TÜRKMEN POLITEHNIKI INSTITUTY

B.Çarygulyýew

MEÝDAN GEOFIZIKASYNYŇ MAGLUMATLARYNY IŞLEMEGIŇ ALGORITMLERI WE ULGAMLARY

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby

Aşgabat – 2010

B.Çarygulyýew, Meýdan geofizikasynyň maglumatlaryny işlemegiň algoritmleri we ulgamlary.

Ýokary okuw mekdepleri üçin okuw kitaby, Aşgabat – 2010 ý.

Giriş.

Hatarly filtrleme we spektral seljeriş signallary işläp taýýarlamagyň esasy operasiýalary bolup durýar, olar ylmyň we tehnikanyň hemme oblastlarynda giň ulanyşa eýe boldular. Bu oparesiýalar diskret görnüşinde (san görnüşinde) kompýuterlerde ýerine ýetirilip bilner. Köp ýagdaýlarda signallary we hatarly ulgamlary ýygylyk oblastynda ýazmaklyk uly gyzyklanma döredýär. Şunuň ýaly ýazgy signallary işlemegiň analog görnüşi üçin hem, diskret görnüşi üçin hem adalatlydyr. Ýygylyk oblastyndaky ýazga wagt oblastynda ýazmadan ozal köplenç ýol berilýär, has takygy, haçanda pes ýygylar filtrleme ýa-da hatarly filtrleme, differensirleme, interpolirleme we tekizleme göz öňüne tutulanda geçirilýär.

Signallary işlemegiň bu usullaryny telefoniýa, seýsmologiýa, gidrolokasiýa, radiolokasiýa we medisina ýaly ugurlarda ylmy barlaglar üçin ulanylýar.

Häzirki döwürde signallary işlemegiň san görnüşine has uly üns berilýär. Bu ders bolsa san signallary bilen işleýän, bu ugur boýunça bilim alýan, san taýdan işläp taýýarlamagyňmaglumatlaryny gündeki senagatişlerinde ulanýan, gofizikler, geologlar we beýleki çalymdaş ugurlaryň hünärmenlerine örän peýdaly bolar.

Has dogrusy, bu ders esasan hatarly san filtrlemesine we diskret spektral seljerilişine bagyşlanandyr, has uly ünse bolsa ýygylyk oblastynda signallary we ulgamlary ýazmaklyk eýedir. Sanly filtrleri taslamanyň esasy serişdesi – ýygylyk (spektral) syny. Ýygylyk syny sinuslaryň we kosinuslaryň periodiki funksiýalaryny ulanmaklyga esaslandyr. Esasy boýunça san filtriň spektral häsiýetnamasy – bu ulgamyň inçe içki gurluşydyr, filtr tarapyndan giriş maglumatlaryň özgerdiji esasyny doly kesgitleýän maglumatlaryň ýygylyk düzüminiň ugrukdyryp üýtgedýän onuň bir bahaly funksional pasporty. Maglumatlary differensirlemäniň we integrirlemäniň belli usulyýetlerine ulanmakda filtriň sinteziniň we ýygylyk synynyň meselelerine seredip geçeliň. Rekursiw däl filtrler iki funksiýanyň dolama algoritmini ýerine ýetirýärler

Kazual filtri fiziki ýagdaýda wagtyň häzirki wagt ölçeginde özleşdirilip bilner. Filtrlemäniň başlanmagy k<n bolanda x(k-n) nokatlar üçin N hasaplamalar bahalarynyň – kesgitli başlangyç bahalary berlende mümkindir. Adatça başlangyç şertler hökmünde nul bahalary berilýär, hasapalamanyň signalyň trendi ýa – da bahasy x(0), ýagny x(0) hasaplamanyň argument boýunça hasaplamanyň yzyna dowam etdirilmegi. EHM – da maglumatlar işlenip taýýarlanylanda kazual boýunça çäklendirilme aýyrylýar.

Filtriň programma dolanşygynda “geçen” we “geljek” k hasaplamalaryň häzirki nokadyna degişlilikde hasaplamalaryň giriş yzygiderlikleriniň bahalary (k+n, k+N' çenli) ýerleşip bilerler, şol bir wagtda dolamany gutarmak üçin (başlangyçdaky ýaly) (k+n)>K bolanda ahyrky şertleriň N' nokatlary gerekdir. N' = N we h(-n) = h(n) bolanda filtr iki taraplaýyn simmetriki filtr diýip atlandyrylýar.Simmetriki filtrler birtaraplaýyn filtrlerde tapawutlylykda işlenilýän signalyň fazasyny üýtgetmeýärler. Signallaryň san işlenip taýýarlanylşy signallaryň diskret özgertmesi we ulgamlaryň maglumaty işleýän signallary operirleýär. Diskret özgertmeleriň matematikasy analog matematikanyň çäklerinde baryp 18 asyrda döredi, ýöne 20 asyrda ilkinji hasaplaýjy maşynlaryň döremegi bilen uly ösüşe eýe boldy. Esasynda özüniň esasy manysynda diskret özgertmeleriniň matematiki apparatyanalog signallarynyň we ulgamlarynyň özgertmesine meňzeşdir. Ýöne maglumatlaryň diskretliligi bu fakty hasaba almagy talap edýär we ony inkär etmekuly ýalňyşlyklara getirip bilýär. Ondan başga – da diskret matematikasynyň bir giden hatary analitiki matematikasynda analoglara eýe däldir. Diskret san yzygiderlikleriň giň ýaýran syny hökmünde z – özgertme bolup durýar. Ol diskret diskret signallar we ulgamlar üçin Laplasyň özgertmesi analog signallarda oýnaýan roly ýaly orna eýedir. Z – özgertme signallary işläp taýýarlamakda rekursiw san ulgamlarynyň hasaby üçin uly baha eýedir, şonuň üçin hem rekursiw filtrleri öwrenip başlamazdan ozal aýratyn mowzuk hökmünde seredilip geçilýär.

Ýygylyk oblastynda san taýdan işleýän filtrleri hasaplamak.

Bu bölümden diskret zynjyrlaryň blok çyzgylary bilen ýygylyk saýlama setirleýin diskret ulgamlaryň (san taýdan işleýän filtrleriň) dürli klaslaryny hasaplamak üçin ulanylýar. Bu ulgamlara başgaça diskret ýa-da san filtrleri diýilýär. San taýdan işleýän filtrleri göni dolamagyň, setirleriň rekursiw deňlemeleriň ýa-da Furýeniň çalt özgertmesiniň kömegi bilen sintezirläp bolýar. Beýleki tarapdan san filtrleri hasaplamak üçin ulanylýan matematiki usullar impuls häsiýetnamanyň uzynlygynyň ahyrly bolmagyna ýa-da bolmazlygyna baglydyr, brinji ýagdaýda diňe nullara eýedir we polýuslara eýe däldir, ikinji ýagdaýda filtr polýuslara hem-de nullara eýedir.

Adaty ulanylýan terminologiýalara degişlilikde tükeniksiz uzynlygy bolan impuls häsiýetnamaly filtrlere – rekursiw, ahyry uzynlykly impuls häsiýetnamaly filtrlere bolsa

– rekursiw däl diýip atlandyrýarlar. Bu terminologiýa umumy kabul edilenden käbir tapawutlanýar, sebäbi **“rekursiw”** diýmek adatça çykyş signaly ozalky çykyş we giriş signallarynyň gözgin funksiýasydygyny aňladýar, **“rekursiw däl”** termini bolsa, çykyş signaly diňe ozalky giriş signallarynyň gözgin funksiýasydygyny aňladýar.

Eger-de ýokarda agzalan kesgitlemeleri dogry diýip hasap etsek, onda uzynlygynyň ahyry bolan impuls häsiýetnamaly islendik filtri rekursiw usullar bilen sintezirläp bolar. Umumy ýagdaýda şonuň ýaly filtrler setrileýin tapawut deňlemelerinden gelip çykyp, rekursiw usullar bilen sintezirlenýär. Şeýle-de polýuslary we nullary bolan filtrleri Furýeniň çalt özgertmesini ulanyp hem sintezirläp bolýar.

Bu barlaglar geçirilmezden ozal ýygylyk saýlanma filtrler göni dolama bilen eýýäm sintezirlendi. Köp sanly tejribe ýagdaýlarynda impuls häsiýetnama, gowy ýygylyk häsiýetnamasyny almak üçin 100 hasaplama uzynlygyna eýe bolmalydyr. Bu diýmek, çykyş signalynyň bir bahasyny almak üçin 100 sany köpeltme we goşma ýerine ýetirmek zerurdyr. Şunuň tersine şekili boýunça meňzeş ýygylyk häsiýetnamasyny almak üçinçykyş signalynyň bir bahasyny diňe 10 sany köpeltmek we goşmak talap edilýär.

Ýokarda getirilen mysaldan görnüşi ýaly rekursiw filtrlenmede (çykyş hasaplama – ozalky çykyş hasaplamalaryň hem, giriş signalynyň hem funksiýasy bolanda) hasaplamalyň tizligini ep-esli ýokarlandyryp bilýär.

Rekursiw däl filtrleriň hasaplamalaryny, h (nT) gysgaldylandygyny goýbersek, Furýeniň çalt özgertmesi bilen ýerine ýetirilip bilner (dolanmany göni hasaplamanyň tersine) we şonuň üçin köp sanly meseleler üçin rekursiw däl hasaplama geçirmek rekursiw bilen ýaryşyp biler.

San taýdan filtrleme dinamiki ulgamlary kompýuterde modelirlemäniň köp sanly programmalarynyň adaty bölegi bolup durýar. Ondan başga-da san taýdan işleýän düzüjileriň ölçegleriniň we bahalarynyň peselmegi san taýdan filtrlemäniň ýöriteleşdirilen enjamlaryny taslamaklygy has amatly edýär. Şunuň ýaly filtrler üznüksiz filtrlere görä kesgitli artykmaçlyklara eýedir. San taýdan işlemelerde takyklygyň ýokary derejelerine ýetip bolýar. San taýdan işleýän filtrleri örän pes ýygylyklarda ulanmak amatlydyr, sebäbi passiw analog elementleriň ululyklary ondan has uly bolýar.

San taýdan işleýän filtrleriň sintezi.

Analog filtrleri taslamaklyk golaýlaşdyrma meselesini we sinteziň meselesini çözmekde durýar. Birinji meselede ýerine ýetirilýän filtriň, käbit saýlanyp alnan ideal häsiýetnamasynyň approksimasiýasy bolanda, geçiş funksiýasy bolup durýar. mysal üçin, pes ýygylyklaryň ideal filtri göniburçly amplituda – ýygylyk häsiýetnama eýe bolmalydyr.

Şunuň ýaly funksiýany rezistor göwrümler we induktiwligiň kömegi bilen ýerine ýetirip bolýanlygy sebäpli laýyk approksimasiýany gözläp tapmaly bolýar. Köplenç ony toplum ýygylyk oblastynda polýuslaryň we melleriň ýerleşişini kesgitläp ýerine ýetirip bolýar.

Polýuslar we nullar tapylandan soňra hakyky elementler bilen geçiriji funksiýany hakykatda ýerine ýetirmek üçin sinteziň prosedurasyny tapmak zerurdyr. Mysal üçin polýuslaryň we nullaryň jübütlerini berip olaryň her birini ýönekeý rezonans çyzgylaryň kömegi bilen ýerine ýetirip, olary maskad ýa-da parallel berkitme mümkinçiligi bolsa-da, şunuň ýaly prosedurany ýerine ýetirmeklik operasion güýçlendirijiler bilen olary biri-birinden tapawutlandyrmak mümkin däldir. Şol sebäpli bu usul boýunça zynjyryň sinteziniň usullaryny oýlap tapmak üçin çyzyklary bölmek zerurlygyny aradan aýyrmaga berildi.

San taýdan işleýän filtrler üçin approksimasiýa meselesi manysy boýunça analog filtrlerinden tapawutlanmaýar. Ýöne, san elementlerine rezonatorlary çözmeklik mahsus bolany sebäpli, san zynjyryny hemişe polýuslaryň we nullaryň jübütleriniň kaskad ýa-da parallel kombinasiýalary görnüşinde ýerine ýetirip bolýar, onuň netijesinde analog zynjyrlaryň owadan sintez proseduralary sanly filtrleriň sintezi üçin gereksiz bolýar.

Ýokarda getirlen mysallar boýunça berlen san filtri ýerine ýetirmekligiň şol takyk usuly wajyp däl diýip hasap etmeli däldir. Kwantlamanyň sesleriniň effektleri saýlanyp alnan gurluşa baglydyr. Bu şertler öndürijiniň filtr bilen käbir işlenenden soňra amatly çözülýär.

San filtrleri kwantlama effekti.

Meseläniň goýluşy.

Häzirki wagta çenli seljeriş, hemişelik koeffisentleri bolan setirleýin tapawut deňlemeleriň matematiki nazaryýetine esaslanýar. Şeýlelik bilen, deňlemeler düzülende ulanylan hemişelik we üýtgeýän ululyklar üznüksiz diýip hasap etdik, ýagny olar islendik baha eýe bolup bilýär. Hakyky san filtrleri diskret ululyklara eýedir, sebäbi islendik san taýdan işleýän enjamyň çözümiň uzynlygy ahyrydyr. Filrtleriň deňlemelerine şonuň ýaly diskretlemäni girizmek çylşyrymlydyr.

Ýöne haçan-da kuwwatlama ululygy signallaryň we ululyklaryň bahalary bilen deňeşdireniňde pes bolsa nazaryýet has sada bolýar we tejribe barlagy bilen barlap bolýan köp sanly peýdaly maglumatlary almaga mümkinçilik berýär.

Ony düşündirmek üçin ýönekeý deňlemä seredip geçeliň:

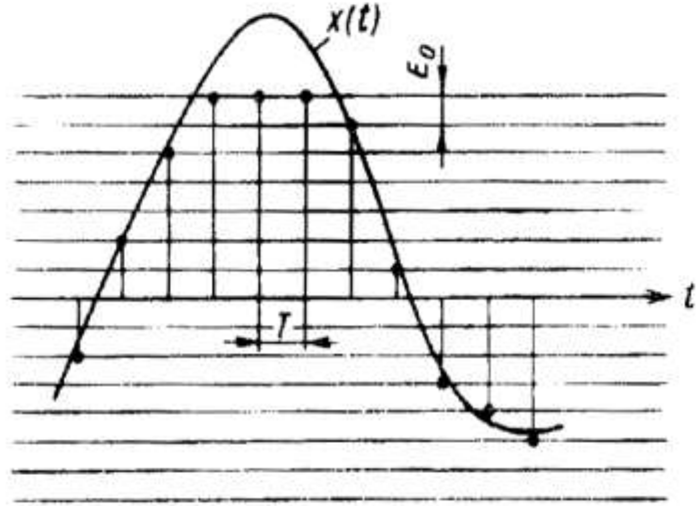
$$y(nT) = K_y\,(nT - T) + x(nT). \qquad (1)$$

(1) deňlemede K ululygy ozal kompýuteriň ýadyna salnyp goýlan konstantadyr. Şeýlelik bilen K diňe kesgitli diskret bahalara eýe bolup bilýär we umumy ýagdaýynda saýlanan ululyga diňe golaýlaşyp bilýär. Şuňa meňzeş effekt analog filtrler taslananda duş gelýär: kesgitli filtri taslamanyň netijesinde hasaplanan induktiwligiň bahasy $10{,}2976_{gn}$ bolup

biler, ýöne katuşka saralandan soňra we takyk hasaplanandan soňra 10,331gn deň bolp biler. Induktiwligiň we K bahalarynyň takyklygyny almaklyk mümkin bolman soň, bu kesgitli ululyklaryň ýalňyşlyklaryna duýgur filtrleriň ýerine ýetirilişini gözläp tapmaklyk zerurlygy ýüze çykýar.

(1) deňlemede x (n T) giriş signalyny kwanlama hil boýunça tapawutlanýan effekte getirýär. San filtriň girişindäki signaly situasiýa laýyklykda kwantlanan ýa-da kwantlanmadyk görnüşinde seredip bolýar. Eger-de giriş signaly öz tebigety boýunça diskret bolsa, onda ýalňyşlyklar bolmaýar. Tejribedäki ýagdaýlaryň agdyk köplüginde giriş signallary öz tebigaty boýunça diskret bolsa, onda ýalňyşlyklar bolmaýar. Tejribedäki ýagdaýlaryň agdyk köplüginde giriş signallary öz tebigaty boýunça üznüksizdir we san taýdan işläp taýýarlamazdan ozal analog-san özgertmesini ýerine ýetirmek zerurdyr. Şeýlelik bilen ýalňyşlyklaryň esasy çeşmesi şol özgertme bolup durýar. Analog – san özgertmeleri häzirki wagtda örän ýokary takyklyk bilen ýasalýar. Sur.1 15 sany derejesi bolan, derejeleriniň aralygynyň E_0 deň bolan hemişelik tapawudy bolan analog san özgerdijiniň işi görkezilen.

Sur.1 analog san özgerdiji signaly effektiw kwantlanýar. Kwantlanmanyň birnäçe görnüşlerini tapawutlandyryp bolýar. Sur.1 görkezilen kwantlanmany <u>togalanma</u> diýip atlandyralyň, onda signal kwantlanmanyň golaý derejesine golaýlaşdyrylýar. Aşagyndan golaý kwantlanma derejesiniň kömegi bilen signaly approksimirlemä <u>gysgaltma</u> diýeliň.

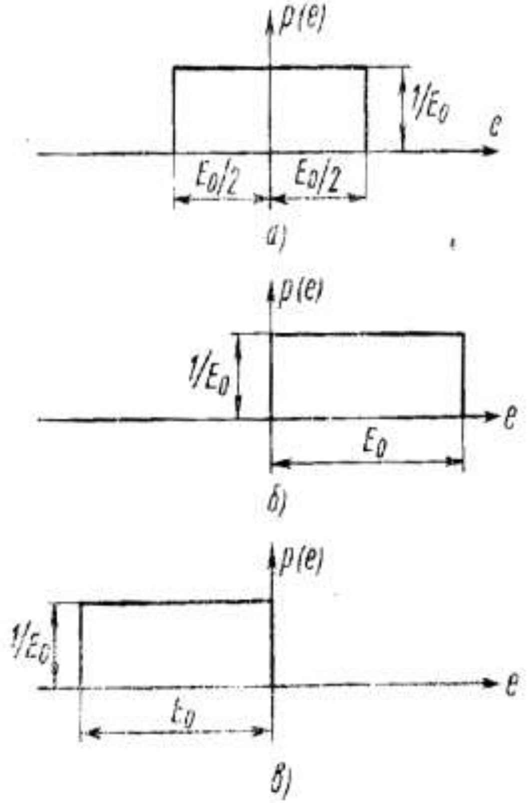


Sur.1 Analog signalynyň yzygider kwantlanmasy.

Kwantlanmanyň görnüşi, belgini hasaba almak bilen gysgaltma diýup atlandyrylan, položotel signallarda ýönekeý gysgaltma meňzeýär, otrisatel signallarda bolsa ol, ýokardan golaý kwantlanma derejesiniň kömegi bilen approksimasiýany aňladýar. e(nT) ýalňyşlygy deňagramly bölünmeli hasaplar bilen ýüze çykýar.

Tagalama ýagdaýy üçin sur.2a görkezilen ýaýrama çaklanylýar. Gysgaltma üçin garaşylýan ýaýrama sur.2b görkezilendir. Belgini hasaba almak bilen gysgaltma üçin garaşylýan ýaýrama sur.2b görkezilen ýa-da signalyň položitel ýa-da otrisateldigine baglylykda sur.2w.

Eger-de signalyň flýuktuasiýasy bir hasapdan beýleki hasaba geçilende kwantlamanyň köp görnüşi geçer ýaly bolsa, onda e(nT) ýalňyşlygy hasabyň käbir pursatynda e(mT) degişlilikde statiki garaşsyz bolar diýip çeklemek bolar, e(mT) – hasabyň islendik beýleki pursaty. Oňa garşy mysaly getirmek ýeňildir (hususanda signal hemişelik bolsa), ýöne Bennetiň görkezişi ýaly, bu ýerine ýetirlen goýberme tejribede duş gelýän tas hemme signallar üçin diýen ýaly adalatlydyr. Bu bölümiň nazary gurulmalary gowşak şertleri talap edýär, has dogrusy hasaplaryň sesleri korrelirlenmedik bolmalydyr.



Sur. 2. Togalamada we gysgaltmada kwantlama ýalňyşlygynyň çaklama dykyzlygy.

Kwantlamanyň getirlen ýalňyşlyklary, her biri öz çaklama ýygylygy bilen, başdaky analog signala ses goşulýandygynyň effektini berýär. Şeýlelik bilen (1) giriş signaly $x(nT) = x_0(nT) + e(nT)_2$ görnüşinde getirip bolar, bu ýerde $x_0(nT)$ – sessiz giriş signaly, $e(nT)$ – additiw ses.

Sur.2 – den sesiň dispersiýasyny çalt hasaplap bolar, togalama ýa-da gysgaltma ýagdaýy üçin:

$$\sigma^2 = E_0^2 / 12 \quad (2)$$

Yzygider diskret ulgamyň özüni alyp barşyny, additiw sesler bolanda, göni usullar bilen aňsat hasaplap bolýar, ýöne ilki üçünji, has gyzykly kwantlama ýalňyşyny girizeliň, has dogrusy iterasiýalary ýerine ýetirmek üçin zerur bolan köpeltmeleriň netijeleriniň kwantlanmasy bilen ýüze çykan ýalňyşlyklar.

K – ň (1) aňlatmada y (n T-T) köpeltme netijeleri kwantlanmalydyrlar. Eger-de K we y (n T) her ν ikilik razraýady saklaýan bolsa, onda olaryň köpeldilmegi 2ν ikilik razrýady saklap biler. Eger-de bu köpeltmäniň uzynlygy ikilik razrýady peselmeýän bolsa, onda her bir indiki iterasiýa ol ν ikilik razrýada ulalyp biler.

Şulardan görnüşi ýaly togalama hökmandyr. Filtre onuň täsirini, analog giriş signalynyň analogsan özgertmesinden additiw sesiň täsiri ýaly duýmak aňsat däldir we hakykatda ol kwantlamanyň ýerine ýetirilişine we san filtriň kesgitli ýerine ýetirilişine güýçli baglydyr.

Hemişelik ululyklaryň nätakyk bahalary bilen gelip çykýan ýalňyşlyklar.

Ilki bilen hemişelik ululyklaryň takyklyk zerurlygyna gaýdyp gelip, ikinji hataryň tapawut deňlemesine seredip geçeliň:

$$y(nT) = K_y(nT - T) - L_y(nT - T) + x(nT) \qquad (3)$$

ozalky seljerişe laýyklykda (4.3) deňleme bilen baglylykda H(z) geçiriji funksiýanyň z – özgertmesi z tekizliginde τ we θ polýar koordinataly jübüt polýuslara eýedir. Şol bir wagtda:

$$\tau = \sqrt{L}, \quad \theta = \omega_\tau T = \arccos \frac{K}{2\sqrt{L}} \qquad (4)$$

(4.4) görnüşi ýaly hemişelik ululyklardaky ýalňyşlyklaryň san filtriň polýuslarynyň ýerleşişiniň görnüp duran we ýeňil hasaplanyp çykarylýan ýalňyşlygyna getirýär. Bu deňlemeleriň ikinjisi aýratyn gyzyklanma döredýär. Ululyklaryň ýalňyşlyklary ω_τ T köpeltmegiň ýalňyşlygyna getirýär. Şeýlelik bilen T hasaplar aralygyny iki esse kiçeltsek, rezonans ýygylygynyň kesgitlemesinde ýalňyşlyk, K we L kesgitlemesindäki ýalňyşlyklar ýaly iki esse ulalmaga okdurylýar. Belli bolşy ýaly berlen filtr ýerine ýetirlende diskretlemäniň uly ýygylyklaryny ulanmak hasaplamalaryň has ýokary takyklygyny talap edýär. Muny aýratyn belläp geçmelidir, sebäbi soňky wagtlara çenli diskrtelemäniň ýygylyklaryny ýokarlandyrmak san filtriň käbir analog filtrne awtomatiki gabat gelmegine getirýär diýip hasap edilýärdi. Eger-de san filtri analog filtrini inwariýant – impuls ýoly bilen alynýan bolsa we eger-de kwantlama effekti hasaba alynmaýan bolsa, onda T peselmeginde san filtri analog filtrini gowy approksimirleýär. Ýöne, ululygyň ýalňyşlygyny hasaba alsak, terd ýagdaý bolmagy mümkindir: T kesgitli derejeden peselse san filtriniň analog filtrinden gyşarmasy ulalýar.

