TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

Gurbansähedow Gurbansähet

MIKROELEKTRON ULGAMLARYNYŇ SAN MODELLERI

Mikroelektronika we ýarymgeçirijili enjamlar
hünäri üçin

Aşgabat – 2010

Giriş

Hemişelik Bitaraplygyny alan Garaşsyz ýurdumyzyň bu günki ýaşlary täze eýýamyň täze ugurlary bilen Altyn asyrymyzy has-da gülletmeli. Bu bolsa biziň gadymy ruhy köklerimizden sapak alyp, şol mirasy ösdürip bilmek bagtyna eýe boldugymyzdyr.

“Ylym bilmekligiň durmuşy özgertmek, durmuşy kämilleşdirmek ukybyna ýetmegidir. Şonuň üçinem bilimiň ylym ýa-da däldigini bir zatdan anyklap bolar: ol durmuşa täsir edip, ony özgerdip, onuň hajatlaryny bitirip bilýärmi ýa-da ýok? Eger bilýan bolsa, ol ylymdyr.”

Iň uly baýlyk akyldyr. Iň uly gymmatlyk – ylymdyr. Ylym – adamzada hemişe gerek. Türkmeni maksat-myradyna, altyn ýaşaýşyna ýetirjek ylymdyr. Ylym ýok ýerde akyl bolmaz. Iň güýçli gujur adamzada berlen akyldyr. Ylym diňe iliňkini almak däl, özüňkiňi hem aýan etmekdir. Hakyky ylym-durmuşy herekete getiriji güýje öwrülip bilýän ylymdyr.

Ylym bilmek ýolunuň çürbaşydyr, kämilligidir. Bilim-ilden özüňe almakdyr, sarp etmekdir. Ylym-özüňden ile bermekdir, döretmekdir. Iň oňat ylym-jemgyýete peýda getirýän ylymdyr. Jemgyýete peýdasyz ylym bimanylykdyr.

Hormatly Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedowyň ylym bilim taglymaty örän giň we çuňňur many-mazmuna eýe. Ol türkmen jemgyýetini barha ýokary derejelere göterýär. Biz bu galkynyşy ylym-bilim ulgamynda gazanylýan üstünliklerimizde hem görýäris.

Täze galkynyşlar zamanasynda mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedowyň tagallalary bilen ýurdumyzda ylym-bilime, dünýä ylmynyň iň soňky gazananlaryny özleşdirmäge aýratyn ähmiýet berilýär.

Täze galkynyş zamanasynyň ilkinji günlerinden başlap mähriban Prezidentimiz Gurbanguly Berdimuhammedow ýaşlara bilim terbiýe bermekligi hünär öwretmek işleri bilen utgaşykly alyp barmaklyga aýratyn uly üns berdi. Munda Beýik Serdarymyz esasan özbaşdak, Garaşsyz ýurdymyzy dolandyrmak üçin häzirki zaman ösen tilsamatlaryndan oňat baş çykaryp, ösen tehniki enjamlara erkedip, dünýa derejesindäki bäsdeşlige ukyply, ýokary hilli önümleri öndürmegi başarýan her bir ýaş ýigidiň we gyzyň öz kärini ýürekden söýýän, ruhybelent, watansöýüji, hemme taraplaýyn kämil ýaşlar bolup ýetişmekleriniň zerurlygyny göz öňünde tutýar. Munuň şeýledigini Hormatly Prezidentimiz özüniň çykyşlarynda hem yzygiderli nygtap gelýär.

Häzirki zaman dünýänin iň wajyp meseleleriniň biri – ol hem durmuşy-ykdysady, tehnologiki we senagat taýdan ösüşi birmeňzeş derejede döwletleriň arasynda deňhukukly, hyzmatdaşlykly we adalatly gatnaşyklaryň ýola goýulmagydyr.

Öňdebaryjy tilsimatly prosesler ylmyň esasynda kämilleşýär. Tebigaty öwrenýan we takyk ylymlaryň – fizikanyň, himiýanyň, biýologiýanyň, matematikanyň gazananlary täze bilim görnüşinde tilsimatly ylymlara, inženerçilik işine ornaşyp, tilsimatly ösüş hökmünde önümçiligi özgerdýär. Önümçilige elektron hasaplaýyş maşynlary (EHM) we awtomatlary ornaşdyrmak, tehniki manyda adamy dolandyryş wezipesinden boşatmaklygy aňladýar. Awtomatlaşdyrylan dolandyryş enjamlary ulanmaklygyň tehniki wezipesini ol maşyna geçirmekligi aňladýar. Tehnologiýa diýen düşünje bilen birmeňzeş bolup, häzirki döwürde adamyň öňünde duran giň göwrümli meseleleri çözmekde ösen tehnikany yzygiderli ulanmaklygy aňladýar. Biz talyp ýaşlar, nesip bolsa ýurdumyzda bina edilen we edilýän senagat kärhanalarynyň dünýä ülňülerine laýyk gelýän, awtomatiki usulda işleýän, ýokary tehniki–tilsimatly enjamlarynyň kompýuterleşdirilmegine öz mynasyp goşandymyzy goşup, täze galkynyşlar zamanasynda gerekli, Watanymyzy dünýä öz hünäri, başarnygy bilen tanatjak ýaşlar bolup, işlejek, gurjak döretjekdigimize ynandyrýarys.

Hormatly Prezidentimiz ýokary okuw mekdeplerinde ýaşlaryň öwrenýän hünärlerini durmuş bilen gabat getirmegiň örän möhümdigini belläp, ony durmuşa geçirmegiň dogry ýollaryny hem salgy berdi. Şunlukda ýokary okuw mekdeplerinde okaýan talyplaryň nazary bilimler bilen tejribäni utgaşdyryp öwrenmekleri doly ýola goýuldy.

Talyplaryň okuwda öwrenenlerini tejribede berkitmeklerine mümkinçilik döredilýär. Okuw döwürlerinde geçilýän üznüksiz tejribeler talyplaryň önümçilik hünärlerini iş ýüzünde has gowy özleşdirmekligine mümkinçilik berýär.

I BAP

1. Esasy maglumatlar

Analog hasaplaýyş maşynlary- bu maşynlar maglumatlary üznüksiz formada işläp taýýarlaýar. Özgerdýär. AHM-ler birnäçe operasion bloklardan ybaratdyr. Her bir operasion blok haýsy hem bolsa belli bir matematiki operasiýany ýerine-ýetirmek üçin niýetlenendir. AHM-ler kesgitli bir mesele çözmek üçin, operasion bloklary öz aralarynda analitiki baglanyşyk boýunça birini-beýlekisi boýunça birikdirip çatmalydyr. Şol bir wagtyň özünde başga bir meseläni çözmek talap edilse, onda, eýýäm öňki çatylan bloklardan başga-da goşmaça artykmaç bloklar talap edilýär. AHM-ler Halk Hojalygynyň dürli künjeklerinde mesele çözmek üçin ulanylýar. (mysal üçin, dinamiki sistemalaryň barlagynda, differensial deňlemeleri çözmekde, çylşyrymly awtomatiki sazlaýyş sistemany we dolandyrmany modelirlemekde we ş.m. ýerlerde giňden ulanylýar).

Analog hasaplaýyş maşynlaryny san hasaplaýyş maşynlary bilen deňeşdireniňde, san hasaplaýyş maşynlary analog hasaplaýyş maşynlaryndan hemme taraplaýyn gowudyr. Sebäbi, çözülýän meseläni bir klasdan başga bir klasa geçirmek üçin operasion bloklaryň çatylyşyny, birikdirilişini üýtgetmekden başga-da täze blok girizmeli bolýar. AHM-däki operasion bloklaryň sany näçe köp boldugyça şonça-da dürli matematiki, çylşyrymly meseleleri çözüp bolýar.

AHM-yň esasy elementi- uly güýçlendiriji koeffisientli hemişelik togy güýçlendiriji-operasion güýçlendiriji hyzmat edýär. AHM-yň ähli funksional bloklarynda hemişelik togy güýçlendirijiler ulanylýar. Çyzykly elementli bloklar-ulanylşy boýunça gurulýar, mysal üçin kondensatorlarda, rezistorlarda. Bu bloklaryň üsti boýunça hemişelik koeffisientlerde köpeltmek, jemlemek, integrirlemek we ş.m. operasialaryň funksional çatgylaryny düzüp bolýar.

- ***AHM-ler fiziki tebigaty boýunça:*** - pnewmatiki, gidrawliki, elektromehaniki we elektron diýen toparlara bolünlär. Häzirki wagtda elektron AHM-ler giňden ýaýrandyr. Sebäbi ony beýlekiler bilen deňeşdireniňde, ol has ýönekeýdir, bloklar öz aralarynda ýönekeý görnüşde çatylandyr, hasaplama prosessinde uly takyklygy berýär, formasy boýunça kompakt, beýlekiler bilen deňeşdireniňde ulanmana amatly.

- ***AHM-ler strukturasy boýunça:*** - operasion bloklaryň toplumynda fiksirlenen çatgy we programmalaýyn dolandyryşly diýen toparlara bölünýär. Fiksirlenen çatgy toplumly AHM-de mesele çözülmezinden öňinçä, ilki bilen çykyş mesele, ýagny talap edilýän mesele berilýär, şol sebäpli hem operasion bloklaryň öz aralarynda biri-biri bilen çatylyş yzygiderliginiň görnüşi üýtgeýär. Programmalaýyn dolandyryşly AHM-de bolsa matematiki operasiýalaryň ýerine-ýetiriliş yzygiderligi meseläniň çözüliş prosessinde berlen algoritm boýunça üýtgedilýär. Şonuň üçin hem, hasaplanyp alnan ululyklaryň netijelerini aralyklaýyn ýatda saklamak üçin, AHM-yň düzüminde hyş bolýar.

- ***AHM-ler belgilenişi boýunça:*** umumy belgili AHM-ler ýörite aýratyn belgili AHM-ler diýen topara bölünýärler. Umumy belgili AHM-ler hususy önümli differensial deňlemeleri çözmek üçin, çyzykly we çyzykly däl adaty differensial deňlemeleri çözmek üçin niýetlenip döredilendir. Ýörite aýratyn belgili AHM-lerde bolsa önümçilikde, transportda we ş.m. kesgitli pudaklara degişli meseleleri çözüp bolýar.

Çylşyrymly kyn meseleleri ýokary takyklyk boýunça modelirlemek üçin analog san hasaplaýyş sistemalary ulanylýar.

- ***Mesele çözmek ukyplylygy boýunça:*** AHM-ler 2 - topara bölünýärler: fiziki modelirleýji we matematiki modelirleýji maşynlar diýen toparlara bölünýärler.

  1-nji görnüşli AHM-lere analog modelirleýji maşynlar diýilip aýdylýar;

  2-nji görnüşli AHM –lere bolsa, strukturaly AHM-ler diýilip aýdylýar.

- ***Analog - modelleri:*** Geçirilýän eksperimentiň esasy formasy-modelirleme diýilip aýdylýar. Analogly – modelirlemede eksperiment obýektiň özünde geçirilmän, onuň analogly böleginde geçirilýär. Barlag geçirilýän obýektiň özüne bolsa original diýilip aýdylýar.

Ylmy we tehniki gözleglerde umuman matematiki modelirleme ulanylýar. Indi bolsa umumylygy berkitmek üçin, aşakdaky bir mysala seredip geçeliň.

Goý, haýsy hem bolsa käbir beýiklikden ýokardan aşaklygyna tarap jisim zyňylýan bolsun. Bu jisime agyrlyk güýji bilen howa garşylygy täsir edýän bolsun.

Onda Nýutonyň 2-nji kanuny esasynda;

$$F = m\frac{d\vartheta}{dt}$$

bolar (bu ýerde, F -jisime täsir edýän güýç, m -jisimiň agramy, υ-hereket edýän jisimiň tizligi, dυ/dt-hereket edýän jisimiň tizlenmesi, t-bolsa wagtdyr).

Bize mälim bolşy ýaly, bu F -güýje $mg = Q$ agyrlyk güýji (bu ýerde, $g = 9{,}8$) we $(-R\vartheta)$ howa garşylygy degişlidir, (bu ýerde, R -howa garşylygynyň koeffisientidir).

Onda,

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = mg - R\vartheta = Q - R\vartheta \qquad (1)$$

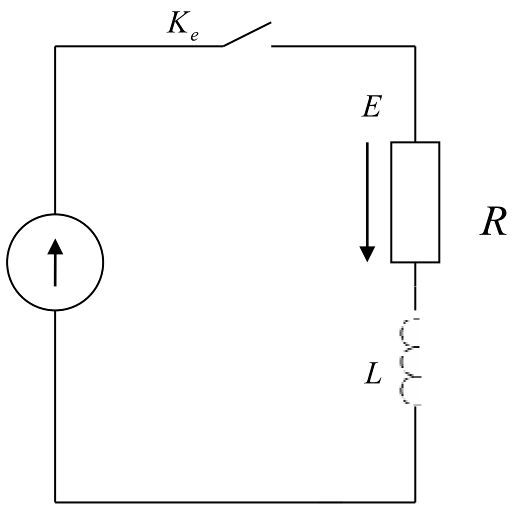
bolar.

Alnan bu (1) deňlemä 1-nji tertipli çyzykly differensial deňleme diýilip aýdylýar.

Görşümiz ýaly, dürli sreda-da ýokardan aşaklygyna zyňylan jisimiň tizliginiň üýtgeýşi barada gözleg geçirenimizde, tizligiň üýtgeýşine kesgitli bir beýiklikden jisimiň zyňylmagy hökmany däldir. Sebäbi, (1) deňlemä hiç-hili kesgitli bir h-beýiklik gatnaşýan däldir.

Aşakdaky 1-nji suratda görkezilen, induktiwligi L-e deň bolan, R-rezistordan ybarat bolan elektrik zynjyry berlen bolsun. Bu RL-zynjyrda toguň üýtgeýşine seredip geçeliň.

Goý, bu zynjyra hemişelik napryaženiýa täsir edýän bolsun.



1-nji surat.
RL**-zynjyryň çatgysy.**

Onda Krihgofyň 2-nji kanunynyň esasynda;

$$E = U_R + U_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

ýa-da

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri \qquad (2)$$

Bu (2) deňleme hem, 1-nji tertipli, çyzykly differensial deňlemedir. (1) we (2) deňlemäni biri-birleri bilen deňeşdirenimizde, (1)-nji deňlemedäki m-koeffisiente derek, (2)-nji deňlemäniň L-koeffisienti degişlidir, şeýle hem, (1)-nji deňlemäniň Q we R koeffisientlerine derek, degişlilikde (2)-nji deňlemäniň E we R ululyklary degişlidir. 1-nji suratda görkezilen çatgynyň üsti bilen örän kiçi ýitgili, uly takyklykly netijeleri alyp bolýar. Onuň üçin bolsa, zynjyrdaky togy ölçemeklik we rezistoryň garşylygyny üýtgetmeklik ýeterlikdir.

