastda $F(z)$ funksiýa birbahaly funksiýadyr. Bular ýaly oblast Riman üsti diýilýär. Şeýlelikde $F(z)$ analitik funksiýa $f_1(z)$ $(f_2(z))$ funksiýanyň analitik dowamy bolar.

Goý, $f_1(z)$ funksiýa D_1 oblastda analitik bolsun. Bu funksiýany $z_0 \in D_1$ nokatda

D''12

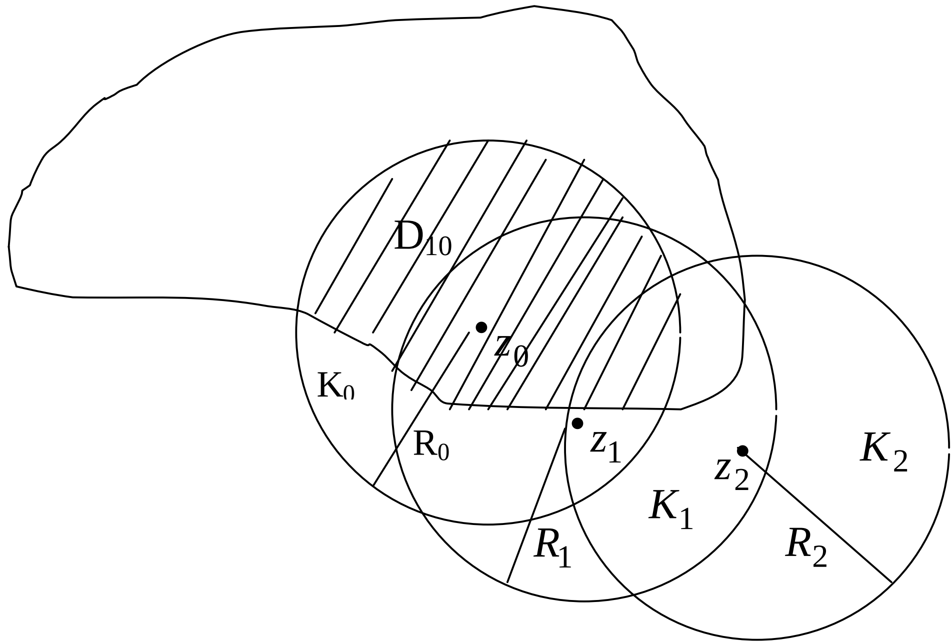
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad (12.1)$$

derejeli hatara dargadalyň. Bu hatar üçin iki ýagdaýyň bolmagy mümkin. Birinji ýagdaýda R_0 ýygnanma radiusy z_0 nokatdan D oblastnyň çägine çenli uzaklykdan kiçi, ýygnanma tegelegi D oblastnyň bölek oblastsy.



42-nji surat

Ikinji ýagdaý R_0 ýygnanma radiusy radiusy z_0 nokatdan D oblastyñ çägine çenli uzaklykdan uly. Bu ýagdaýda $K_0 = \{z : |z - z_0| < R_0\}$ oblastda D oblastnyň bölek oblastsy bolmaz K_0 tegelekde (1) hatar ýygnanyp, onuň $f_2(z)$ jemi bu tegelekde analitikdir we $\forall z \in D_{10} = D_1 \bigcap K_0$ üçin $f_2(z) = f_1(z)$.

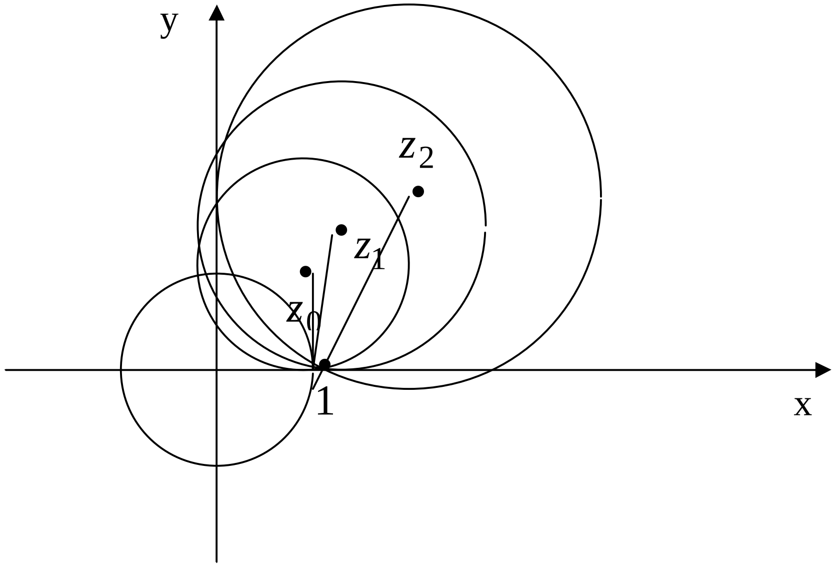


43-nji surat

Bu ýagdaýda $f_2(z)$ funksiýa $f_1(z)$ funksiýanyň D_{10} oblastdan K_0 oblasta analitik dowamydyr. $D = D_1 \bigcup K_0$ oblastda aşakdaky funksiýany kesgitläliň:

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), \ \ eger \ z \in D_1, \\ f_2(z), \ \ eger \ z \in K_0, \end{cases}$$

Soňra $f_2(z)$ funksiýany $z_1 \in K_0$ nokatda derejeli hatara ýokarky usuly ulansak K_1 tegelegi alarys. Bu usuly dowam etdirip, $K_0, K_1, ..., K_n, ...$ zynjyr



44-nji surat

oblastlarda $f_1(z)$ funksiýanyň analitik dowamyny alarys. Eger $F(z)$ analitik dowam köpbahaly bolsa, ony Riman üstüni gurup, birbahaly edip bolýandygy bize aýdyňdyr.
Mysala garalyň:

$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $|z| < 1$ tegelekde ýygnanýar we

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (12.2)$$

hatar boljakdygy aýdyňdyr.
$|z| < 1$ tegelegiň daşynda (16.2) hatar dargaýar, diýmek $f_1(z)$ funksizyanyň $|z| < 1$ tegelegiň daşynda kesgitlenmedik. Goý, z_0 nokat $|z| < 1$ tekizligiň käbir nokady bolsun we ol nokadyň etrabynda $f_1(z)$ funksiýany $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ hatara dargadalyň bu ýerde $C_n = \frac{f_1^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{(1-z_0)}$ deň. Eger z_0 hakyky okda bolmasa $|z - z_0| < |1 - z_0|$ tegelekden çykýar.
Diýmek $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$ funksiýa $f_1(z)$ funksiýanyň $|z - z_0| < |1 - z_0|$ oblasta dowamydyr. Alarys:

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0} \right)^n = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}} = \frac{1}{1-z}.$$

$f_2(z)$ funksiýany $|z-z_0|<|1-z_0|$ tegelegiň z_1 nokadynyň etrabynda dargadalyň. Şeýlelikde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}}$$ hatary alarys we ýygnalma oblast $|z-z_0|<|1-z_1|$ deň bolup

$$f_3(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}}$$

$f_3(z),\ f_2(z),\ f_1(z)$ funksiýalar

$|z|<1,\ |z-z_0|<|1-z_0|,\ |z-z_1|<|1-z_0|$

tegelekleriň umumy nokatlarynda gabat gelýär. Şeýlelikde $f_3(z)$ funksiýanyň $|z-z_1|<|1-z_1|$ tegelekde analitik dowamydyr. Täze oblasta $z=1$ nokatdan geçýär. Bu usuly dowam etdirip $f_1(z)$ funksiýany ähli kompleks tekizligine dowam etdirip bolýar. Ol tegelekleriň çägi $z=1$ nokatdan geçýär. Ol tekizlikleriň çägi $z=1$ nokatdan geçýär. Diýmek $F(z)=\dfrac{1}{1-z}$ funksiýa $f(z)$ funksiýa $z=1$ nokatdan başga ähli nokatlarda kesgitlenen analitik dowamydyr.

XIII Bap. Bitin we meromorf funksiýalar

§13.1. Bitin we meromerf funksiýalar.

Kesgileme 13.1. Ähli kompleks tekizliginde birbahaly we analitik bolan funksiýa bütin funksiýa diýilýär.

Şonuñ üçin bitin funksiýany kompleks tekizliginde derejeli hatara dargadyp bolýar, ýagny

$f(z)=c_0+c_1z+\ldots$ (1),

bu ýerden Koşi-Adamar formulasyny ulanyp, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$ deñligi alarys.

Köpagza, e^z funksiýalar bitin funksiýalara mysal bolup biler.

Teorema13.1. Goý, $f(z), g(z)$ bütin funksiýalar bolsunlar.Onda $f(z)\pm g(z),\ f(z)g(z),\ f(g(z))$ funksiýalar hem bitin funksiýalardyr.

Bu teoremanyň subudy bitin funksiýanyň kesgitlemesinden analitik funksiýalaryñ häsiýetlerinden gelip çykýar.

