1-nji tema. Matrisalar. Matrisalary goşmak. Matrisalary aýyrmak. Matrisany sana köpeltmek. Matrisany matrisa köpeltmek. Ters matrisalar. Matrisanyň rangy.

1. Esasy kesgitlemeler.
2. Matrisalar we olaryň görnüşleri.
3. Matrisalaryň üstünde ýerine ýetirilýän amallar. Matrisalary goşmak, aýyrmak we köpeltmek.
4. Ters matrisany hasaplamak.

Kesgitleme 1.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Matrisa diýip , m-setirden we n- sütünden ybarat bolan gönüburçly tablisa aýdylýar. Matrisany düzýän ululyklara onuň elementleri diýilýär Matrisalar latin elipbiýiniň baş harplary bilen belgilenilýär. Ýokarda getirilen A matrisanyň m sany setiri we n sany sütüni bar. Şol sebäpli oňa $m\times n$ **ölçegi gönüburçly matrisa** diýilýär. a_{ij} ($i=1,...,m,\ j=1,...,n$) sanlara matrisanyň elementleri diýilýär. a_{ij} element i-nji setir bilen j-nji sütüniň kesişmesinde ýerleşýär. a_{ij} elementli, m setirli we n sütünli matrisa $A=\{a_{ij}\}$ $i=1,...,m,$ $j=1,...,n$ görnüşde belgilener. Eger matrisa $1\times n$ ölçegli bolsa (ýagny bir setirli, n sany sütüli bolsa), onda oňa **setir-matrisa** diýiler. Setir-matrisalara mysal hökmünde $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ görnüşdäki wektorlary getirip bolar. Eger matrisa $m\times 1$ ölçegli bolsa, onda oňa **sütün-matrisa** diýiler. Ol

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

görnüşde belgilener. $m\times n$ ölçegi gönüburçly A matrisanyň setirlerine $U^i=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$, ($i=1,2,...,m$) wektorlar hökmünde, sütünlerine bolsa

$$V^j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ (j=1,2,...,n)$$

görnüşdäki wektorlar hökmünde garap bolar.

Eger-de $m=n$ bolsa, onda A matrisa **kwadrat matrisa** diýilýär.

Eger matrisanyň hemme elementleri nula deň bolsa, onda oňa **nul-matrisa** diýilýär we şeýle belgilenilýär:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(1) matrisada $m=n$ diýeliň. Eger $i\neq j$ bolanda $a_{ij}=0$, $i=j$ bolanda $a_{ij}\neq 0$ bolsa, onda A matrisa **diagonal marisa** diýilýär, we aşakdaky görüşde belgilenilýär:

$$\text{diag}(=(a_{11},a_{22},...,a_{nn})=A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Eger (1.1.2) matrisada diagonal elementleriň hemmesi 1-e deň bolsa, onda bu marisa **birlik matrisa** diýilýär we aşakdaky ýaly belgilenýär:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

Eger-de $a_{ij}=a_{ji}$ bolsa, onda A matrisa simmetrik matrisa diýilýär.

Eger-de $A=\{a_{ij}\}$ we $B=\{b_{ij}\}$ $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ matrisalaryň degişli elementleri deň bolsa (ýagny, $a_{ij}=b_{ij}$), onda bu matrisalara deň diýilýär we $A=B$ görnüşde ýazylýar.

Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallar

Kesgitleme 1. $A=\{a_{ij}\}$ $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ **matrisany α sana köpeltmek** diýip netijede $\alpha A=\{\alpha a_{ij}\}$ $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ matrisany berýan amala aýdylýar.

A we B matrisalary sana köpeltmek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1^0. $1A=A$, $(-1)A=-A$, $0A=0$. (soňky deňligiň çep tarapyndaky 0 - san, sag tarapyndaky 0 –nul matrisadyr).

2^0. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$ (**assosiatiwlik-utgaşdyrma**).

3^0. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (**sanlara görä distributiwlik - paýlaşdyrma**).

4^0. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (**matrisalara görä distributiwlik - paýlaşdyrma**).

Kesgitleme 2. Ölçegleri deň bolan $A=\{a_{ij}\}$ we $B=\{b_{ij}\}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ **matrisalaryň jemi** diýip, $C=\{c_{ij}\}=\{a_{ij}+b_{ij}\}$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ (ýagny elementleri A we B matrisalaryň degişli elementleriniň jemi bolan) matrisa aýdylýar.