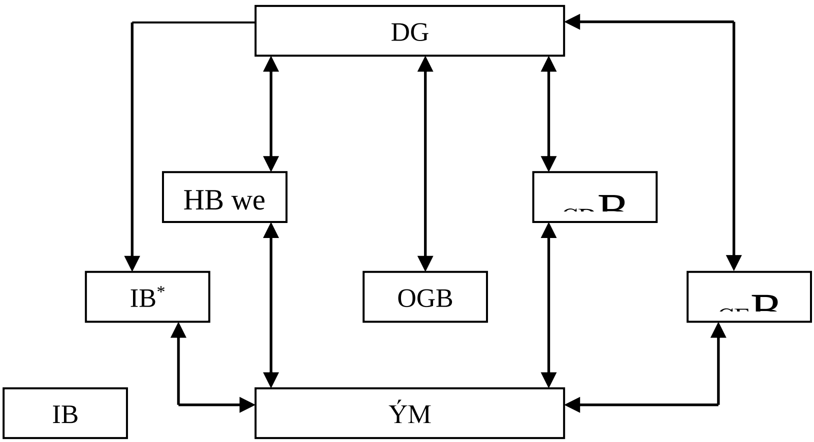
Ýokardaky seredilip geçilen mysallaryň 2-si hem matematiki modelirlemäniň göni analogly modelirleme klasyna degişlidir.

- ***Strukturaly AHM-ler:*** Aşakdaky 2-nji suratda strukturaly AHM-yň umumylaşdyrylan çatgysy görkezilendir. AHM-yň düzümindäki operasion bloklaryňsanyna görä AHM-ler 2-topara bölünýärler. Ýagny: kiçi AHM-ler we uly AHM-ler diýen toparlara bölünýärler.

1^0. Eger AHM-yň düzümindäki operasion bloklaryň sany 20-den geçmese (mysal üçin, 16, 19, 7 we ş.m.) onda bu AHM-lere kiçi AHM-ler diýilip aýdylýar.

2^0. Eger AHM-yň düzümindäki operasion bloklaryň sany 20÷60 aralykda bolsa, onda bu görnüşli AHM-lere ortaça AHM-ler diýilip aýdylýar.

3^0. Eger AHM-yň düzümindäki operasion bloklaryň sany 60-dan uly bolsa, onda bu görnüşli AHM-lere uly AHM-ler diýilip aýdylýar.



2-nji surat.
Strukturaly AHM-yň umumylaşdyrlan çatgysy.

<u>**Bellik**</u>: ***DG***- dolandyryjy gurluş.
HB we ***ÜBK***-hemişelik bloklaryň we üýtgeýän bloklaryň koeffisienti.

ÇDBE-çyzykly däl bloklaryň elementi.
IB-iýmitlendiriji blok.
IB*-induksiýa blogy.
OGB-operasion güýçlendiriji blok.
ÝM-ýygnanma meýdançasy.
ÇEB-çyzykly elementler blogy.

Tipli düzümi boýunça AHM-ler 2-topara bölünýärler: spes AHM-ler we uniwersal AHM-ler diýen toparlara bölünýärler. Uniwersal AHM-lerde goşmaça, artykmaç gurluşlar bar.

(mysal üçin, awtomatik sanly programirleýji we awtomatik barlag ediji gurluşlar, awtomatik ölçeýji sistemaly gurluşlar we ş.m.).

Strukturaly AHM-ler aýratyn bloklardan ybaratdyr. Bu bloklaryň her biri haýsy hem bolsa belli bir matematiki operasiýany ýerine-ýetirmek üçin niýetlenendir: goşmak (+), köpeltmek (*), integrirlemek, differensirlemek, funksiýany özgertmek we ş.m. Çözülýän meseläniň görnüşine baglylykda operasion bloklardan ybarat bolan AHM-yň çatgysy düzülýär.

(2) deňlemäni 1-nji önüme görä çözeliň.

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}E - \frac{R}{L}i$$

aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

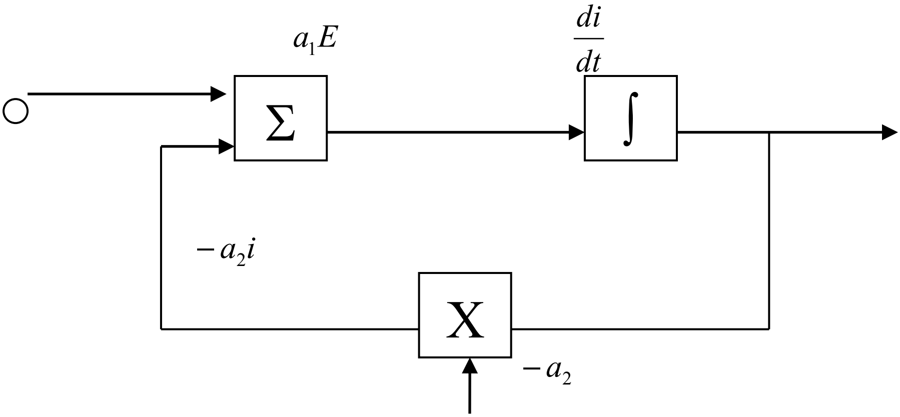
$$\frac{1}{L} = a_1 \;; \qquad \frac{R}{L} = a_2 \;;$$

Onda

$$\frac{di}{dt} = a_1E - a_2i \qquad (3)$$

(3)-nji deňlemeden görnüşi ýaly, 1-nji önüm a_1E we a_2i goşulyjylaryň algebraik jemine deňdir. Şonuň üçin hem, bu algebraik jem üçin jemleýji gurluş ($\sum$) alsak, a_1E we a_2i köpeltmek hasyllary üçin, köpeldiji gurluş (x) alsak, şeýle hem, integrirleýji gurluş ($\int$) alsak, onda R-garşylyga baglylykda i-toguň bahasynyň üýtgeýşini barlap, gözegçilik geçirip bolýar.

Şeýlelikde bu ýagdaýda, i- üýtgeýän togy modelirlemek üçin, (3)-nji deňlemeden görnüşi ýaly jemleýji, integrirleýji we köpeldiji bloklar hökmanydyr. Bu bloklaryň birleşdiriliş çatgysy aşakdaky 3-nji suratda görkezilendir.



3-nji surat. Göni däl analog usul boýunça RL-zynjyry modelirlemek.

- ***<u>Strukturaly modeliň analog modelinden esasy aýratynlygy</u>:*** strukturaly modeliň elementleriniň biri-birine bolan fiziki aragatnaşygynyň arasynda özara göni analogly baglanyşyk bolmaýar. Aýratyn matematiki operasiýalary modelirleýji elementlerden düzülen strukturaly model analog modelinden has uniwersaldyr.

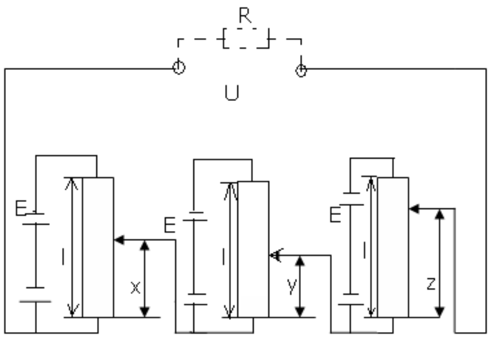
2. Passiw elementli AHM-yň gurluşy.

Analogly gurluşlar-passiw elementleriň (mysal üçin, rezistor, kondensator, potensiometr, transformator, diod.) üstünde ýa-da operasion güýçlendirijileriň üstünde guralyp bilner.

Passiw elementli gurluşlar has ýönekeýdir we ulanmana amatlydyr. Olar hakyky ýalňyşlygy berýär. Bu passiw elementli gurluşlary yzygider çatgy esasynda işleýän zynjyrlara birikdirip bolmaýar.

Potensiometrli gurluşlar. Potensiometriň hasaplap-çözüji shemasynyň gurluşyna seredip geçeliň.

Jemleýji çatgy. Bu çatgynyň suraty aşakdaky 4-nji suratda görkrzilendir.



4-nji surat. Jemleýji çatgy (potensiometrli gurluşlary ulanylşynda).

4-nji surat.
Jemleýji çatgy (potensiometrli gurluşlaryň ulanylşynda).

Bu çatgynyň işleýiş prinsipi ýapyk kontura täsir edýän naprýaženiýanyň ýerleşdirilşi esasynda işleýändir. Çatgyda jemleýji ululyklar x, y, z harplar bilen belgilenendir. Onda jemleýji çykyş naprýaženiýa aşakdaky görnüşde bolar.

$$U_{cyk} = \frac{E}{e}x + \frac{E}{e}y + \frac{E}{e}z \qquad (4)$$

(bu ýerde, e -maksimal ululyk)

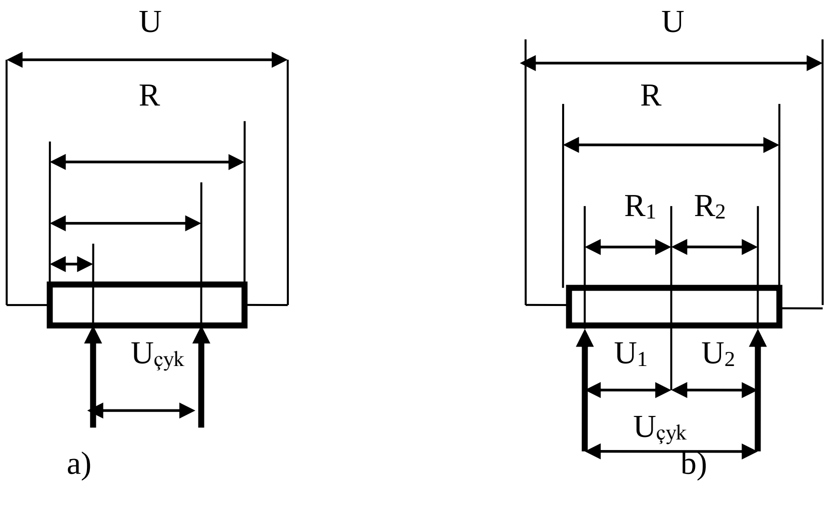
$\frac{E}{e} = k$ belgilemäni girizeliň

Onda, (4) formula aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$U_{cyk} = R(x + y + z)$$

Şeýlelikde, soňky gatnaşykdan görşümiz ýaly, çykyş naprýaženiýa ýerleşdirilýän ululyklaryň jemine proporsionaldyr. Bu gatnaşyk diňe R_H -ululyk jemleýji çatgynyň içki garşylygyndan uly bolan ýagdaýy üçin dogrudyr.

Aýrylma çatgy. Bu çatgy aşakdaky 5(a)-nji suratda görkezilendir.



5-nji surat.
Aýrylma çatgy (potensiometrli gurluşlaryň ulanylşynda).

5-nji(a)-njy suratda görkezilen çatgy üçin:

$$U_{cyk} = \frac{U}{R}(R_1 + R_2) = R_1(R_1 + R_2) \qquad (5)$$

Ýa-da, eger:

$$R_1 = R_1 x, \quad R_1 = \frac{U}{R}, \quad R_2 = R_2 * y, \quad R_2 = \frac{R}{e}$$

bolsa, onda

$$U_{cyk} - R_1 R_2 (x - y) = R(x - y) \qquad (6)$$

Bolar.

Görşümiz ýaly, çykyşdaky naprýaženiýa x we y ululyklaryň tapawudyna proporsionaldyr.

5(b)-nji suratda görkezilen çatgy üçin

$$U_{cyk} = U_1 + U_2 = \frac{U}{R}(R_1 + R_2) = R_1(R_1 + R_2)$$

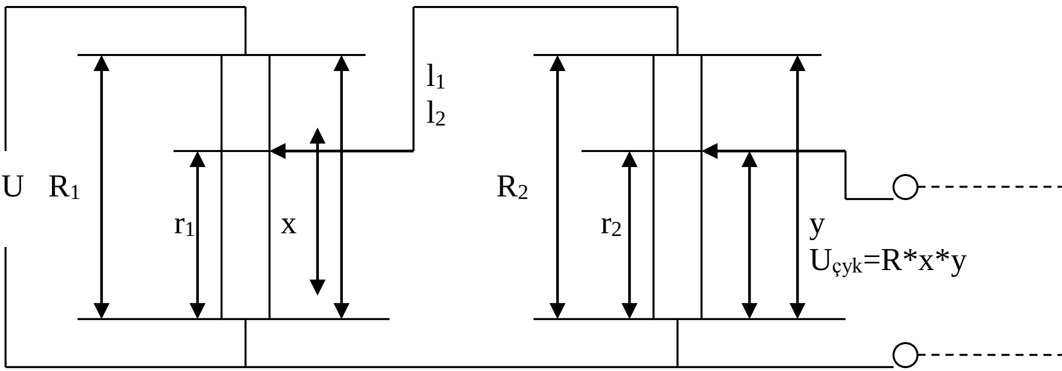
Eger: $R_1 = R_1 x, \quad R_2 = R_2 y,$ belgilemeleri girizeliň

Onda,

$$U_{cyk} = R_1 * R_2 (x + y) = R(x + y) \qquad (7)$$

Bolar.

Köpeltme çatgy. Bu çatgy 6-njy suratda görkezilen.



6-njy surat.
Köpeltme çatgy (potensiometrli gurluşlaryň ulanylşynda).

Bu çatgyda x-ululygy R_1-potensiometriň dwižogynyň süýşürme ululygyna proporsionaldyr, y-ululygy bolsa, R_2-potensiometriň dwižogynyň süýşürme ululygyna proporsionaldyr.

R_1-potensiometriň dwižogynyň süýşürmesi boýunça alnan napräženiýa:

$$U_1 = \frac{U}{R_1} r_1 = \frac{U}{R_1} * \frac{R_1}{e_1} x = U \frac{x}{e_1} \qquad (8)$$

Şeýle hem:

$$U_{cyk} \approx (U_1 R_1) r_2 = \frac{U_1}{R_2} (\frac{R_2}{e_2}) y = (\frac{U_1}{e_2}) y = (U \frac{x}{e_1}) * \frac{y}{e_2} = Rxy \qquad (9)$$

Bu ýerde

$R = \dfrac{U}{e_1 e_2}$ –belgileme girizilendir.