$\sin z, \cos z, shz, chz$ funksiýalary derejeli hataryň jemi görnüşinde ýazalyň:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

$$shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

Bu hatarlar islendik z üçin ýygnanýar, onda $\sin z, \cos z, shz, chz$ funksiýalar bütin funksiýalardyr. Mundan başga $\sin z, \cos z, shz, chz$ funksiýalar degişlilikde $\sin x, \cos x, shx, chx$ funksiýalaryň hakyky okdan kompleks tekizligine analitik dowamydyr.

Teorema 13.2. (Liuwill). Goý, bütin

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

unksiýa, $|z| > R,$ oblastda

$$|f(z)| \le M|z|^n \quad (n \ge 0\text{-bütin san}) \qquad (13.1)$$

deňsizligi kanagatlandyrýan bolsun. Onda $f(z)$ funksiýa tertibi n–den ýokary bolmadyk köpagzadyr.

Subudy. c_k koeffisiýent üçin formulany ulanyp, alarys:

$$|c_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{M|z|^n}{|z|^{k+1}}|dz| = \frac{M\cdot R^n}{2\pi R^{k+1}}2\pi R = MR^{n-k}, k=1,2... \qquad (13.2)$$

bu ýerde $R > R_1$. R ýeterlik uly bolmanda, $k > n$ bolsa (13.2)-den $c_k = 0$ boljakdygy gelip çykýar.

Şeýlelikde $c_{n+1} = c_{n+2} = ... = ... = 0,$ ýagny $f(z)$ funksiýa derejeli n-den uly bolmadyk köpagza

Netije 13.1. Eger bütin $f(z)$ funksiýa ähli kompleks tekizliginde çäklenen bolsa, onda ol hemişelikdir.

Hakykatdan-da (13.1) deňsizlikde $f(z)$ funksiýanyň çäklenen bolmagy üçin $n = 0$ bolmaly. $R > 0$ bolanda $c_k = 0$ bolar, $C_0 \ne 0$

Bu hatar tükeniksiz daşlaşan nokatda Loran dargatmasyny emele getirýär. Eger $z = \infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň dogry nokady bolsa, onda $C_1 = C_2 = ... = C_n = ... = 0$ we $f(z) = C_0$ bolar. Diýmek $f(z)$ funksiýa bütin kompleks tekizliginde çäklenen, Liuwill teoremasyna görä ähli kompleks tekizliginde $f(z) \equiv const.$

Eger $z = \infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň m tertipli polýusy bolsa, onda

$$C_m \ne 0, \qquad C_{m+1} = C_{m+2} = ... = 0$$

bolar. Diýmek

$f(z) \equiv C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ... + C_m z^m$ bolar, ýagny $f(z) - m$ tertipli köpagza.

Eger $z = \infty$ nokat $f(z)$ funksiýanyň tüýs aýratyn nokady bolsa, onda hataryň noldan tapawutly tükeniksiz köp koeffisiýentli bolar. Bu ýagdaýda $f(z)$ funksiýa bütin transsendent funksiýa diýilýär. Bular ýaly funksiýa mysal edip $e^z, \sin z, \cos z, ...$ funksiýalary görkezmek bolar.

Teorema 13.3. (algebranyň esasy teoremasy).

Islendik

$$P_n(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + ... + C_n z^n (C_n \ne 0, n \ge 1)$$

köpagzanyň iň bolmanda bir noly bardyr.

Subudy. Tersine guman edeliň, goý, $P_n(z)$ köpagzanyň noly ýok bolsun. Onda $g(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}$ bütin funksiýadyr. $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0,$ diýmek $g(z)$ funksiýa ähli kompleks tekizliginde çäklenendir. Netijede 13.1-den $g(z)=const$ bolýandygy gelip çykýar. Bu bolsa $g(z)$ funksiýanyň kesgitlemesinde ters gelýär. Şeýlelikde $P_n(z)$ köpagzanyň iň bolmanda bir noly bardyr.

Butin funksiýanyň umumy haly bolan meromorf funksiýany kesgitläliň

Kesgitleme 13.2. Eger $f(z)$ funksiýanyň her bir çäklenen kompleks tekizliginiñ böleginde analitik bolsa, tükenikli sany polýusy bolmagy mümkin, onda ol funksiýa meromorf funksiýa diýilýär.