K we L kwantlama ýüze çykýan polýuslaryň ýerleşişindäki ýalňyşlyklar üçin has doly aňlatmany ýalňyşlyklar pesdigini goýbersek çykaryp bolar:

$$\Delta\tau = \frac{\partial}{\partial K}\Delta L + \frac{\partial}{\partial K}, \quad \Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial\theta}{\partial K}\Delta K$$

(5)

(4) ulanyp deňlemeler ulgamyny alarys:

$$\Delta\tau = \frac{l}{2\tau}\Delta L, \qquad \Delta\theta = \frac{\Delta L}{2\tau^2 tg\,\theta} - \frac{\Delta K}{2\tau\sin\theta} \quad (6)$$

$\Delta\ \theta = T\ \Delta\ \omega\tau$ bolanlygy üçin ikinji deňleme ýalňyşlygyň duýgurlygy diskretizasiýa ýygylygyna göni proprosionaldygyny görkezýär. Ondan başga-da θ burçy boýunça (diýmek rezonans ýygylygy boýunça hem) ýalňyşlyk θ kiçi bolanda uludyr, şonuň üçin kwantlama effektine pes ýygylyklaryň inçearalyk filtrleri aýratyn duýgurdyr.

Kwantlama effektiniň ululyklara baglylygy rezonatoryň bagly şekilli gurluşyny ulanyp peseldip bolar. Eger-de A = D = τ cos θ we B = - C = τ sin θ saýlap alsak, onda alarys:

$$\theta\tau = \Delta A\cos\theta + \Delta B\sin\theta,$$

$$\Delta\theta = -\Delta A\frac{\sin\theta}{\tau} + \Delta B\frac{\cos\theta}{\tau} \quad (7)$$

Görşüňiz ýaly uly ulylyklar indi ozalkylar ýaly pes burçler bilen bagly däldir.

Analog-san özgertmäniň netijesinde ýüze çykýan ýalňyşlar.

Analog giriş signalynyň kwantlanmagy netijesinde ýüze çykýan ýalňyşlary sur.2 laýyklykda çekleme dykyzlygyna we deňleme bilen kesgitlenilýän dispersiýa eýe bolan tötänleýin üýtgeýän ululyklaryň garaşsyz hasaplary bilen approksimirläp bolýar. Eger-de hemme galan ýalňyşlary aradan aýyrsak, onda yzygiderli ulgam üçin sesleriň nazaryýeti bilen y (n T) giriş signalynyň dispersiýasyny hasaplap bolýar. Goý, filtr H (2) geçiriji funksiýa we h (n T) agram funksiýa bilen hasaplansyn. Egerde giriş signaly e (n T) sesleirň sanawyndan durýan bolsa, onda f (n T) çykyş signalyny dolama jemi bilen aňladyp bolýar:

$$f(nT) = \sum_{m=0}^{n} h(mT)e(nT - mT) = \sum_{m=0}^{n} h(nT - mT)e(mT) \tag{8}$$

e(nT) giriş sesi n=0 bolanda başlap, ondan öň ol nula deň bolupdyr diýip çaklalyň, şeýle-de girişde signal ýüze çykmazdan ozal f (nT) çykyş signaly nula deň bolupdyr diýip çaklalyň. (8) deňlemesi yzygider diskret ulgamyny kesgitleýär, ol aýratyn hem sesiň yzygider nazaryýeti ulanylanda peýdalydyr.

f (nT) dispersiýasyny tapmak üçin (8) sesiň her bir sanawy korrelirlenmedik we $E_0^2/12$ dispersiýa eýe diýip çaklalyň. Şeýlelik bilen nT islendik wagt pursatynda f (nT) dispersiýasy (4.8) her bir agzanyň ýönekeý dispersiýa jemidir. Şonuň üçin islendik berlen agzanyň dispersiýasy.

$\left(E_0^2/12\right)h^2\left(nT-mT\right)$. Şeýlelik bilen umumy dispersiýa şu aşakdaky ýalydyr:

$$\sigma_f^2=\left(E_0^2/12\right)\sum_{m=0}^{n}h^2\left(nT-mT\right)=\left(E_0^2/12\right)\sum_{m=0}^{n}h^2\left(mT\right)$$

(9)

(9) – da σ_0^2 käbir pikirde wagtda baglydyr, sebäbi ol n interferensiýanyň sanynyň funksiýasy bolup durýar. h^2 (nT) položitel bolmagy sebäpli, σ_0^2 bahasy n ýokarlanmagy bilen ulalmagydyr, ol käbir başlangyç minimal başlanmagydyr. Bu mümkindir, sebäbi girişde ses ýüze çykanyndan edil yzyndan çykyşda dispersiýanyň ululygy uly bolmaýar. Hakykatda çykyşda dispersiýa ulalýar we yzygider diskret ulgama täsir edilen ýaly bökme görnüşinde signaly döredýäne meňzeş asimptola ýetýär. Bu durnuklaşan ýagdaý, filtrleriň polýuslary laýyk birlik tegeleginde ýatmaýan ýagdaýy bolmasa, hemişe bolýar. Kesgitli ýagdaý düzüldi diýip alsak (9) sag tarapy n ulalmagy bilen ahyrky asimptola ýetdi, şonuň bilen (9) aňlatmadan mukdar netijeleri alyp bolýan beýleki aňlatmany

alyp bolýar. z – özgertmäniň kesgitlemesini ulanyp we H (z) we h (nT) özgertmäniň jübütdigini hasaba alsak, şeýle ýazyp bolar:

$$H(z)H\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}h(mT)h(lT)z^{-m+l}$$

(10).

Indi bolsa (10) deňligiň iki tarapyny hem $z^{-1}/2\pi j$ köpeldeliň we ýaşyk konturyň ugrunda integrirleme ýerine ýetireliň. (10) – da integrirlemäni jemleme bilen çalyşma mümkinçiligi bolar ýaly integrirleme kontury diňe H (z) golaýlaşma ablastyndan geçmän, eýsem H (1/z) geçmegi hem zerurdyr. Eger-de (10)-ň sag tarapy agzalaýyn integrirlenýän bolsa, onda Koşi integral teoremasyna laýyklykda hemme agzalar, m=1 bolandaky agzadan başgasy, nul berer. Netijede alarys:

$$\sum_{m=0}^{\infty}h^{2}(mT)=\frac{1}{2\pi j}\oint H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)z^{1}dz \qquad (11).$$

(9) we (10) deňeşdirip görýäris, (11) sag tarapy kesgitlenen režimde, ýagny n→∞, çykýan sesiň dispersiýasyny hasaplamak üçin täze aňlatma getirýär. Bu aňlatmany dispersiýany tapmak üçin integraly hasaplamak hemişe Koşi teoremasynyň kömegi bilen mümkindir.

Analog-san özgerdijiniň kömegi bilen ýüze çykarlan birinji düzgüniň filtrinde sesleriň seljerilişi.

Goý h (nT) = K^h we K<1. h(n) (4.1) tapawut deňlemesi bilen kesgitlenilýän san zynjyrynyň agram funksiýadygyny görkezmek aňsatdyr. (9) göni hasaplamak şu aşakdaky aňlatma getirýär:

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{12}\frac{1-K^{2(n+1)}}{1-K^2} \qquad (12).$$

Emele gelen ýagdaýynda (n → ∞) dispersiýa üçin (12) aňlatma sadalaşýar:

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{12\left(1-K^2\right)} \qquad (13).$$

y (nT) bahalarynyň yzygider saklanýan çykyş registeriniň talap edilýän sözüň uzynlygy bilen (13) golaý arabaglanyşygynyň bardygyny görkezmek üçin 0,99 deň bolan K seredip geçeliň. Şonda σ_f^2 takmynan $4E_0^2$ deň we σ_f standart gyşarmasy $2E_0$ deň. Goý, san filtrinden geçip biljak iň pes giriş signaly filtriň çykyşynda kwantlama bilen emele getirlen sesiň derejesinden 40 db uludyr. Diýmek çykyş registeri 200 E_0 deň bolan bahalar diapazonyna eýe bolmalydyr. Eger-de ondan başga san filtri giriş signallary işlemeli bolsa, 40 db çäklerinde amplitudalary üýtgeýän bolsa, onda çykyş registriň diapazonyny 20000 E_0 deň bolar. Şeýlelik bilen çykyş registeriň sözüniň talap edilýän uzynlygy 15 ikili razrýada deň bolar. (13) tejribeleýin barlanyp görüldi we gowy netije berdi.

Bu mysaldan düşnükli, kwantlama effekti san filtri hasaplamak üçin başlangyç maglumatlarda hökmany agzalyp geçilmlidir. Hasaplaýjy maşynlarda san filtrleri modelirlemäniň köp ýagdaýlarynda programmirleýji 36 razrýadly sözüň uzynlygyny ulanyp biler we sesleiň täsirini aradan aýyrmak üçin ulgamyň geçiriji koffisentini eksperimental dolandyryp biler. Bu ýagdaýlarda hasaplaýjy maşynyň sözüniň mümkin bolan uzynlygyny dolulygyna ulanmak näsazlyklara getirmeýär. Ýöne ýöriteleşdirilen san taýdan işleýän enjam hasaplanyp çykarlanda filtrleme zynjyrlary üçin talap edilýän uzynlygynyň laýyk saýlanyp alynmagy bolup durýar.

Köp sanly san filtrleri birlik tegelege örän golaý ýerleşen polýuslara eýedir. Bu aýratyn hem ýokary saýlama filtrler üçin hädiýetlidir. Bu ýagdýalarda çykyş sesiň dispersiýasy üçin aňlatmalar örän sada bolup galýarlar. (4.13)-da K = 1-E we E^2 özän pes diýip alsak, alarys

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{24E} \qquad (14).$$

Şeýlelik bilen sesiň dispersiýasy birlik tegelegiň polýusyndan aralyga ters proporsional we nul ýygylykda geçiji filtriň koeffisentine göni proporsionaldyr.

Iki sany polýusly we nulsyz san rezonatoryň seljerilişi.

(13) aňlatma meňzeş ýönekeý san rezonatory üçin aňlatma çykaralyň. z – özgertmä eýe ikinji hatarly tapawut deňlemesine seredip geçeliň:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - K_1 z - K_2} \qquad (15).$$

H (z) polýuslary $z = \tau\, e^{\pm j\theta}$ nokatlarynda ýerleşen, bu ýerde:

$$\tau = \sqrt{K_2} \quad \text{we} \quad \cos\theta = \frac{K_1}{2\sqrt{2}}$$

Şoňa meňzeşlikde H(1/z) polýuslary $z=(1/z)\, e^{\pm j\theta}$ nokatlarynda ýerleşen. Şeýlelik bilen (11) integraly hasaplap çykarmak üçin, integralyň aşagyndaky aňlatmany köpeldijilere dargytmaly, aýrylamalary tapmalay we Koşiniň aýrylmalar barada teoremasyny ulanmaly. Netijede (4.15) ulanyp alýarys:

$$\frac{1}{e\pi j}\oint H(z) z^{-1} dz = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\,\frac{1}{\tau^4 + 1 - 2\tau^2 \cos 2\theta}$$

(16).

(9) we (11) deňlikden gelip çykyşy ýaly (16) aňlatmanyň sag tarapy durnuklanan ýagdaýynda çykyş sesiň dispersiýasyna praporsionaldyr, ýagny (9)-dan n → ∞ bolanda alnan sesiňkä laýyklykda. Birlik tegelegine golaý ýerleşen polýusly ulgamlary öwrenip, biz τ = 1-E goýup bileris we ikinji we ondan hem ýokary derejelerde E agzalary aýyryp bileris. Netijede şu aşakdaky aňlatmany alýarys:

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{48E\sin^2\theta} \qquad (17).$$

(17) seljerişi çykyş sesiň dispersiýasy birlik tegelegiň polýuslaryndan aralyga ters praporsionaldygyny görkezýär; bu netijä intuitiw gelip bolýar, bir polýus üçin alnan netijäni umumylaşdyryp ýerine ýetirýärler. Gowy belli bolşy ýaly analog filtri üçin hem, san filtri üçin hem rezonator özüniň pes ýygylykly wariýantynyň ýygylygy boýunça süýşürlen görnüşi ýaly alyp barýar, haçanda polýuslar jω okuna golaý (analog ýagdaýy üçin) we birlik tegelegine golaý (san filtri üçin). Ondan başga-da (17) aňlatmadan sesiň $\theta=\omega_\tau T$ rezonansyň burçundan baglylygy anyk görüp dur. θ örän pes bolanlary üçin sesiň dispersiýasy güýçli artýar. 0,1 deň bolan σ ululygy π/2 deň bolan, σ çeklanylýan gyşarmadan (adatça 10 esse) 100 esse uly baha berýär. Şeýlelik bilen pes ýygylyklaryň filtrleri

sesiň standart-gyşarmasynyň takmynan üç ýa-da dört ikilik razrýada köp bolýar.

Iki sany polýusly we bir nully san rezonatoryň seljerilişi.

Zynjyryň geçiriji funksiýasy şu aşakdaky görnüşde berilýär:

$$H(\tau) = \frac{\tau^2 - L\tau}{\tau^2 - K_1\tau - K_2}, \quad L = \tau\cos\theta. \quad (18)$$

Durnukly ýagdaýda çykyş sesiň dispersiýasy üçin aňlatma

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{12}\left[\frac{1}{1-\tau^2} - \tau^2\sin^2\theta\left(\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}\cdot\frac{1}{\tau^4+1-2\tau^2\cos^2\theta}\right)\right]$$

(19).

τ = 1-E we pes E üçin alýarys:

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{48E} \quad (20).$$

Bu ýerde täzeden E görä sesiň dispersiýasynyň baglylygynyň ters praporsionallygy syn edilýär, ýöne rezonans ýygylyga ýygylyga görä baglylyk ýok.

Häzirki wagta çenli hemme alnan netijeler intuitiw jemlemä getirýär, ýagny jemlemede çykyş sesiň dispersiýasy käbir laýyk ýygylykda kesgitlenen filtriň güýjenmesine proprosionaldyr. E pes bahalary üçin filtrleriň güýjenmegi E ters praporsionaldyr. Örän ýönekeý hasaplamalar sesiň şunuň ýaly özüni alyp barşy duýdansyz däldigini görkezýär: ahyrynda berlen ulgamyň güýjenmesi näçe ýokary bolsa girişde berlen sese görä çykyş sesiň derejesi hem şonça-da ýokarydyr.

Önümleri kwantlamak bilen ýüze çykýan ýalňyşlyklar.

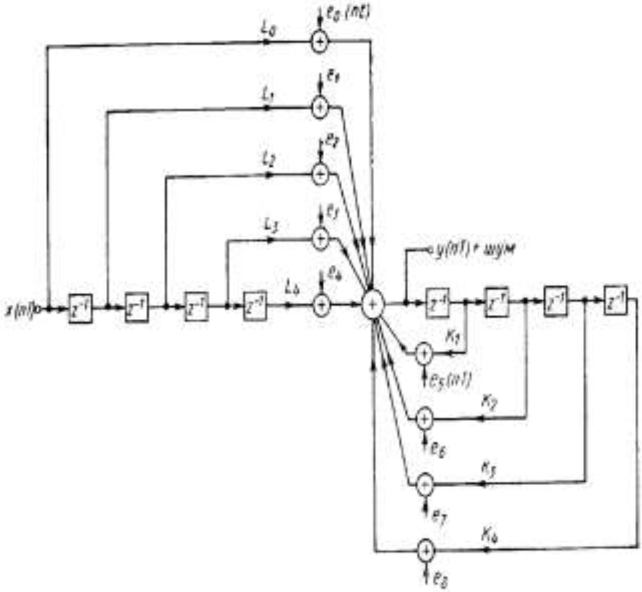
San filtriň hakyky programmasy ýerine ýetirlende hasaplama netijeleri togalananda ýüze çykýan kwantlama ýalňyşlyklary has çylşyrymlydyr. Bu ýalňyşlar tapawut deňlemäniň her bir iterasiýsy ýerine ýetirlende ýüze çykýanlygy sebäpli, effekt signala ses sanawlaryň goşulmagy bilen bolup geçýär, bu manyda effekt analog-san özgertme bilen şertlendirilen sese meňzeşdir. Ýöne, sesiň san filtrine girizilýän takyk ýeri programmanyň laýyk ýerine ýetirilişine baglydyr.

Sur.4.3 köpeltme operasiýasyny ýerine ýetirmek bilen emele gelýän kwantlama sesiniň dört polýusly we nully ulgam göni ýerine ýetirlen ýagdaýynda girizilýänligi görkezilen. Köpeltmäniň her bir operasiýasy bilen e_0 (nT) – dan e_8 (nT) çenli sesler baglydyr. Bu ýerine ýetiriliş üçin hemme sesler özara additiwdigi düşünüklidir we şonuň üçin bir umumy ses bilen çalşylyp bilner:

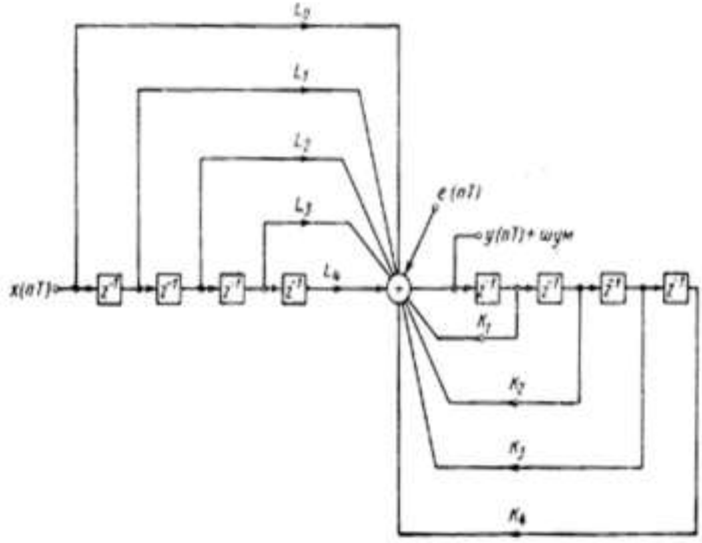
$$e(nT) = \sum_{k=0}^{8} ek(nT), \quad (20)$$

bu sur 4.4 görkezilendir. Eger-de sur.3 hemme sesler korrelirlenmedik bolsa, onda umumy sesiň dispersiýasy e (nT) her bir pes sesiň dispersiýasyndan dokuz esse uludyr ýa-da $3E_0^2/4$ deňdir. Ýöne bir zady belläp geçmeli, bu ýerde programmanyň kesgitli görnäşi, has dogrusy her bir köpeltmeden soň kiçi bahalaýyn ikili razrýadlar aýyrylýan programma göz öňüne tutulýar. Eger-de toplanýan jem käbir uly (3 ýa-da razrýad) registrde saklanýan bolsa, onda e (nT) dispersiýasy $E_0^2/12$ çenli peseldip bilner. Tejribe nazaryýetinden goşmaça razrýadlary saklap galmak programmany ýerine ýetirmegiň wagtynyň köpelmegine getirýär. Ýöne, ýöriteleşdirilen enjem serişdeleriniň blogynyň kömegi bilen uly bolmadyk goşmaça çykdajylar bilen ýa-da asla olarsyz sesiň ep-esli peselmegini gazanyp bolýar.

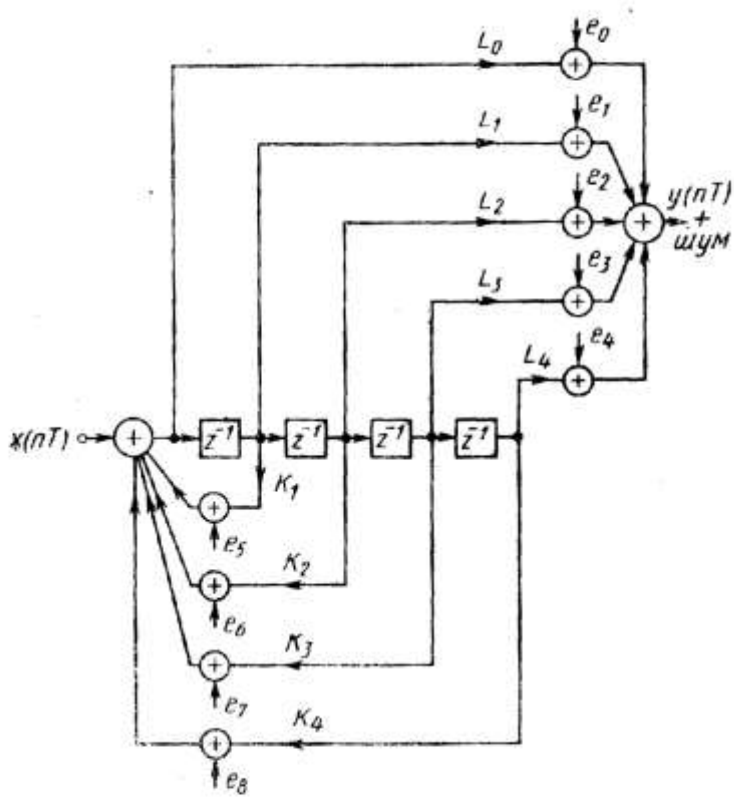
Sur.4.3. wajyp aýratynlygy sesiň filtrden geçişini görkezýänligi bolup durýar; görnüşi ýaly bu ses, analog-san özgertmäniň sesinden tapawutlylykda diňe filtriň geçmeginde sesiň ulalmagy umumy ýagdaýda, signalyň güýjenmesinden ep-esli tapawutlanýar.



Sur.3. Zynjyryň göni şekili üçin ses modeli.



Sur.4 Zynjyryň göni şekili üçin ekwiwalent ses modeli.



Sur.5. Zynjyryň kanoniki şekili üçin ses modeli

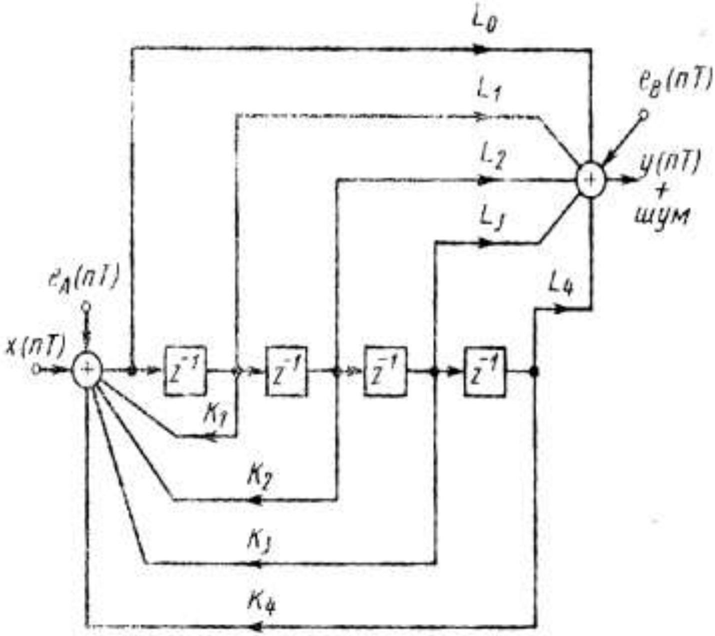
Sur.5 san zynjyry görkezilen. Ol sur.3 we sur.4 ýaly z – özgertmä eýedir, ýöne konus şekilinde ýerine ýetirilen. Ondan görnüşi ýaly ses ulgama ýerine ýetirilişiň göni şekilinden käbir tapawutlylykda girizilýär. Sur.6 ekwiwalent zynjyr görkezilen, bu ýerde:

$$e_A(nT) = e_5(nT) + e_6(nT) + e_7(nT) + e_8(nT)$$

we

$$e_w(nT) = \sum_{k=0}^{4} e_K(nT) \quad (21)$$

Görnüşi ýaly e_A (nT) $3E_0^2/3$ dispersiýasy bilen bütin zynjyrdan geçýär (polýuslar we nullar), şol bir wagtda e_w (nT) girişde goşulýan ýönekeý ses bolup durýar. pes ýygylyklar filtrinde we aralyk filtrinde goýberiş aralygyndaky nullar bilen getirlen effekt sesi peseltmekde bolup durýar, şol bir wagtda goýberme aralygynda polýuslar olary ýokarlandyrýarlar. Şonuň üçin ýerine ýetirmäniň göni şekili bu ýagdaýlarda konus şekilinden köp esse girizýän ýaly bolup görünýär, sebäbi birinji ýagdaýda ses diňe uly güýjenmeli polýuslaryndan geçýär, ikinji ýagdaýynda bolsa pes güýjenmeli polýuslardan we nullardan geçýär. Ýöne, pes güýjenmeli nullar bolmagy, göni ýerine ýetirilişde, polýuslardan geçýän signallaryň derejesi pes bolar. Biziň esasy meselämiz taslamada registeriň uzynlygyny kiçeltmek bolsa, onda diňe sesiň ululygyna däl-de signallaryň derejesine hem üns bermelidir.