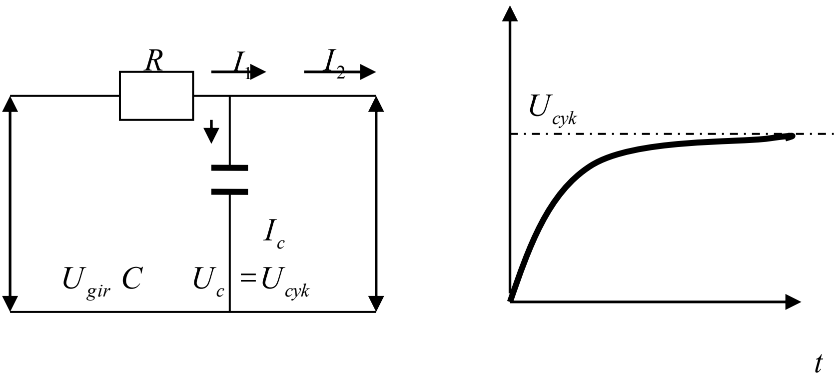
(9) formuladan görnüşi ýaly, $x \ll e_1$-ýagdaý üçin çykyşdaky naprýaženiýa xy köpeltme ululygyna proporsionaldyr.

Eger, R_1 garşylyk R_2 garşylyk boýunça şuntirlenýän bolsa, onda çykyşdaky naprýaženiýanyň formulasy örän çylşyrymly görnüşe eýe bolar, ýagny, çylşyrymly formada bolýar. Potensiometrler üçin köpeltmek çatgy diňe, R_2-garşylyk ýeterlik derejede gereginden kiçi bolup, güýje galyjy garşylygyň hasabyna alnan ýalňyşlyklar üçin dogrudyr.

- ***Köprüli çatgylar*.** Potensiometrdäki köprüli çatgylar arkaly has ýokary takyklykda goşmagy, aýyrmagy, köpeltmegi we bölmegi (ş.m) operasiýalary ýerine ýetirip bolýar. Bu ýagdaýda ölçeg netijesi ýüküň garşylygyna bagly däldir.

Bu arifmetiki hasaplamalaryň ýerine-ýetirilişinden başgada praktikada (tejribelikde) çylşyrymly meseleleri çözmeklige duş gelinýär. Şeýle ýagdaýda çyzykly däl, funksional potensiometrler ulanylýar. Bu görnüşli funksional potensiomertleriň daşky gatlagy (karkasy) göni çyzykly däl, ýagny onuň profili egri bolýar. Onuň daşky gatlagyna, ýagny karkasyna uly udel garşylykly sim saralýar. Potensiometriň çykyşyna hemişelik naprýaženiýa berilýär, şol naprýaženiýanyň esasynda bolsa onuň süýşüriji guralyna funksional bagly bolan naprýaženiýa alynýar. Häzirki wagtda, esasan: sinus-kosinus, logarifmiki, parabolik baglanyşykly funksional potensiometrler ulanylýar.

- ***Integrirleýji düwün*.** Kondensatordan hem-de (RC-zynjyr) rezistordan düzülen passiw dörtpolýusnigi integrirleýji düwün görnüşinde görkezmek bolar. (Bu dörtpolýusnigiň çatgysy aşakdaky 7-nji suratda görkezilendir).



a) b)

7-nji surat. a)-njy çatgyda integrirleýji düwüniň çaygysy, b)-nji çatgyda bolsa onuň işiniň diagrammasy görkezilendir.

Hakykatdan-da, eger, bu dörtpolýusnik hiç hili ýüklenmedik bolsa, onda I_2 =0 bolar we bu ýagdaýda $I_1 = I_c$ bolar.

U_{gir} -giriş naprýaženiýadan U_{cyk} -çykyş naprýaženiýany bölüp aýyralyň:

$$U_{gir} - U_{cyk} = RC * d\,\frac{dU_{cyk}}{dt} \qquad (10)$$

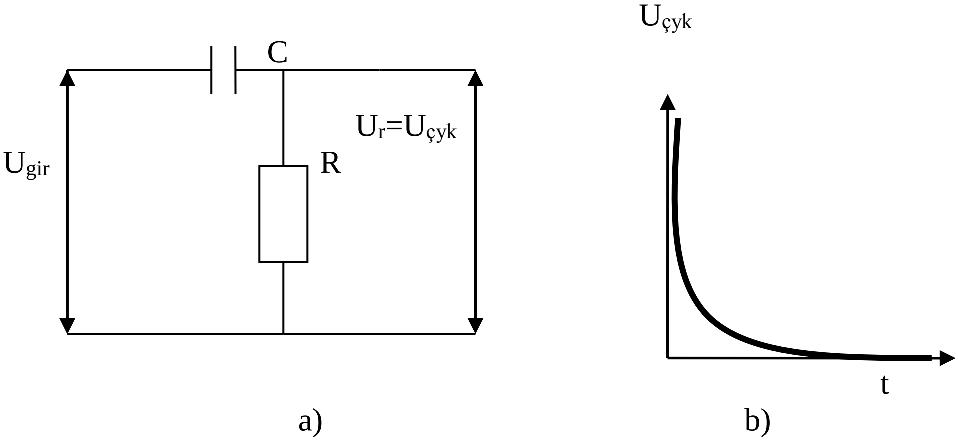
$U_{gir} \gg U_{cyk}$ -bolan ýagdaýynda:

$$U_{cyk} = \frac{1}{RC}\int_0^t U_{gir}\;dt \qquad (11)$$

Soňky (11)-formuladan görnüşi ýaly, 7-nji suratda görkezilen dörtpolýusnik (integrirleýji düwün), ýagny RC -zynjyr bu,

U_{gir} -funksiýadan t -wagt boýunça alnan integralyň masştabyny görkezýär. $T = RC$ köpeltmek hasylyna integrirlemegiň hemişelik wagty diýip aýdylýar.

- ***Differensirleýji düwün.*** Eger, passiw dörtpolýusnigiň rezistoryny we kondensatoryny 8-nji suratda görkezilen çatgy boýunça birikdirsek, onda bu ýagdaýda passiw dörtpolýusnigi differensirleýji düwün görnüşinde görkezmek bolar. Differensirleýji düwüne mysal edip RC -zynjyry görkezmek bolar.



8-nji surat.
a) Differensirleýji düwüniň çatgysy,
b) onuň işiniň wagtlaýyn diagrammasy.

Çatgydan görnüşi ýaly:

$$U_{cyk} = U_c + U_R \qquad (12)$$

Bu zynjyrdan geçýän tok (ýüklenme toguny (moka нагрузки) hasaba almasak):

$$I = C\frac{dU_c}{dt} \qquad (13)$$

Mälim bolşy ýaly, aktiw garşylykda naprýaženiýanyň aşak, pese gaçmasy:

$$U_R = IR = U_{cyk}$$

Onda, (13)-nji gatnaşyk aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$I = Cd\frac{(U_{gir} - U_{cyk})}{dt} = C(\frac{dU_{gir}}{dt}) - C(\frac{dU_{cyk}}{dt}) = \frac{U_{cyk}}{R} \qquad (14)$$

(14)-nji gatnaşygy özgerdeliň (proporsiýa esasynda):

$$RC\frac{dU_{cyk}}{dt} + U_{cyk} = RC\frac{dU_{gir}}{dt} \qquad (15)$$

RC-köpeltmek hasylyny (bu köpeltmek hasyly U_{gir} r-funksiýanyň differensirleme masştabyny görkezýär) T-hemişelik wagt bilen çalyşalyň.
Onda:

$$T(\frac{dU_{cyk}}{dt}) + U_{cyk} = T(\frac{dU_{gir}}{dt}) \qquad (16)$$

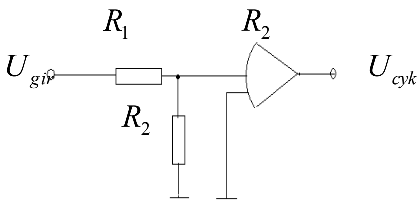
Adatça, differensirleýji düwün T-wagta görä örän az, ýeterlik derejede kiçi üýtgeýär. Şonuň üçin hem, eger T - wagt ýeterlik derejede örän kiçi bolsa, onda:

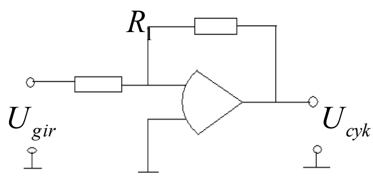
$$T(\frac{dU_{cyk}}{dt})U_{cyk} \quad (17)$$

Diýmek, bu ýagdaýda differensirleýji düwüniň deňlemesi:

$$U_{cyk} = T(\frac{dU_{cyk}}{dt}) \qquad (18)$$

Passiw elementlerden düzülen çözüji zynjyr açyk görnüşli zynjyrlaryň (звеньями разомкнутого) klasyna degişlidir. Bu düwünler berlen matematiki operasiýany çykyşdaky naprýaženiýanyň girişdäki naprýaženiýa bolan gatnaşygy bilen deňeşdireniňde has takyk jogaby berýär. Bu şertlerde çözüji zynjyryň yzygider birikdirilmegi bu, girişdäki naprýaženiýanyň has ýokarlandyrylmagyny talap edýär. Bulardan başga-da, çözüji elemente nagruzka berilse, ol ýerine ýetirilýän matematiki operasiýanyň kanunyny üýtgetmegi mümkin. Bu hadysalary ortadan ýok etmek üçin, her bir çözüji passiw elementiň çykyşyna 9-njy suratda görkezilen açyk görnüşli (разомкнутого типа) elektron güýçlendiriji goýulýar.





9-njy surat. Elektron güýçlendirijili, passiw
10-njy surat.Operasion güýçlendirijiniň çatylma shemasy.

Eger girişdäki tok ýeterlik derejede kiçi bolsa, onda:

$$\frac{U_{cyk}}{K} = U_{gir}(\frac{R_1}{R_1}) + R_2$$

Umuman, R_1 « R_2 -bolsa, onda bu düwünde:

$$U_{cyk} = K(\frac{R_1}{R_2})U_{gir} \qquad (19)$$

diýip kabul etmek bolar. (bu ýerde, R_1, R_2 - garşylyklar; K - güýçlendirijiniň güýçlendiriji koeffisiýenti). (19)-njy gatnaşykdan görnüşi ýaly, passiw, çözüji düwüniň çykyşyndaky naprýaženiýanyň üsti bilen, girişdäki naprýaženiýa, zynjyryň elementleriniň parametrleri, şeýle hem, güýçlendirijiniň K-güýçlendiriji koeffisiýentini kesgitläp bolýar. Şonuň üçin hem, bu çatgyda güýçlendiriji koeffisiýent has ýokary bir-sydyrgynlygy (стабильност) talap edýär, ony praktikada bu ýagdaý bilen berjaý etmek örän kyn. Hatda berjaý edilende-de, bu ýagdaýda ýalňyşlyk (погрешность) ýitip gitmeýär, sebäbi ol $\frac{R_1}{R_2}$ -gatnaşykdan baglydyr.

Ýalňyşlygy kiçeltmek üçin, bu çatga otrisatel ters aragatnaşyk girizilýär. Bu ýagdaýda, düwün-bu, otrisatel ters aragatnaşykly ýapyk görnüşli düwüne özgerdilýär. Rezistorly ters aragatnaşykly zynjyrdaky hemişelik togy güýçlendirijä we zynjyryň girişine operasion güýçlendirijiler diýilip aýdylýar (10-njy surat).

3. Operasion güýçlendirijiler

Hemişelik toguň operasion güýçlendirijileri-bu çyzykly matematiki operasiýalary ýerine-ýetirmek üçin niýetlenen gurluşdyr. (mysal üçin, funksiýalary goşmak, köpeltmek, differensirlemek, integrirlemek we ş.m.). Ol Ky-geçiriji koeffisientli aktiw dörtpolýusnikden rezistordan we geçiriji zynjyrdan ybaratdyr. Operasion güýçlendirijiler şu aşakdaky tertipde ýerine-ýetirilýär: ýagny, onuň işiniň takyklygy aktiw dörtpolýusnigiň parametrleriniň üýtgeýşinden bagly bolmaly däldir; ol ters aragatnaşyk zynjyrynyň we giriş zynjyrynyň parametrleri arkaly hem-de ol parametrleriň birdurklylygy bilen kesgitlenmelidir. Operasion güýçlendirijiniň esasy düwüni hökmünde durmuşda esasan hemişelik toguň elektron güýçlendirijisi ulanylýar. Operasion güýçlendirijiler ýarymgeçiriji enjamlarda we integral shemalarda ýerine ýetirilýär. Häzirki wagtda integral shemalarynda ýygnalan operasion güýçlendirijileri has giňden ýaýrap, olar kiçi göwrümliligi, ýokary ykjamlylygy we tiz hereketliligi bilen tapawutlanýar.