Ahli kompleks tekizliginde meromorf funksiýanyň polýuslarynyň sany
tükeniksiz sany bolmagy mümkin. Muňa $ctgz, \dfrac{1}{\sin z}, \dfrac{1}{e^z-1}$ funksiýalar mysal bolup biler. Her bir rasional funksiýa memort funksiýa bolup onuň ähli kompleks tekizliginde tükenikli sany polýusy bardyr. Muňa ters tassyklama-da dargydyp, ýagny:

Teorema13.4 Ähli giňeldilen kompleks tekizliginde tükenikli sany $z_1, z_2, ..., z_s$ ($z=\infty$ nokat polýus bolup bilýä) polýusy bolan meromorf $f(z)$ funksiýa rasional funksiýalardyr we

$$f(z)= A+ f_0(z)+\sum_{k=1}^{s} f_k(z) \qquad (13.3)$$

görnüşde aňladyp bolýar, bu ýerde $f_0(z), f_k(z)$ funksiýalar degişlilikde $f(z)$ funksiýanyň $z=\infty$ we z_k nokatlaryň etrabynda Loran hataryna dargatmasynyň esasy bölegidir,

$$A=\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-f_0(z)\right].$$

Subudy. Goý

$f_k(z)=\sum\limits_{j=1}^{m_k}\dfrac{A_{\gamma k}}{(z-z_k)}\gamma$ we $f_0(z)=A_1 z+...+A_m z^m$ – degişlilikde z_k we $z=\infty$ nokatlarda $f(z)$ funksiýanyň Loran hataryna dargatmasynyň esasy bölekleri bolsun.

$$g(z)= f(z)-f_0(z)-\sum_{k=1}^{s} f_k(z) \qquad (13.4)$$

funksiýa ähli giňeldilen kompleks tekizliginde analitikdir. $\lim\limits_{z\to\infty} f_k(z)=0$ deňligi göz öňüne tutup (13.4)-den alarys:
$\lim\limits_{z\to\infty}\left[f(z)-f_0(z)\right]=A.$

Bu deňlikden $g(z)=A=const$ gelip çykýar. $g(z)=A$ we (23.4) deňlik gelip çykýar.

Bellik 13.1. (13.3) formula matematiki derňew dersinde rasional droblary ýönekeý droblara dargatmany ýatlatýar $(A+f_0(z)-f(z)$ rasional bölegiň bütin bölegi).

Bellik 13.2. Islendik meromorf funksiýanyň gatnaşygy görnüşinde ýazyp bolýar.

§13.2. Weýerştrass teoremasy

Algebranyň wajyp meseleleriniň biri bitin rasional funksiýalary çyzykly köpelijilere dagytmakdyr. Erkin bitin funksiýany çyzykly köpeldijilere dargytsak, onda ol funksiýanyň nullary anyklanar. Bu soragyň hususy halyna ilki Koşi seredipdir, ýöne ol soraga doly jogaby Weýerştrass berýär.

Goý,

$$a_1, a_2, ..., a_n, .. \tag{13.5}$$

berlen täkeniksiz yzygiderlik bolsun. Berlen yzygiderlik moduly boýunça artýan tertipde ýerleşdirilen bolsun,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = 0 \tag{13.6}$$

Eger (13.1) yzygiderligiň käbir agzalarynyň moduly deň bolsalar, olar erkin tertipde ýerleşdirilen bolup biler. (13.2)-den görnäşi ýaly ýeterlik uly R san äçin (13.5) yzygiderligiň tükenikli a_n agzalarynyň moduly R-den kiçi bolup bilýändir. Indi biz moduly R-den kiçi bolan a_n-ler şeýle bir funksiýanyň nullary bolar ýaly (diňe a_n-ler) $G(z)$ bitin funksiýany tapyp bolýandygyny görkezeliň.

Eger a_n-leriň käbiri özara deň bolsalar onda ol kratnyý kök bolar. Ýokarky tassyklamany subut etmek üçin häzir biz a_n-leriň hiç biri nola deň däl diýip hasap ederis.

$$u_\nu = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + ... + \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1}} \tag{13.7}$$

aňlatma garalyň

$|z| < |a_\nu|$ üçin alarys:

$$\ln u_\nu = \ln\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) + \frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + ... + \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1},$$

$\ln\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)$ funksiýa $|z| < |a_\nu|$ tegelekde analitik, we z=0 bolanda nola deňdir.

Soňky deňlikden alarys:

$$\ln u_\nu = -\frac{z}{a_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^3 - ... - \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1} - ... +$$

$$+ \frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^2 + ... + \frac{1}{\nu-1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu-1} = -\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\nu -$$

$$-\frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu+1} - ... \tag{13.8}$$

bu ýerden alarys:

$$u_\nu = e^{-\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^\nu - \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\nu+1} - ...} \tag{13.9}$$

Indi

$$u_1 \cdot u_2 \cdots u_\nu \cdots \tag{13.10}$$

köpeltmek hasylyny ähli kompleks tekizliginiň $z = a_\nu$ nokatlaryndan başga nokatlarynda ýygnalyp, nollary