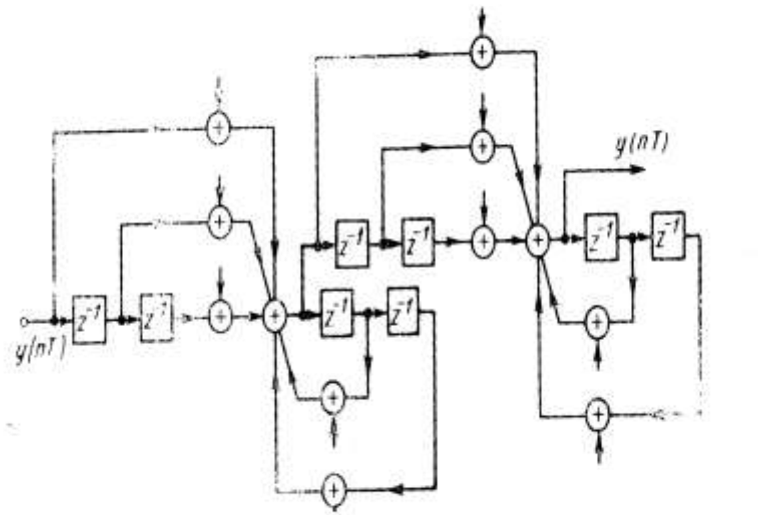


Sur.6. Zynjyryň kanoniki şekili üçin ekwiwalent ses modeli.

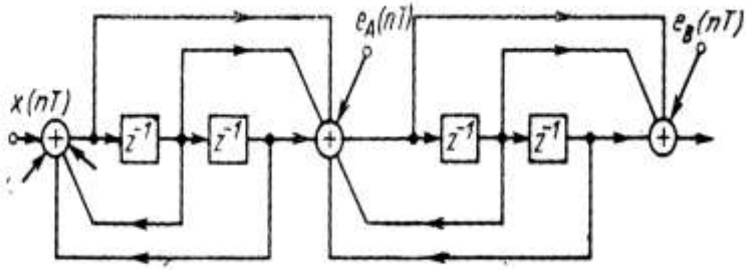
Sur.7 we 8 dördünji düzgüniň ulgamynyň kaskad ýerine ýetirilişi görkezilendir. Sur.7 çyzgysy ikinji hataryň iki sany ýerine ýetirilişinden düzülendir. Köpeltmelerde ýalňyşlara laýyk gelýän sesler ozalkylar ýaly girizilýär. Sur.4.8. çyzgysy ikinji hataryň iki sany konus filtrleriniň yzygider birleşmesi bolup durýar; bu çyzgyda sesler köpeltme operasiýalarynyň garylan effekti ýaly görkezilendir. Bir zady belläp geçeliň başyny we ahyryny aýyrsak, göni we konus görnüşli çyzyga birikdirilen rezonatorlar zynjyry laýyk gurluşy emele getirýärler.

Sesleri ölçemek.

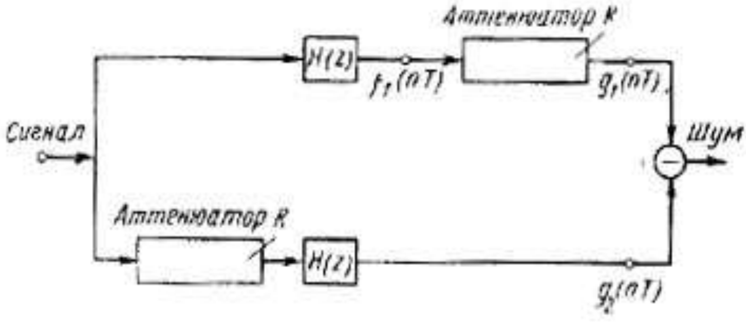
Kwantlama meselesi öz içine köp sanly wajyp soraglary alýar we şonuň üçin matematiki terminologiýanyň ulanylşy çäklendirilipdir, olaryň köpüsi bolsa heniz çözülmedikdir. Hususanda işläp taýýarlamada sesi öwrenmegiň eksperimental usullaryny oýlap tapmak wajypdyr, onuň üçin bolsa diskret ýagdaý üçin spektral bahalandyrma nazaryýetine esaslanýan matematikanyň käbir esaslaryny bilmek talap edilýär.



Sur.7. Zynjyryň yzygider ýa-da kaskad görnüşi üçin ses modeli.



Sur.8. Zynjyryň yzygider şekili üçin ekwiwalent ses modeli.



Sur.9. Sesi ölçemek üçin tejribäniň çyzgysy.

San filtrinde sesi ölçemekligiň usullarynyň biri (kwantlama netijesinde ýüze çykan) sur.9 getirlendir. Iki sany H(z) birmeňzeş filtr ulanylýar, ýöne ýokarky filtr ýeterlik derejede uly signal bilen döredilýär we diýmek onuň çykyşynda $\left[f_1 (nT) nokady \right]$ signal/päsgel uly gatnaşygy bolýar. Şeýlelik bilen eger-de H (z) filtri bilen döredilýän ses uly bolsa, onda ony tas doly diýen ýaly g_2 (nT)-da ýüze çykaryp bolýar we şonuň üçin tapawudy ölçemeklik özünden H (z) filtri bilen döredilýän sesi göni ölçemekligi aňladýar. Umumy ýagdaýynda bu sesiň statiki häsiýetnamalaryny ölçemeklik maksada laýykdyr, mysal üçin çaklamanyň ýaýramagy, orta baha, ortakwadratik baha, korrelýasion funksiýa we spektr, bularyň hemmesi statiki ölçegler bolany üçin, geçirilýän ölçegleriň spesifikasyna ýalňyşlaryň funksional baglanşygyny düşünmek zerurdyr.

Sesiň orta bahasyny hasaplamak.

Stasionar tötänleýin prosessiň çaklamasynyň ýaýrama düşünjesi ergodiki gipotezada, merkezi çäk teoremada we gauss prosesslerinde esasan şol biridir. Bu üznüksiz we diskret prosesslerinde şeýledir. Ýöne şeýle hem bolsa biziň düşünjelerimiziň ösmegi üçin käbir ýönekeý statiki meseleleriň manysyna düşünmek zerurdyr.

Ilki bilen orta bahalaryň hasaplanylyşynyň meselesini N+1 sanawlary saklaýan ses maglumatlarynyň ahyrky ýygyndysy boýunça seredip geçeliň. Bu bahanyň adaty hasaplanmasy:

$$A[x(nT)] = \frac{1}{N+1}\sum_{n+0}^{N} x(nT) \qquad (22)$$

A tötänleýin üýtgeýän ululyk, eger-de onuň ýygyndy boýunça orta bahasy çykyş sesiň x (nT) ýygyndysynyň orta bahasyna deň bolsa we uly N-de dispersiýasy nula deň bolsa, gowy baha bolup durýar. Birinji şert görnüşi ýaly x (nT) stasionar bolanda kanagatlandyrylýar. Ikinji şerti öwrenmek üçin dispersiýany

$$\sigma^2[A] = E(A^2) - E^2[A]$$

görnüşinde ýazalyň, bu ýerde E – ýygyndy boýunça orta baha. Onda

$$\sigma^2[A] = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \left\{ E[x(nT)x(mT)] - E^2[x(nT)] \right\}$$

(23)

Eger-de ozalkysy ýaly x (nT) stasionar bolsa, onda iki jemdäki belginiň aşagyndaky belgi diňe nT – mT wagtlarynyň tapawudy bolup durýar we Q(nT – mT) = Q (mT – nT) görnüşinde ýazylyp bilner. Netijede (4.46) aňlatma şu aşakdaky görnüşde ýazylyp bilner:

$$\sigma^2[A] = \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1} \right) Q(nT) \quad (24)$$

(24) gatnaşygy ilkinji prosesiň Q (nT)-ň awtokowariýasiýasyna çäklendirme kesgitleýär we eger-de $\lim\limits_{N \to \infty} \sigma^2[A] = 0$ bolsa, onda A gowy baha bolup durýar diýip aýtmak bolýar.

Diskret hatarly ulgamynyň modeli.

Bu bölümde hatarly dürli deňlemelere esaslanan algoritmleriň esaslaryna seredilip geçiler, mysal üçin:

$$y = (nT) = K_y\,(nT-T) + x(nT),\ y(-T) = 0;$$

$$y\,(nT) = \sum_{K=1}^{m} K_k\, y\,(nT-kT) + \sum_{k=0}^{r} L_k\, x\,(nT-kT). \quad (25)$$

Bu deňlemelere köplenç rekursiw we awtoregressiw diýip atlandyrýarlar, olar diskret hatarly ulgamlary ýazmagyň dürli usullary üçin başlangyç bolup durýarlar, has takygy ýygylyk häsiýetnamalaryň, san hatarlarynyň blok-çyzyklarynyň, toplumlaýyn z – tekizlikde geometriki teswirlemäniň we z – özgertmäniň operator usulynyň kömegi bilen bolýarlar. Bular barada esasyny düzüjji maglumatlary Kaýzeriň, Reýderiň we Goldyň edebiýatlarynda bardyr.

Hatarly (analog) zynjyrynyň nazaryýeti induktiliwliligiň, göwrümliligiň we garşylyklaryň elektriki özboluşlyklarynda esaslanýar, olar Kirgoffyň kanunynyň üstündenhemişelik koeffisentleri bolan hatarly differensial deňlemeleriň kömegi bilen zynjyrlary ýazyp bilýärler. Mundan tapawutlylykda diskret ýa-da san hatarly ulgamalry hemişelik koeffisenti bolan, ýörite ýa-da uniwersal kompýuterlerde sanlaryň üstünde işläp çözüp boljak hatarly dürlülik deňlemelere esaslanýar. Dürlülik algoritmleri ýerine ýetirilende giriş signallary wagt boýunça diskret hasaplamalaryň toplumy görnüşinde getirilýänligi wajyp pursat bolup durýar.

Köp duş gelýän meseleler üçin şu aşakdaky model ulanylyp bilner:

Giriş yrgyldysy *x(t)* → Diskreti-zator → Kwanti-zator

→ San bilen işledil-ýän maşyn

x(nT) $\bar{x}(nT)$

$\bar{y}(nT)$

→çykyş yrgyldysy.

Bu meselelerde işläp taýýarlama sezewar edilýän signallar analog bolup durýar, ýöne işlenip taýýarlamanyň özi san görnüşinde amala aşyrylmalydyr. Ýöne hemme meseleler bu topara degişli bolmaýar, mysal üçin käbir signallar operatorlaryna giriş analog signallary soramaýar. Bu çyzgydan görnüşi ýaly *x(nT)* yzygiderliligini almak üçin analog signaly T wagt aralyklary boýunça diskretizirlenýär. Şunuň ýaly diskretizasiýa işiň netijesini dürli usullar bilen häsiýetlendirip bolar: oňa şertleýin üstüne goýma diýip atlandyryp bolar. Ýygylyk oblastyna degişli terminlerde bu, analog signalynyň spektrleriniň gapdal spektrleriniň ýokarky we aşaky görnüşlerinde 1/T, 2/T, 3/T we ş.m. ýygylyklaryň golaýynda gaýtalanyp durýar diýmegi aňladýar. Eger-de diskretizasiýa ýygylygy Naýkwistiň ýygylygyndan aşakda bolan bolsa (ýagny 1/T sinalyň ininiň ikeldilen ölçeginden pes bolsa), onda goňşy spektrler böwetlenýär, ýygylyk ýoýulmalary ýüze çykýar, olar bolsa analog signallaryň hatarly filtrleme bilen dikeldilmegini mümkin etmeýär.

Çyzgydaky kwantizator islendik häzirki zaman san prosessoryň hökmany bölegi bolup durýar. Bir zady bellemek zerurdyr, kwantlama effekti çyzgyda görkezilen san maşynynyň içinde hem bolup biler. Olar mysal üçin ahyrky uzynlygyň registrinde san görnüşinde hatarly dürlülik deňlemäniň hemişelik koeffisenti ýazylanda duş gelýär. Şunuň ýaly effekt dürlülik deňlemeleriň özboluşlyklary hemişelik kesgitlenen bolsa statiki diýip hasaplamak bolar. Şeýle hem dinamiki effektler bardyr, olar haçan-da signallar koeffisentlere köpeldilende ýa-da beýleki signallara köpeldilende we registriň ahyrky uzynlygyna çenli önüm tegeleklense ýa-da çäklendirilse ýüze çykýar. Eger-de çykyş signalyny üznüksiz almak talap edilýän bolsa, ýokardaky çyzgydaky ýaly, onda $\bar{y}(nT)$ çykyş signalynyň sanawy dekoderden ýa-da çekiji gurnawdan geçýär, ol impulslaryň yzygiderliliginden üznüksiz signaly döredýär. Dekoder – bu san-analog özgerdişleri, ondan soňra hatarly analog filtr işledilip, diskretizasiýa işinde ýüze çykan artykmaç ýygylyklar aýyrylýar.

Üznüksiz hatarly dinamiki ulgamlary öwrenmeklik ep-esli derejede Laplasyň we Furýeniň özgertmeleriniň operasion usullarynyň girizilmegi bilen ýeňledi, şeýle hem zynjyrlar nazaryýetini ulanmaklykdyr. Edil şonuň ýaly z – özgertmäni girizmeklik we zynjyrlar nazaryýetini ulanmaklyk hatarly diskret ulgamlaryny öwrenmeklige ýardam edýär.

Z – özgertme.

Bize belli bolşy ýaly birinji düzgünli dürlülik deňlemesi sinuniodal täsirde ýygylyga baglylykda ulgamyň özüni alyp barşyny häsiýetlendirýän geçiriji fuksiýa bilen getirip boljakdygy mümknidir. Şonuň ýaly-da geçiriji funksiýany geometriki şekillendirip boljakdygy aýan boldy. Şonuň ýaly teswirlemäniň umumylaşdyrylan hatarly dürlülik deňlemä ýaýramasynyň farmal esasy z – özgertme bolup durýar. Ol, dürlülik deňlemelerinde Lapsanyň differensial deňlemelerde ýerine ýetirýän algebraik işleri ýerine ýetirýär.

Z – özgertmäniň aýratynlyklaryna gysgaça seredip geçeliň, soňra bolsa z – özgertmäniň usullaryny dülülik deňlemeleriň umumylaşdyrylan çözgütlerini tapmak üçin ulanalyň.

x(0), x(T), x(2T),…, x(nT) sanlaryň yzygiderligine seredip geçeliň, olar *x(T)* üznüksiz yrgyldynyň diskretlenmeginde emele geldiler. Bu yzygiderliligiň z – özgertmesi şu aşakdaky ýaly kesgitlenilýär:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}; \quad (26)$$

bu ýerde: *z*-toplumlaýyn üýtgeýji, *x(z)*- şol toplumlaýyn üýtgeýjiniň funksiýasy.

Bu deňlemede üýtgeýjiniň dereje hatary z^{-1} bolanlygy sebäpli, onda bular ýaly hataryň goşulmagy barada sorag ýüze çykýar. Şu aşakda Gurewiçiň bu mesele boýunça geçiren işleriniň käbir esasy netijeleri getirilýär.

Deňleme $|Z| > R$ üçin goşulýarlar we $|Z| < R$ üçin daşlaşýarlar, bu ýerde R goşulma radiusy.

$$|x(nT)|^{1/n},\ n=1,2,3\ldots\ldots,$$

yzygiderlilik üçin ýokary çäkdir.

Mysal üçin eger-de $x(nT)=K^n$ bolsa, onda deňleme deňleme töweregiň daşynda goşulyşýarlar.

$|Z| > R$ üçin x(z), zynjyryň analitik funksiýasydyr.

Şeýlelik bilen ýokardaky deňleme bilen kesgitlenen we analitiki dowam etme bilen bütin z-tekizlige ýaýran funksiýa *x(nT)* yzygiderliligiň z-özgertmesi diýip atlandyrmak bolar.

Yzyna z – özgertme.

Kesgitleme boýunça *x(nT), x(z)*-den yzyna z-özgertmesidir. Ony Koşiniň integral teoremasynyň kömegi bilen ýokardaky deňleme bilen tapyp bolar. Ilki bilen deňlemäniň iki tarapyny z^{k-1} köpeldeliň, soňra iki toparyny ýapyk çäk boýunça integrirläliň. Eger-de itnegrirleme çägi tükeniksiz hatarly goşulma oblastynyň içinde ýatan bolsa, onda toplama we operariýalarynyň ýerlerini çalşyp bolar:

$$\oint x(z)z^{k-1}\ \alpha z = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\oint z^{k-n-1}\alpha z \quad (27)$$

Koşiniň teoremasy şeýle diýýär. Eger-de integrirleme çägi koordinatolaryňbaşyny öz içine alýan bolsa onda $\oint z^{k-n-1}\alpha z = 0$ hemme K üçin degişlidir, ýöne diňe K=n degişli däldir. K=n üçin integral $2\pi j$ deň bolýar. Ýokarky aňlatma şuny ulanyp yzyna z-özfertme barada teorema alýarys:

$$x(KT) = \frac{1}{2\pi j}\oint x(z)^{K-1}\,\alpha z. \quad (27)$$

$x(KT) = K^n$ şertinde $x(z)=1/(1-Kz^{-1})=z/(z-K)$

x(nT), x(z)-den yzyna z-özgertmedigini subut etmek üçin alnan deňlemämizi ulanalyň we K uly bolan radiusyň togalagynyň ýanynda integrirleme geçireliň:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^n \alpha z}{z-K}. \quad (28)$$

Bu deňleme hasaplap aýyrma teoremasynyň kömegi bilen çözülýär, eger-de z=K bolanda integrirleme çägi polýusy öz içine alýar. Şeýlelik bilen K+E radiusly C_1 tegelegi laýyk bolýar, E bolsa näçe diýseň pes burç bilen alnyp bilner. Ýöne bu ýagdaýda C_2 ýa-da islendik beýleki kontur hem alnyp bilner, ol polýusy öz içine almalydyr.

Eger-de K>1 bolsa, onda goşulyşma toplumlaýyn z-tekizliginde birlik tegeleginiň daşynda ýatandyr. Köp ýagdaýlarda $x(nT) = K^n$ yzygiderliligi K>1 fiziki gyzyklanma döretmeýär, sebäbi şunuň ýaly yzygiderlilik n galmagy bilen tükenikzis ösýär we durnuksyz diýip klasifisirlemek bolar. Şeýlelik bilen birlik tegelek z-tekizliginde K^n görnüşli durnukly yzygiderlilikler üçin goşulyşma oblastynyň içinde bar bolanlarynyňarasynda iň kiçi tegelek bolar. Birlik tegeleginiň bu häsiýeti hemme yzygiderliliklere ýaýradylyp bilner we şunuň birlik tegeleginiň yzyna z-özgertme üçin integrirleme çägi hökmünde ulanylyp bilner.

Dolama barada teorema.

x(z), x(nT) – ň z-özgertmesi bolsun *a* H(z) bolsa, h (nT) – ň z-özgertmesi bolsun onda Y(z) = X(z) H(z), y(nT) z-özgertmesi bolsa, onda

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{n} x\ (mT)\ h\ (nT\text{-}mT) = \sum_{m=0}^{n} x\ (nT\text{-}mT)\ h\ (mT).$$

Bu gatnaşygy subut etmegiň ýönekeý ýoly şu aşakdaky gatnaşygy öwrenilen induksiýa usulyny ulanmakda durýar:

X(z) H (z) =

$$[x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \cdots x(T)z^{-n}] *$$

*

$$[h(0) + h(T)z^{-1} + h(2T)z^{-2} + \cdots h\ (nT)z^{-n}] = x(0)h(0) +$$

$+z^{-1}$

$$[x(0)h(T) + x(T)h(0)] + z^{2}[x(0)h(2T) + x(T)h(T) + +x(2T)h(0)] + \cdots =$$
$$y(0) + z^{-1}y(T) + z^{-2}y(2T) + +z^{-3}y(3T) + \cdots$$

Eger-de h(nT) hatarly diskret zynjyrynyň birlik impulsa bolan seslenmesini göz öňüne getirýän bolsa, onda *y(nT)*=

$$\sum_{m=0}^{n} x(mT)h(nT-mT)=\sum_{m=0}^{n} x(nT-mT)h(mT)$$

(29),

bu zynjyryň *x(nT)* özboluşly giriş signalyna seslenmesini kesgitleýär.

<u>Toplumlaýyn dolama barada düşünje.</u>

Iki sany z-özgertmäni köpeltmeklik yzygiderliligiň dolamasyna laýyk gelýär. Şu bölümde iki sany yzygiderliligiň z-özgertmesine seredip geçeliň. Goý,

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)y(nT)z^{-n}$$

we *X(z)*, *x(nT)* z-özgertmesi, *Y(z)* bolsa *y(nT)*-ň z-özgertmesi bolsun. Diýmek,

$$y(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)v^{n-1}dv$$

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(v)v^{n-1}dv$$

integrirleme çägini birlik töleg görnüşinde saýlap alalyň. Onda,

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)v^{n-1}dv \qquad (30)$$

Integrirleme hem-de toplama operasiýalarynyň ýerini çalşyp we netijeleýän toplumlamany z-özgertme diýip seretsek, şu aşakdaky aňlatma gelýäris:

$$U(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{n-1}dv \qquad (31)$$

Bu deňlemä käwagtlar topluumlaýyn dolamanyň teoreması diýilýär. Ol dolama şekiline eýe bolanlygy sebäpli, integrirleme çägi birlik tegelegi şerti saklamyzda we

$$V=e^{j\theta},\ z=z\,e^{j\varphi}$$

çalşygyny ýerine ýetirsek, şu aşakdaky deňlemäni alýarys:

$$U(\tau e^{j\varphi})=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi}Y\left(e^{j\theta}\right)X\left(\tau e^{j(\varphi-\theta)}\right)d\theta.$$

Öň ýanyndaky aňlatmanyň hususy ýagdaýy gyzyklanma döredýär, haçanda

$x(nT)=y(nT)$ we $z=1$

bolsa iki sany aňlatmany ulanyp alýarys:

$$\sum_{n=0}^{\infty}y^2(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)Y\left(\frac{1}{v}\right)V^{-1}dV. \qquad (32)$$

Bu aňlatma signalyň z-özgertmesini amala aşyryp, ortakwadratik bahasyny aňlatmaga mümkinçilik berýär. Bu gatnaşyklar sesler öwrenilende ulanylýar.

Maglumatlary integrirlemek.

Signallaryň integrirlenmegi rekursiw san filtrler bilen amala aşyrylýar. Integrirleýji operatorlaryň synynyň mysallaryna serdip geçeliň.