Operasion güýçlendirijiniň çykyşyndaky naprýaženiýanyň alamaty girişdäki naprýaženiýanyň alamatynyň ters alamaty goýulýar. Temperaturanyň üýtgemegi bilen iýmitlendiriji naprýaženiýada nol dreýf ýüze çykýar. (peýda bolýar). Alnyp barylýan işi birdurkly alyp barmak üçin we nol dreýfiň täsirini kiçeltmek üçin operasion güýçlendirijilerde otrisatel ters aragatnaşyk ulanylýar. Bu ýagdaýda güýçlendiriji koeffisiýent kiçeldilýär. Operasion güýçlendirijiniň çatylma shemasy 10-njy suratda görkezilendir. R_1 we R_2 rezistorlar arkaly geçýän tok:

$$I = \frac{(U_{cyk} - U_1)}{R_2} = \frac{(U_1 - U_{gir})}{R_1} \qquad (20)$$

Bu ýerden:

$$U_{cyk} - U_1 = R_2 \frac{(U_1 - U_{gir})}{R_1} \qquad (21)$$

Soňky gatnaşykdan: $U_{cyk} = -KU_1$-deňligi göz öňünde tutsak (bu ýerde: K-operasion güýçlendirijiniň güýçlendiriji koeffisiýentidir), onda:

$$U_{cyk} = \frac{(1+\frac{R_2}{R_1})}{K}(U_{cyk} - \frac{R_2}{R_1})U_{gir} \qquad (22)$$

Goý, $\frac{R_2}{R_1} = K^/$ -belgilemäni girizeliň. Onda (22)-deňlik:

$$U_{cyk} = \frac{1+K^/}{K}U_{cyk} - K^/U_{gir}$$

Görnüşinde bolar. Bu ýerden:

$$(1-\frac{1+K^/}{K})U_{cyk} = -K^/U_{gir}$$

Ýa-da:

$$U_{cyk} = -\frac{K^/U_{gir}}{1-\frac{1+K^/}{K}} \qquad (23)$$

Eger-de, operasion güýçlendirijiniň K-güýçlendiriji üçin: K»1; K»K'- deňsizlikleriň ters aragatnaşyksyz ýerine – ýetýändigini göz öňünde tutsak, onda ters aragatnaşykly operasion güýçlendirijiniň K 0-güýçlendirijisi üçin şu aşakdaky gatnaşyga eýe bolarys:

$$K_0 = \frac{U_{cyk}}{U_{gir}} = -\frac{K^{/}}{1 - \frac{1+K^{/}}{K}} = -K^{/} = -\frac{R_2}{R_1} \qquad (24)$$

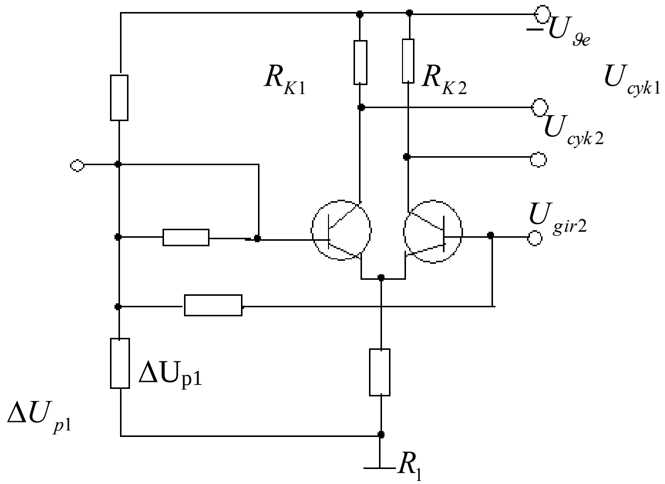
Görşümiz ýaly, otrisatel ters aragatnaşykly operasion güýçlendirijiniň güýçlendiriji koeffisiýenti esasan: $\frac{R_2}{R_1}$ - gatnaşykdan baglydyr. Operasion güýçlendirijiniň rugsat berilýän ýüklenmesiniň çykyşyna çatylmagy giriş we çykyş naprýaženiýalarynyň arasyndaky päsgelçilikleri döretmeýär, bu bolsa onuň esasy aýratyn artykmaçlygydyr. Operasion güýçlendirijiniň esasy ähmiýetli tarapy – onuň, fiksirlenen güýçlendirijili koeffisiýentli we ýeterlik takyklykdaky sintezirlenen geçiriji funksiýalaryň (çatgylarynyň) shemalarynyň gurulmagyndadyr.

✓ ***Operasion güýçlendirijileri esasan:***

stabilizatorlardaky naprýaženiýany gurmak üçin; generatorlarda signallary; aktiw filtirleri; masştab gurujy; logarifmirleýji; differensirleýji; integrirleýji we ş.m. beýleki güýçlendirijileri gurmak üçin ulanylýar.

Çylşyrymlylygyna bagly dällikde operasion güýçlendirijiniň prinsipial çatgysy 3-sany kaskaddan ybaratdyr: girişde differensial güýçlendirijiler; naprýaženiýany güýçlendirijiler; çykyşdaky güýçlendirijiler – diýen kaskadlardan ybaratdyr.

Operasion güýçlendirijiniň 1-nji kaskady differensial güýçlendirijiniň shemasy boýunça ýerine ýetirilýär. Operasion güýçlendirijileriň ähli girişdäki parametrleri girişdäki differensial kaskadlaryň häsiýetleri boýunça kesgitlenýär. 2-nji kaskadda umumy emmitorly çatma çatgysy bar. Güýçlendirijiniň koeffisiýentini güýçlendirmeden başga-da, ol girişdäki garşylyk bilen ahyrky kaskadlary öz aralarynda biri-biri bilen ylalaşdyrýar. Operasion güýçlendirijiniň çykyş kaskady-güýçlendiriji kaskadlaryň pes omly ýüklenmeleriň uly çykyş garşylyklary bilen ylalaşdyrmak üçin ulanylýar. Başgaça aýdylanda girişde az, pes garşylygy almaga mümkinçilik döredýär. Häzirki wagtda iki kaskadly operasion güýçlendirijileri taslanylýar. Olardaky 2-nji we 3-nji kaskadlar öz aralarynda biri-birleri bilen utgaşdyrylýar.



(bu ýerde, $U_{\vartheta e}$ -naprýaženiýany ölçeýji enjam)

11-nji surat. Simmetriki differensial güýçlendiriji kaskadyň shemasy.

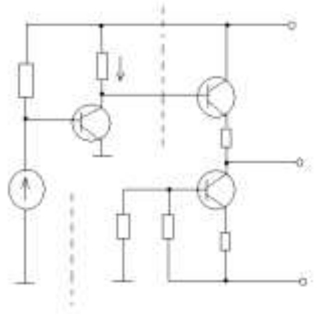
Bu kaskad U_{gir1} we U_{gir2} – signallaryň tapawudy üçin naprýaženiýa boýunça ýokary naprýaženiýany döredýär, hem-de, girişde täsir edýän (ΔU_{p1} we ΔU_{p2} – sinfazaly naprýaženiýalary) päsgelçilikleri ýokarlandyrýar. Girişdäki naprýaženiýa çeşmesi zeminlenmedikdir (не заземлен), bu tranzistorlaryň ikisinde hem 2-sany giriş bolýar.

Güýçlendirijiniň U_{gir}-giriş naprýaženiýasy dürlipolýarly U_{gir1} we U_{gir2} naprýaženiýalaryň tapawudyna deňdir. Netijede bir tranzistoryň bazasyna gelýän naprýaženiýa başga tranzistoryň bazasyna berilýän naprýaženiýadan emmitora görä has ýokarydyr. Sagdaky tranzistoryň üsti bilen akyp geçýän kollektrdäki tokdan uludyr we degişlilikde, R_{k2}-rezistordaky naprýaženiýanyň aşak gaçmasy , R_{k1}-rezistordaky naprýaženiýanyň aşak gaçmasyndan uludyr. Çykyşdaky: $U_{cyk} = U_{cyk2} - U_{cyk1}$ naprýaženiýa girişdäki naprýaženiýalaryň tapawudyna proporsionaldyr.

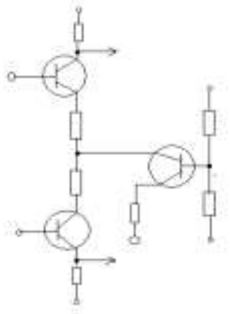
Girişde bolsa, iki kollektordaky tranzistorlarda döreýän naprýaženiýa päsgelçiligi birmeňzeşdir, sebäbi, kollektorlardaky tok deňdir. Edil, şuňa meňzeşlikde çykyşda hem, naprýaženiýa päsgelçiligi birmeňzeşdir.

Umumy emmitor R_e-garşylygy näçe uly boldugyça, şonça-da differensial güýçlendiriji kaskadlar gowy işleýär; ýöne, umumy emmitor R_e-garşylygyny ýokarlandyrmak üçin iýmitlendiriji naprýaženiýany hem ýokarlandyrmalydyr. Bu hadysany ortadan aýyrmak üçin, köplenç emmitor garşylygynyň ornuna derek, aşakdaky 12-nji suratda görkezilen, üýtgedilmeýän toguň shemasy boýunça çatylan tranzistor ulanylýar.

Çyzykly integral shemalar, köplenç, aşakdaky 13-nji suratda görkezilen $VT2$ we $VT3$-tranzistorlaryň kaskadly çatylyşy boýunça ýerine-ýetirilýär. $VT2$ we $VT3$-kaskadlardaky naprýaženiýalaryň geçiriji koeffisiýentleri bire golaýdyr. Sebäbi, kaskad munuň özi emmitor gaýtalandyryjysy bolup hyzmat edýär ($VT3$-tranzistoryň çykyşdaky R_{cyk3}-garşylyk rezistoryň R_4-garşylygyndan has uludyr).



12-nji surat. Üýtgeýänli toguň boýunça çatylan, tranzistorly differensial güýçlendiriji kaskadyň çatgysy.



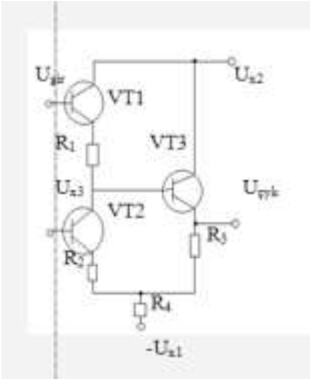
13-nji surat. Potensial deňlemeli kaskadyň shemasy.

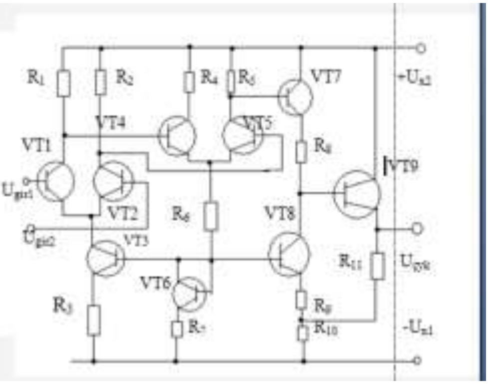
(bu ýerde: U_{xe} e- naprýaženiýany ölçeýji emmitor).

Aşakdaky 14-nji suratda 13-nji suratda görkezilen shema boýunça işleýän emmitor gaýtalandyryjysynyň (эммиттерного повторителя) shemasy görkezilendir.

Bu shemada R_4-rezistoryň üsti bilen çuň bolmadyk ters aragatnaşyk alynýar; ol 13-nji suratda görkezilen kaskadyň güýçlendiriji koeffisiýentini 1,5-esse artyk ýokarlandyrýar (ulaldýar).

Aşakdaky 15-nji suratda bolsa, 1YT401Б görnüşli operasion güýçlendiriji görkezilendir.





14-nji surat. Emmitor gaýtalandyryjy shema.

15-nji surat. 1 YT401Б – görnüşli operasion güýçlendirijiniň shemasy.

Operasion güýçlendirijiniň 1-nji iki kaskady differensial shema boýunça gurlandyr. Bu kaskadlaryň birinjisi birsyhly tok öndürýän generatorlardan $VT1$ we $VT2$-tranzistorlar arkaly iýmitlendirilýär. $VT3$ we $VT8$-tranzistorlaryň bazasyndan garyşdyrylyp alnan naprýaženiýa $R6-VT6-R7$-zynjyra berilýär ($VT6$-tranzistor diod tertibinde çatylandyr). Netijede bolsa, $VT3$ we $VT8$-tranzistorlarda temperaturanyň üýtgeme tertibini kompensirläp bolýar. $VT7$ we $VT9$-tranzistorlar bolsa, potensial deňlemeli kaskadlary 913-nji surat) we çykyşdaky kaskadlary (14-nji surat) şekillendirýärler. Seredilip geçilen operasion güýçlendirijiler ýygylygyň ýokary diapazonynda işleýär.

Operasion güýçlendirijiler adatça, biri-birine simmetrik bolan 2-sany çeşmelerden iýmitlenýärler.

Operasion güýçlendirijiler, onuň ähli kaskadlarynyň güýçlendiriji koeffisiýentleriniň köpeltmek hasyly arkaly häsiýetlendirilýär:

$$Ku(w)=\prod_{n=1}^{N} Kn \qquad (25)$$

(bu ýerde, $Ku(w)$-ters aragatnaşyksyz operasion güýçlendirijiniň naprýaženiýasy boýunça güýçlendiriji koeffisiýentidir, Kn-elementar kaskadlaryň güýçlendiriji koeffisiýentleri, w giriş signallaryň ýygylygy, N-kaskadlaryň sany).

Käbir operasion güýçlendirijileriň (hemişelik tok boýunça) güýçlendiriji koeffisiýentleri integral shemalarda $5*10^6$-baha çenli ýetip bilýär, ýöne ol, girişdäki signalyň ýygylygynyň artmagy bilen aşak, pese gaçýar.

4. Elektronly analogly gurluşlar.

Operasion güýçlendiriji gurluşlar: Strukturaly AHM-lerde matematiki operasiýalary ýerine-ýetirmek üçin operasion güýçlendirijileriň dürli görnüşde çatylyş shemalary ulanylýar:

1^0. Jemleýji tertipde çatylan operasion güýçlendirijileriň shemasy (1-nji tablisada görkezilen summatoryň prinsipial shemasy):

R-rezistordan akyp geçýän I-tok, $R_1, R_2, ...R_n$-rezistorlardan akyp geçýän, I_1, $I_2, ...I_n$-toklaryň jemine deňdir:

$$I=I_1+I_2+I_3+...+I_n \qquad (26)$$

Bize mälim bolşy ýaly:

$$\frac{U_{cyk}-U_1}{R}=\frac{U_1-U_{gir1}}{R_1}+\frac{U_1-U_{gir2}}{R_2}+\frac{U_1-U_{gir3}}{R_3}+...$$

U_1-naprýaženiýany beýleki naprýaženiýalar bilen deňeşdireniňde onuň ýeterlik derejede kiçidigi sebäpli, ony bu soňky gatnaşykda $U_1 \approx 0$ diýip kabul etmek bolar. Onda:

$$U_{cyk} \approx -\frac{R}{R_1}U_{gir1}-\frac{R}{R_2}U_{gir2}-\frac{R}{R_3}U_{gir3}-...$$

Eger:

$$R=R_1=R_2=...=R_n-\text{bolsa, onda:}$$

$$U_{çyk}=-(U_{gir1}+U_{gir2}+U_{gir3}...+U_{girn}) \quad (27)$$

Alnan soňky gatnaşykdan görşümiz ýaly operasion güýçlendirijiniň çykyşyndaky napryaženiýa talap edilýän jeme deňdir. (ýagny girişdäki napryaženiýalaryň jemine deňdir). Bu gatnaşyk, käbir nagruskada çykyşdaky napryaženiýalaryň çatylyşy üçin hem dogrudyr.

2⁰. Differensirleýji tertipde çatylan operasion güýçlendirijiniň shemasy. (1-nji tablisa):

R-rezistoryň üstünden geçýän tok.

$$I=\frac{U_{cyk}-U_1}{R}=C\frac{d}{dt}(U_1-U_{gir}) \quad (28)$$

U_1-napryaženiýany U_{gir} we U_{cyk}-napryaženiýalar bilen deňeşdireniňde U_1-napryaženiýa ýeterlik derejede kiçi (ol nola golaý), şonuň üçin hem:

$$U_{cyk} \approx -RC\frac{dU_{gir}}{dt} \qquad (29)$$

Görşümiz ýaly, çykyşdaky ululyk girişdäki ululygyň önümine proporsionaldyr.