$a_1, a_2, ..., a_n, ... - ler$ bolan $G(z)$ funksiýany emele getirýändigini görkezeliň. Ilki bilen islendik ν üçin $C: |z| < |a_i|$ tegelekde (13.5) köpeltmek hasyly käbir analitik funksiýany emele getirýändigini görkezeliň (13.5) yzygiderlige goýan şertimize

$$|a_{\nu-1}| \le |a_\nu|$$

Nullary C_ν tegelekde bolan $u_1, u_2, ..., u_{\nu-1}$ köpeltmek hasylyny taşlap, $u_\nu \cdot u_{\nu+1} \cdots$ köpeltmek hasylyna seredeliň

$$u_\nu \cdot u_{\nu+1} \cdots = e^{-\frac{1}{\nu}(\frac{z}{a_\nu})^\nu - \frac{1}{\nu+1}(\frac{z}{a_\nu})^{\nu+1} - ...} \cdot e^{-\frac{1}{\nu+1}(\frac{z}{a_{\nu+1}})^\nu - ...} ... =$$

$$= e^{-\sum_{n=\nu}^{\infty}\left[\frac{1}{n}(\frac{z}{a_n})^n + \frac{1}{n+1}(\frac{z}{a_n})^{n+1} + ...\right]}, \qquad |z| < |a_\nu| \tag{13.11}$$

Ilki bilen $|z| < |a_\nu|$ tegelekde

$$\sum_{n=\nu}^{\infty}\left[\frac{1}{n}(\frac{z}{a_n})^n + \frac{1}{n+1}(\frac{z}{a_n})^{n+1} + ... +\right] \tag{13.12}$$

hataryň käbir garmoniki funksiýa ýygnanýandygyny görkezeliň.

$$\left[\frac{1}{n}(\frac{z}{a_n})^n + \frac{1}{n+1}(\frac{z}{a_n})^{n+1} + ... + \frac{1}{n+k}(\frac{z}{a_n})^{n+k} + ...\right.$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+k+1}(\frac{z}{a_n})^{n+k+1}}{\frac{1}{n+k}(\frac{z}{a_n})^{n+k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{k(\frac{n}{k}+1)}{k(\frac{n+1}{k}+1)}\left|\frac{z}{a_n}\right| = \left|\frac{z}{a_n}\right| < 1, \qquad |z| < |a_n|$$

Diýmek (13.7) hataryň her bir goşulyjysy C_ν tegelekde analitik.

$|z| \le (1-\varepsilon)|a_\nu|$ tegelekde ol goşulyjylar deňöçegli ýýgnalýandyr, ýagny (13.12) hataryň goşulyjylarynyň jemi $|z| \le (1-\varepsilon)|a_\nu|$ tegelekde analiyik jemiň $|z| \le (1-\varepsilon)|a_\nu|$ tegelekde deňöçegli ýygnalýandygyny görkezeliň

$$\left|\frac{1}{n}(\frac{z}{a_n})^n + \frac{1}{n+1}(\frac{z}{a_n})^{n+1} + ...\right| \le \frac{1}{n}\left|\frac{z}{a_n}\right|^n + \frac{1}{n+1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} + ... <$$

$$< \frac{1}{n}(1-\varepsilon)^n + \frac{1}{n+1}(1-\varepsilon)^{n+1} + ... < \frac{1}{n}(1-\varepsilon)^n(1+(1-\varepsilon)+(1-\varepsilon)^2 + ...) =$$

$$= \frac{1}{n}(1-\varepsilon)^n \frac{1}{1-1+\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon)^n}{n\varepsilon}$$

Umumy agzasy $\dfrac{(1-\varepsilon)^n}{n\varepsilon}$ san hatary ýygnalýar. Weýerştrassyň teoremasyna görä $|z| \le (1-\varepsilon)|a_\nu|$ tegelekde (13.7) hatar deňölçegli ýygnalýar, jemi şol tegelekde analitikdir. Şeýlelikde (13.5) köpeltmek hasyly C_ν tegelegiň içinde analitikdir we $z = a_1, a_2, ..., a_{\nu-1}$

nokatlar nollarydyr we başga nollary ýokdyr. Şu wagta, çenli biz (24.1) agzalary biri-birine deň däl diýipdik. Eger z=0 –laryň λ-sanysy gabat gelse, onda (13.5) köpeldijini z^{λ} köpeltmek ýeterlik. Şeýlelikde alarys:

$$G(z) = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{\infty} U_n = z^{\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^n+...+\frac{1}{\nu-1}(\frac{z}{a_n})^{n-1}}$$

Weýerştrass formulasy.

XIV Bap. Garmoniki funksiýalar

§14.1. Garmoniki funksiýalar we olaryñ analitik funksiýalar bilen baglanşygy.