Belli bolşy ýaly finit signallaryň takyk integrirleme operasiýalary üçin şu aşakdaky özgertme degişlidir:

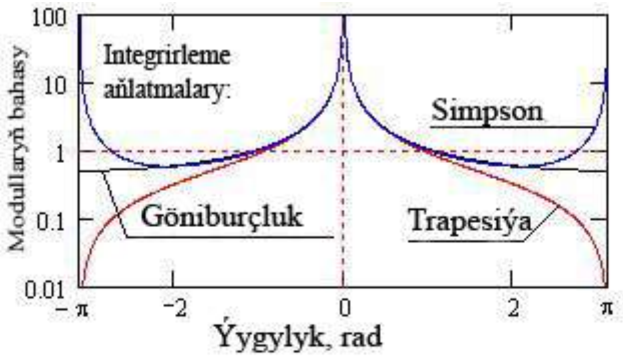
$$\int_t s(t)\,dt \leftrightarrow (1/j□)\ S(□). \qquad (33)$$

Bu aňlatma sag tarapynda □ = 0 bolanda aýratyn nokada eýedir, we laýyklykda nul ýygylykda agram delta – impulsa eýedir, ol hem signalyň hemişelik düzüjisine praporsionaldyr. □ > 1 bolanda (1/j□) ýygylyk oblastynda integrirleýji operator amplituda spektrinde ýokary ýygylyklary gowşadýar, 0 <□□ <1 bolanda bolsa pes ýygylyklary güýçlendirýär. Signalyň faza spektri -90^0 položitel ýygylyklar üçin we 90^0 otrisatel ýygylyklar üçin süýşýär.

Tejribede has ýönekeý we giň ýaýran integrirleýji algoritmler trapesiýalaryň, gönüburçluklaryň we Simpsonyň aňlatmalarynyň san analoglary bolup durýar.

Nul başlangyç şertlerinde trapesiýalaryň aňlatmasy boýunça integrirleme algoritmi:

$$y_{k+1} = y_k+(s_{k+1}+s_k)/2. \qquad (34)$$



Sur.10 Filtrleriň ýygylyk häsiýetnamasy

t_k = k□t, □t = 1bolanda s_k = exp(j□t) we y_k = H(□) exp(j□t), diýip alyp signallary (29) goýýarys we H(□) degişlilikde çözýäris. Jogaby:

H(□) = cos(□/2)/[2j sin(□/2)].

Beýleki aňlatmalar boýunça filtriň, şeýle hem integrirleýji filtrleriň ýygylyk häsiýetnamasy sur. 12 getirlendir. Jemleme sikliniň hemme öň ýanyndakysy boýunça ýygnama we filtriň häsiýetnamasynyň AÇH modulynyň bahalarynyň uly diapazony bilen baglylykda has gowy, täsirli we maglumatly hakyka görä hasaplanylan integrirleme laýyklyk koeffisentiniň ýygylyk funksiýalary bolup durýar:

$$K(\omega) = H(\omega)\exp(j\Delta t)/[(1/j\ \omega)\exp(j\Delta t)].$$

$$K(\omega) = \cos(\omega/2)[(\omega/2)/\sin(\omega/2)]. \quad (35)$$

Hemme integrirleme filtrleriň laýyklyk

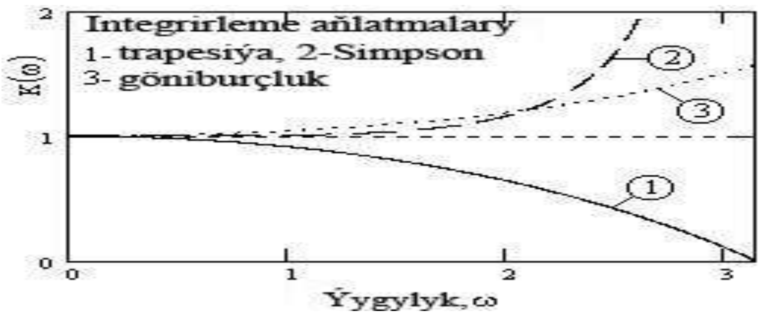
koeffisentleriniň grafikleri sur. 11 getirlendir. ***Gönüburluklar aňlatmasy boýunça integrirleme operatory*** (interpolýasion ortanokatlylyk): $y_{k+1}=y_k+s_{k+1/2}$. (36)

Signalyň meňzeş goýulmalaryndan we özgertmelerinden soň alýarys:

$$K(\omega) = (\omega /2)/\sin(\omega /2).$$

Simpsonyň aňlatmasy boýunça san integrirlemesinde *filtriň aňlatmasy şu ggörnüşe eýedir*: $y_{k+1} = y_{k-1}+(s_{k+1}+4s_k+s_{k-1})/6$. (37)

Özbaşdak alnan filtriň ýygylyk syny: $K(\omega) = (2+\cos \omega)/[3 \sin(\omega)/\pi]$. (38)

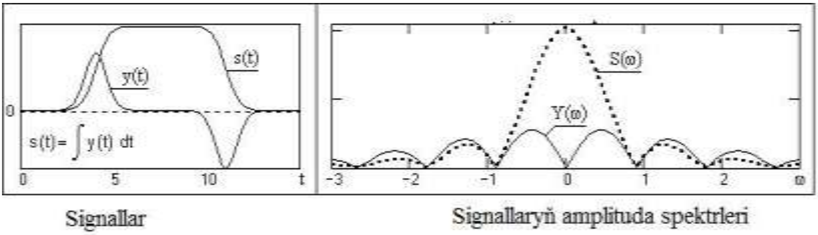


Sur.11 Laýyklyk koeffisentleri

Sanly integrirlemäniň has aňsat aňlatmalary (trapesiýalar we gönüburçlyklar) esasy ýygylyk diapazonynda özüni dürli hili alyp barýarlar. Gönüburçluklar aňlatmasy ýokary ýygylyklarda netijeleri ýokarlandyrýar, trapesiýalar aňlatmasy bolsa peseldýär. Bu aýratynlyklar aňsat düşündirilýär. Ýekelik garmonika üçin iki sany yzygider hasaplama üçin trapesiýanyň meýdany şol iki sany hasaplamanyň arasyndaky topparlan garmaonikaly meýdanyň dugasyndan hemişe pesdir, olaryň tapawudy bolsa ýygylyk bilen artyp gidýär. Naýkwistiň ýygylykly garmonikanyň predelinde hasaplamalar belgiler yzygider hatayna laýyk gelýär (1, -1, 1, -1, ... ýa – da amplituda we başky faza burçuna baglylykda islendik beýleki bahalar) we nul başlangyç şertlerinde (9) aňlatmada iki sany yzygider aňlatmanyň jemlenmegi 0 berer we netijeleriň ýygnanmagy bolmaýar.

Iki sany hasaplamalaryň arasynda merkezi nokat boýunça beýiklikleri hasaplamak bilen gönüburçluklaryň meýdany boýunça integrirleme hemişe germonikanyň topparlan dugasy bilen çäklendirilen meýdana degişlilikde gönüburçlugyň meýdanynyň ulalmagyna getirýär.

Simpsonyň aňlatmasy trapesiýanyň we gönüburçluklaryň aňlatmalarynda birlik bahany has takyk getirmegi bilen tapawutlanýar, ol bolsa esasy diapazonyň birinji ýarymynda integrirlemäniň has ýokary takyklygyny berýär. Ýöne ýokary ýygylyklarda ýalňyşmalar kert ýokarlanyp başlaýar we diapazonyň ahyrynda tükeniksizlige çykýar (Naýkwistiň ýygylygynda rekursiw filtriň geçirme funksiýasynyň maýdalawjysynda polýus). Integrirlemäniň bu aýratynlyklary goşulan spektral düzümli maglumatlar işlenip taýýarlanylanda göz öňüne tutmak zerurdyr. Signalyň integrirlemegiň we onuň spektriniň üýtgeme mysallary sur. 14 getirlendir.



Sur. 12. Signallaryň amplituda spektrleri.

Rekursiw däl ýygylyk san filtrleri.
Umumy maglumatlar.

Islendik filtriň esasy aýratynlygy – bu onuň ýygylyk (*frequency response*) we faza häsiýetnamalarydyr. Olar filtriň işlenilýän signalynyň dürli garmonikalarynyň amplitudasyna we fazasyna nähili täsir edýändigini görkezýär. Rekursiw däl san filtrleriň has belli görnüşlerine ýygylyk filtrler degişlidir, olaryň algoritmi simmetriki NSF üçin signalyň fazasyny üýtgemedik ýagdaýynda şu görnüşe eýedir:

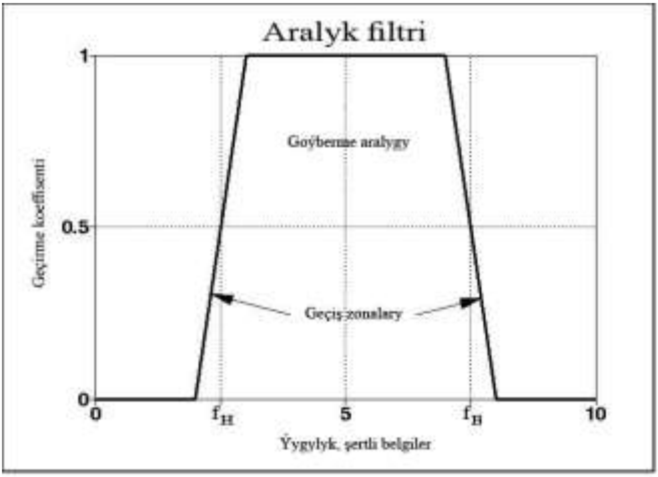
$$y_k = \sum_{n=-N}^{N} h_n \, s_{k-n}. \qquad (39)$$

Filtrleriň görnüşleri. Ýygylyk häsiýetnamasynyň görnüşine baglylykda ýygylyk filtrleriň üç sany esasy toparlaryny bölýärler: PÝF – pes ýygylyklaryň filtri (*low-pass filters*) – giriş signalynda pes ýygylyklary göýberýär we ýokary ýygylyklary aýyrýar, ÝÝF – ýokary ýygylyklar filtrleri (*high-pass filters*) – ýokary ýygylyklary göýberýär we pes ýygylyklary aýyrýar we PF – çyzykly filtrler, kesgitli ýygylyk aralygynda signaly göýberýär (*band-pass filters*) ýa-da aýyrýar (*band-reject filters*). Soňkylaryň hatarynda aýratyn topara käwagtlar RF – režektor filtrleri, giriş signalynda kesgitli garmonikany aýyrýan filtrleri, SF – selektor filtrleri we RF gaýtarylma filtrleri degişlidirler.

Eger – de giriş signalynda ýygylyklaryň kesgitli aralygynda aýyrma barada aýdylýan bolsa, munuň ýaly filtrleri böwetleýji filtrler diýip atlandyrýarlar. Olary hasaplamanyň usulyýetlerine nazary bolsun, tejribe bolsun gyzyklandyrma bildirilmeýär, sebäbi olaryň ýygylyk häsiýetnamasy adatça çyzykly filtriň häsiýetnamasynyň inwersiýasy ($1\text{-}H_п(\omega)$) bilen berilýär we özüniň taslamasynda hiç – hili üýtgeşiklere eýe däldirler.

Filtrleriň çyzgylaýyn ýygylyk häsiýetnamalary sur. 15 getrirlendir. Signaly göýbermegiň we aýyrmagyň ýygylyk aralygynyň aralygynda aralyk diýip atlandyrylýan zona bardyr.

Aralyk zonanyň giňligi filtriň häsiýetnamasynyň kertligini kesgitleýär. Bu zonada amplituda häsiýetnamasy monoton peselýär (ýa-da ulalýar), göýberme aralygyndan aýyrma aralygyna çenli (ýa – da tersine).



Sur. 13 esasy ýygylyk filtrleriň häsiýetnamalary.

San filtrleriň taslama tejribesi esasan pes ýygylyklaryň filtrleriniň sintezine esaslanandyr. Filtrleriň hemme beýleki görnüşleri pes ýygylykly filtrlerden laýyk özgertme arkaly alyp bolýar. Mysal üçin ýokary ýygylyklaryň filtrleri pes ýygylykly filtrleriň inwersiýasy arkaly alyp bolýar – ilkinji signal we ony pes ýygylykly NSF bilen filtrlemäniň netijesiniň aralygyndaky tapawudy kesgitlemek arkaly:

$$y(k) = s(k) - \sum_{n=-N}^{N} h(n)\, s(k-n). \qquad (40)$$

Bu ýerden simmetriki pes ýygylykly filtriň ýokary ýygylykla inwersiýasynyň şerti: $n \neq 0$ bolanda $h_в(0) = 1 - h_н(0)$, $h_в(n) = -h_н(n)$.

Pe ýygylykly filtrlerden ýokary ýygylykly filtrleri almagyň pes ýygylykly filtriň geçiriji funksiýasynyň rewersi usuly hem ulanylýar, ýagny ω üýtgeýän ululygy ω' = π-ω üýtgeýän ululyga çalyşmak arkaly (Δt = 1 bolanda). Simmetriki filtrler üçin geçiriji funksiýasynda ω argumentiniň diňe kosinus agzalaryny sklap, onuň ýaly operasiýanyň netijesinde şu aňlatmany alarys:

$$\cos n(\pi-\omega) = \cos n\,\pi \cos n\,\omega = (-1)^n \cos n\,\omega. \quad (41)$$

Soňkysy filtriň geçiriji häsiýetnamasynda hemme täk garmonikalarynda, diýmek filtriň hemme täk agzalarynyň belgileriniň çalyşmagyny aňladýar. Hemişelik ululygyň her ikinji düzüjisiniň ters belgä üýtgemegi bu hemişelik bahany “byçga” öwýrýär, onuň ýygylygy bolsa esasy diapazonyň Naýkwistiň ýygylygyna deňdir (bu ýygylygyň amplituda bahalary boýunça hasaplamalar), tersine hem şonuň ýaly, Naýkwistiň ýygylygynda signalyň garmonikasynyň hasaplamalary (Δ diskretizasiýasynyň aralygy boýunça belgi çalyşýan süýşme güýjine) hemişelik düzüjä öwrülýärler. Çyzykly filtrler FNÇ we ÝÝF yzygiderli ulanyp göýbermäniň ýygylyklaryny beklemek arkaly amala aşyrlyp bilner. Matematiki getirmede bu $h_н$ – pes ýygylykly we $h_в$ – ýokary ýygylykly filtrleriň koeffisentleriň massiwleri bilen maglumatlaryň massiwleriniň yzygiderli dolamasyny aňladýar:

$$v_k = h_н(n) \circledast s(k\text{-}n), \qquad y_k = h_в(n) \circledast v_k = h_н(n) \circledast h_в(n) \circledast s(k\text{-}$$

n). (42)

Dolama operasiýasynyň kommutatiw bolanlygy sebäpli PÝF we ÝÝF koeffisentleriniň aýratyn massiwleriniň deregine olaryň dolamasy bilen $h_n = h_н(n) \circledast h_в(n)$ çyzykly filtriň koeesfisentleri göni kesgitlenip bilner.

Çyzykly režektor filtrleri şeýle – de çyzykly filtrleriň inwersiýasy bilen hem alnyp bilner. Bir ýygylykly režektor filtrleri adatça ýönekeý rekursiw san filtrleriň esasynda ýerine ýetirilýär, olar bu maksatlar üçin örän effektiwdir. Köplenç filtrlere has çylşyrymly talapar edilýär. Meselem, filtr dürli güýjenme koeffisentleri bolan birnäçe sany göýberiş aralyklary bolmalydyr, göýbermeýän aralyklar üçin bolsa aýyrmanyň dürli koeffisentleri berlip bilner. Käwagtlar filtriň talap edilýän ýygylyk häsiýetnamasy özboluşly egri bilen berilýär.

NSF hasaplama usulyýetleri. Adatça signallaryň filtrlenmeginde filtriň talap edilýän ýygylyk häsiýetnamasy berilýär. Maksady berlen talaplara jigap berýän we iltri gurmak we filtrlenmäni geçirmek. Köplenç berlen filtri takyk gurmak mümkin bolmaýar we berleniň häsiýetlerine golaý filtr ýerine ýetirilýär. Berlen ýygylyk häsiýetnamaly filtrleri gurmagyň köp sanlu usullary bar. Olardan has ýönekeýi – agram penjireleriniň kömegi bilen çyzykly fazaly filtrleri gurmakdyr. Bu usul uniwersaldyr we islendik berlen ýygylyk häsiýetnamaly filtri almaga mümkinçilik berýär. Bir zady belläp geçmek gerek, ýygylyk häsiýetnamalarynyň talaplaryna laýyk gelýän matematiki has berk we kämil usullar bilen kiçi uzynlykly filtri käwagtlar almak mümkindir.

Girişe degişlilikde çykyş signalynyň fazasyny üýtgetmezden ikitaraply simmetriki filtrleri hasaplamak has ýönekeý usuly bolup durýar. Has umumy ýagdaýnda ol şu aşakdakylary öz içine alýar:

1. Filtriň geçiriji funksiýasynyň ideal amplituda – ýygylyk häsiýetnamasyny bermek. Idel termini bu ýerde geçiş zonasy bolmadyk laýyklykda 0 we 1 koeffisentli göýberme we aýyrma ýygylyklar aralyklar häsiýetnamada görkezilmegidir.
2. Ideal filtriň impuls seslenmesiniň funksiýasynyň hasaby (filtriň ýygylyk häsiýetnamasynyň yzyna dolamasy). Göýberme/aýyrma çäklerinde funksiýalaryň bökmesi bolup geçse impuls seslenme tükeniksiz köp sanly agzalary berýär.
3. Seslenme funksiýasyny agzalaryň kesgitli mukdaryna çenli çäklendirilmegi şol bir wagtyň özünde filtriň geçiriji häsiýetnamasynda Gibbsiň emele gelmesiniň döremegi – beýgelmelerde merkezleri bolan ýygylyk häsiýetnamalarynyň ossilýasiýasy.
4. Gibbsiň emele gelmesini neýtrallaşdyrmak üçin agram funksiýasy saýlanýar we filtriň seslenme funksiýalarynyň

koeffisentlerine köpeldilýän onuň koeffisentleri hasaplanylýar. Bu operasiýanyň netijesi hökmünde filtriň operatorynyň koeffisentleriniň bahalary bolup durýar (filtriň iş impuls seslenmesi). Aslynda 3 we 4 operasiýa kesgitli agram funksiýaly (agram funksiýa köpeltmek) filtriň geçiriji funksiýasynyň dinamiki getirilmeginiň (wagt boýunça) Furýeniň hatarynyň gysgaldylmagyny emele getirýär.

5. Filtriň operatorynyň koeffisentleriniň hakyky bahalaryny ulanmak arkaly onuň ýygylyk häsiýetnamasynyň gurulmagy amala aşyrylýar we onuň goýlan meselä laýyklygy barlanýar. Simmetriki rekursiw däl filtrler taslanylanda gerek bolan halatynda ýokary ýygylykly filtrleriň ýa – da aralyk filtrleriň, olary soňra özgertmek bilen pes ýygylykly filtrleriň hasabynda esaslanmak zerur däldir. Sap aralyk filtriň hasaby ýeterlik derejede ýönekeýdir, NÇ we WÇ filtrleri bolsa bir ýokarky ýa – da bir aşaky çäk ýygylykly aralyk filtriň ýeketäk ýagdaýydyr.

Setirli faza häsiýetnamaly filtrler. Kazual (bir taraply) ýygylyk filtrler üçin hasaplama has çylşyrymlydyr. Olar üçin girişine degişlilikde çykyşynda signalyň ýygylyk düzüjileriniň laýyk gelme garmoniýasynyň üýtgemegini aradan aýyrmak üçin faza – ýygylyk häsiýetnamasynyň çyzyklylygyny üpjün etmek talap edilýär. Filtr çyzykly faza häsiýetnama eýe bolmagyny üpjün etmek üçin şu şertiň ýerine ýetirilmegini üpjün etmelidir.

Onuň ýerine ýetirilişi filtriň impuls häsiýetnamasy položitel simmetriýa eýe bolan halatynda ýerine ýetirilýär:

$$h(n) = h(N\text{-}n\text{-}1),\ \ n = 0, 1, 2, \ldots, (N\text{-}1)/2,$$

N – täk (görnüş 1); n = 0, 1, 2, …, (N/2)-1, N – jübüt (görnüş 2).

Şol bir wagtda faza häsiýetnamasy filtriň uzynlygy bilen kesgitlener: $\alpha=(N\text{-}1)/2$. Filtriň ýygylyk häsiýetnamasy: $H(\omega)=|H(\omega)|\exp(j\varphi(\omega))$, (43)

bu ýerde $|H(\omega)|$ simmetriki filtrleriň АЧХ laýyklygynda berler.

Bir zady bellemek gerek 2 görnüşli ýygylyk häsiýetnamany ýokary ýygylyklaryň filtrleri taslanylanda ulanyp bolmaýar, sebäbi ol Naýkwistiň ýygylygynda hemişe nula deňdir. Hususanda kazual filtrleriň hasaplanyş usulyýeti, ýygylyk häsiýetnamasyny bermek üçin hasaplamanymyzda, simmetriki filtrleriň hasaplama usulyýetinden tapawutlanmaýarlar,

Gibbsiň emele gelmesini aradan aýyrmak üçin agram funksiýalaryny ulanmak zerurlygy bilen bilelikde degişlidir. Bu hasaplamalaryň arassa tejribe usulyny ulanmaga mümkinçilik berýär – ilki N – nokatlarda simmetriki filtri (görnüş 1), soňra bolsa ony (N-1)/2 nokatlara saga, diňe položitel bahalaryň $n \geq 0$ oblastyna süýşirmek bilen kazual filtre öwrüp hasaplap we işläp bejermäge mümkinçilik berýär.

Ideal ýygylyk filtrleri.

Ideal aralyk filtrleri diýip kesgitli aşaky ýygylykdan $\omega_н$ kesgitli ýokarky ýygylyga çenli aralykda birlik amplituda – ýygylyk häsiýetnamasyna we ol aralykdan daşynda nul geçiriji koeffisente (esasy ýygylyk diapazonynda san filtrleri üçin) eýe bolan filtre aýdylýar.

Filtriň impuls reaksiýasy (operatoryň koeffisenti) berlen geçiriji funksiýanyň H(ω) Furýeniň yzyna özgertmesi bilen tapylýar. Umumy ýagdaaýynda:

$$h(n\Delta t) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\exp(j\,\omega\, n\Delta t)\, d\,\omega \qquad (44)$$

Filtriň impuls seslenmesiniň jisim funksiýasyny almak üçin geçiriji funksiýanyň hereket ediji bölegi jübüt bolmalydyr, hyýaly bolsa täk bolmalydyr. San filtrleri esasy ýygylyk diapazonynda berilýär, onuň çäkleri (Naýkwistiň ýygylygy $\pm\ \omega_N$) filtrlenmä degişli maglumatlaryň diskretizasiýa aralygy bilen kesgitlenilýär ($\omega_N = \pi/\Delta t$) we laýyklykda filtriň operatorynyň diskretizasiýa aralygyny kesgitleýärler ($\Delta t = \pi/\ \omega_N$). Nul faza süýşmeli filtrler üçin geçiriji funksiýanyň hyýaly bölegi nula deň bolmalydyr, şol bir wagtda filtriň operatory Furýeniň kosinus özgertmesi bilen kesgitlenilýär:

$$h(n\Delta t)= (1/\pi)\int_0^{\omega_N} H(\omega)\cos(n\pi\,\omega / \omega_N)\, d\,\omega_N \quad n= 0, 1, 2,... \qquad (45)$$

Ideal aralyk filtr üçin $H(\omega)=1$ в $\omega_н$ we $\omega_в$, ýygylyk aralygynda we (45) integraly şu aralyklarda hasaplanyp çykarylýar. Pes we ýokary ýygylyklaryň ideal filtrleri, ideal PF hususy ýagdaýlary hökmünde, 0 we $\omega_в$ aralykda pes ýygylyklar üçin hem – de $\omega_н$ we ω_N aralykda ýokary ýygylyklar üçin integrirlenýärler.