3^0. Integrirleme tertipde çatylan operasion güýçlendirijiniň shemasy. (1-nji tablisa):

R-rezistoryň üstünden geçýän tok:

$$I = C\frac{d(U_{cyk} - U_1)}{dt} = \frac{U_1 - U_{gir}}{R} \qquad (30)$$

Mälim bolşy ýaly: U_1-napryaženiýa ýeterlik derejede kiçi (ol takmynan nola golaý), şonuň üçin hem:

$$\frac{dU_{cyk}}{dt} = -\frac{1}{RC}U_{gir} \qquad (31)$$

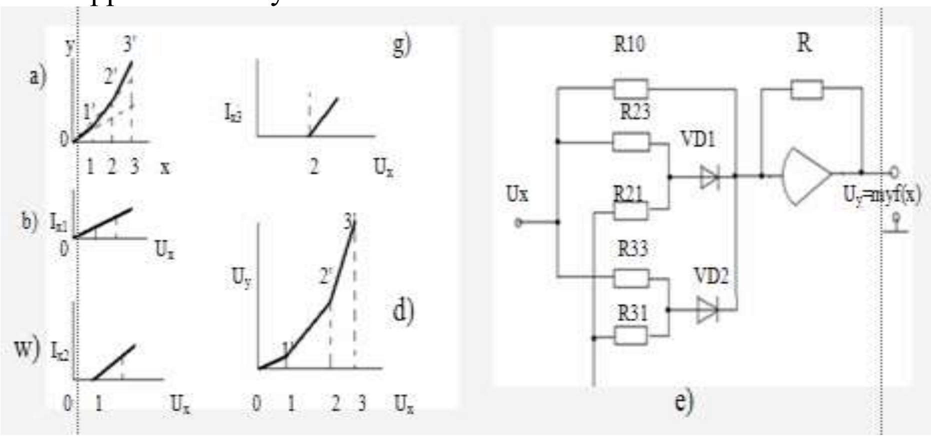
Bu ýerden:

$$U_{cyk} = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_{gir}dt \qquad (32)$$

Görşümiz ýaly, çykyşdaky naprýaženiýa ululygy girişdäki naprýaženiýanyň ululygyndan alnan integrala proporsionaldyr we RC zynjyryň parametrinden baglydyr. 1-nji tablisada başgada birnäne operasion güýçlendirijileriň çatylyş shemasy görkezilendir.

Diodly funksional özgerdijiler. Berlen funksional baglanşygy almak üçin strukturaly AHM-lerde diodly funksional özgerdijileri ulanylýar. (bu özgerdijileriň işleýiş prinsipinde, diodyň häsiýetinde belli bir ugur boýunça ugrukdyrylan tok boýunça işleýär).

Bölekleýin-çyzykly approksimasiýa usulyndan peýdalanyp berlen çyzykly funksiýany approksimirläp bolýar. Bu ýagdaýda berlen funksiýa bölekleýin-döwük egri boýunça approksimirlenýär. Şeýle ýagdaýda, δ-takyklyk ýüze çykýar, özi hem, berlen bölek kesimleriň ordinatalary bilen approksimirlenen funksiýanyň arasyndaky tapawut ±δ-dan geçmez ýaly edip bu bölek kesimde gurulmalydyr. Mysal üçin, aşakdaky 16-njy(a)-suratda, $y = f(x)$ funksiýa $0' - 1'$, $1' - 2', 2' - 3'$-kesimlerde döwük egriler boýunça approksimirlenýär.



16-njy surat. (Bölekleýin çyzykly approksimirleme we funksional özgerdijiniň shemasy).

Bu egriler 3(üç) – sany tok görnüşinde (16-njy (b), (g) suratlarda) häsiýetlendirilýär. Hökmany jemleýji tokly häsiýetnama-bu tokly häsiýetnamalaryň superpazisiýa ýoly boýunça häsiýetlendirilýär. Ol, 16-njy (e)-suratda görkezilen, operasion güýçlendirijiniň girişindäki U_1-naprýaženiýa çatylan üç sany shema arkaly alynýar. Bu shemalaryň 1-njisi çyzykly R_{10}-rezistordan ybaratdyr; 2-njisi R_{21}, R_{23},-rezistorlardan we $VD1$-dioddan ybaratdyr; 3-njisi bolsa, R_{31} R_{33}-rezistorlardan we $VD2$-dioddan ybaratdyr.

Funksional özgerdijiniň çykyşyndaky naprýaženiýa (16-njy (d)-surat) ýerine ýetiriji funksiýa (воспроизводимой функции) proporsionaldyr.

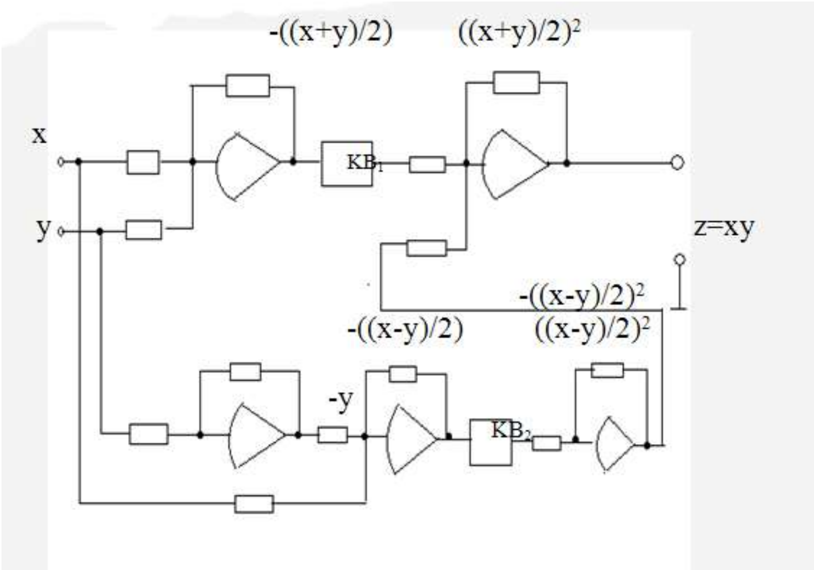
Diodly funksional özgerdijiler üçin ýokarda seredilip geçilen usul: sinusly elektron gurluşlarda, kosinusly elektron gurluşlarda, bölekleýin-köpeldiji gurluşlarda we ş.m. beýleki funksional gurluşlarda ulanylýar.

✓ ***Köpeldijili gurluşlar.*** Diodly özgerdijilerde ulanylýan köpeldiji shemalary iş ýüzünde geçirmek üçin, şu aşakdaky matematiki baglanyşyk ulanylýar:

$$z = xy = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2 \qquad (33)$$

görşümiz ýaly, (33)-nji gatnaşykda, köpeltmek operasiýasy, goşmak operasiýasy we kwadrata göterme operasiýasy bilen çalşyrylýar. Goşmak operasiýasy operasion güýçlendiriji arkaly ýerine-ýetirilýär; kwadrata göterme operasiýasy bolsa, diodly funksional özgerdiji arkaly ($y = x^2$ funksiýa – bölekleýin döwük egri boýunça approksimirlenýär) ýerine-ýetirilýär. Kwadrata göteriji operasiýany ýerine-ýetiriji gurluşa **kwadrator** diýilip aýdylýar.

Aşakdaky 17-nji suratda (33)-nji formulany iş ýüzüne geçiriji köpeldiji gurluşyň shemasy görkezilendir.

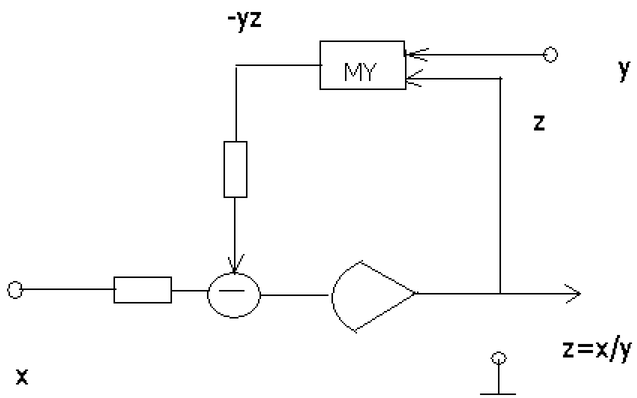


17-nji surat. (Köpeldiji gurlyşyň shemasy).

Shemadan görşümiz ýaly, goşmak we aýyrmak kwadratlary operasion güýçlendirijide şekillendirilýär. $\frac{(z+y)}{2}$ – ýarymjem K_{b1}-kwadratora berilýär, ($\frac{(x-y)}{2}$) – ýarymtapawut bolsa K_{b1}-kwadratora berilýär. Giriş ululyklarynyň kwadratlarynyň jemi we tawawudy operasion güýçlendirijide jemlenýär, köpeldiji gurluşyň çykyşynda bolsa, $z = xy$ köpeltmek hasyly şekillendirilýär.

✓ ***<u>Bölüji gurluşlar.</u>*** Ýokarda seredilip geçilen köpeldiji gurluşlarda ulanylan usullary tersine gaýtalap, ýagny ters gatnaşyk prinsipini ulanyp köpeldiji gurluşyň kömegi bilen

$z = xy$ – bölüji gurluşy ýerine-ýetirip bolýar. Goý, umumylygy kiçeltmezden, z -ululygyň bahasy belli bolsun. Onda, köpeldiji gurluşyň girişine: z we y-köpeldiji ululyklary bereliň. Alnan yz-köpeltme hasylyny x -ululyk bilen deňeşdireliň (18-nji surat). Bu ululyklaryň tapawudy, ýagny, $\Delta = x - yz$ tapawut operasion güýçlendirijide güýçlendirilýär. Operasion güýçlendirijiniň uly, ýokary güýçlendiriji koeffisiýentiniň bardygyny göz öňünde tutup, $\Delta = x - yz$ =0-diýip kabul etmek bolar. Şeýlelikde, görşümiz ýaly, onuň çykyşynda $z = \dfrac{x}{y}$ -ululyk alynýar.



18-nji surat. (Bölüji gurlyşyň shemasy).

✓ ***<u>Wagt boýunça funksiýany işläp taýýarlaýjy gurluşlar.</u>***

Berlen $U_{cyk} = f(t)$ wagt funksiýany almak üçin, integral güýçlendirijini we funksional özgerdijini peýdalanmalydyr.

$P1$ -kontaktly reläni zamykat etdirdip, (19-nji (a)-surat), integral güýçlendirijiniň girişindäki naprýaženiýany basgançaklaýyn (böwüsmeleýin) üýtgedip bolýar. Güýçlendirijiniň çykyşyndaky bu böwüsmäni integrirläp şeýle netijä gelýäris, ýagny, funksional özgerdijiniň girişindäki naprýaženiýa wagta proporsional bolar, $U_{gir} = Kt$

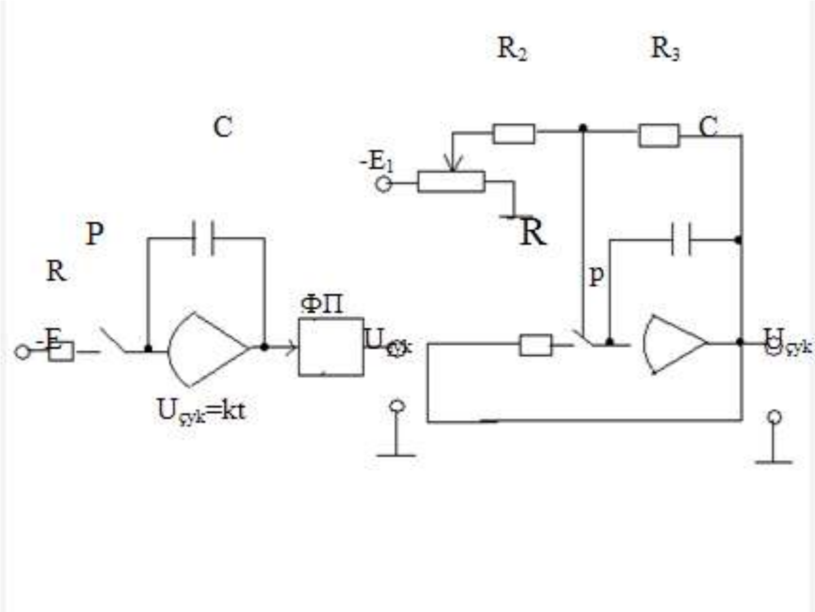
Funksional özgerdijiniň çykyşynda bolsa,

$U_{cyk} = f(U_{gir}) = f(Kt)$ -bolar.

Käbir wagt funksiýalary köplenç kömekçi deňlemeleriň çözülişiniň netijesi arkaly çözülýär. Mysal üçin, $U = Ee^{-kt}$ – funksiýany kesgitlemeli. Onuň üçin bu funksiýanyň önümini tapalyň.

$$\frac{dU}{dt} = -KEe^{-kt} = -KU \qquad (34)$$

(34)-nji deňlemä, $t = 0$– başlangyç wagta berip, $U(0) = E$– başlangyç şerte eýe bolup bolýar.



19-njy surat. (wagt funksiýany işläp taýýarlamagyň shemasy).
a) berlen funksiýa.
b) funksiýanyň önümi.

Bu funksiýanyň önümini tapmak üçin, 19-njy (b)-suratda görkezilen shemadan peýdalanýarys. Deňlemäni çözmekden öňinçä, integral güýçlendirijiniň çykyşynda E-naprýaženiýany (mälim bolşy ýaly, E-naprýaženiýa bu ýere başlangyç şertdir) dikeldeliň. Onuň esasynda bolsa, shemanyň çykyşynda woltmetr birikdirilýär we $R1$-rezistor arkaly $U = E$ dikeldilýär. Integral güýçlendirijiniň geçiriji koeffisiýenti K-deň bolmalydyr. $K = \dfrac{1}{RC}$ $P1$-rele täzeden çatylandan soňra, shemanyň çykyşyndaky naprýaženiýa eksponensial kanun boýunça üýtgeýär.

II BAP

1. San matritsalary we olaryň üstündäki amallar.

1. <u>esasy düşünjeler we kesgitlemeler.</u>

m-sany setirden we *n*-sany sütünden ybarat bolan tablisa gönüburçly gönüburçly matritsa diýip aýdylýar. Matritsalar, umuman baş latyn harplary bilen belgilenýär. Mysal üçin, *A*, *B*, *C* we ş.m. harplar bilen belgilenýär.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{vmatrix} = [a_{ij}] \qquad (1)$$

Bu tablisada indeksleriň 1-njisi setiriň nomerini görkeňýär; indeksleriň 2-njisi bolsa, şol elementiňýerleşýän sütüniniň nomerini görkeňýär. Mysal üçin, a_{ij}-element, tablisanyň i-nji setiriniň j-nji sütüninde ýerleşýändir. Matritsanyň $a_{ij}(i=\overline{1,m}, j=\overline{,1n})$–elementleri hakyky ýa-da kompleks sanlar sanlar bolup bilerler.