A we B matrisalaryň jemini tapmak amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1^0. $A+B=B+A$ (**jemiň kommutatiwligi- orunçalşyrma**)

2^0. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (**assosiatiwlik-utgaşdyrma**).

3^0. Islendik ölçegleri deň bolan A we B matrisalar üçin $A+X=B$ deňligi kanagatlandyrýan ýeke-täk X matrisa bardyr. Ol matrisa B we A **matrisalaryň tapawudy** diýilýär we B-A görnüşde belgilenilýär. $A+X=0$ deňlemäniň çözüwine A matrisanyň **garşylykly matrisasy** diýilýär we $(-A) = 0-A$ görnüşde belgilenilýär. $(-A) =\{a_{ij}\}$ bolýandygy görünýär.

<u>Kesgitleme 3</u>. Eger A matrisanyň sütünleriniň sany B matrisanyň setirleriniň sanyna deň bolsa, onda bu matrisalara **ylalaşykly matrisalar** diýilýär. $A=\{a_{ij}\}$ $i=1,...,m,\ j=1,...,n$ we $B=\{b_{ij}\},\ i=1,...,n,\ j=1,...,k$ **ylalaşykly matrisalaryň köpeltmek hasyly** diýip $m\times k$ tertipli, elementleri

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj} \qquad (3)$$

(ýagny i-setirde we j-sütünde duran c_{ij} elementi A matrisanyň i-setiriniň elementleriniň B matrisanyň j-sütüniniň elementlerine degişlilikde köpeltmek hasyllarynyň jemine deň) deň bolan $C=AB=\{\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}\}$ matrisa aýdylýar.

$C=AB$ matrisanyň setirleriniň sany A matrisanyň setirleriniň sanyna, sütünleriniň sany bolsa, B matrisanyň sütünleriniň sany bilen gabat gelýär.

AB köpeltmek hasyla A matrisany B matrisa **çepden köpeltmek** hasyl, ýa-da B matrisany A matrisa **sagdan köpeltmek** hasyl diýilýär.

Umuman aýdylanda, $AB=BA$ kommutatiwlik deňligi matrisalaryň köpeltmek hasyly üçin mydama ýerine ýetenok (meselem, bu deňlik ylalaşykly däl matrisalar üçin ýerine ýetenok). Eger ol deňlik käbir A we B matrisalar üçin ýerine ýetýän bolsa, onda olara **kommutatiw matrisalar** diýilýär.

Eger A matrisa kwadrat matrisa bolsa, onda onuň **n –nji derejesi** diýip ony öz-özüne n gezek köpeltmekden alynýan, A^n görnüşde belgilenýän matrisa aýdylýar. Diýmek, $A^n=A.A. ... A.$ $A^0=E$ hasap edilýär.

Matrisalaryň köpeltmek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1^0. $AE=EA=A,\ A0=0A=0$.

2^0. $(AB)C=A(BC)$, **(assosiatiwlik)**.

3^0. $(A+B)C=AC+BC,\ A(B+C)=AB+AC$, **(distributiwlik).**

Matrisalaryň üstünde geçirilýän amallar islendik tertipdäki matrisalar üçin dogrudyr. Şonuň üçin biz 3-nji tertipi kwadrat matrisalar üçin ýerine ýetirilýän amallary görkezeliň.

1) Matrisany k sana köpeltmek üçin bu matrisanyň hemme elementlerini k sana köpeltmek gerek:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

2) A we B matrisalary goşmak (aýyrmak) üçin bu matrisalaryň degişli elementlerini goşmaly (aýyrmaly):

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{32} \pm b_{32} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

3) A matrisany B matrisa köpeltmek üçin A matrisanyň setirleriniň elementlerini B matrisanyň sütünleriniň degişli elementlerine köpeldip goşmaly:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Bu ýerde

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31},$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33},$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32},$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33},$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31},$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32},$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}.$$

Bu ýerde hem, umuman aýdylanda $AB \neq BA$ bolýandygy görünýär.