Goý, $f(z)=u(x,y)+i\vartheta(x,y)$ funksiýa D oblastda analitik bolsun. Analitik funksiýanyñ tükeniksiz köp önüminiñ barlygy bize mälimdir. Bu ýerden analitik funksiýanyñ hakyky we hyýaly bölekleriniñ D oblastda tükeniksiz köp önüminiñ bardygy gelip çykýar.

Şeýle sorag ýüze çykýar: islendik tükeniksiz differensirlenýän hakyky iki üýtgeýänli hakyky funksiýa analitik funksiýanyñ hakyky (hyýaly) bölegi bolup bilermi? Umuman bolup bilmeýär.

Eger $f(z)=u+i\vartheta$ funksiýa D oblastda analitik bolsa onda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \vartheta}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad (14.1)$$

Koşi-Riman şerti ýerine ýetýär. Ýokarda aýdylyşy ýaly u we ϑ funksiýalaryñ D oblastda tükeniksiz köp önümi

bardyr. Ikinji tertipli üznüksiz önümi bar bolanlygy we $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ deñligi göz öñünde tutup (14.1) deñlikden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

deñlik gelip çykýar. Ýokardaky usul bilen

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}=0$$

deñligi alarys.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0$$

ikinji tertipli hususy önümli differensial deñlemedir. Bu deñleme Lampas deñlemesi diýilýär.

Eger funksiýanyñ ikinji tertipli üznüksiz hususy önümleri bar bolup, Lampas deñlemesini kanagatlandyrýan bolsa, onda ol funksiýa garmoniki funksiýa diýilýär.

Analitik funksiýanyñ hakyky we hyýaly bölekleri aýratynlykda garmoniki funksiýalardyr.

Eger $\varphi(x,y)$ we $\psi(x,y)$ hakyky funksiýalar garmoniki bolsalar, onda $F(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ funksiýa umuman analitik däldir. Hakykyatdanda, Koşi-Riman şertleri analitik funksiýanyñ hakyky we hyýaly böleklerini berk baglanyşdyrýar. Käbir analitik funksiýanyñ hakyky we hyýaly bölekleri bolan garmoniki funksiýalara çatrymlaşan garmoniki funksiýalar diýilýär.

D oblastda garmoniki $\varphi(x,y)$ çatrymly bolan analitik $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ funksiýanyñ $\psi(x,y)$ bölegini tapmaklyk barada sorag ýüze çykýar.

Teorema14.1. Birbagly oblastda garmoniki bolan islendik funksiýa bu oblastda analitik bolan käbir funksiýanyñ hakyky (hyýaly) bölegidir.

Subudy. Goý, $\varphi(x,y)$ funksiýa birbagly D oblastda garmoniki bolsun. Eger analitik $f(z)=u(x,y)+i\vartheta(x,y)$ funksiýnyñ hakyky bölegi $\varphi(x,y)$ bolsa, bu funksiýa nähili tapylýandygyna seredeliñ. f(z) funksiýanyñ hyýaly bölegini tapmak üçin Koşi-Riman şertleri ulanylýar:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=P(x,y),$$
$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=Q(x,y).$$

$P(x,y)$ we $Q(x,y)$ funksiýalar D oblastda üznüksiz we bu oblastda üznüksiz birinji tertipli önümleri bar. Bu Koşi-Riman şertlerinden alarys:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

bu deñlikden we matematiki analiz dersinden belli bolşy ýaly

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$$

egriçyzykly integral egriniñ ýolyna dälde başlangyç nokadyna (x_0,y_0) we ahyrky (x,y) nokadyna baglydyr.

Goý, $\psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ bolsun.

Alarys:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=P=\frac{\partial\vartheta}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y}=Q=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}.$$

Bu ýerden görnüşi ýaly $\vartheta(x,y)$ funksiýa $\psi(x,y)$ funksiýadan hemişlik bilen tapawutlanýar,

$\vartheta(x,y)=\psi(x,y)+C=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+C$ (bu ýerde C-hakyky san).

Bu formuladan $\vartheta(x,y)$ kesgitläp, iki sany D oblastda differensirlenýän funksiýa alarys:

$$u=\varphi(x,y),\vartheta=\psi(x,y)+C.$$

Bu funksiýalar Koşi-Riman şertleri bilen baglanşyklydyr. Bu ýerden D oblastda analitik bolan

$f(z)=U(x,y)+i\vartheta(x,y)=\varphi+i\varphi+iC$ funksiýany alarys.

XV Bap. Analitik funksiýalaryñ gidromehaniki düşündirilişi.