Eger, matritsada *m*=*n* bolsa, ýagny, matritsanyň setirleriniň sany bilen sütünleriniň sany deň bolsa, onda bu matritsa kwadrat matritsa diýilip aýdylýar. Bu matritsa aşakdaky görnüşde berilýär.

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} b_{12} ... b_{1n} \\ b_{21} b_{22} ... b_{2n} \\ .... \\ b_{n1} b_{n2} ... b_{nn} \end{vmatrix} = [b_{ij}] \quad (2)$$

Eger, ölçegleri deň bolan 2-sany *A* we *B* - matritsalarda *A*-matritsanyň degişli elementi *B*-matritsanyň degişli elementine deň bolsa, onda bu matritsalara özara deň matritsalar diýlip aýdylýar. Ýagny, eger, $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$-matritsalar üçin,

$$a_{ij} = b_{ij}, (i =, \overline{m}; j = 1, \overline{n})$$

bolsa, oňa

$$A = B$$

bolar.

Eger, $A - [a_{ij}]$- matritsanyň setirleriniň orny bilen, degişlilikde sütünleriniň ornuny çalyşsak, ýagny, $[a_{ij}]$ bolsa, onda alnan $A^T - [a_{ij}]$ matritsa $A - [a_{ij}]$ matritsanyň transponirlenen matritsasy diýlip aýdylýar.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, (1)-matritsanyň transponirlenen matritsasy.

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} ... a_{m1} \\ a_{12} a_{22} ... a_{m2} \\ .... \\ a_{1n} a_{2n} ... a_{mn} \end{vmatrix} = [a_{ij}] \quad (3)$$

görnüşe eýe bolar.

(3)-nji matritsadan görnüşi ýaly, A^T-matritsanyň ölçegi *(n*m)*-e deňdir.

Matritsalaryň üstündäki algebraik operasiýalara seredip geçeliň.

1^0. Goý ölçegleri deň bolan A $-\left[a_{ij}\right]$we B $-\left[a_{ij}\right]$ $(i=,\overline{m}; j=1,\overline{n})$ - matritsalar berlen bolsun. Onda bu matritsalaryň jemi, ýa-da tapawudy:

$$C = A \pm B = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{m1}b_{m2}..._{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11}a_{12} \pm b_{12}...a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21}a_{22} \pm b_{22}...a_{2n} \pm b_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \pm b_{m1}a_{m2} \pm b_{m2}...a_{mn} \pm b_{mn} \end{vmatrix} = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right] \quad (4)$$

2^0. *A=[a_{ij}]*-matritsany λ-sana köpeltmek üçin, onuň her bir elementini köpeltmelidir. Ýagny:

$$C = \lambda * A = \begin{vmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}...\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}...\lambda a_{2n} \\ .... \\ \lambda a_{m1}\lambda a_{m2}...\lambda a_{mn} \end{vmatrix} = \left[\lambda a_{ij}\right] \quad (5)$$

(4)-we (5)-nji formulalardan görşümiz ýaly, matritsany hemişelik sana köpeldenimizde matritsalary biri-biriniň üstüne goşanymyzdaýa-da aýyranymyzda, alnan C-matritsanyň ölçegi üýtgemeýär, ýagny şol *(m*n)*-ölçegliligine galýar.

3⁰. Iki sany matritsany biri-birine köpeltmek üçin, köpeldilýän matritsalaryň 1-njisiniň sütünleriniň sany bilen köpeldilýän matritsalaryň 2-njisiniň setirleriniň sany deň bolmaly.

Ýagny, eger $A = \left[a_{ij}\right], (i = \overline{1, m_1};\ j = \overline{1, n_1})$ we $B = \left[b_{ij}\right], (i = \overline{1, m_2};\ j = \overline{1, n_2})$ matritsalar berlen bolsa, onda bu matritsalary biri-birine köpeltmek üçin

$$n_1 = m_2 = n$$

bolmaklygy hökmanydyr.

($n_1 \neq m_2$-bolan ýagdaýynda bu matritsalary biri-birine köpeldip bolmaýar).

Onda:

$$C = A * B \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m_1 1}a_{m_1 2}...a_{m_1 n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n_2} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n_2} \\ .... \\ b_{n1}b_{n2}...a_{nn_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} ... \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn_2} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} ... \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn_2} \\ .... \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m_1}b_{k1} \sum_{k=1}^{n} a_{m_1 k}b_{k2} ... \sum^{n} a_{m_1 k}b_{kn_2} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

(6)-njy formuladan görnüşi ýaly, $C = [c_{ij}], (i = \overline{1, m_1}; j = \overline{1, n})$ matritsanyň c_{ij}-elementleri aşakdaky gatnaşyk boýunça kesgitlenýär:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, (i = \overline{1, m_1}; j = \overline{1, n_2}) \quad (7)$$

Ýokardaky aýdylanlardan şeýle netijä gelip bolýar.
(m_1/n)-ölçegli A-matritsany (n*n_2)-ölçegli B-matritsa köpeldenimizde, alnan *C*-matritsanyň ölçegi *(m_1*n_2)*-deňdir.

Umumylygy berkitmek üçin aşakdaky bir mysala seredip geçeliň.

<u>Mysal 1.</u>

Goý aşakdaky:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ we } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matritsalar berlen bolsun.

Bu matritsalary C=A*B-köpeltmek hasylyny tapmak talap edilýän bolsun. Onda (6)-njy formula esasynda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 2\cdot 2 + 3\cdot 4 & 2\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 5\cdot 1 + 1\cdot 3 & 5\cdot 2 + 1\cdot 4 & 5\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+9 & 4+12 & 2+6 \\ 5+3 & 10+4 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Şeýlelikde:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 8 \\ 8 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Käbir halatlarda matritsalaryň köpeltmek hasylyndan alnan matritsanyň transponirlenen matritsasyny tapmak talap edilýär.

Aşakdaky deňligiň dogrudygyny subut edip görkezeliň:

$$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (8)$$

Goý, A $-[\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}]$ B $-[\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}]$bolsun. Onda (7)-nji formula esasynda:

$$A\cdot B = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\right]$$

Bolar. Onda (3)-formula esasynda:

$$(A\cdot B)^T = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ki}\right] \quad (*)$$

A we B-matritsalaryň transponirlenen matritsasy:

$$B^T = [b_{ji}] \text{ we } A^T = [a_{ji}]\text{-bolar.}$$

Bu transponirlenen matritsalar üçin (7)-nji formulany ulanarys:

$$B^T \cdot A^T = \sum_{k=}^{n} b_{ki} \cdot a_{ik} \quad (**)$$

Görşümiz ýaly, *(*)* we *(**)*-formulalaryň sag taraplary deňdir. Şonuň üçin hem:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

2. Matritsalaryň häsiýetleri.

Matritsalaryň käbir häsiýetlerine seredip geçeliň:

1⁰. Matritsalary goşmak operasiýasy kommutatiw häsiýete eýedir:

$$A \cdot B = B \cdot A \qquad (9)$$

2⁰. Matritsalary goşmak operasiýasy assosiatiw häsiýete eýedir:

$$A + (B \cdot C) = (A \cdot B) + C \quad (10)$$

Şu ýokardaky seredilip geçilen matritsalaryň 1-nji we 2-nji häsiýetlerinden şeýle netijä gelip bolar:

Eger birinji n-sany matritsa berlen bolsa, onda bu matritsalary islendik tertipde, ýagny tertibini üýtgedip, ýaýyň ornuny üýtgedip goşup bolýar.

3^0. $A=[a_{ij}]$-matritsa üçin şeýle bir ýeketäk X-matritsa bar bolsun:

$$A+X=A \qquad (11)$$

Gatnaşyk ýerine ýetýändir.

Bu matritsa **nol matritsa** diýilip aýdylýar we onuň ähli elementleri nola deňdir.

$$X=0=\begin{pmatrix} 0 & 0... & 0 \\ 0 & 0... & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{.................} \\ 0 & 0... & 0 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

4^0. Käbir A-matritsa üçin, şeýle bir ýeketäk Y-matritsa bar bolsun:

$$A+Y=0 \quad (13)$$

Gatnaşyk ýerine ýetýändir.

Bu Y-matritsanyň her bir elementi A-matritsanyň ters alamatly elementine deňdir. Ýagny:

$Y=\lfloor -a_{ij} \rfloor$-bolar.

Kesgitlemeden:

$$+Y=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_{11}-a_{12}...-a_{1n} \\ -a_{21}-a_{22}...-a_{2n} \\ .... \\ -a_{m1}-a_{m2}...-a_{mn} \end{pmatrix}=\left[a_{ij}\right]+\left[-a_{ij}\right]=0$$

Bu ýagdaýda *Y*-matritsa *A* bilen bilelikde we *A*-matritsanyň ters matritsa diýilip aýdylýar.
Görşümiz ýaly:

$$-A=\begin{pmatrix} -a_{11}-a_{12}...-a_{1n} \\ -a_{21}-a_{22}...-a_{2n} \\ .... \\ -a_{m1}-a_{m2}...-a_{mn} \end{pmatrix}=\left[-a_{ij}\right] \quad (14)$$

Ölçegleri deň bolan 2-sany *A* we *B* – matritsalaryň tapawudy: *A*-*B*-diýip:

B+*C*=*A* gatnaşygy kanagatlandyrýan *C*-$[c_{ij}]$-matritsa aýdylýar. Iki matritsanyň tapawudy *A* we *(-B)*-matritsalaryň jemine deňdir. Ýagny:

$$C=A+(-B)$$

Hakykatdanda:

$$B+\left[A+(-B)\right]=B+\left[(-B)+A\right]=\left[B+(-B)\right]+A=0+A=A$$

Şeýlelikde:

$$B + C = A$$

Bu bolsa talap edilýän gatnaşykdyr.

<u>**5^0.**</u> *a* we *b* hemişelik sanlar hem-de *A*-matritsa üçin, aşakdaky gatnaşyk adalatladyr:

$$a(b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A = b(a \cdot A) \quad (15)$$

<u>**6^0.**</u> Ölçegleri deň bolan *A* we *B* matritsalar hem-de a-hemişelik san üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$a(A + B) = a \cdot A + a \cdot B \quad (16)$$

<u>**7^0.**</u> *a* we *b* – hemişelik sanlar hem-de *A*-matritsa üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$(a + b) = a \cdot A + b \cdot A \quad (17)$$

<u>**8^0.**</u> islendik matritsany 1-e köpeltmek ol ýene-de şol öňki matritsany berýär. Ýagny:

$$1 \cdot A = A \quad (18)$$

<u>**9^0**</u>. $(m_1 * n)$ – ölçegli *A*-matritsa we $(n * n_2)$-ölçegli *B*-matritsa hem-de *a*-hemişelik san üçin aşakdaky gatnaşyk adalatlydyr:

$$a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B \; (19)$$

10^0. Matritsalary köpeltmek operasiýasy assosiatiw häsiýete eýedir (matritsalary köpeldeniňde ýaýyň ornuny erkin üýtgedip bolýar). Ýagny:

$$A(BC) = (AB)C \qquad (20)$$

(bu häsiýeti ýerine-ýetirmek üçin *A*-matritsanyň ölçegi: m_1*n_1; *B*-matritsanyň ölçegi n_2*n_3-e deň bolmalydyr).

11^0. n^*n-ölçegli islendik kwadrat matritsalar üçin ýeketäk *E*-matritsa bar bolsun, ol aşakdaky gatnaşygy kanagatlandyrýandyr:

$$AE = EA \qquad (21)$$

Bu ýokardaky (21)-nji deňligi kanagatlandyrýan E- matritsanyň baş diagonalynda ýerleşýän elementleriň ählisi 1-e deň bolup, galan ähli elementleri nola deňdir. Ýagny:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0... & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0... & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

(22)-gatnaşyk boýunça berlen E-matritsa **birlik matritsa** diýilip aýdylýar.

E-birlik matritsanyň skalýar matritsasy diýip, onuň esasy baş diagonalynda ýerleşýän elementleriň ählisi birmeňzeş elemente deň bolup, galan ähli elementleri nola deň bolan matritsa aýdylýar. Ýagny, aşakdaky görnüşde berlen matritsa E-birlik matritsanyň skalýar matritsasy diýilip aýdylýar:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0... & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0... & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot E \quad (23)$$

12⁰. Matritsalary köpeltmek operasiýasy: matritsalary goşmak operasiýasyna görä distributiwlik häsiýetine eýedir. Ýagny:

$$(A+B)\cdot C = AC + BC \quad (24)$$

$$C(A+B) = CA + CB \quad (25)$$

Matritsalaryň häsiýetiniň 4^0-njisinden peýdalanyp, köpeltmek operasiýasy matritsalaryň aýyrmak operasiýasyna görä hem distributiwlik häsiýetini saklaýandyr. Ýagny:

$$(A-B)C = AC - BC \quad (26)$$

$$C(A-B) = cA - cB \quad (27)$$

13⁰. *(m_1*n_1)*-ölçegli *A*-matritsa we *(n_1*n_2)* – ölçegli B-matritsa hem-de λ-hemişelik san üçin, aşakdaky gatnaşyk ýerine-ýetýändir:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad (28)$$

Şy ýokardaky aýdylanlardan şeýle bir sorag ýüze çykýar, "ýagny matritsalary köpeltmekoperasiýasy kommutatiw häsiýete mahsusmy?" diýen soragpeýda bolýar. Ýok ol kommutatiw häsiýete eýe däldir.

Hakykatdan-da, goý, aşakdaky matritsalar berlen bolsun:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Onda

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B * A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Görşümiz ýaly:

$$A*B \neq B*A$$

Goý, aşakdaky $n*1$-ölçegli X-matritsa berlen bolsun:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad (29)$$

Onda bu X-matritsanyň transponirlenen X^T=-matritsasynyň ölçegi $(1*n)$-e deň bolar we ol aşakdaky görnüşe eýe bolar:

$$X^T = (x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (30)$$

Şeýlelikde, bir sütünli matritsany transponirläp bir setirli matritsany alarys. Bu görnüşdäki matritsalara **arifmetiki wektor** diýilip aýdylýar.

3. n-nji tertipli kesgitleýjiler.