Δt maglumatlaryň diskretizasiýa aralygynda, 1 hökmünde -π we π aralygynda Naýkwistiň ýygylyk bahalary bilen çäklendirilen geçiriji funksiýalaryň esasy ýygylyk diapazonyny kabul edýäris, onda ol geçiriji funksiýalaryň ýygylyk şkalasynyň ölçeginiň üýtgemeginde görünýär.

Mysal 1. $\Delta t = 0.1$ сек. $f_N = 1/2\Delta t = 5$ Гц. $\omega_N = \pi/\Delta t = 10\pi$.

Mysal 2. $\Delta x = 10$ metr. $f_N = 0.05$ $м^{-1}$. $\omega_N = 0.1\pi$.

Galan hemme aňlatmalarda Δt baha, eger – de ol ýörite bellenilmedik bolsa, 1 deň diýip alýarys. $H(\omega)=A=1$ bolanda göýberme aralygynda ($\omega_н$, $\omega_в$), we $H(\omega)=0$ onuň çäklerinden daşynda, ideal simmetriki aralyk NSF üçin (2) integrirleme çäkleri bilen, degişlilikde $\omega_н$ we $\omega_в$ aralykda umumy ýagdaýda alýarys:

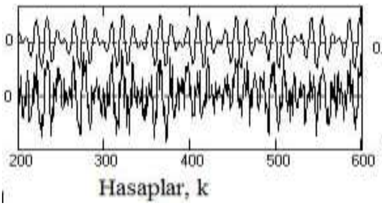
$$h(n) = (A/\pi)\,[\omega_\text{в}\,\mathrm{sinc}(n\,\omega_\text{в}) - \omega_\text{н}\,\mathrm{sinc}(n\,\omega_\text{н})], \qquad (46)$$

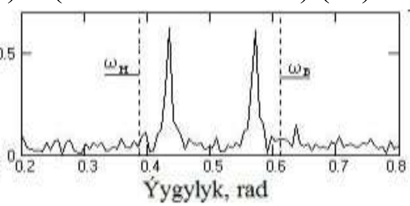
$$h_0 = (\omega_\text{в} - \omega_\text{н})/\pi, \quad h(n) = (\sin n\,\omega_\text{в} - \sin n\,\omega_\text{н})/(n\pi).$$

bu ýerde $\mathrm{sinc}(n\ \omega) = \sin(n\ \omega)/(n\ \omega)$ – integral sinusyň funksiýasy (hasaplama funksiýasy), ω koordinata boýunça tükeniksizdir.

Ýygylyk häsiýetnamanyň böwetleýji filtre inwersiýasy bolup geçende:

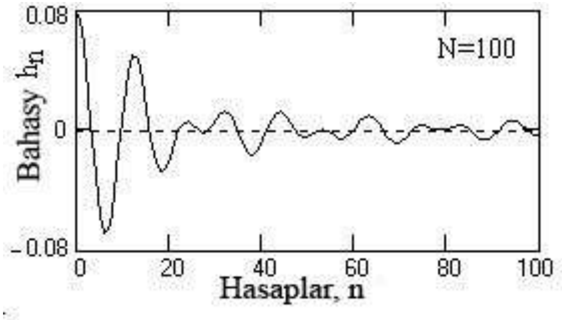
$$h_0 = (1-(\omega_\text{н} - \omega_\text{в}))/\pi, \quad h(n) = (\sin n\,\omega_\text{н} - \sin n\,\omega_\text{в})/(n\pi).$$





Sur. 14 Giriş signallar. *Sur. 15 Signalyň spektri we filtriň çäkleri.*

Sur 14,15 birtonally balans amplituda modulýasiýaly signalyň mysaly getirlendir (arassa signal ýokarsynda, berkidilen sesler bilen aşagynda, sesleriň güýji signalyň güýjine deňdir). Eger – de informasiýa modulirleýji signalyň ýygylygynda we amplitudasynda ýerleşen bolsa, onda bir modulirleýji ýygylykly spektri bolan seslerden signaly bölmegiň aralyk filtri sur. 15 getirlen, ideal ýagdaýynda modulirleýji ýygylygyň ($\omega_\text{н}$ we $\omega_\text{в}$ aralykda) mümkin bolan modulýasiýa çäklerinde düz ýygylyk häsiýetnamasyna eýe bolmalydyr.



Sur.16. Filtriň operatory.

Filtriň operatorynyň ululygy takmynan şu pikirler bilen kesgitlenilýär. Operatoryň ölçegi näçe uly bolsa geçiş zolagy şonça kert bolar we onuň ölçegi kiçi bolar, ýagny ideala degişlilikde filtriň hakykatda amala aşyrylan geçiriji funksiýasy has golaý bolar. Adatça ilki bilen uly ölçegli filtri gurup görmek zerurdyr, onuň berlen ýygylyk häsiýetnamasyna laýyklygyny bahalandyrmak we geljekde peseldip görmegi synanyşmakdyr. Simmetriki NSF üçin N baha täk san bolmalydyr. Sur. 18 ýokarda getirlen şertleriň esasynda (46) boýunça hasaplanylan operatoryň koeffisentleriniň sany boýunça N=100 çäklendirilen aralyk filtriň operatory getirlen. Suratdan görnüşi ýaly operator örän haýal öçýär we görnüşi ýaly gysgaldylan, ol bolsa filtriň ýygylyk häsiýetnamasynyň şekilinde görünmelidir. Galan hemme hasaplamalar şu mysalyň dowamynda geçiriler.

Ideal filtreriň ahyrky golaýlatmalary

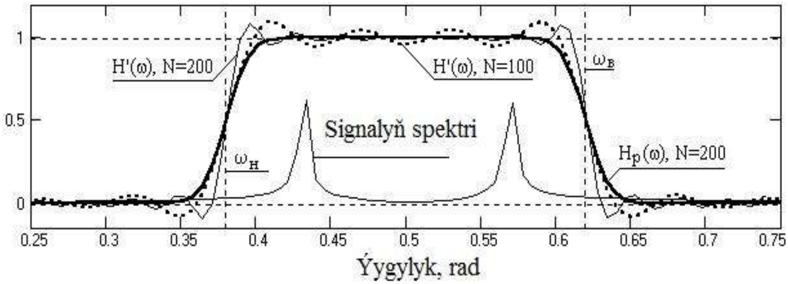
Ideal ýygylyk NSF operatory, gelip çykyşy ýaly, özünden tükeniksiz öçýän sanyzygiderligini emele getirýär, ol berlen geçiriji funksiýany amala aşyrýar:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cos n\,\omega. \qquad (47)$$

<u>Filtreriniň operatorlarynyň penjiresiniň çäklendirilmegi.</u> Tejribede 94 tükeniksiz hatary hemişe onuň soňky golaýlatmasynyň agzalarynyň kesgitli mukdary bilen çäklendirmeli bolýar:

$$H'(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} h(n) \cos n\,\omega, \qquad (48)$$

Şol bir wagtda geçiriji funksiýa Gibbsiň emele gelmesi bilen çylşyrymlaşdyrylýar we signaly göýbermäniň we aýyrmanyň aralyklarynda geçiş zonasy emele gelýär (N=100 bolanda punktir çyzygy). Gibbsiň emele gelmesi beýgelmelerden (birinji jynsyň bölünmelerinden) $\pi/(2(N+1))$ aralykda geçiriji funksiýanyň ilkinji zyňylmzlzaryny emele getirýär. Eger – de geçiş zolagynyň Δ_p giňligini birinji golaýlatmada ilkinji zyňylmalaryň uzynlygy boýunça $H(\omega)$funksiýanyň zyňylmzsyndan kabul etsek, onda onuň bahasy takmynan $\pi/(N+1) = \Delta_p$ deň bolar.



Sur.17 Aralyk filtriň geçiriji funksiýalary.

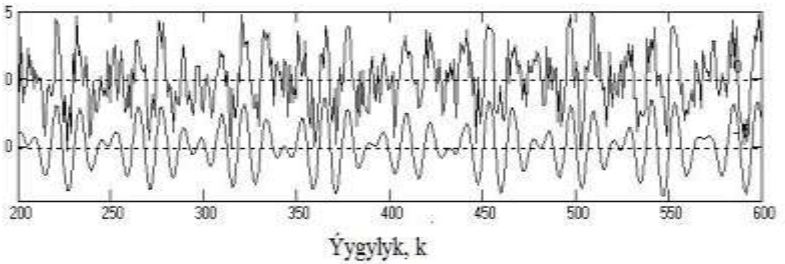
Agram funksiýalarynyň ulanylşy. Gibbsiň emele gelmesi bilen kesgitlenýän, geçiriji funksiýanyň pulsasiýa derejesi maglumatlaryň filtrlenmesiniň goýlan meselelerini kanagatlandyrmaýan bolsa, tekizleýji agram funksiýalaryny ulanmak maslahat berilýär. Agram funksiýalary ulanylanda geçiş zonalary takmynan iki esse ulalýandygyny göz öňüne tutsak, geçiş zolagynyň giňelme bahasy $\Delta_p = 2\pi/N$ deň bolar. Bu ýerden berlen geçiş zolagy boýunça gysgaldylan hataryň minimal mukdaryny kesgitläp bolar:

$$N = 2\pi/\Delta_p. \qquad (49)$$

Mysal üçin sur4 N bahasy 200 diýip alnan, şol bir wagtda geçiş zolagynyň kertligi ulaldy (H'(ω), inçe egri çyzyk, N=200), onda agram funksiýasynyň indiki tekizlenmegine zapas döredi.

Agram funksiýalarynyň saýlawyny aýyrma aralygynda signaly güýçlendirmegiň mümkin bolan ossilýasiýa ululygy boýunça amala aşyrmak maksada laýykdyr, ýagny agram funksiýalaryň geçiriji häsiýetnamalarynda birinji zyňylmanyň degişli amplituda bahasy boýunça amala aşyrylmalydyr. Saýlanyp alnan agram funksiýasy üçin agram koeffisentleriniň hasaby geçirilýär., soňra bolsa filtriň operatorynyň ahyrky bahalary bellenilýär:

$$h_n = p_n\, h(n). \qquad (50)$$



Sur. 18 Aralyk filtrlenmesi (ýokarda – giriş signaly, aşakda – çykyş).

Koeffisentleri aňlatmalara goýmak bilen filtriň alnan geçiriji häsiýetnamasyny gurmak maslahat berilýär we göni şonuň üsti bilen goýlan meseleler üçin filtriň ýaramlylygyny bahalandyrmak maslahat berilýär. Bu sur. (16) anyk görünýär, ol ýerde biziň mysalymyz üçin Gaussyň agram funksiýasy ulanylan. $H_p(\omega)$ geçiriji funksiýa N=100 bolanda $H'(\omega)$ funksiýasy ýaly tejribede kertlige eýedir we signalyň spektriniň aralygynda tejribede tekiz beýiklige eýedir. Sur. 17 getirlen signalyň filtriniň işleýşiniň hilini sur. 20 görmek mümkindir.

Alnan geçiriji funksiýany has takyk bahalandyrma zerurlygy ýüze çykanda Furýe özgertmesi ýerine ýetirilmäkä onuň ýygylyk çözgüdini 2 – 4 esse ulaltma maslahat berilýär, ony h_n operatorynyň nullary goşmak arkaly ölçegini ulaltmak arkaly ýerine ýetirip bolýar.

Esasy agram funksiýalar. Aşaky tablisalarda has giň ýaýran agram penjireleriniň aňlatmalary we esasy spektral häsiýetnamalary getirlendir. Agram penjireleri göterijiler, esasynda, çäklendirilmedik bolup durýar we agram penjireleri hökmünde ulanylanda diňe penjiräniň çäklerinde hereket edýär we onuň daşynda nula öwrülýär.Ýazgyny ýönekeýleşdirmek üçin aňlatmalar ($0\pm\tau$) nula degişlilikde simmetriki bolan 2τ wagt penjireli syn görnüşinde getirilýär. Diskret görnüşine getirlende 2τ penjiresi 2N+1 penjiresi bilen çalyşylýar, t bahalar bolsa $t = n\Delta t$ diskretler bilen çalyşylýar.Agram funksiýalarynyň köpüsi ($n = \pm N$) penjiräniň çaklerinde nul ýa – da nul baha golaý diýip kabul edilýär. Soňkysy $2\tau = (2N+3)\Delta t$ bolanda aradan aýyrylýar, şol bir wagtda nula golaý bahalar penjiräniň çäkleriniň daşyna geçirilýär.

Esasy agram funksiýalar.

Wagt penjiresi	Agram funksiýasy	Furýe şekili
Adaty (Π)	$\Pi(t) = 1, \lvert t\rvert \le \tau;$ $\Pi(t)=0, \lvert t\rvert > \tau$	$\Pi(\omega) = 2\tau \,\mathrm{sinc}[\omega\tau]$
Barlett (Δ)	$b(t) = 1-\lvert t\rvert/\tau$	$B(\omega) = \tau \,\mathrm{sinc}^2(\omega\tau/2).$
Henning, Gann	$p(t) = 0.5[1+\cos(\pi t/\tau)]$	$0.5\Pi(\omega)+0.25\Pi(\omega+\pi/\tau)+0.25\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Hemming	$p(t) = 0.54+0.46\cos(\pi t/\tau)$	$0.54\Pi(\omega)+0.23\Pi(\omega+\pi/\tau)+0.23\Pi(\omega-\pi/\tau)$
Karre (2-e окно)	$p(t) = b(t)\,\mathrm{sinc}(\pi t/\tau)$	$\tau\cdot B(\omega)*\Pi(\omega)$, $\Pi(\omega) = 1$ при $\lvert\omega\rvert<\pi/\tau$
Laplas-Gauss	$p(t) = \exp[-\beta^2(t/\tau)^2/2]$	$[(\tau/\beta)\sqrt{2\pi}\,\exp(-\tau^2\omega^2/(2\beta^2))] \circledast \Pi(\omega)$
Kaýzer-Bessel	$p(t) = \dfrac{J_o[\beta\sqrt{1-(t/\tau)^2}]}{J_o[\beta]}$, $J_o[x] = \sum_{k=1}^{\infty} [(x/2)^k/k!]^2$	Furýeniň özgertmesi bilen hasaplanylýar $J_o[x]$ – Nul hatarly Besseliň modifissirlene funksiýasy

Ölçegleri	Ölç. birl.	П-penjire	Bartlett	Lansoş	Henning	Hemming	Karre	Laplas	Kaýzer
Amplituda									
Esasy beýgelme	τ	2	1	1.18	1	1.08	0.77	0.83	0.82
1-nji zyňylma(-)	%Гл.п.	0.217	-	0.048	0.02	0.0062	-	0.0016	.00045
2-nji zyňylma(+)	- “ -	0.128	0.047	0.020	7	0.0016	-	0.0014	.00028
Esasy beýgelmäniň	ωτ/2τ	0.60	0.89	0.87	0.00	0.91			
giňligi					84		1.12	1.12	1.15
Ýerleşişi:	ωτ/2τ	0.50	1.00	0.82	1.00	1.00			
1-nji nul		0.72	-	1.00		1.09	-	1.74	1.52
1-nji zyňylma	ωτ/2τ ωτ/2τ	1.00	-	1.29	1.00	1.30	-	1.91	1.59
2-nji nul	ωτ/2τ ωτ/2τ	1.22	1.44	1.50	1.19	1.41	-	2.10	1.74
2-nji zyňylma					1.50		-	2.34	1.88
					1.72				

Kaýzeriň agram funksiýasy. Ýygylyk NSF hasaplamalarynda has giň ýaýrama Kaýzeriň agram funksiýasy eýe boldy:

$$p(n) = \frac{J_0[\beta\sqrt{1-(n/N)^2}]}{J_0[\beta]} \qquad (51).$$

Bu Kaýzeriň funksiýasynyň ululyklary göni taslanylýan filtrleriň geçiriji funksiýalaryna tehniki talaplar boýunça bellenilip bilner – geçiş zonasynyň mümkin bolan giňligine we filtriň sesiniň koeffisent bahasyna (göýberme aralygynyň geçirme koeffisentleriniň birliklerinde geçiriji funksiýanyň ossilýasiýasynyň maksimal bahalaryna).

Kaýzer tarapyndan δ berlen baha üçin NSF operatorynyň agzalarynyň mukdaryny geçiş zolagynyň giňligine köpeldilmegi hemişelik ululyk bolup durýandygy kesgitlenildi. Ol D – faktor adyna eýe boldy:

$$D = N\cdot\Delta_p/\pi.$$

Beýleki tarapdan D – faktor bilen Kaýzeriň funksiýasynyň ululygy şu empiriki gatnaşyklar kesgitlenildi:

$$D = (A-7.95)/14.36, \quad A>21 \text{ bolanda}$$

$$= 0.9222 \quad A<21 \text{ bolanda}$$

$$\beta = 0.1102(A-8.7) \quad A>50 \text{ bolanda}$$

$$= 0 \quad A<21 \text{ bolanda}$$

$= 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), \quad 21<A<50.$

Bu ýerde: $A = -20 \log \delta$ - desibelde öçme.

Getirlen aňlatmalar sesiň koeffisentiniň berlen bahasy δ boýunça Kaýzeriň funksiýasynyň β ululygyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär, D – faktoryň üsti bilen bolsa filtriň agzalaryny kesgitlemäge mümkinçilik berýär:

$$N = \pi D/\Delta_p.$$

Aralyk filtrleri taslanylanda geçiriji funksiýanyň baralgy NSF operatory boýunça alnan sesiň koeffisentiniň bahasy boýunça ilki meselähökmany bolup durýar. Munuň sebäbi aralyk filtriň göýberme aralygy iki sany beýgelme bilen çäklendirilien, geçiriji häsiýetnamasynda ossilýasiýanyň iki sany merkezi ýüze çykýar, şol bir wagtda ossilýasiýanyň goýulmagy mukdar ossilýasiýa amplitudasyny hem peseldip, hem ulaldyp biler. Eger – de goýulmanyň hasabyna ossilýasiýanyň amplitudasynyň ulalmagyna getirse, onda NSF hasabyny δ başlangyç hasabynyň bahasyny peseltmek arkaly gaýtalamak gerekdir.

Aralyk filtriň hasabynyň mysaly.

AF hasabyny amala aşyrmak üçin indiki başlangyç ölçeglerde:

$$\omega_{н} = 0.3\pi,$$

$$\Delta_{в} = 0.6\pi,$$

$$\delta_{p} = 0.1\pi,$$

$$\delta = 0.02.$$

1. $A = -20 \log \delta$. $A = 34$.
2. $N = \tau\, (A-7.95)/(14.36\, \Delta_p)$.

$$N = 18.$$

3. $\beta = 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21)$.

$$\beta = 2.62.$$

4. $h_o = (\omega_в - \omega_н)/\pi$. $h_o = 0.3$
5. $h(n) = (\sin n\omega_в - \sin n\omega_н)/(n\pi)$.

$$h(n) = 0.04521,\ -0.24490,\ -0.09515,\ \ldots,\ 0.02721.$$

6. $p_n = J_o\{\beta\sqrt{1-(n/N)^2}\}/J_o\{\beta\}$. $p_n = 1.00,\ 0.997,\ 0.9882,$ ....
7. Filtriň operatory: $h_n = p_n\, h(n)$,

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

$$h_{-n} = h_n.$$

$$h_n = 0.3000,\ 0.04508,\ -0.2420,\ \ldots.$$

8. Aňlatma boýunça barlamak: $H(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} h_n \cos n\omega$, $0 \leq \omega \leq \pi$.

Geçiriji funksiýanyň şekilini bahalandyrmak üçin 0-π aralykda spektriň nokatlar mukdaryny 2N diýip almak ýeterlikdir, ýagny $\Delta\omega \leq \pi/36$ ädimli diýip almak ýeterlikdir.

Ýylmaýjy ýygylyk filtrleri.

Käbir ýagdaýlarda (filtrleri yzygider berkidilende, güýçli päsgelçilikler derejesinde signallar bölünende we ş.m.) filtrleriň geçiriji häsiýetnamalarynda ossilýasiýalar olaryň az galyndy ululygynda hem örän zyýanly bolup durýarlar. Mysal üçin filtrleriň ikileýin yzygider ulanylmagy göýberme aralygyndaky ýalňyşlyklar takmynan iki esse köpelýär., aýyrylma aralygynda bolsa ikinji derejä köpeldilýär, şol bir wagtda ekwiwalent filtriň uzynlygy tejribede uzalýar.

Filtriň sinteziniň prinsipi. Görnüşi ýaly tekiz geçiriji häsiýetnamaly filtrleri diňe geçiriji funksiýany Furýeniň ahyrky hataryna düzmek mümkinçiligi bolanda mümkindir.

Biz simmetriki geçiriji funksiýaly NSF eýe diýip aýdalyň:

$$H(\omega) = h_o + 2\sum_{n=1}^{N} h_n \cos n\omega. \qquad (52)$$

Belli bolşy ýaly cos nω cos n derejeli cos ω boýunça polinoma deňdir, şol bir wagtda (6) aňlatmany şu görnüşde ýazmak mümkindir:

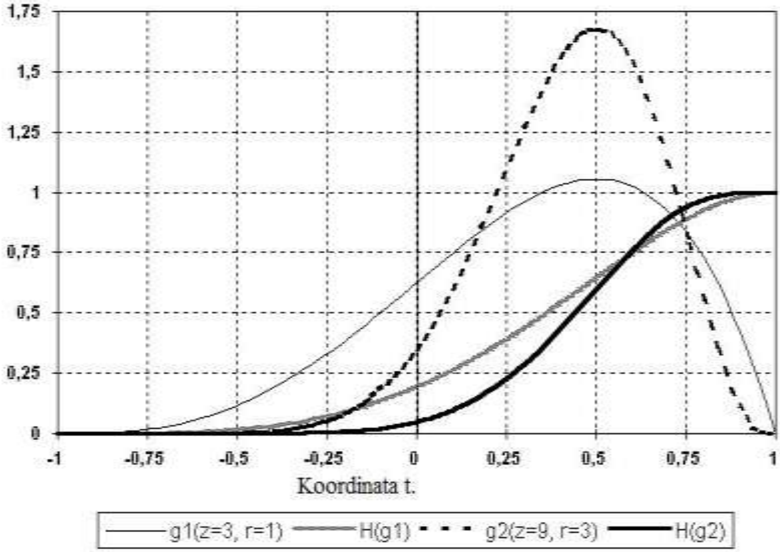
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N} g_n (\cos\omega)^n = \sum_{n=0}^{N} g_n x^n, \qquad (53)$$

Bu ýerde x=cos ω üýtgeýän ululyk 1 we -1 aralykda üýtgeýär (sebäbi ω 0 we π aralykda üýtgeýär). Üýtgeýän ululygyň üýtgemesi abssisanyň okunyň 180^o öwrülmesi bilen çyzykly däl özgertmäni emele getriýär (x üýtgeýän ululyk boýunça PÝF geçiriji funksiýalary ÝÝF meňzeşdir we tersine) dereje polinomyň üsti bilen funksiýany aňlatmak arkaly. Soňkysy dereje polinomlarynyň esasynda tekiz funksiýalarynyň sintezi çylşyrymlyklar döretmeýänligi bilen gyzyklandyrma döredýär.

Mysal üçin PÝF gurnamak üçin başlangyç hökmünde şu görnüşli dereje kabul edilip bilner:

$$g(x) = (1+x)^z (1-x)^r, \qquad (54)$$

bu ýerde z we r – ululyklar.