Biz gysylmaýan ideal tekiz suwuklygyñ potensial durnuklaşan hereketine serederis. Çeşmeden erkin bolan potensial hereketiñ oblastynda $\vec{V}(x,y)$ wektor tizlik üçin

$$rot\vec{V} = 0, \qquad (15.1)$$

$$div\vec{V} = 0 \qquad (15.2)$$

deňlemäniň ýerine ýetýändigi matematiki fizikanyň deñlemeleri dersinden bellidir.
Hereketiň potensial bolanlygy üçin, potensial tizlik diýip atlandyrylýan u(x,y) skalýar funksiýa tapalyň, $\vec{V}(x,y)$ wektor tizligi üçin

$$\vec{V} = gradu(x,y), \qquad (15.3)$$

deňligi kanagatlandyrýar. (15.3)-den alarys:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{\gamma} = gradu(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j},$$

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial x}, V_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (15.4)$$

(15.4)-di (15.2)-de ornuna goýup alarys:

$$div\ \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (15.5)$$

diýmek u(x,y)-potensial tizlik garmoniki funksiýadyr.

u(x,y) analitik funksiýanyň hakyky bölegi bolanda $f(z) = u(x,y) + i\vartheta(x,y)$ analitik funksiýany guralyň.

Eger $u(x,y) = const, \vartheta(x,y) = const$ bolsa, onda

$$gradu \cdot grad\vartheta = (\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j})(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\vec{j}) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

diýmek u, ϑ funksiýalaryñ gradiýentleri ortogonal çyzyklar, bu ýerden $u(x,y) = const, \vartheta(x,y) = const$ - ortogonallyklary gelip çykýar.

C egri boýunça akym tizligi $\vec{V}(x,y)$ wektor bolsun

$$N_c = \int_c (\vec{V}\cdot\vec{n})ds \qquad (15.6)$$

Egriçyzykly integrala C egri boýunça tizligiň normaly diýilýär. Bu integral C egriden birlik wagtda geçýän suwuklygyň mukdaryny kesgitleýär. (25.6) integraly aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$N_c = \int_c \vec{V}d\vec{n} = \int_c (\vec{i}V_x + \vec{j}V_y)(\vec{i}dy - \vec{j}dx) = \int_c V_x dy - V_y dx =$$

$$= \int_c \frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx = \int_c \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (15.7)$$

C-egri boýunça aýlanma tizligi aşakdaky deňlemeden kesgitlenýär

$$\vec{\Gamma}_c = \int_c \vec{V}d\vec{s} \qquad (15.8)$$

ýa-da

$$\Gamma_c = \int_c \vec{V}\, d\vec{s} = \int_c V_x dx + V_y dy = \int_c \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_c \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dy \qquad (25.9)$$

Aşakdaky integrala garalyň

$$\int_c f(z)dz = \int_c V_x dx - V_y dy = \int_c \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy + i\int_c \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \qquad (15.10)$$

(25.7), (25.8) göz öňünde tutup (25.10)-dan alarys:

$$\int_c f'(z)dz = \Gamma_c + iN_c \qquad (15.11)$$

Bu furmula, aýlanma we akym wektor tizligini kompleks potensialyň önüminiň üsti bilen aňlatmakdyr, şunlukda bu formula gidrodinamikada köp ulanylýar. Seredýän hereketiň G oblasty birbagly bolsa, onda, ol oblastdaky islendik C ýapyk egri boýunça integraly Koşi teoremasyndan nola deňdigi gelip çykýar. Mundan akymyň her bir nokadynyň $\vec{V}$ wektop tizligi $\vartheta(x,y) = const$ egriniň şol nokatdaky galtaşýanynyň ugry boýunça ugrukdyrylandyr. $\vartheta(x,y)$-funksiýa f(z) analitik funksiýanyň akymy diýilýär, f(z)-funksiýa akymyň potensiýaly diýilýär.

Akymyň oblasty iki akym $\vartheta(x,y) = c_1$, $\vartheta(x,y) = c_2$ çyzygy bilen çäklenen bolsa, oňa akym turbajygy diýilýär.

Suwuklygyň her bir nokadynyň tizligi ýakym çyzygynyň galtaşmasy bilen gabat gelmegi, onuň gysylmaýan we mukdarynyň stasionar bolmagy

turbaçynyň islendik iki S_1 *we* S_2 kese kesiginde birlik wagtda geçýän suwuklygyň mukdary deňdir. Şonuň üçin C_1 *we* C_2 tapawudy turbajykdaky suwuklygyň sarp edilýän akymydyr.

(15.4) deňlige Koşi-Piman şertini ulanyp alarys:

$$V_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \qquad V_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \qquad (15.12)$$

Alarys:

$$\omega = V_x + iV_y = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \overline{f'(z)} \qquad (15.12)$$

Gidrodinamikada ýaýramak we akym wektorynyň tizligi esasy rol oýnaýar.