(n*n)-ölçegli kwadrat matritsa seredeliň:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots.. & \ldots\ldots. & \ldots.. \\ a_{n1}\ a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Görşümiz ýaly, bu matritsa n^2-sany elementlerden ybaratdyr.
Kesgitleýji üçin aşakdaky belgileýji girizeliň:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots.. & \ldots\ldots. & \ldots.. \\ a_{n1}\ a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots.. & \ldots\ldots. & \ldots.. \\ a_{n1}\ a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Onda kesgitleýji aşakdaky formula boýunça tapylýar:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \dots i_n \\ j_1 j_2 \dots j_n}} (-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} \quad (3)$$

Bu ýerde: S-san i_1, i_2,..., i_n-indeksleriňkiden düzülip orun üýtgetmeleriň inwersiýalaryň sany, t-bolsa j_1, j_2,...,j_n-indeksleriň üstünde geçirilen inwersiýalaryň sany. Ýagny:

$$S = [i_1, i_2, \dots, i_n],$$
$$t = [j_1, j_2, \dots j_n]$$

Käbir mysallara seredip geçeliň:

<u>Mysal№1</u>

Aşakdaky 2-nji tertipli kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11} a_{22} + (-1)^{0+1} a_{12} a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (4)$$

<u>Mysal№2.</u>

Aşakdaky 3-nji tertipli kesgitleýjini hasaplalyň:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{0+2} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{2+0} a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+(-1)^{0+3} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)_{0+1} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{2+3} a_{23}a_{32}a_{11} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Diýmek:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \tag{5}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

4. Kesgitleýjileriň häsiýetleri

1^0. Eger, kwadrat matritsanyň setirleri bilen sütünleriniň ornuny çalyşsak, onda bu matritsalaryň kesgitleýjileri deňdirler. Ýagny, başga sözler bilen aýdanymyzda, kwadrat matritsanyň kesgitleýjisi bilen, oňa degişli bolan transponirlenen matritsanyň kesgitleýjisi deňdir:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2\ldots} & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n\ldots} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiler deňdirler:

$$D=\Delta$$

<u>2⁰.</u> Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiriniň elementleriniň ähli nola deň bolsa, onda ol kesgitleýjiniň özi hem nola deň.

<u>3⁰</u>. Eger kesgitleýjiniň islendik 2-sany setiriniň ornuny çalyşsak, onda alnan bu kesgitleýji bilen başdaky berlen kesgitleýji bilen absalýut ululygy boýunça deňdirler, alamaty boýunça biri-birine tersdir. Ýagny, aşakdaky matritsalar berlen bolsa

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2\dots} & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2}\dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2\dots} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Onda, bu kesgitleýjiler üçin

$$\Delta=-D$$

<u>4⁰</u>. Eger, käbir matritsanyň haýsy hem bolsa 2-sany setirleriniň elementleri öz aralarynda biri-birleri bilen degişlilikde deň bolsalar, onda bu kesgitleýji nola deň.

5⁰. Eger-de, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiriniň elementleriniň umumy köpeldijisi bar bolsa, onda bu umumy köpeldijini kesgitleýjiniň öňüne çykaryp bolýar.

Hakykatdanda,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ma_{k1} & ma_{k2}\ldots & ma_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots ma_{kj_k} \ldots a_{nj_n} =$$

$$= m * \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots ma_{kj_k} \ldots a_{nj_n} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ ma_{k1} & ma_{k2}\ldots & ma_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6⁰. Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa, 2-sany setiri özaralarynda biri-birleri bilen proporsional bolsalar, onda, bu kesgitleýji nola deňdir. Bu häsiýet, 4^0 we 5^0-nji häsiýetlerden gelip çykýar.

7⁰. Eger, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa, bir i-nji setiriniň her bir elementi 2-sany goşulyjy elementler görnüşinde berlen bolsalar, onda bu kesgitleýjini şol bir ölçegli 2-sany kesgitleýjiniň jemi görnüşinde özgerdip bolýar. Bu kesgitleýjileriň 1-njisiniň i-nji setirinde goşulyjylaryň 1-nji elementi, 2-nji kesgitleýjiniň i-nji setirinde bolsa, goşulyjylaryň 2-nji elementi ýerleşdirilendir. Galan setirleriniň elementleri bolsa, başdaky berlen kesgitleýjiniň elementlerine deňdir.

Hakykatdanda:

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2}\ldots & b_{in}+c_{in} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots (b_{kj_k} + c_{kj_k}) \ldots a_{nj_n} =
$$

$$
= \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots b_{kj_k} \ldots a_{nj_n} + a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots c_{kj_k} \ldots a_{nj_n}) =
$$

$$
= \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots b_{kj_k} \ldots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^t (a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots b_{kj_k} \ldots a_{nj_n}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{k1} & b_{k2}\ldots & b_{kn} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{k1} & c_{k2}\ldots & c_{kn} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

8^0. Eger kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setirini hemişelik sana köpeldip degişlilikde başga bir setiriniň üstüne goşulsa, ol kesgitleýjiniň bahasyny üýtgedip bilmeýär.

Hakykatdan-da, goý, D-kesgitleýjiniň k-nji setirini m-hemişelik sana köpeldip i-nji setiriniň üstüne goşalyň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} + ma_{k1} & a_{i2} + ma_{k2} \ldots & a_{in} + ma_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots & a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots & a_{kn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= D + mD_1$$

Kesgitleýjileriň 6^0-njy häsiýetine görä $D_1=0$ (sebäbi onuň 2-sany setiriniň elementleri özaralarynda deňdirler).

Şeýlelikde:

$$\Delta=D_1$$

8⁰.-nji häsiýetden şeýle netije gelip çykýar: ýagny, kesgitleýjiniň haýsy hem bolsa bir setiri başga bir setiriniň çyzykly kombinasiýasy bolsa, onda ol kesgitleýji nola deňdir.

6. Minorlar we algebraik doldurgyçlar.

Aşakdaky berlen n-nji tertipli kwadrat kesgitleýjä seredeliň:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a2 \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjide erkin k-njy setiri we k-njy sütüni *(1≤k≤n)*-alalyň. Bu setirler bilen sütünleriň kesişmesinden emele gelen elementlerden k-njy tertipli kesgitleýji düzüp bolýar. Oňa Δ-kesgitleýjiniň k-njy tertipli minory diýilip aýdylýar we ol M-harpy bilen belgilenýär. Galan beýleki elementlerinden *(n-k)*-tertipli kesgitleýjini düzüp bolýar. Oňa Δ-kesgitleýjiniň doldurgyç minory diýilip aýdylýar we ol $\overline{M}$ harp bilen belgilenilýär.

Umumylygy berkitmek üçin, aşakdaky bir mysala seredip geçeliň:

Mysal: aşakdaky kesgitleýjiniň 2-nji we 4-nji setirleri üçin Δ-kesgitleýjiniň minoryny we doldurgyç minoryny hasaplamaly:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Onda kesgitlemä görä, bu ýagdaýda 2-4-nji setirler we 1-3-nji sütünler üçin Δ-kesgitleýjiniň minory we doldurgyç minory aşakdaky görnüşe eýe bolar.

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \quad \overline{M} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Goý, a_{ij}-element Δ-kesgitleýjiniň käbir elementi bolsun (görnüşi ýaly, 1-nji tertipli minor kesgitleýjiniň elementidir.

Kesgitleýjiniň i-setiri bilen j-sütüninden düzülen $\overline{\text{M}}$-doldurgyç minoryna seredeliň. Eger-de bu doldurgyç minory $(-1)^{i+j}$-hemişelik sana köpeltsek,
Onda:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M} \qquad \text{bolar.}$$

A_{ij}-ululyga kesgitleýjiniň algebraik doldurgyjy diýilip aýdylýar.

Umumylygy berkitmek üçin bir mysala seredip geçeliň:

<u>Mysal:</u> aşakdaky kesgitleýjiniň A_{21}-algebraik doldurgyjyny tapmak talap edilýän bolsun:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Onda kesgitleýjä görä:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{13})$$

Teorema: islendik kesgitleýjiniň şol kesgitleýjiniň islendik setiriniň ýa-da sütüniniň elementlerini oňa degişli bolan algebraik doldurgyjyna köpeldip jemlesek ol başdaky kesgitleýjä deňdir. Ýagny, eger

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýji berlen bolsa, onda:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (6)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha j}A_{\alpha j} \qquad (7)$$

Teorema: eger n-nji tertipli kesgitleýjiniň islendik setiriniň elementlerini degişlilikde başga bir setiriniň algebraik doldurgyjyna köpeldip jemlesek, ol nola deňdir. Ýagny:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j) \quad (8)$$

Hakykatdan-da:

Aşakdaky kesgitleýjä seredeliň:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu Δ-kesgitleýjiden başga-da, aşakdaky Δ-kesgitleýjä seredeliň:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Görşümiz ýaly Δ-kesgitleýjiniň j-nji setiri i-nji setiri bilen gabat gelýär.

Şonuň üçin hem, kesgitleýjileriň 4^0-nji häsiýetine görä

$$\Delta=0$$

Δ-kesgitleýjiniň i-nji setiriniň algebraik doldurgyjyny B_{ij}-bilen belgiläliň; Δ-kesgitleýjiniň i-nji setiriniň algebraik doldurgyjyny bolsa A_{ij}-bilen belgiläliň.
Δ-kesgitleýji üçin (6)-njy formulany ulanalyň:

$$\Delta = a_{i1}B_{j1} + a_{i2}B_{j2} + ... + a_{in}B_{jn} = 0$$

Δ we Δ kesgitleýjiler özaralarynda biri-birleri bilen diňe j-nji setiri boýunça tapawutlanýarlar. Şonuň üçin hem,

$$A_{j1} = B_{j1}, A_{j2} = B_{j2}, ..., A_{jn} = B_{jn}$$

Şeýlelikde:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = 0$$

Ýokarda aýdylanlardan başga-da, aşakdaky gatnaşyk dogrudyr:

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + ... + a_{nk}A_{nl} = 0 \quad (9)$$

6. Kesgitleýjiniň tertibini kemeltmek usulyndan peýdalanyp hasaplanyşy

Kesgitleýjini haýsy hem bolsa bir setiriniň ýa-da sütüniniň elementleri boýunça dargadyp, kesgitleýjiniň tertibini kemeldip bolýar. Käbir mysallara seredip geçeliň:

1-nji mysal.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

bu kesgitleýjini 1-nji setir boýunça dargadalyň:

$$D = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (12+4-2-32) - 2\cdot(8+3-1-24) -$$

$$-3\cdot(4+36-32-6) = -18+28-6 = 4$$

$$D = 4$$

Bu kesgitleýjini 3-nji sütün boýunça dargatsak hasaplama prosesi has ýönekeýleşýär. Sebäbi, onuň 1-nji we 3-nji elementleri nola deň. Bu ýagny:

$$D = 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -4(8+4+27-24-3-12)-(2+6+12-18-4-2)=4$$

$$D = 4$$

Indi bolsa kesgitleýjini üçburçluk görnüşe getirip (çözeliň) hasaplalayň:

Eger kesgitleýjiniň baş diagonalynyň haýsy hem bir tarapyndaky elementler (diagonalyň aşak ýa-da ýokary ýüzünji elementler) nola deň bolsa, onda bu kesgitleýjini aňsatlyk bilen hasaplap bolýar. Bu kesgitleýjä **üçburçluk formadaky kesgitleýji** diýilip aýdylýar.

Bu ýagdaýda kesgitleýji: baş diagonaldaky elementleriň köpeltmek hasylyna deňdir.

2-nji mysal. Aşakdaky kesgitleýjini hasaplalyň:

$$D = \begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+c & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+d\end{vmatrix}$$

Onda kesgitleýjiler 7^0-häsiýetine görä, bu D-kesgitleýjini aşakdaky görnüşde özgerdip bolýar:

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \text{Formula}$$

Bu kesgitleýjileriň 1-njisi üçin: kesgitleýjileriň 8^0-häsiýetinden peýdalanarys, ýagny, 2-3-4-nji häsiýetlerinden 1-nji setiri aýyryp ýazarys;

Kesgitleýjileriň 2-njisi üçin bolsa, ýene-de 7^0-häsiýetden peýdalanarys:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Bu ýokardaky kesgitleýjileriň 2-njisiniň 1-nji setirinden umumy köpeldijisi a-y daşyna çykaralyň; kesgitleýjileriň 3-njisinden bolsa, 1-nji setirinden umumy köpeldiji a-y we 2-nji setirinden umumy köpeldiji b-i daşyna çykaryp bolýar.
Onda:

$$D = bcd + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Bu kesgitleýjileriň 3-nji we 4-nji sütünlerinden 2-nji sütüni aýyryp alarys:

$$D = bcd + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + \left|\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{matrix}\right\}\right|$$

Bu kesgitleýjileriň ilkinji 2-sanysyny kesgitleýjileriň üçburçluk formasyndan peýdalanyp, soňky 3-njisinden bolsa 4-nji sütüninden 3-nji sütünini aýyryp alarys:

$$D = bcd + acd + abc \cdot (1 + d) + ab\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} =$$

$$= bcd + acd + abc + abcd + abd =$$

$$= bcd + acd + abc + abd + abcd$$

7. Rekurent gatnaşyklaryň üsti bilen kesgitleýjileriň hasaplanyşy

Käbir halatlarda kesgitleýjileri rekurent formulalaryň üsti bilen aňsat hasaplap bolýar. Mysal üçi aşakdaky kesgitleýjini hasaplalayň:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Bu kesgitleýjä **Wandermondyň** kesgitleýjisi diýilýär. Bu kesgitleýjiniň 1-nji sütünini *($-a_1$)*-e köpeldip 2-nji sütüniniň üstüne goşalyň.
Onda

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1^2 \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indi bolsa *(*)* Wandermondyň kesgitleýjisiniň 2-nji sütünini *($-a_1$)*-köpeldip 3-nji sütüniniň üstüne goşalyň. Onda

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1... & a_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_n a_1... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 (a_2 - a_1)... & a_2^{n-1} \\ & & & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n (a_n - a_1)... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Indi bolsa *(*)*-Wandermondyň kesgitleýjisiniň 3-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 4-nji sütünininiň üstüne goşalyň:

$$V \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0...................................... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2 (a_2 - a_1). & a_2^3 - a_2^2 a_1... & a_2^{n-1} \\ .... & & & & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n (a_n - a_1) & a_n^3 (a_n - a_1)... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0...................................... & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2 (a_2 - a_1) & a_2^2 (a_2 - a_1)... & a_2^{n-1} \\ .... & & & & \\ 1 & a_n - a_1 & a_n (a_n - a_1) & a_n^2 (a_n - a_1)... & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Bu prosessi (n-1) –nji sütüne çenli dowam etdirip, alarys:

$$V_n\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1). & a_2^2(a_2-a_1)\dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & a_n^2(a_n-a_1)\dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} \quad (**)$$

Gysgaça aýdylanda *(*)*-Wandermondyň 1-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 2-nji sütünininiň üstüne goşup; 2-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 3-nji sütünininiň üstüne goşup; 3-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip 4-nji sütünininiň üstüne goşup we ş.m. (*n-1*)-nji sütünini *(-a_1)*-e köpeldip n-nji sütünininiň üstüne goşup *(**)*-kesgitleýjini alarys.