Mysal. *A* we *B* matrisalary köpeltmeli.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+2+4 & 1-6+1 & 3+2+1 \\ 4-0-4 & 2+0-1 & 6-0-1 \\ -2-2+12 & -2+6+3 & -3-2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Matrisalaryň transponirlenilişi

Kesgitleme 4. *A* matrisanyň setirlerini sütünleri bilen çalyşsak, onda emele gelen matrisa ***A* matrisa transponirlenen matrisa** diýilýär. Matrisa transponirlenen matrisany tapmak amalyna **matrisany transponirlemek amaly** diýilýär. Berlen *A* matrisa transponirlenen matrisa A^T bilen belgilenilýär. Şeýlelikde, eger $A=\{a_{ij}\}$ $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ bolsa, onda $A^T=\{a_{ji}\}$ $j=1,...,m$, $i=1,...,n$ bolar. Transponirlemek amaly aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1^0. $(A^T)^T=A$.

2^0. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$, $\alpha \in R$.

3^0. $(A+B)^T=A^T+B^T$.

4^0. $(AB)^T=A^T B^T$.

Ters matrisa, matrisanyň rangy

Goý, *A* kwadrat matrisa berilen bolsun:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Belli bolşy ýaly, islendik $a \neq 0$ hakyky san üçin $ab=ba=1$ deňlik ýerine ýeter ýaly b san tapylýar. Şeýle b sana a sanyň ters ululygy diýilýär. Matrisalaryň arasynda birligiň ornuny E - birlik matrisa eýeleýär. Şol sebäpli, berlen A matrisalar üçin hem $AB = BA = E$ deňligiň ýerine ýetmegi üçin B matrisanyň barlygyny kesgitlemek gerek bolýar.

Kesgitleme 7. Eger AB = BA = E bolar ýaly B matrisa bar bolsa, onda oňa A matrisa ters bolan matrisa diýilýär we A^{-1} bilen belgilenýär.

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Eger A matrisanyň kesgitleýjisi nuldan tapawutly bolsa, yagny $\det A \neq 0$, onda oňa **kemsiz matrisa**, beýleki ýagdaýda oňa **kemli (şikesli) matrisa** diýilýär.

Eger A matrisanyň ters matrisasy bar bolsa, onda ol kemsiz matrisadyr.

Dogrudanda, kesgitleýjileriň 11-nji häsiýetinden we ters matrisanyň kesgitlemesinden alarys:

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

Bu ýerden A we A^{-1} matrisalaryň kemsizdikleri we olaryň kesgitleýjileriniň $\det(A) = 1/\det(A^{-1})$ deňlik bilen baglydyklary gelip çykýar.

A matrisa ters bolan matrisa aşakdaky ýaly hasaplanylýar:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & a_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$ bu ýerde - A matrisanyň kesgitleýjisi. Diýmek, A matrisanyň ters matrisasy bolmagy üçin hökman $\Delta = \det A \neq 0$ bolmaly (A matrisa kemsiz bolmaly). A_{ij} - a_{ij} elementiň algebraik doldurgujy. Bu formulanyň dogrulygyna A matrisa bilen onuň elementleriniň algebraik doldurgyçlaryndan düzülen, A **matrisa tirkelen matrisa** diýilýän

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & a_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisa sagdan ýa-da çepden köpeldip, Laplasyň teoremasyny peýdalanyp, göz ýetirip bolar.

A matrisa ters matrisanyň häsiýetleri:

1^0. $(A^{-1})^{-1} = A$

2^0. $(AB)^{-1} = (B)^{-1}(A)^{-1}$

3^0. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

$(3.7.14)^0$. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bu häsiýetler ters matrisanyň kesgitlemesinden gelip çykýar.

Mysal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisanyň A^{-1} ters matrisasyny tapmaly. Ilki bilen A matrisanyň kesgitleýjisini hasaplalyň:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 27 - 12 + 24 - 3 = -8 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$, diýmek, A matrisanyň ters matrisasy bar.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+9) = -10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-2) = 8,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Onda

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A^{-1} – matrisanyň dogry tapylandygyny bilmek üçin $AA^{-1} = E$ şertiň ýerine ýetýändigini barlaýarys.

$$AA^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 28+5-39 & 42+10-52 & 28-15-13 \\ -20-4+24 & -30-8+32 & -20+12+8 \\ -4+1+3 & -6+2+4 & -4-3+1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Diýmek, A^{-1} matrisa dogry tapylypdyr.