Goý, C bölek – endigan (ýapyk ýa-da ýapyk däl) egri bilen bolsun, onda

$$d\vec{s} = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy \quad \text{- duganyň differensialy} \qquad (15.13)$$

$$d\vec{n} = \vec{i}\, dy - \vec{j}\, dx \quad \text{- normaly differensialy} \qquad (15.14)$$

Mundan alarys:

$\vec{n}\, ds = d\vec{n}$, $\vec{n}$ -birlik normal.

Eger G oblast köpbagly bolup, C egri öz içinde G degişli däl G' oblastda (15.1), (15.2) deňlikler ýerine ýetmez. Hususy ýagdaýda G' oblast f(z) funksiýanyň diňe üzňe aýratyn nokatlary durýandyr.

Aşakdaky mysallara garalyň.

a) Goý, f(z)=az - kompleks potensiýal akym (15.15) bolsun, bu ýerde $a = a_1 + ia_2$ berlen kompleks san.

Onda

$$f(z)=(a_1+ia_2)(x+iy)=a_1x-a_2y+i(a_2x+a_1y),$$

$$u(x,y)=a_1x-a_2y, \vartheta(x,y)=a_2x+a_1y.$$

$\vartheta(x,y)=c$ - akym çyzygy göni çyzyk emele getirip, onuň burç koeffisiýenti

$$tg\alpha=-\frac{a_2}{a_1}$$

(15.7)-den alarys:

$$\omega=V_x+iV_y=\overline{f'(z)}=a_1-ia_2=\overline{a}$$

bu ýerden görnüşi ýaly akymyň tizligi hemişelikdir we wektor tizligiň ugry

$\vartheta(x,y)=c$ göni bilen gabat gelýär.

Diýmek (15.15) funksiýa tekiz parallel akymy kesgitleýär.

b) Goý, $f(z)=a\ln z$ (15.16)

Kompleks potensiýal akym bolsun, bu ýerde a-hakyky san. Derejeli görnüşe geçip alarys:

$$f(z)=a\ln re^{i\varphi}=a\ln r+ia\varphi,$$

$$u(r,\varphi)=a\ln r, \vartheta(r,\varphi)=a\varphi$$

Bu ýerden görnüşi ýaly akym çýzygy $\vartheta(r,\varphi)=a\varphi$ koordinata başlangyjyndan çykýan şöhlelerdir. Tizligiň obsolýut ululygyny tapalyň:

$$|\omega|=\left|\overline{f'(z)}\right|=\left|\frac{a}{z}\right|=\frac{|a|}{r}, \qquad (15.17)$$

Emma tizligiň ugry $\varphi=const$ şöhle bilen gabat gelýär. (15.17)-den görnüşi ýaly koordinata başlangyjynda tizlik tükeniksizlige deň bolar.

z=0 nokat f(z) funksiýanyň aýratyn nokadydyr we akymyň çeşmesidir (položitel akym eger a>0 ugry koordinata başlangyjyndan çykýar, otrisatel akym. Eger a<0 koordinata başlangyjyna tarap). Goý, C z=0 nokady özünde saklaýan erkin ýapyk egri, onda (15.14) formuladan alarys:

$$\int_c f'(z)dz=\int_c \frac{a}{z}dz=i2\pi a=\Gamma_c+iN_c$$

bu ýerde $N_c=2\pi a$. Seredýän ýagdaýymyz üçin, islendik c ýapyk egri boýunça subuklygy akymynyň mukdary hemişelik we $2\pi a$ deň.

EDEBIÝAT

1. Berdimuhamedow G. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat:Ylym. 2007.
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: Учебник. М., Наука, 2009.432 с.
3. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций: Учеб.пособие. М., Наука, 1978. 387 с.
4. Шабат Б. В. Введение в коплексный анализ: Учебник. В 2-х ч. 2-е изд., перераб. и доп. М., Наука, 1976.
5. Евграфов М. А. Аналтитические функции: Учебник. М., Наука, 1968. 471 с.
6. Сидоров Ю. В., Федерюк М. В., Шабинен М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1989, 477с.
7. Сборник задач по теории аналитических функций: Учеб.пособие/Под ред. М. А. Евграфова. 2-е изд., доп. М., Наука 1972. 414 с.
8. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб.пособие. М., ФИЗМАТЛИГ 2002.312 с.

Mazmuny

Nurmuhammet Gurbanmämmedow, Orazmuhammet Amakowiç Aşyrow, Parahat Nurmuhammedowiç Gurbanmämmedow, Aşyrgül Nurmuhamedowna Gurbanmämmedowa

Kompleks üýtgeýänli funksiýalar nazaryýeti

Ýokary okuw mekdepleriniñ talyplary üçin okuw kitaby