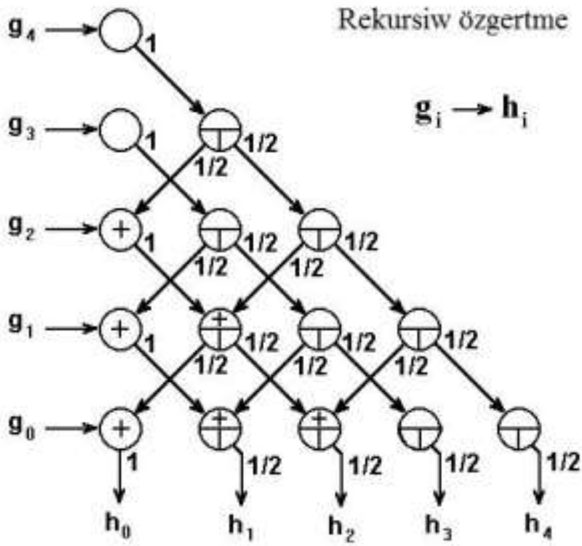


Sur. 19 Tekiz filtrleriň sinteziniň mysallary.

(8) funksiýa z we r hatarly nullara laýyklykda x = -1 и x = 1 nokatlarda eýedir (sur.19), şol bir wagtda z we r ululyklaryň bahalary funksiýanyň absissanyň okuna degme derejesini häsiýetlendirýärler. Hatar näçe uly bolsa, funksiýa şonça – da absissa okundan haýal aýyrylýar.

Eger – de funksiýanyň (8) aňlatmasyny -1 we x çäklerinde integrirlense we integralyň -1 we 1 aralygyndaky bahalara normirlense, onda pes ýygylykly filtriň tekiz geçiriji häsiýetnamasy alnar. Sur 19. Z we r iki sany goşa ululyklar üçin geçiriji funksiýalar getirlendir, olar şu aňlatma boýunça hasaplanylandyr:

$$H(x)=\int_{-1}^{x} g(x)dx \,/ \int_{-1}^{1} g(x)dx. \qquad (55)$$



H(x) funksiýasy (z-r)/(z+r) nokadynda beýgelmä eýedir we geçiş zonasynyň kertligi z we r bahalary näçe uly bolsa şonça – da ýokarydyr. x=cos ω goýmak bilen ω ýygylyk üýtgeýän ululyga gelmeklik funksiýanyň monotonlygy saklanmagy üpjün edilýär.

Soňlamada h_n filtriň koeffisentlerini kesgitlemek üçin derejelik şekilinden Furýe hataryna çenli yzyna özgertme talap edilýär. Bu operasiýanyň ýerine ýetirilmegi rekursiw usul bilen ýeterlik derejede aňsat ýerine ýetirilýär, sur. 20 görkezilendir.

Tekiz filtriň hasaplama mysaly.

Tekiz ýygylyk häsiýetnamasy bolan PÝF hasabyny amala aşyrmaly, häsiýetnamanyň beýgelmesi □/3 nokadynda. Esas hökmünde (8) funksiýany kabul etmeli.

1. $x= \cos(\square/3)= 0.5= (z-r)/(z+r)$. Kabul edilen: $z=3$, $r=1$.

Başlangyç köpagzasy: $g(x) = (1-x)(1+x)^3 = 1+2x-2x^3-x^4$.

2. $H(x)=\int_{-1}^{x} g(x)dx = C+x+x^2-0.5\,x^4-0.2\,x^5$. $x= -1$, $H(-1)= 0$ bolanda, bu ýerde $C=0.3$. $x=1$, $H(1)=1.6$ bolanda.

Şonda: $H(x)= (3+10x+10x^2-5x^4-2x^5)/16$. $g_n = \{3/16, 10/16, 10/16, 0, -5/16, -2/16\}$.

3. Rekursiw özgertmäni ulanyp, alýarys: $h_n= \{(98, 70, 20, -5, -5, -1)/256\}$.

---

(9) aňlatmada ýokary ýygylyklaryň tekiz filtrlerini ulanyp integrirleme çaäkleriniň ýerini çalyşmak ýeterlikdir. Tekiz aralyk filtrleri göýberme ýygylyklaryny böwetlemek arkaly PÝF we ÝÝF kombinirlemek arkaly alynýar.

Differirleýji san filtrleri.

Geçiriji funksiýa. $d(\exp(j\Delta t))/dt = j\omega \exp(j\Delta t)$ önüm üçin aňlatmadan görnüşi ýaly, massiwiň önüminiň filtri hasaplanylanda $H(\omega) = j\omega$ görnüşli geçiriji funksiýany Furýeniň hatary bilen approksimirlemek zerurdyr. Munuň ýaly filtriň koeffisentleri täk simmetriýa eýe bolýanlygy sebäpli ($h_{-n} = -h_n$) deňlik ýerine ýetrilýär:

$$h_n\, [\exp(j\omega n)-\exp(-j\omega n)] = 2j\, h_n \sin n\omega,$$

onda filtriň geçirijilik häsiýetnamasy şu görnüşe eýe bolar:

$$H(\omega) = 2j(h_1 \sin \beta + h_2 \sin 2\beta + \dots + h_N \sin N\omega),$$

Ýagny, hyýaly täk hasap edilýär, filtriň özi bolsa funksiýalaryň bahalarynyň s_k degişlilikde simmetriki ýerleşen dürlülikleriň çyzykly kombinasiýalary bolup durýar. Filtrlenmäniň deňlemesi:

$$y_n = \sum_{n=1}^{N} h_n(s_{k+n} - s_{k-n}).$$

Eger – de differensirlemä pes ýygylykly signal täsir edilmeli bolsa, maglumatlar massiwinde bolsa ýokary ýygylyklar bolsa, esasy ýygylyk diapazonynda approksimasiýa üçin bolsa şu görnüşli geçiriji funksiýa berilýär (hyýalylyk indeksi bolmazdan):

$$H(\omega) = \omega \le \beta_в, \quad H(\omega) = 0, \;\; \omega_в < \beta \le \varphi_N.$$

Differirleýji filtriň operatory:

$$h(n) = (2/\pi)\int_0^{\omega_{в}} H(\omega)\,\sin(n\omega/\beta_N)\,d\omega n = 0,1,2,... \tag{56}$$

Adatça $\omega_N = \beta$ ($\Delta t = 1$) kabul edip we (10) $H(\omega) = \omega$, bolanda kabul edip:

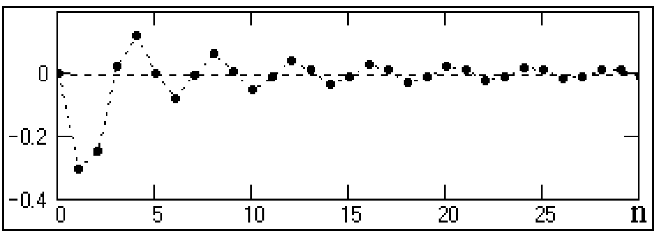
$$h_n = (2/\pi)[\sin(n\omega_{в})/n^2 - \omega_{в}\cos(n\omega_{в})/n], \tag{57}$$

$$h_o = 0, \quad h_{-n} = -h_n.$$

Ýygylyk häsiýetnamasy:

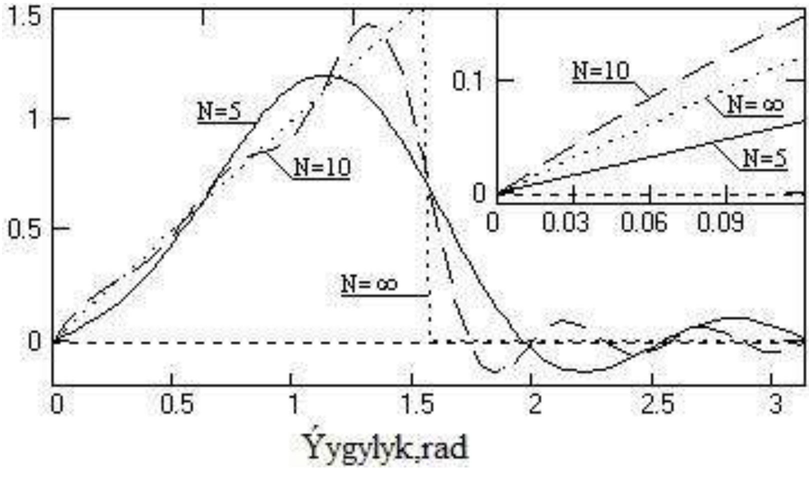
$$Im(H(\omega)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \sin n\omega = 2\sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin n\omega \tag{58}$$

<u>Differensirleme takyklygy.</u> Sur. 21 $\Delta t=1$ ($\omega_{в} = \pi/2$) bolanda $\{0\text{-}0.5\}\pi$ ýygylyklar aralygynda differirleýji filtriň koeffisentleriniň hasabynyň mysaly getirlendir. Differirleýji filtrleriň operatorlary, adatça örän haýal öçýärler we laýyklykda (12) gerekli derejede takyk ýerine ýetirilmegi örän çylşyrymlydyr.



Sur.21. Operatoryň filtriniň koeffisenti.

(12) hatar N agzalara çenli gysgaldylýar we agram funksiýalaryň kömegi bilen Gibbsiň emele gelmesi aradan aýyrylýar. Differensirleýji filtrler üçin Gibbsiň emele gelmesi örän agramly baha eýedir we maglumatlar işlenip taýýarlanylanda uly ýalňyşlyklara getirip bilýär, eger – de onuň neýtrallaşmagy ýerine ýetirilmese. Operatoryň çäklendirilme mysaly sur. 21 getirlendir we gysgaldylan operatorlaryň H'(ω) laýyk geçiriji funksiýalary sur. 22 görkezilendir.



Sur.22. Filtrleriň ýygylyk funksiýalary.

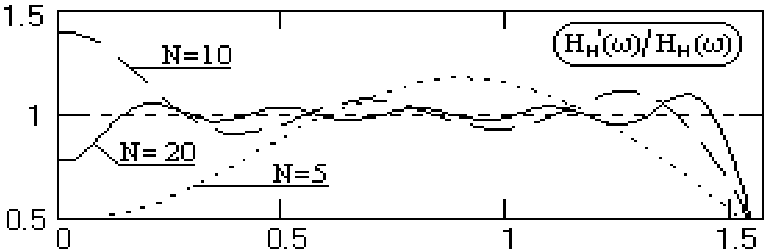
Gysgaldylan operatorlar bilen mümkin bolan differensirleme ýalňyşlyklary bahalandyrmak üçin $\omega_в = \pi/2$ bolanda filtriň hasabyny geçireliň. (2) aňlatmalar boýunça kesgitleýäris:

h_{0-10} = 0, 0.3183, 0.25, -0.0354, -0.125, 0.0127, 0.0833, -0.0065, -0.0625, 0.0039, 0.05.

s_n = n ýönekeý maglumatlar massiwinde filtriň işini barlap göreliň, onuň önümi hemişe 1 deňdir. Hemişelik önümi bolan massiw üçin filtr massiwiň islendik nokadynda barlanyp bilner, şonuň içinde n=0 nokatda, onuň üçin alýarys

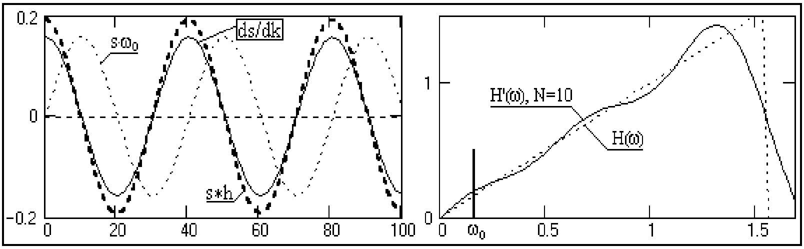
$$y = \sum_{n=-N}^{N} h_n\, s_{0-n} = 2\sum_{n=1}^{N} n\, h_n,$$

şonda N=10bolanda alýarys: y=0.5512 при N=5, y=1.53.



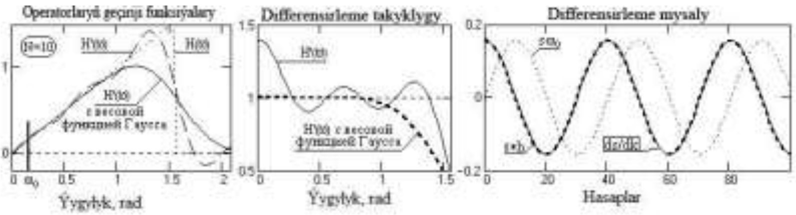
Sur.23. Differensirleme ýalňyşlyklary.

Önümiň hakyky bahasyna görä munuň ýaly uly tapawut ω=0 bolanda filtriň real geçiriji funksiýasynyň gyşarma burçunyň tangensi, suratda görnüşi ýaly, H(ω) = ω approksimirleýji funksiýanyň gyşarma burçunyň tangensinden gowy tapawutlanýandygy bilen düşündirilýär.S Sur. 25 σ = $H_н'(\omega)/H_н(\omega)$ differensirlemäniň degişli ýalňyşlyklarynyň ýygylyk grafikleri getirlendir, onda N → ∞ bolanda funksiýanyň çäkleri boýunça nul ýygylykda bahalary hasaplamak bilen otnositel differensirleme ýygylyk grafikleri getirlendir. Sur. 26 s garmonikanyň ω_0 ýygylykly, N=10 operatorly differensirlemäniň mysaly getirlendir, ds/dk takyk differensirleme bilen deňeşdireniňde.



Sur. 24 Differensirleme operasiýasynyň mysaly.

<u>Agram funksiýalaryny ulanmak.</u> Gibbsiň emele gelmesini neýtrallaşdyrmak üçin Hemmingiň agram funksiýasyny ulanalyň. N=10 bolan filtr üçin netije sur. 10 görkezilen. $s_n = n$ massiwinde hasabyny barlap göreliň we y=1.041 netijäni alarys, ýagny, differensirleme ýalňyşlygy esli peselýär.



Sur. 25 Agram funksiýasyny ulanmak bilen differensirleme.

Şonuň ýaly ω_n we ω_w integrirleme çäginiň laýyk üýtgemegi bilen aralyk differirleýji filtriň hem hasaby geçirilýär. Şonda alýarys:

$$h_n = (\omega_н \cos n\omega_{н}-{}_{в}\cos n\omega_в)/(n\pi) + (\sin n\omega_в - \sin n\omega_н)/(n2\pi). \quad (59)$$

<u>Çyzykly topar saklanmaly filtrler.</u> Differirleýji filtrler, diýmek hyýaly ýygylyk häsiýetnamaly islendik beýleki filtrler, mysal üçinGilbertiň özgertme operatory, sinalyň çyzykly topar saklanmasynyň şerti üpjün edilende kazual wariantda ýerine ýetirilip bilner, ol şu görnüşde ýazylyp bilner.

Ol eger – de filtriň impuls häsiýetnamasy položitel simmetriýa eýe bolsa ýerine ýetirilýändir:

$h(n) = -h(N-n-1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)/2$, N – täk (görnüş 1);

$n = 0, 1, 2, \ldots, (N/2)-1$, N – jübüt (görnüş 2).

Şonda faza häsiýetnamasy filtriň uzynlygy bilen kesgitleniler:

$$\alpha(N-1)/2, \quad \beta = \pi/2.$$

Filtriň ýygylyk häsiýetnamasy:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp(j\varphi(\omega)), \quad (60)$$

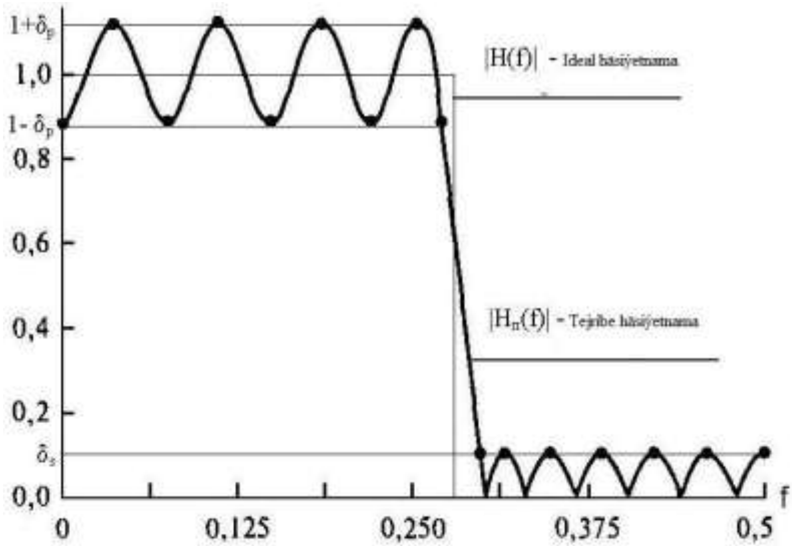
Bu ýerde $|H(\omega)|$ moduly täk berilýär.

NSF hasabynyň alternatiw usullary.

Ýygylyk häsiýetnamasy boýunça NSF göni hasaplama usuly düşnükli we ulanylyş üçin ýönekeýdir. Usulyň ýetmezçiligi – maýyşgalygyň bolmazlygydyr. Ol göýberme we aýyrma aralyklarynda ýygylyk häsiýetnamalarynyň dürli deňölçegsiz derejeli filtrleri taslamaga mümkinçilik bermeýär, deňölçegsiz derejesi bolsa filtriň agzalarynyň mukdaryna bagly däldir we üýtgedilip bolmaýar. Ýygylyk häsiýetnamasynyň maksimal ossilýasiýalary hemişe aralyk çäkleriniň zolaklarynda syn edilýar we ondan daşlaşanda peselýärler, ýöne golaý çäklerde bolsa ossilýasiýalaryň interferensiýalarynyň emele gelmelerini syn edip bolýar. Taslamada altenatiw usullar has maýyşgak bolup durýarlar: optimizirleýjiler.

Optimizirleýji usullar ýygylyk häsiýetnamasynyň optimal ossilýasiýasy bolan (Çebyşew boýunça) ölçegi boýunça ekonom operatorlary taslamaga mümkinçilik berýär. Olar meňzeş yrgyldylaryň aralyklaryna esaslanandyr.

Pes ýygylyklaryň optimal filtriniň ýygylyk häsiýetnamasy sur. 28 getirlendir. Göýberme aralygynda filtriň real häsiýetnamasy $1-^{\delta}{}_{p}$ we $1+^{\delta}{}_{p}$ bahalar aralygynda hemişelikler bilen ossilirlenýär.



Sur. 26 Pes ýygylyklaryň optimal filtri.

Hemişelik ossilýasiýany aýyrma aralygynda amplitudalar $0\text{-}^{\delta}{}_{s}$ aralygynda tapylýar. Ideal we hakyky häsiýetnamalaryň arasyndaky tapawut özünden E(f) ýalňyşlyklar funksiýasyny emele getirýär. Optimal usul h(n) filtriň koeffisentlerini kesgitlemäge mümkinçilik berýär, olar üçin maksimal ölçenen ýalňyşlyklaryň bahasy minimizirlenýär:

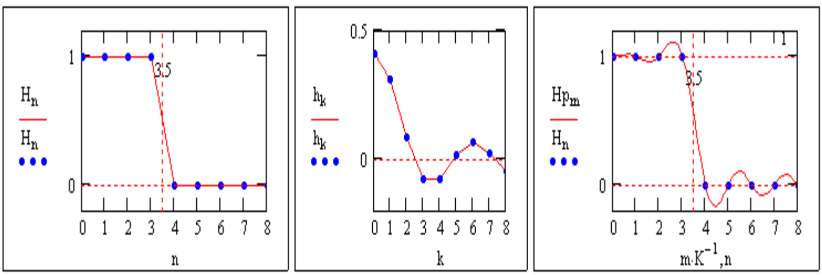
$$\min[\max(E(f))]$$

Filtr hasaplanylanda esasy moment hökmünde ekstremumlaryň ýygylyklarynyň ýerleşişini kesgitlemek bolup durýar, ol Remeziň iterasion algoritmi bilen ýerine ýetirilýär, ondan soňra ekstremumlaryň ýerleşişi boýunça filtriň ýygylyk häsiýetnamasy berilýär we onuň koeffisentleri kesgitlenilýär.

<u>Ýygylyk saýlama usuly</u> agram funksiýalary ulanmazdan ýygylyk häsiýetnmasy boýunça filtriň hasabynyň warianty bolup durýar we ýygylyk – saýlama filtrler üçin hem, özboluşly ýygylyk häsiýetnamalay filtrler üçin hem ulanylyp bilner. Usulyň esasynda filtriň ýygylyk häsiýetnamasyny göýberme we aýyrma aralyklarynda mümkin bolan ossilýasiýalaryň ululygy boýunça talap edilýän filtriň häsiýetnamasyna görä geçiş zolagyny soňraky üýtgetmek bilen göni san görnüşinde bermeklik ýatyr. Mysal hökmünde sur. 13 pes ýygylykly filtriň hasabyny getireliň :

$N := 8 \quad n := 0..N \quad H_n := 0 \quad k := 0..N \quad i := 0..2 \quad H_i := 1 \quad H_3 := 1 \quad H_4 := 0 \quad H_5 := 0 \quad \Delta f := \frac{1}{2N+1} \quad K := 6$

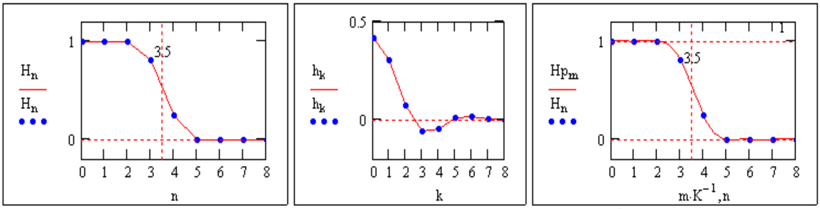
$h_k := \frac{1}{2N+1}\cdot\left(H_0 + 2\cdot\sum_{n=1}^{N} H_n\cdot\cos(2\pi\cdot n\cdot\Delta f\cdot k)\right) \quad \Delta f1 := \frac{\Delta f}{K} \quad M := K\cdot N \quad m := 0..M \quad Hp_m := h_0 + 2\cdot\sum_{k=1}^{N} h_k\cdot\cos(-2\pi\cdot m\cdot\Delta f1\cdot k)$



$c1 := \max(Hp) \quad c1 = 1.109 \quad \delta1 := -20\cdot\log(c1-1) \quad \delta1 = 19.276 \quad c2 := -\min(Hp) \quad c2 = 0.167 \quad \delta2 := -20\cdot\log(c2) \quad \delta2 = 15.549$

Sur.27. NSF ululyklaryň berilmegi

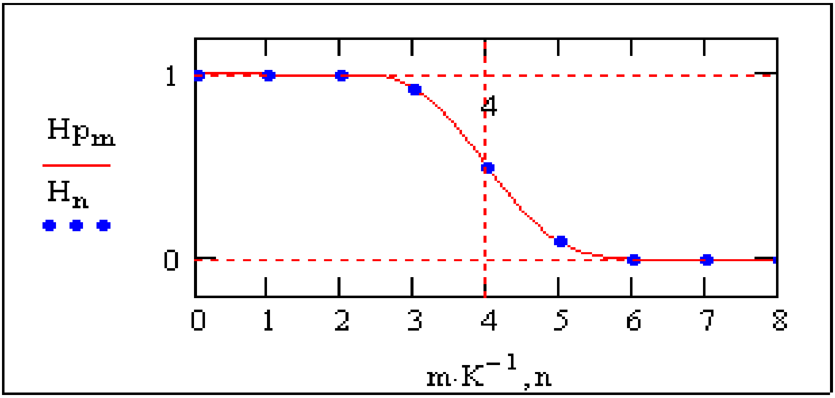
Filtriň operatorynyň hasabyny Furýeniň özgertmesiniň öwürmek arkaly geçireliň, operatoryň alnan hasaplamalary boýunça bolsa ýygylyk boýunça ädiminiň 4 – 6 esse peselen bu operatoryň hakyky ýygylyk häsiýetnamasyny hasaplaýarys, ol bolsa ossilýasiýany ýüze çykarmaga we filtriň ýalňyşlygyny kesgitlemäge mümkinçilik berýär.



$c1 := \max(Hp)$ $c1 = 1.003$ $\delta 1 := -20 \cdot \log(c1 - 1)$ $\delta 1 = 51.098$ $c2 := -\min(Hp)$ $c2 = 4.724 \times 10^{-3}$ $\delta 2 := -20 \cdot \log(c2)$ $\delta 2 = 46.515$

Sur. 28 NSF geçiş zolagynyň hasabyny saýlamak.