Bu V_n-kesgitleýjini 1-nji setiri boýunça dargadyp (ýagny tertibini kemeldip), alarys:

$$V_n\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1)\dots & a_2^{\,n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1)\dots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1)\dots & a_n^{\,n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot V_{n-1}$$

(bu ýerde V_{n-1}-kesgitleýji Wandermondyň $a_2, a_3, a_4,\dots,a_n$-elementlerden düzülen (n-1)-nji tertipli kesgitleýjisidir.

V_n-kesgitleýji üçin ýerine ýetirilen prosessi V_{n-1}-kesgitleýji üçin hem gaýtalap:

$$V_{n-1} = (a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_5-a_2)\dots(a_n-a_2) * V_{n-2}$$

Bu prosessi analitik usulda dowam etdirip; netijede Wandermondyň kesgitleýjisi:

$$V_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)...(a_n - a_1)...(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)...(a_n - a_{n-1})$$

Ýa-da

$$V_n = \prod_{n \geq i \rangle k \geq 1} (a_1 - a_k)$$

8. Matritsanyň rangy. Ters matritsa we onuň häsiýeti

Goý, *n*-ölçegli kwadrat *A*-matritsa berlen bolsun. Bu matritsanyň *k*-sany setirinden we k-sany sütüninden düzülen k-nji tertipli minoryna seredeliň.

Eger *A*-matritsanyň haýsy hem bolsa bir r-nji tertipli minory nola deň bolman, galan *(r+1)*-nji tertipden başlan ähli minorlary nola deň bolsa, onda bu r-sana *A*-matritsanyň rangy diýilip aýdylýar we ol

$$r = rangA$$

matritsanyň ähli elementleri nola deň bolan ýagdaýynda rang nola deň bolup bilýär, galan ýagdaýlarda ol noldan tapawutlydyr. Görşümiz ýaly, kesgitleýjisi nola deň bolmadyk kwadrat matritsanyň rangy onuň ölçegine deňdir. Ýagny:

$$r = n$$

Teorema: eger A-matritsada nola deň bolmadyk r-sany minory bar bolup, bu minory gurşap alan ähli *(r+1)*-nji tertipli minorlary nola deň bolsa, onda bu matritsanyň rangy nola deňdir.

Matritsanyň rangyny hasaplamak üçin, “gurşap alma” usulyndan peýdalanmak amatlydyr:

Ilki bilen nola deň bolmadyk r-nji tertipli minory tapmaly. Soňra bolsa, şol minora birikdirip, gurşap alan *(k+1)*-nji tertipli minorlary hasaplalaýň. Soňra gurşap alan ähli *(k+2)*-nji tertipli minorlary hasaplamaly. Bu prosessi nola deň bolmadyk r-nji tertipli minor tapylýança dowam etdirmelidir, ony ony gurşap *(r+1)*-nji tertipli minorlaryň ählisi bolsa nola deňdir. Nola deň bolmadyk soňky minoryň r-nji tertibi bolsa, bu matritsanyň rangy bolar.

Aşakdaky bir mysala seredip geçeliň:

Mysal: aşakdaky matritsanyň rangyny hasaplamak talap edilýän bolsun:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1-nji tertipli minor nola deň däl. Sebäbi $1 \neq 0$

Ony gurşap alan 2-nji tertipli minor (*A*-matritsanyň çep tarapynda ýerleşen) bolsa nola deň. Sebäbi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Bu ýokarda görkezilen 1-nji tertipli minory 2-nji setiri we 3-nji sütüni goşalyň. Onda gurşap alan minor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

Indi bolsa gurşap alan 3-nji tertipli minory hasaplalaýň:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Görşümiz ýaly *A*-matritsanyň 2-nji tertipli minory nola deň däl. Ony gurşap alan ähli 3-nji tertipli minorlar bolsa nola deň. Şonuň üçin hem bu matritsanyň rangy:

$$r = rangA = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

Kesgitleme:

*(n*n)*-ölçegli *A*-kwadrat matritsa üçin:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \qquad (10)$$

Gatnaşygy kanagatlandyrýan A^{-1}-matritsa A-matritsanyň ters matritsasy diýilip aýdylýar. (bu ýagdaýda A^{-1}-matritsanyň ölçegi hem *n*n*-deňdir)

Kesgitleme:

Transponirlenen A^T-matritsanyň algebraik doldurgyjyndan düzülen A-matritsa, başdaky berlen A-matritsa özara otnositel birikdirlen matritsa diýilip aýdylýar: ýagny, eger

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} bolsa, onda A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\ldots & A_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{n1} & A_{n2}\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: eger, berlen $n*n$-ölçegli A-kwadrat matritsanyň ters matritsasy bar bolsa, onda ol ýeke-täkdir.

Hakykatdan-da. (subudy)

Goý, A-matritsa üçin 2-sany A^{-1} we A_1-ters matritsalar bar bolsun. Onda ters matritsanyň kesgitlemesinden.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E; \quad AA_1 = A_1 A = E;$$

Soňky gatnaşygy çep tarapdan iki gapdalyny hem A^{-1}-e köpeldeliň:

$$A^{-1}(AA_1) = A^{-1} = E;$$

Ýa-da

$$A^{-1}(AA_1) = A^{-1} \quad (*1)$$

Matritsalaryň häsiýetlerinden peýdalanyp:

$$A^{-1}(AA_1) = (A^{-1}A)A_1 = EA_1 = A_1 \quad (*2)$$

*(*1)* we *(*2)*-formulalary özara deňeşdirip, alarys:

$$A^{-1} = A_1$$

Kesgitleme:

Eger, kwadrat matritsanyň kesgitleýjisi nola deň bolsa, onda bu matritsa aýratyn matritsa diýilip aýdylýar. Tersine ýagdaýda bu matritsa aýratyn däl matritsa diýilip aýdylýar.

Teorema. *(n*n)*-ölçegli *A* we *B*-kwadrat matritsalaryň köpeltmek hasylynyň kesgitleýjisi bu matritsalaryň kesgitleýjileriniň köpeltmek hasylyna deňdir. Ýagny:

$$|AB| = |A||B| \quad (12)$$

Subudy.

Goý, *(n*n)*-ölçegli *A* we *B*-matritsalar berlen bolsunlar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\ldots & b_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2}\ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsalaryň köpeltmek hasyly.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\ldots & c_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{n1} & c_{n2}\ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu ýerde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} (i_1 j = \overline{1_1 n}) \quad (13)$$

Bu matritsalaryň köpeltmek hasylynyň kesgitleýjisine seredeliň.

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2}\dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k2}\dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k2}\dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k2}\dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kn} \end{vmatrix}$$

Bu soňky kesgitleýjide: kesgitleýjiniň 7^0-nji häsiýetinden peýdalanyp hem-de her bir setiriň umumy köpeldijisini kesgitleýjiniň öňüne geçirip alarys:

$$|AB| = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_1} b_{k_1 2}\dots & a_{1k_1} b_{k_1 n} \\ a_{2k_1} b_{k_2 1} & a_{2k_2} b_{k_2 2}\dots & a_{2k_2} b_{k_2 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_n} b_{k_n 1} & a_{nk_n} b_{k_n 2}\dots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

$$== \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & b_{k_1 n} \\ b_{k_2 1} & b_{k_2 2}\dots & b_{k_2 n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k_n 1} & b_{k_n 2} & b_{k_n n} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjiniň 3^0-nji häsiýetinden peýdalanyp alarys:

$$|AB| = \sum_{k_1k_2...k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}... & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Bu ýerde: $t = [k_1k_2...k_n]$

Aşakdaky */B/*-kesgitleýjini, ýagny:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}... & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Kesgitleýjini jem belgisiniň öňüne geçirip we (3)-formuladan peýdalanyp alarys:

$$|AB| = |B| \sum_{k_{1.}k_2...k_n} (-1)^t a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n} = |B||A| = |A||B|$$

Teorema: (*).

Berlen *(n*n)*-ölçegli *A*-kwadrat matritsa diňe azan däl matritsa (adaty) bolan ýagdaýynda bu matritsanyň ters matritsasy (A^{-1})-bardyr.

Subudy:

Ilki bilen *A*-matritsa bagly bolan *A*-matritsany dňzeliň, hem-de ikisiniň köpeltmek hasylyny

$$AA = |b_{ij}|, ((\overline{i, j}) = 1,2,...,n) \quad (14)$$

Matritsalary biri-birine köpeltmek hasylynyň kesgitlemesinden peýdalanalyň.

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} \quad (15)$$

(6) we (8)-gatnaşyklardan:

$$b_{ij} = \begin{cases} |A|, hacandai = j \\ 0, hacandai \neq j \end{cases}$$

$$AA = \begin{vmatrix} |A| & 0\ldots & 0 \\ 0 & |A|\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & |A| \end{vmatrix} = |A|E \quad (16)$$

Şu usuly peýdalanyp:

$$AA = |A|E$$

Bolýandygyny subut edip görkezip bolýar.
Şerte görä:

$$|A| \neq 0$$

Şonuň üçin hem, soňky iki deňligiň iki tarapyny hem

$$\frac{1}{|A|} - e$$

köpeldip, alarys:

$$\frac{1}{|A|}(AA) = A(\frac{1}{|A|}A) = E$$

$$\frac{1}{|A|}(AA) = (\frac{1}{|A|}A) = E$$

Bu alnan soňky gatnaşyklar, berlen azan däl (adaty) *A*-matritsa üçin oňa ters bolan A^{-1}-matritsanyň bardygyny görkezýär:

$$A_{-1} = \frac{1}{|A|}A \quad (17)$$

Goý, onda *(n*)*-ölçegli A-matritsa azan (adaty däl) matritsa bolsun. Ýagny */A/=0* bolsun. Bu ýagdaýda, *A*-matritsanyň A^{-1}-ters matritsasy bar diýip kabul edeliň. Onda kesgitleme esasynda

$$AA^{-1} = E$$

Bolmaly. Ýöne, bilşimiz ýaly: */E/≠0* ýagny E-matritsa azan däl (adaty) matritsadyr.

Ýokarda subut edilen *(*)*-teorema esasynda soňky gatnaşyk diňe, *A* we A^{-1}-matritsalar azan däl (adaty) matritsalar bolan ýagdaýy üçin dogrudyr. Emma, mälim bolşy ýaly, biz başda *A*-matritsany azan (adaty däl) matritsa diýip kabul edip aldyk. Bu alnan gapma – garşylyk, azan amatritsanyň (adaty däl) ters matritsasynyň ýokdugyny subut edip görkezýär.

Indi bolsa,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (18)$$

Gatnaşygyň dogrudygyny subut edip görkezeliň. (bu ýerde *A* we *B*-matritsalar deň ölçegli, *(n*n)*-ölçegli kwadrat matritsalardyr.

Onuň üçin bolsa,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$$

Gatnaşygy subut edip görkezmeli bolýarys:

Matritsalary köpeltmek hasylynyň assosistiw häsiýetinden peýdalanyp alarys:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) - A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

Görşümiz ýaly, (18)-gatnaşyk adalatlydyr.

<u>Kesgitleme:</u>

*(n*n)*-ölçegli A-kwadrat matritsanyň bütin-otrisatel *(-k)*-derejesi diýip A^{-1}-ters matritsanyň özüne *k*-gezek köpeldilmegine aýdylýar: ýagny

$$A^{-k} = \frac{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}{k}$$

Edebiýatlar

1. Türkmenistanyň Konstitusiýasy. Aşgabat, 2008.
2. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. I tom. Aşgabat, 2008.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Ösüşiň täze belentliklerine tarap. Saýlanan eserler. II tom. Aşgabat, 2009.
4. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, Halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
5. Gurbanguly Berdimuhamedow. Türkmenistan – sagdynlygyň we ruhubelentligiň ýurdy. Aşgabat, 2007.
6. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Ministrler Kabinetiniň göçme mejlisinde sözlän sözi. (2009-njy ýylyň 12-nji iýuny). Aşgabat, 2009.
7. Türkmenistanyň Prezidentiniň «Obalaryň, şäherleriň, etrapdaky şäherçeleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin» Milli maksatnamasy. Aşgabat, 2007.
8. «Türkmenistany ykdysady, syýasy we medeni taýdan ösdürmegiň 2020-nji ýyla çenli döwür üçin Baş ugry» Milli maksatnamasy. «Türkmenistan» gazeti, 2003-nji ýylyň, 27-nji awgusty.
9. Основы вычислительной техники и программирования. В.В. Стрыгин. Л. С. Щарев.
10. Аналоговые и цифровые интегральные микросхемы. С. В. Якубовский. Н. А. Барканов. Л. И. Ниссельсон и др. Под ред. С. В. Якубовского. М. 1985.
11. Микропроцессоры и микропроцессорные комплекты интегральный микросхем. Справочник. Под ред. В. А. шахнова. М. 1988.
12. Применение интегральных микросхем в электронной вычислительной технике. Справочник. Р. В. Данилов. С. А. Ельцова. Ю. п. Иванов и др. под ред. Б. Н. Файзулаева. Б. В. Тарабрина. М. 1987 г.

M A Z M U N Y

Giriş 7

I B A P 11

1. Esasy maglumatlar 11

2. Passiw elementli AHM-yň gurluşy 18

3. Operasion güýçlendirijiler 28

4. Elektronly analogly gurluşlar 36

II B A P 45

1. San matritsalary we olaryň üstündäki amallar 45

2. Matritsalaryň häsiýetleri 51

3. n-nji tertipli kesgitleýjiler 58

4. Kesgitleýjileriň häsiýetleri 60

5. Minorlar we algebraik doldurgyçlar 65

6. Kesgitleýjiniň tertibini kemeltmek usulyndan peýdalanyp hasaplanyşy 70

7. Rekurent gatnaşyklaryň üsti bilen kesgitleýjileriň hasaplanyşy 74

8. Matritsanyň rangy. Ters matritsa we onuň häsiýeti 77

Edebiýatlar 87