Sur.28 geçiş zolagynyň töwereginde filtriň häsiýetnamasynyň saýlama netijesi görkezilendir (2 nokat), ol bolsa ýygylyk häsiýetnamanyň ossilýasiýasyny 30 esse peletmäge mümkinçilik berýär.



$c1 = 1.001 \quad \delta 1 = 62.308 \quad c2 = 7.402 \times 10^{-4} \quad \delta 2 = 62.613$

Sur.29. Çäginde saýlama nokatly NSF.

Bir zady bellemek zerurdyr, filtriň häsiýetnamasynyň ossilýasiýasynyň üýtgemegi göýberme zolagy üçin (çäkden çep tarapda nokat bilen) we aýyrma zolagynda (sag nokat bilen) indiwidual geçirilýär, ýokary takyklyk gerekligi we gereksizligine baglylykda. Bu göýberme we aýyrma aralyklarynda merkezi nokadyň ýerleşmegi bilen üç saýlama nokady ulanylanda has effektiwdir, sur. 31 görkezilendir.

Bu usulyň ulanylmagynda kombinirlenen çemeleşme hem ulanylyp bilner: ýygylyk häsiýetnamasynda nokatlaryň artykmaç mukdarynyň berilmegi, geçiş zolagynda üç we ondan köp nokatlarynda filtriň ululyklarynyň kadalaşdyrylmagy, ondan soňra agram funksiýalary ulanmak arkaly filtriň operatorynyň gysgaldylmagy.

Signallaryň z – transformasiýasy.

Z – özgertmäniň kesgitlenilşi. Z – özgertme Furýeniň diskret özgertmesiniň umumylaşdyrylyşy bolup durýar. Ol diskret ulgamlarynyň synynda we hususanda rekursiw san filtrleri taslanylanda has effektiw ulanylýar.

Ilkinji gezek z – özgertme P. Laplas tarapyndan 1779 – nji ýylda ulanylşyga girizildi we 1947 – nji ýylda W. Gurwiç tarapyndan simwolikasynyň z^{-k} çalyşylmagy bilen gaýtadan “açyldy”. Häzirki wagtda tehniki edebiýatda simwolikanyň iki görnüşi hem ulanylýar. Özgertmäni tejribede ulanmaklyga ol täsir etmeýär, sebäbi belginiň üýtgemegi polinomyň agzalaryny diňe zerkal üýtgedýärler (z^0 degişlilikde), san giňişligi umumy ýoagdaýynda $-\infty$ we $+\infty$ aralygynda bolanda. Geljekde esasy hökmünde z derejeleriň položitel simwolikasyny ulanarys, otrisatel simwolikalar bar bolan ýagdaýynda düşündirişler berler.

s(t) üznüksiz özboluşly funksiýanyň, deň diskretizirlenen we $s_k = s(k\Delta t)$ hasaplar bilen görkezilen, şeýle hem göni dikret funksiýanyň, z boýunça dereje polinomyny birmanyly laýyklyga goýup bolar, s_k bahalary yzygider koeffisentleri bolup durýar:

$$s_k = s(k\Delta t) \leftrightarrow TZ[s(k\Delta t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, z^k = S(z).$$

(61)

bu ýerde $z = \sigma + j\omega = r \cdot \exp(-j\varphi)$ – özboluşly toplumlaýyn üýtgeýan ululyk. Görkezme şekilinde $z = r \cdot \exp(-j\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$, $\varphi = \arg(z) = \mathrm{argtg}(\omega/\sigma)$.

Mysal 1: $s_k = \{1, 2, 0, -1, -2, -1, 0, 0\}$.

$S(z) = 1z^0+2z^1+0z^2-1z^3-2z^4-1z^5+0z^6+0z^7 = 1+2z-z^3-2z^4-z^5$.

Kazual ulgamlarynda ulgamlaryň impuls seslenmeleriniň bahalary $k \geq 0$ bolanda bolýarlar we birtaraply wariantda hereket edýärler:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k.$$

Umumy ýagdaýynda z – özgertme – bu agzalarynyň tükeniksiz mukdary bolan dereje hatarydyr, şonuň üçin ol z bahanyň hemme giňişligi üçin birleşip bilmeýärler. Z – özgertmäniň birleşýän we S(z) bahalaryň ahyrky z oblastyna birleşme oblasty diýilýär.

Mysal 2: Ahyrky uzynlykly yzygiderlilik (signal), sebäpsiz: $s_{-k} = \{1, 2, 3, 2, 1\}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

$S(z) = 1z^0+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+1z^{-4} = 1+2/z+3/z^2+2/z^3+1/z^4$.

Görnüşi ýaly, $z = 0$ bolanda $S(z) = \infty$. Birleşme oblasty – z hemme bahalary, $z = 0$ hasaba almazdan.

Mysal 3: Ahyrky uzynlykly yzygiderlilik, sebäpli (kazual ulgamyň impuls seslenmesi ýaly): s_k = {1, 2, 3, 2, 1}, k = 0, 1, 2, 3, 4.

$S(z) = 1z^0+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+1z^{-4} = 1+2z+3z^2+2z^3+z^4$.

z = ∞ bolanda S(z) = ∞. Birleşme oblasty – z hemme bahalary, z = ∞ aradan aýyranyňda.

Mysal 4: Ahyrky uzynlykly yzygiderlilik, iki tarapaly (simmetriki filtriň impuls seslenmesi ýaly): s_k = {1, 2, 3, 2, 1}, k = -2, -1, 0, 1, 2.

$S(z) = 1z^{-2}+2z^{-1}+3z^0+2z^1+1z^2 = 1/z^2+2/z+3+2z+z^2$.

S(z) = ∞ при z = 0 и z = ∞. Область сходимости не включает точки z = 0 и z = ∞.

Mysal 5: Tükeniksiz uzynlykly yzygiderlilik, sebäpli (rekursiw integrirleýji filtriň impuls seslenmesi ýaly): k < 0 bolanda s_k = 0, k ≥ 0 bolanda s = 1.

$S(z) = z^{-0}+z^1+z^2+z^3+ \ldots = 1+z+z^2+z^3+ \ldots = 1/(1-z)$

Diňe |z| < 1 bolanda birleşme şertlerini kanagatlandyryp biler.

S(z) = ∞ bolanda z bahalar, polýus diýip atlandyrylýar, S(z) = 0 bolanlar üçin S(z) funksiýanyň nullary diýip atlandyrylýar. Mysallardan görnüşi ýaly ahyrky uzynlykly yzygiderlikler üçin z – özgertme (k≥0) sag tarapky bölüme eýe bolan z=∞ nokat üçin we (k<0) çep tarapky nokatlara eýe bolan z=0 nokatlar islendik kombinasiýalarda hemme ýerde birleşýärler. Tükeniksiz sebäpli yzygiderlikler üçin özgertmeler koordinatlaryň başlangyjynda merkezi bolan birlik radiusly togalagyň içinde birleşýärler.

Islendik ulgamyň syny netijesinde berlen ýa – da alnan z – polinom boýunça üýtgewsiz şol polinoma laýyk gelýän funksiýa döredilýär, z^k bolanda k – hasaply funksiýaly derejeleriň koeffisentlerini identifisirlemek arkaly.

Mysal. $S(z) = 1+3z^2+8z^3-4z^6-2z^7 = 1z^0+0z^1+3z^2+8z^3+0z^4+0z^5-0z^6-2z^7$.

$s_k = \{1, 0, 3, 8, 0, 0, -4, -2\}$.

Z – polinomda z ululygyň manysy onuň funksiýalaryň koordinatalary boýunça birlik saklanmanyň operatory bolup durýanlygyndadyr. s(k) signalynyň z – şekiliniň z^n ululyga köpeldilmegi signalyň n aralyga (wagt oky boýunça saga süýşmegini) aňladýar: $z^nS(z) \leftrightarrow s(k-n)$. Bu barada ynamly bolmak üçin ýokarda getirlen mysalda S(z) köpagzany mysal üçin z^2 köpeltmek, yzyna özgertmäni ýerine ýetirmek we $s_k = \{0, 0, 1, 0, 3, 8, 0, 0, -4, -2\}$ signaly almak ýeterlikdir.

Položitel z derejeli z – şekiller kazual (fiziki amala aşyrylýan) prosessler we ulgamlar laýyk gelýär, olar signallaryň häzirki we “geçen” wagt bahalary bilen wagtyň real ölçeglerinde hereket edýär. Maglumat EHM – da işlenip taýýarlanylanda signallaryň kazuallygy çäklendirilmeleriň hataryna girmeýär we “öňe” signallaryň hasaplaryna laýyk gelýän z otrisatel derejelerini ulanmak mümkin bolýar. Soňkysy mysal üçin filtriň simmetriki operatorynyň sintezinde ulanylýar, ol maglumatyň işlenip taýýarlanylmagyny signala faza ýoýulmalaryny girizmezden amala aşyrmagy mümkinçilik berýär. z^{-1} simwolikasy ulanylanda “geçen” belgilere z otrisatel derejeli bahalary laýyk gelýär, “geljek” belgilere – položitel bahalar laýyk gelýär. Z – özgertmäniň esasy aýratynlygy derejeli polinomly matematiki operasiýalaryň ýönekeýliginde durýar, bu bolsa sanly filtrleriň we spektral synynda uly baha eýedir.

<u>Furýe we Laplasyň özgertmeleriniň arsyndaky arabaglanşyk.</u> s_k diskret signalyny Kronekeriň agram impulslarynyň jemi görnüşinde ýazalyň:

$$s_k = s(k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t)\, \delta(k\Delta t - n\Delta t). \quad (62)$$

Signalyň spektrini giçlenme teoremasy boýunça ýazalyň:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \exp(-j\omega k\Delta t). \qquad (63)$$

Üýtgeýän ululyklary çalyşalyň, $z = \exp(-j\omega\Delta t)$, we alýarys:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t)\cdot z^k = S(z). \qquad (64)$$

Bu ýerden Furýeniň diskret özgertmesi $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ bolanda z – özgertmäniň hususy ýagdaýy bolup durýandygy görünýär.

Muňa meňzeş goýma bilen $z = \exp(-p)$ Laplasyň diskret özgertmesine geçme amala aşyrylýar. Umumy görnüşinde:

$$S(\omega) = S(z), \quad z = \exp(-j\omega\Delta t); \qquad S(p) = S(z), \quad z = \exp(-p\Delta t). \qquad (65)$$

Yzyna özgertmede:

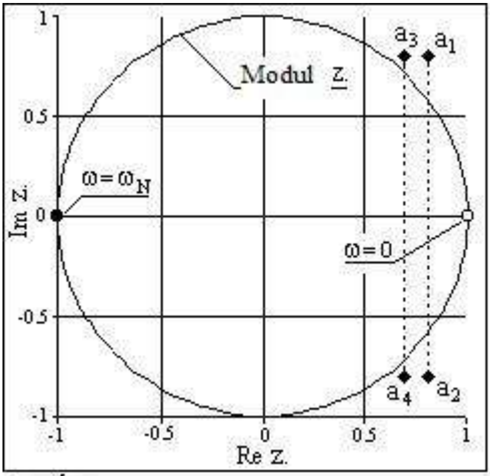
$$S(z) = S(\omega), \quad \omega = \ln z / j\omega t; \qquad S(z) = S(p), \quad p = \ln z/\Delta t. \qquad (66)$$

Z otrisatel simwolikasynda getirmeleriň arasyndaky arabaglanşyk laýyklykda $z^{-1} = \exp(j\omega\Delta t)$ we $z^{-1} = \exp(p)$ goýulmalar bilen amala aşyrylýar. $z^k = \exp(-j\omega k\Delta t)$ bolanda z – özgertme diskret signallaryň getirmesiniň aýratyn görnüşini emele getirýär, onda S(z) polinomyna wagtlaýyn funksiýa hökmünde seretmek bolar ($k\Delta t$ koeffisentleriň bahalary boýunça), şeýle hem signalyň ýygylyk spektriniň funksiýasyna (ω argumentiň bahalary boýunça).

Z – özgertmäni ýazmak koordinatlaryň oky boýunça Re z we Im z toplumlaýyn z tekizliginde ýerine ýetirilýär (sur.

30). Husysanda ω ýygylyklaryň spektral okunda z – tekizliginde radiusyň aýlawy laýyk gelýär:

$$|z| = |\exp(-j\omega\Delta t)| = \sqrt{\cos^2(\omega\Delta t) + \sin^2(\omega\Delta t)} = 1.$$



Sur. 30 Toplumlaýyn z – tekizlik.

z = exp(-jωΔt) islendik ω ýygylygy goýmak togalakda nokat bilen belgilenýär. ω= 0 ýygylyga abssissa okunyň sag tarapyndaky Re z = 1 we Im z = 0 nokat gabat gelýär. Ýygylyk ýokarlananda nokat togalak boýunça sagat strelkasynyň tersine süýşýär we Naýkwistiň ýygylygynda gyraky çep orny eýeleýär $\omega_N = \pi/\Delta t$ (Re z = -1, Im z = 0).Spektriň otrisatel ýygylyklary aşaky ýarym aýlawda şonuň şekillendirilýär. $\pm\omega_N$ nokatlary gabat gelýär, bahanyň ýygylygynyň soňraky beýgelmeginde ýa – da peselmeginde diskret funksiýasynyň spektriniň periodikasyna laýyklykda gaýtalanyp başlaýarlar. Töwerek boýunça doly hereket spektriň bir periodyna laýyk gelýär, signalyň spektriniň islendik garmonikasy bolsa tekizlikde abssissa okuna degişlilikde simmetriki bolan iki sany nokat bilen berilýär. Bu ýerden ýene – de z – tekizliginde durnukly kazual ulgamlaryň galtaşma oblasty birlik radiusyň töweregini emele getirýär. Üznüksiz wagtyň signallary we ulgamlary köplenç Laplasyň özgertmesi bilen ýazylýar. Eger – de $z=\exp(-s\Delta t)$, bu ýerde $s=\sigma + j\omega$, onda:

$$z = \exp(-(\sigma + j\omega)\Delta t) = \exp(-\sigma\Delta t)\exp(-j\omega\Delta t). \qquad (67)$$

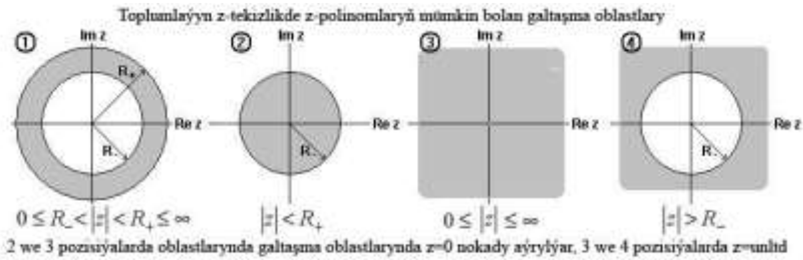
Diýmek, $|z| = \exp(-\sigma\Delta t)$, $\arg(z) = \omega\Delta t = 2\pi f\Delta t = 2\pi f/f_{\Delta}$, bu ýerde f_{Δ} - diskretizasiýa ýygylygy, şol bir wagtda ω oky z – tekizliginde birlik töwerek bilenşekillendirilýär, s tekizligiň sag tarapy töweregiň içinde şekillendirilýär, çep tarapy bolsa töweregiň daşyndan şekillendirilýär. z^{-1} simwolikasy ulanylanda s – tekizligiň z – tekizliginde taraplarynyň şekillendirilmesi ýerlerini çalyşýarlar.

Z – polinomlaryň giňişligi.

<u>Galtaşma oblasty.</u> S(z) polinomy s(kΔt) funksiýanyň z – şekili ýa – da z – şekillendirilmesi diýip atlandyrylýar. Özgertme z bahalaryň S(z) hatarynyň gabat gelýän oblastynda gymmata eýedir, hataryň jemi ýagny polýuslara we aýratyn nokatlara eýe bolmadyk z üýtgeýän ululygyň analitiki funksiýasyny emele getirýär:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |s_k||z|^k < \infty \qquad (68)$$

Umumy ýagdaýda S(z) polinomlaryň galtaşýan z köplügi z – tekizliginde kesgitli oblastlary emele getirýärler, olar sur. 28 görkezilendir.



sur. 31. z – tekizlikleri.

Ýokarda getirlen z – özgertme bilen Furýeniň özgertmesiniň arabaglanşygyndan görnüşi ýaly s(t) funksiýasy S(ω) spektral emele getirilişe eýe bolsa, onda z| = |exp (-jω)| = 1| birlik töweregi S(z) polinomyň galtaşma oblastyna hökman girmelidir we tersine eger – de S(z) polinomyň galtaşma oblasty birlik töweregi alýan bolsa s(t) funksiýasynyň Furýe diskret özgertmesi - S(z) polinomyň şekildeşi, hökman bolmalydyr, tersine bolsa ýok. Bu şundan gelip çykýar, z – özgertme diskret funksiýalaryň özgertmesiniň has umumy ýagdaýy bolup, Furýe özgertmesi bolmadyk funksiýalar üçin hem bolup biler. Onuň mysaly hökmünde birlik bökmäniň funksiýasy hyzmat edip biler:

$$u_n = 1,\ n \geq 0;\quad u_n = 0,\ n < 0.$$

Furýe özgertmesi üçin u(n) funksiýalary ýerine ýetirilmeýär, absolýutlar jemlenýär (funksiýanyň energiýasy tükeniksizdir). Ýöne z – özgertme üçin şuny alýarys:

$$|z| < 1 \text{ boalnda } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k||z|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k < \infty. \quad (69)$$

Diskret mysallaryň tejribesinde köp duş gelýän <u>***z – özgertmäniň mysallary***</u>.

Kronekeriň impulsy. Umumy ýagdaýda san okunyň islendik nokadynda Kronekeriň impulsy üçin:

$$k{=}n \text{ bolanda } {}^{\delta}(k\text{-}n),\quad k \neq n \text{ bolanda } {}^{\delta}(k\text{-}n) = 0$$

$$X_{\delta}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^{\delta}(k\text{-}n)\, z^k = z^n. \qquad (70)$$

Kronekeriň impulsy üçin nul nokatda laýyklykda X_{δ} (z) = z^0 =1. X_{δ} (z) hatary z – tekizligiň hemme ýerinde galtaşýar.

Hewisaýdyň funksiýasy (birlik beýgelme, tükeniksiz uzynlygyň sebäpli yzygiderliligi, mysal üçin, rekursiw integrirleýji filtriň impuls seslenmesi).

$x(k) = 0 \;\; k < 0$ bolanda, $x(k) = 1 \;\; k \geq 0$bolanda.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = z^k.$$

$|z| < 1$ bolanda hatar galtaşýar, şol bir wagtda onuň jemi:

$$X(z) = 1/(1-z) \text{ deň.}$$

Z – özgertme koordinatlaryň başynda merkezi bolan birlik radiusyň töwereginiň içiniň hemme ýerinde degişlidir.

z^{-1} simwolikasy ulanylanda:

$$X(z) = 1/(1-z^{-1}) = z/(z-1), \quad |z| > 1. \qquad (71)$$

Analitik oblastynyň çäginde X(z) funksiýasy $z=1$ bolanda bir ýönekeý polýusa eýedir.

Eksponensial funksiýa:

$k < 0$ bolanda $x(k)=0$, $k \geq 0$ bolanda $x(k) = a^k$.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (az)^k. \qquad (72)$$

Geçen ýagdaýdakyda bolşy ýaly $|az| < 1$ bolanda hatar galtaşýar, şol bir wagtda:

$$X(z) = 1/(1-az), \quad |z| < 1/a.$$

z^{-1} simwolikasy ulanylanda:

$$X(z) = z/(z-a), \quad |z| > a.$$

Toplum eksponentasy:

$$x(k) = \exp(j\omega k),\ \ k \geq 0;\quad x(k) = 0,\ \ k < 0.$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(j\omega k)\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (z \exp(j\omega))^k =$$

$$1/(1- z \exp(j\omega)),\ \ |z| < 1. \quad (73)$$

<u>Z – şekilleriň analitik görnüşi</u> derejeli hataryň analitik aňlatma dolamasy mümkin bolanda, z – özgertmeler üçin bolýar. Ýokarda z – özgertmeleriň mysallarynda Hewisaýdyň we eksponensial funksiýalaryň z – şekilleriniň analitik görnüşlerine getirilişi görkezildi. Aşaky tablisada göni we yzyna özgertmede ulanyp boljak bir hatar giň ýaýran funksiýalaryň z – transformasiýasy getirilýär.

Tablisa 2.1

s(k), k≥0 funksiýasy	z - şekil S(z)		z^{-1} – şekil S(z)	
β	*β/(1-z)*	|z|< 1	βz / (z-1),	|z| > 1
β k	$\beta z / (1-z)^2$,	|z| < 1	$\beta z / (z-1)^2$,	|z| > 1
βk^2	$\beta z\,(1+z) / (1-z)^3$,	|z| < 1	$\beta z\,(z+1) / (z-1)^3$,	|z| > 1

$\beta\ \alpha^k$	$\beta / (1 - z\alpha)$, $\lvert z\rvert < 1/\alpha$	$\beta z / (z - \alpha)$, $\lvert z\rvert > \alpha$
$\beta k\alpha^k$	$\beta\alpha z/ (1 - z\alpha)^2$, $\lvert z\rvert < 1/\alpha$	$\beta\alpha z / (z - \alpha)^2$, $\lvert z\rvert > \alpha$
$\cos\alpha k$	$(1-z\cos\alpha) / (1-2z\cos\alpha+z^2)$, $\lvert z\rvert < 1$	$z(z-\cos\alpha) / (z^2-2z\cos\alpha+1)$, $\lvert z\rvert > 1$
$\sin\alpha k$	$z\sin\alpha / (1-2z\cos\alpha+z^2)$, $\lvert z\rvert < 1$	$z\sin\alpha / (z^2-2z\cos\alpha+1)$, $\lvert z\rvert > 1$
$\beta\exp(-\alpha k)$	$\beta / (1-z\exp(-\alpha))$, $\lvert z\rvert < 1/\exp(-\alpha)$	$\beta z / (z-\exp(-\alpha))$, $\lvert z\rvert > \exp(-\alpha)$
$\beta k\exp(-\alpha k)$	$\beta z\exp(-\alpha) / (1-z\exp(-\alpha))^2$, $\lvert z\rvert < 1/\exp(-\alpha)$	$\beta z\exp(-\alpha) / (z-\exp(-\alpha))^2$, $\lvert z\rvert > \exp(-\alpha)$

Tablisida z simwolikasy üçin hem, z^{-1} simwolikasy üçin hem özgertmeler getirlendir, olar käwagtlar käbir matematiki operasiýalar üçin peýdaly bolýar. Bir simwolikadan beýleki simwolika geçmek örän ýönekeýdir we z bir simwolikasynda 1/z beýleki simwolikasyna çalyşmak arkaly ýerine ýetirilýär.

Z – özgertmäniň özboluşlyklary.

Z – özgertmäniň esasy özboluşlygy onuň ýeketäklik özboluşlygydyr. s(k) yzygiderliligiň islendigi onuň galtaşma oblastynda z – şekil bilen anyk kesgitlenilýär we tersine z – şekil boýunça anyk dikeldilýär.

Nazaryýete çuňlaşmazdan DPF – ň hemme özboluşlyklary z – özgertme üçin hem degişlidir diýip aýtmak bolar. Olaryň käbirlerini belläp geçeliň.

Çyzyklylyk: Eger – de s(k) = a·x(k)+b·y(k), onda S(z) = aX(z)+bY(z). Degişlilikde z – özgertme superpozisiýanyň prinsipini kanagatlandyrýanulgamlaryň we signallaryň syny üçin mümkindir. ***Saklanma*** n taktda: y(k) = x(k-n).

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\, z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\text{-}n)\, z^k = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\text{-}n)\, z^{k-n} =$$

$$z^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, z^m = z^n\, X(z)(74)$$

Laýyklykda, signalyň z – şekilini z^n köpeldijä köpeltmek signalyň diskretizasiýanyň n taktyna süýşmegine getirýär.

Dolamany özgertmek. Filtrleriň birtaraplaýyn operatory bilen rekursiw däl san filtrlemesi ýerine ýetirilende:

$$s(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, y(k-n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dolamanyň deňlemesiniň z – özgertmesi:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, y(k-n)\, z^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{n}\, y(k-n)\, z^{k-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\, z^{n} \sum_{k=0}^{\infty} y(k-n)\, z^{k-n} = H(z)\, Y(z). \qquad (75)$$

Şeýlelik bilen, diskret funksiýalaryň dolamasy ol funksiýalaryň z – şekilleriniň köpeldilmegi bilen görkezilýär. Şoňa meňzeşlikde z – özgertme üçin z – şekilleriniň özboluşlyklarynyň hemme belli teoremalary subut edilip bilner, ol bolsa adatydyr. Sebäbi $z=\exp(-j\omega)$ bolanda bu özboluşlyklar funksiýanyň spektrleriniň özboluşlyklaryna doly gabat gelýändir.

Signallary yzygiderlilik dolamanyň bloklaryna ýaýratmak. Z – özgertme signallaryň we funksiýalaryň bölmekligini üpjün etmäge mümkinçilik berýär, mysal üçin filtrleriň funksiýalarynynyň geçirijilerini dolamanyň gysgajyk düzüjilerine bölmek, onuň üçin z – polinomy nula deňlemek ýeterlikdir, onuň a_i köklerini tapmak we polinomy ikiagalyny köpeltmek görnüşinde ýazmak:

$$S(z) = a_0(z-a_1)(z-a_2)...,$$

Bu ýerde a_0- signalyň soňky hasabaty.

Z – oblastyndaky derejä koordinatlar oblastyndaky dolama gabat gelýär, we yzyna özgerdilende (z-a_i) ikiagzalary ikinokatly $\{-a_i,1\}$ dipollara öwrülýärler, N uzynlykluy signal bolsa dipollaryň (N-1) dolamasy bilen getrilýär:

$$s_k = a_0\{-a_1,1\}*\{-a_2,1\}*\{-a_3,1\}* \ldots$$

Mysal: $s_k = \{1.4464,\ -2.32,\ 3.37,\ -3,\ 1\}$. $S(z) = z^4-3z^3+3.37z^2-2.32z+1.4464$. $a_0 = 1$.

Polinomlaryň kökleriS(z): $a_1 = 0.8+0.8j$,

$a_2 = 0.8-0.8j$,

$a_3 = 0.7+0.8j$,

$a_4 = 0.7-0.8j$,

$S(z) = (z-0.8-0.8j)(z-0.8+0.8j)(z-0.7-0.8j)(z-0.7+0.8j)$.

Polinomlaryň kökleri z – tekizliginde getirlendir. Polinomlaryň kökleri toplumlaýyndyr we koordinata tekizliginde dört sany ikiagzalar hem toplumlaýyn bolarlar. Ýöne olar bileleşendir we jisim funksiýasyny almak üçin bileleşen ikiagzalary köpeltmelidir we bikwadrat bloklary almalydyr: $S(z) = (z^2-1.4z+1.13)(z^2-1.6z+1.28)$.

Koordinat oblastyna geçilende: $s_k = \{1.13, -1.4, 1\} * \{1.28, -1.6, 1\}$. Şeýlelik bilen, başdaky signal iki sany üç agzaly signallaryň dolamasynabölünendir.

Differensirleme. Eger-de $s(k) \leftrightarrow S(z)$ bar bolsa, onda $ks(k)$ funksiýanyň z – şekilini S(z) differensirläp tapyp bolýar, ol bolsaýokary hatarly polýuslary bolan S(z) funksiýanyň yzyna z – özgertmesini hasaplap çykarmak üçin peýdaly bolýar:

$$ks(k) \leftrightarrow z\, dX(z)/dz.$$

Yzyna z – özgertme.

<u>Özgertme usullary.</u> Yzyna z – özgertme z – şekili boýunça diskret funksiýany dikeltmäge mümkinçilik berýär. Ol mysal üçin rekursiw san filtrleriň impuls häsiýetnamalary kesgitlenende giňden ulanylýar. Simwoliki şekilde:

$$x(k) = TZ^{-1}[X(z)].$$

Tejribede X(z) hasaplama prosessinde adatça z – den iki sany köpagzanyň gatnaşygy bilen aňladylýar:

$$X(z) = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_N z^N) / (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_M z^M) =$$
$$= x(0) + x(1)z + x(2)z^2 + \ldots \qquad (76)$$

Bu görnüşden yzyna özgertmäniň has giň ýaýran usullary X(z):

- Çägi boýunça integrirlemek bilen özgertme (aýyrma usuly).
- Elementar droblara bölme usuly.
- Dereje hataryna bölme usuly.

Dereje hataryna bölme usuly has ýönekeý we kompýuterlerde ýerine ýetirmek üçin ýaraýar, ýöne ol analitiki görnüşde netije bermeýär. Yzyna özgertmäniň köp sanly nokatlary berlende onuň algoritminiň rekursiýasy netijesinde san ýalňyşlyklarynyň mümkin bolan artmagyna syn edip durmaly bolýar.

Iki sany başky usullar analitiki görnüşde netije almaga mümkinçilik berýär, ýöne X(z) funksiýanyň polýuslaryny hasaplamagy talap edýär. Polýuslarynyň ýokary hatarlarynda laýyk hatarlaryň differensirlemesini talap eder.

Çägi boýunçä integrirlemek bilen özgertme matematiki çylşyrymly usullara degişlidir. Ol bileleşme oblastynda ýerleşýän we z – şekiliň hemme aýratyn nokatlaryny (nullary we polýuslary) gabaýan C özboluşly ýapyk kontury boýunça integrirlemek bilen ýerine ýetirilýär. Integrirlemäni konturyň içinde ýerleşýän, öz içine koordinatalar ulgamynyň merkezini alýan, polýuslaryň üstünde ýerine ýetirmek has amatlydyr, ýagny z^{-1} simwolikasynda.Bu simwolikada biz hem şu paragrafy serdip geçeris. Yzany özgertmäniň çäk integraly:

$$s_k = (1/2\pi j)\oint_C S(z)\,z^{k-1}\,dz\,. \qquad (77)$$

Aýyrma barada Koşi teoremasyna laýyklykda bu integral integrirleme çäginiň içinde ýerleşen funksiýanyň hemme polýuslaryna degişlilikde integralaşaky funksiýanyň aýyrma jemlerine deňdir (Res). Her aýyrma kesgitli p_k polýus bilen baglydyr:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_k)\, F(z)] \quad \text{bolanda} \quad z=p_k. \qquad (78)$$

где $F(z) = z^{k-1} S(z)$, m – p_k nokdynda düzgün hatary. Ýönekeý polýus üçin:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = (z-p_k)\, F(z) = (z-p_k)\, z^{k-1} S(z) \quad \text{bolanda} \quad z=p_k. \qquad (79)$$

Mysal. $X(z) = z^2 / (z-0.5)(z-1)^2$ funksiýanyň z – şekili.

$x(k) = \mathrm{Res}[F(z), p_1] + \mathrm{Res}[F(z), p_2]$. $F(z) = z^{k-1} X(z) = z^{k+1} / (z-0.5)(z-1)^2$.

$F(z)$ funksiýasy ýönekeý $p_1 = 0.5$ polýusa eýe we ikinji hataryň polýusy $p_2 = 1$.

$\mathrm{Res}[F(z), 0.5] = (z-0.5)\, z^{k+1} / (z-0.5)(z-1)^2 = z^{k+1} / (z-1)^2 |_{z=0.5} = 0.5\,(0.5)^k / (0.5)^2 = 2(0.5)^k$.

$\mathrm{Res}[F(z), 1] = \frac{d}{dz}[(z-1)^2\, z^{k+1} / (z-0.5)(z-1)^2] = [(z-0.5)(k+1)z^k - z^{k+1}] / (z-0.5)^2 |_{z=1} = 2(k-1)$.

Netije: $x(k) = 2[(k-1) + (0.5)^k]$.

<u>Droba bölmek bilen özgertme.</u> Bu usulda z – şekil rasional ýönekeý droblara bölünýär, soňra tablisanyň kömegi bilen agzaly yzyna özgertme geçilýär. Has ýönekeý görnüşi, eger – de S(z) funksiýasy z^{-1} simwolikasynda z derejelerinde ýaýratma mümkin bolanda bolýar:

$$S(z) = s(0) + s(1)\, z^{-1} + s(2)\, z^{-2} + \ldots$$

Degişlilikde, aňlatmada köpagzalaryň gatnaşyklary z^{-1} simwolikasynda bolmalydyr. Eger – de birinji hataryň polýuslary S(z) we N=M, onda aňlatmany şu jemlere bölüp bolar:

$$S(z) = B_0 + C_1/(1-p_1 z^{-1}) + C_2/(1-p_2 z^{-2}) + \ldots + C_M/(1-p_M z^{-M}) =$$

$$B_0 + C_1 z/(z-p_1) + C_2 z/(z-p_2) + \ldots + C_M z/(z-p_M) = B_0 + \sum_{k=1}^{M} C_k z/(z-p_k). \qquad (80)$$

$$B_0 = b_N / a_N.$$

Bu ýerde C_k – S(z) funksiýanyň aýyrmalary bolan, elementar droblaryň koeffisentleri.

C_k koeffisentleri hasaplamak üçin aňlatmanyň çep we sag taraplaryny $(z-p_k)/z$ köpelderis we $z=p_k$ goýarys, şol bir wagtda sag tarapynda $(z-p_k)=0$ bolanda $z=p_k$ köpeldijiniň hasabyna berlen polýusdan C_k başga jemiň hemme agzalary nula geçirilýär, çep tarapynda bolsa $S(z)(z-p_k)/z$ gatnaşygy galýar, ol bolsa C_k hasabyny hasaplap çykarmaga mümkinçilik berýär:

$$C_k = S(z)(z-p_k)/z \,\big|_{z=pk} \qquad (81)$$

Eger – de (4.1) N < M bolsa, onda B_0 baha nula deň bolýar. Eger – de S(z) funksiýasy $z=p_k$ nokadynda m hatarly polýusa eýe bolsa, C_k koeffisenti koeffisentleriň jemi bilen çalşylýar:

$$\sum_{i=1}^{m} D_i / (z-p_k)^i, \tag{82}$$

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \cdot \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} [\, X(z)\,(z-p_k)^m/z],\quad \text{bolanda } z=p_k. \tag{83}$$

Mysal. $X(z) = z^2 / (z-0.5)(z-1)^2$ funksiýanyň z – şekilini berlen usul bilen özgertme mysalyny gaýtalap geçeliň, ol geçen mysalda ulanyldy. Funksiýa $p_1 = 0.5$ýönekeý polýusa eýedir we $p_2 = 1$ ikinji hatarly polýusa eýedir.

$X(z) = Cz/(z-0.5) + D_1z/(z-1) + D_2z/(z-1)^2.$

$C = z/(z-1)^2 = 0.5/(0.5-1)^2 = 2.$

$D_1 = \frac{d}{dz}[(z-1)^2\, X(z)/z] = \frac{d}{dz}[z / (z-0.5)]\,|_{z=1} = -2.$

$D_2 = (z-1)^2\, X(z)/z = z/(z-0.5)\,|_{z=1} = 2.$

$X(z) = 2z/(z-0.5) + D_1z/(z-1) + D_2z/(z-1)^2.$

Her bir adaty drobyň yzyna özgertmesini 2.1. tablisasy boýunça ýerine ýetireliň.

Netije: $x(k) = 2(0.5)^k - 2 + 2k = 2[(k-1) + (0.5)^k]$. Netije aýyrma usullaryna gabat gelýändir.

Eger – de z – şekil drob – rasional funksiýanyp şekiline eýe bolsa, onda ýönekeý droblara bölmeklik, soňra laýyklar tablisasyny ulanmak bilen adatça köp zähmet talap etmeýär. Mysal üçin:

$$S(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) / (1 - a z^{-1}) = b_0/(1 - a z^{-1}) + b_1 z^{-1}/(1 - a z^{-1}) + b_2 z^{-2}/(1 - a z^{-1}). \qquad (84)$$

Laýyklyklar tablisasy boýunça:

$$X(z) = 1/(1-az^{-1}) \rightarrow x(k) = a^k. \qquad (85)$$

Bu ýerden, özgertmäniň çyzyklylygyny we saklanmanyň özboluşlyklaryny göz öňüne tutmak bilen:

$$x(k) = b_0 a^k + b_1 a^{k-1} + b_2 a^{k-2}. \qquad (86)$$

Has ýokary hatarly maýdalawjylary bolan funksiýalar özgerdilende ilki bilen funksiýanyň polýuslaryny tapmak zerurdyr. Mysal üçin, p_1 we p_2 polýuslary bolan ikinji hatarly köpagza üçin:

$$S(z) = 1/(1-a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}) = 1/[(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1}). \qquad (87)$$

S(z) b_1 we b_2 belli bolmadyk koeffisentli droblaryň jemi görnüşinde getireliň:

$$S(z) = b_1/(1-p_1 z^{-1})+b_2/(1-p_2 z^{-1}) = (b_1- b_1 p_2 z^{-1}+b_2-b_2 p_1 z^{-1})/[(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1}).(88)$$

Maýdalawjylar deň bolan halatynda bu iki aňlatmada sanawjylar hem deň bolmalydyr:

$$(b_1+ b_2)–(b_1p_2+b_2p_1)z^{-1} = 1,$$

Ol bolsa z derejeleriň bir bahaly bolan halatynda ýerine ýetirilýär. Bu ýerden deňlemeler ulgamyny alýarys:

$$b_1 + b_2 = 1.$$

$$b_1\ p_2 + b_2\ p_1 = 0.$$

Bu deňlemeler ulgamyny çözüp b_1 we b_2 koeffisentleriň bahalaryny tapýarys, koeffisentleri S(z) goýýarys, droblaryň jemi görnüşinde aňladylan we laýyklyk tablisasy boýunça droblary wagt funksiýasyna geçirýäris.

Derejeler setiriniň usuly. (59) aňlatmasyny göni derejeler hataryna ýaýratmak bolar, düzüme bölmek bilen, onuň üçin funksiýanyň sanawjysyny we maýdalawjysyny z derejesiniň beýgelýän ýa – da peselýän görkezijisi bilen aňladylýar. Dereje hatarynyň yzyna z – özgertmesi anykdyr.

Z beýgelýän derejäniň mysaly. $X(z) = (1+2z+z^2) / (1-z+0.4z^2)$.

$$1 + 2z + z^2 \quad | \ \underline{1 - z + 0.4z^2}$$

$$\underline{1 - z + 0.4z^2} \qquad 1 + 3z + 3.6z^2 \underline{+ 2.4z^3 + 0.96z^4 +}$$

… Hatar tükeniksiz bolup bilýär.

$$3z + 0.6z^2$$

$$\underline{3z - 3z^2 + 1.2z^3}$$

$$3.6z^2 - 1.2z^3$$

$$\underline{3.6z^2 - 3.6z^3 + 1.44z^4}$$

$$2.4z^3 - 1.44z^4$$

$$\underline{2.4z^3 - 2.4z^4 + 0.96z^5}$$

$$0.96z^4 - 0.96z^5$$

$$0.96z^4 - 0.96z^5 + 0.384z^6, \text{ и т.д.}$$

Yzyna özgertme z^k bolanda derejeleriň koeffisentleriniň identifisirlenmesi boýunça ýerine ýetirilýär funksiýanyň k-ädimleri: $x(k) = \{1, 3, 3.6, 2.4, 0.96, \dots\}$.

Z derejeleriň peselýän nomerleriniň mysaly. $X(z) = (1+2z+z^2) / (1-z+0.4z^2)$ → (polinomyň sanawjysyny we maýdalawjysyny z^N bölmek) → $(z^{-2}+2z^{-1}+1) / (z^{-2}-z^{-1}+0.4)$.

$z^{-2} + 2z^{-1} + 1 \quad | \underline{z^{-2} - z^{-1} + 0.4}$

$\underline{z^{-2} - z^{-1} + 0.4} \quad 1 + 3z + 3.6z^2 \underline{+ 2.4z^3 + 0.96z^4}$

$\underline{+ \dots}$ Şol bir netije.

$3z^{-1} + 0.6$

$\underline{3z^{-1} - 3 + 1.2z}$

$3.6 - 1.2z$

$\underline{3.6 - 3.6z + 1.44z^2}$

$2.4z - 1.44z^2$

$\underline{2.4z - 2.4z^2 + 0.96z^3}$

$0.96z^2 - 0.96z^3$

$0.96z^2 - 0.96z^3 + 0.384z^4$, и т.д.

(4.1) polinomyň bölme usulyny rekursiw ýerine ýetirip bolar:

$x(0) = b_0 / a_0$,

$x(1) = (b_1 - x(0)\, a_1) / a_0$,

$$x(2) = (b_2 – x(1)\, a_1 – x(0)\, a_2) / a_0,$$

…

$$x(n)=(b_n–\sum_{i=1}^{n} (x(n-i)\ a_i)) / a_0, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (89)$$

Z-özgertmäni ulanmak.

Diskret ulgamlary ýazmak signallar işlenip taýýarlananda nullaryň we polýuslaryň kömegi bilen – z – özgertmäniň has giň ulanylýan oblastydyr. (86) görnüşli ulgamyň geçiriji funksiýasynyň dereje polinomy n_i sanawjynyň nuly bilen we p_j maýdalawjynyň polýuslary bilen hemişe goşmaça köpeldijileriň köpeltmegi görnüşinde getirlip bilner:

$$H(z) = K \prod_{i=1}^{N} (z-n_i) / \prod_{j=1}^{M} (z-p_j), \qquad (90)$$

Bu ýerde K – giriş signalynyň geçiriji koeffisenti (güýjenmesi). H(z) polýuslar we nullar hakyky we kompleks bolup bilerler, şol bir wagtda a_i we b_j koeffisentleriň hakyky bahalaryny üpjün etmek üçin (51) kompleks koeffisentler bileleşen jübütler bilen toplumlaýyn getirlen bolmalydyr.

AÝH we FÝH ulgamlaryň geometriki

bahalandyrylmasy. H(z) saklanýan informasiýany z – tekizliginde nullaryň (aýlawlaryň) we polýuslaryň (krestikleriň) goýulma görnüşinde görkezmek amatlydyr. Nullaryň we polýuslaryň diagrammasy ulgamyň özboluşlyklaryny we onuň durnuklylygyny anyk görkezýär. Durnukly ulgamlar üçin hemme polýuslar birlik aýlawyň çäkleriniň daşynda (z^{-1} simwolikasy bolanda aýlawyň içinde) ýa – da birlik aýlawda nullar bilen gabat gelmelidir.Nullaryň ýerleşmegine çäklendirilmeler ýokdur.

Nullaryň we polýuslaryň belli diagrammasynda ulgamyň ýygylyk häsiýetnamasynyň geometriki bahalandyrylmasy ýerine ýetirlip bilner. z=exp(-j ωΔt) bolanda |z|=1 birlik aýlawy ω = 0 (z=1) до 2π (z=-1) esasy ýygylyk diapazonynyň häsiýetnamasynyň ýygylyk okuny görkezýär. z_s = exp(-j ω_sΔt) her bir nokadyna laýyklyga (z_s – n_i) wektory goýlup bilner, i-e nul, onuň moduly bolsa U_i = |(z_s – n_i)| z_s bilen i –nulyň aralygyny görkezýär, diýmek (z_s – p_j) wektory j-polýusa laýyk aralykda V_j = (z_s – p_j) we ϕ_j = arg(z_s – p_j) faza burçly. Şol bir wagtda ulgamlaryň amplituda we faza häsiýetnamalary birlik aýlaw boýunça ω_s nokadynyň süýşmeginde aňlatmalar boýunça bahalandyrylyp bilner:

$$|H(\omega)| = \prod_{i=1}^{N} U_i \,/ \prod_{j=1}^{M} V_j, \qquad (91)$$

$$\arg(H(\omega)) = \sum_i \phi_i - \sum_j \varphi_j. \qquad (92)$$

(66) boýunça şeýle netijä gelip bolar, AÇH ýygylyk boýunça üýtgemegine has uly täsiri birlik aýlawyň golaýynda ýerlrşrn nullar we polýuslar edýändir.Nulyň göni aýlawyň üstünde ýerleşende bu nokatda ω_s garmonikasy doly nullanýar we tersine, birlik aýlawa golaý ω_s polýusa golaýlaşanda ulgamyň güýjenme koeffisentiniň kert ulalmagy bolup geçýär.

Hatarly filtrleme we spektral seljeriş signallary işläp taýýarlamagyň esasy operasiýalary bolup durýar, olar ylmyň we tehnikanyň hemme oblastlarynda giň ulanyşa eýe boldular. Bu oparesiýalar diskret görnüşinde (san görnüşinde) kompýuterlerde ýerine ýetirilip bilner. Köp ýagdaýlarda signallary we hatarly ulgamlary ýygylyk oblastynda ýazmaklyk uly gyzyklanma döredýär. Şunuň ýaly ýazgy signallary işlemegiň analog görnüşi üçin hem, diskret görnüşi üçin hem adalatlydyr. Ýygylyk oblastyndaky ýazga wagt oblastynda ýazmadan ozal köplenç ýol berilýär, has takygy, haçanda pes ýygylar filtrleme ýa-da hatarly filtrleme, differensirleme, interpolirleme we tekizleme göz öňüne tutulanda geçirilýär.

Signallary işlemegiň bu usullaryny telefoniýa, seýsmologiýa, gidrolokasiýa, radiolokasiýa we medisina ýaly ugurlarda ylmy barlaglar üçin ulanylýar.

Häzirki döwürde signallary işlemegiň san görnüşine has uly üns berilýär. Bu ders bolsa san signallary bilen işleýän, bu ugur boýunça bilim alýan, san taýdan işläp taýýarlamagyňmaglumatlaryny gündeki senagatişlerinde ulanýan, gofizikler, geologlar we beýleki çalymdaş ugurlaryň hünärmenlerine örän peýdaly bolar.

Has dogrusy, bu ders esasan hatarly san filtrlemesine we diskret spektral seljerilişine bagyşlanandyr, has uly ünse bolsa ýygylyk oblastynda signallary we ulgamlary ýazmaklyk eýedir.

Edebiýatlar.

1. Gurbanguly Berdimuhamedow. Garaşsyzlyga guwanmak, Watany, halky söýmek bagtdyr. Aşgabat, 2007.
2. Türkmenistanyň Prezidenti Gurbanguly Berdimuhamedowyň Umumymilli ″Galkynyş″ Hereketiniň we Türkmenistanyň Demokratik partiýasynyň nobatdaky daşary V gurultaýlarynyň bilelikdäki mejlisinde sözlän sözi. Aşgabat, 2007.
3. Gurbanguly Berdimuhamedow. Eserler ýygyndysy. 1-nji tom. Aşgabat, 2007.
4. Türkmenistanyň Prezidentiniň ″Obalaryň, şäherçeleriň, etrapdaky şäherleriň we etrap merkezleriniň ilatynyň durmuş-ýaşaýyş şertlerini özgertmek boýunça 2020-nji ýyla çenli döwür üçin″ Milli maksatnamasy, Aşgabat, 2007.
5. А. А. Никитин “Теоритические основы обработки геофизической информации”, Москва. Недра, 1986г.
6. Канасевич Э.Р. “Анализ временных последовательностей в геофизике”, Москва, Недра,1985г.
7. Давыдов А. В. “Теория сигналов и систем”.

8. Целевая инструкция «Интерпретация данных геофизических методов исследований”, Недра, Москва, 1990г
9. В. Знаменский, «Полевая геофизика», Москва, Недра, 1990г.
10. В. К. Хмелевский «Геофизика», Москва, Университет, Книжный дом 2009г.
11. В.С. Козырев, А.П. Жуков, И.П. Коротков, А.А. Жуков, М.В. Шнеерсон “Учет неоднородностей верхней части разреза в сейсморазведке”, Недра, Москва, 2003г.

Mazmuny