Kesgitleme 8. *A* matrisanyň elementlerinden düzülen nuldan tapawutly kesgitleýjileriň (minorlatyň) iň ýokary tertibine ***A* matrisanyň rangy** diýilýär.

A matrisanyň rangyny r_A ýa-da *rang A* belgiler bilen belgilenýär.

Mysal. Berlen martisalaryň ranglaryny tapmaly.

1). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 2). $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 3). $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Çözülişi. 1). *A* matrisanyň rangy $r_A = 2$. Sebäbi, bu matrisanyň nuldan tapawutly elementleri bar $r_A \geq 1$. Onuň elementlerinden düzülen ikinji tertipli minor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

A matrisanyň elementlerinden 3-nji tertipli minor düzüp bolmaýar. Diýmek, nuldan tapawutly minorlaryň iň ýokary tertibi 2-ä deň. Şol sebäpli, *A* matrisanyň rangy $r_A = 2$.

2).*B* matrisanyň elementlerinden düzülen 2-nji tertipli minorlaryň hemmesi nula deň:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6-6=0; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 9-9=0; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18-18=0.$$

Diýmek, *B* matrisanyň rangy $r_B = 1$.

3). *C* matrisanyň elementlerinden düzülen 2-nji tertipli minor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

C matrisanyň elementlerinden 3-nji tertipli minor onuň öz kesgitleýjisidir. Ol hem 1-e deň. Şol sebäpli, rangy $r_C = 3$.

Matrisanyň rangy dürli usulda tapylýar. Matrisanyň rangy tapylanda kiçi tertipli minorlardan uly tertipli minorlara geçilýär. Eger noldan tapawutly k-njy tertipli minor tapylan bolsa, onda diňe bu minory saklaýan (k+1)-nji tertipli minorlary hasaplamak gerek: eger-de olaryň hemmesi nola deň bolsa, onda matrisanyň rangy k deň. Bu usula matrisanyň rangyny tapmagyň **biri-biriniň içinde duran minorlar usuly** diýilýär. Matrisanyň rangyny hasaplamagyň ony diagonal görnüşe getirmeklige esaslanýan başga usuly hem bardyr. Eger m setirli we n sütünli matrisanyň $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ $\quad (0 \le r \le \min(m,n))$ elementlerden başga ähli elementleri nola deň bolsa, onda oňa **diagonal matrisa** diýilýär. Şeýle matrisanyň rangy r-e deň, sebäbi onuň $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ esasy diagonally r-nji tertipli minory noldan tapawutly: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr}$ deň, uly tertipli minorlary bolsa nola deňdir. Matrisanyň elementleriniň üstünde geçirilýän aşakda sanalýan özgertmelere **ýönekeý özgertmeler** diýilýär:

1) iki setiriň ýa-da iki sütüniň ornuny üýtgetmek;
2) sütüniň (setiriň) elementlerini noldan tapawutly erkin sana köpeltmek;
3) bir setire (sütüne) käbir sana köpeldilen beýleki setiriň (sütüniň) elementleriniň üstüne goşmak.

Ýönekeý özgertmeler geçirilende matrisanyň rangy üýtgemeýär. Şol sebäpli, olaryň kömegi bilen matrisany diagonal görnüşe ýa-da rangyny tapmak aňsatlaşýan beýleki görnüşlere (meselem, trapesiýa görnüşine) getirip, alnan matrisanyň rangy tapylýar. Bu rang, ýokarda bellenişi ýaly, berlen matrisanyň rangyna deň bolar.

Matrisanyň rangy komponentleri onuň setirleriniň ýa-da sütünleriniň elementleri bolup hyzmar edýän wektorlaryň çyzykly baglylarynyň sanyny görkezýär. Başgaça aýdylanda, matrisanyň rangynyň onuň setirleriniň (sütünleriniň) sanyndan kiçi bolmagy, matrisanyň setirleriniň (sütünleriniň) arasynda onuň beýleki setirleriniň (sütünleriniň) çyzykly kombinasiýasynyň bardygyny görkezýär.

Matrisanyň rangy düşünjesi matrisanyň bir setiri ykdysady pudagyň öndürýän önümleriniň bir birliginiň (bir kilogramynyň) bahasyny görkezýän bolsa, onda bu matrisada beýleki bir setiriň hem pudagyň öndürýän önümleriniň 1000 sanysynyň bahasyny (bir tonnasynyň bahasyny, ýa-da şoňa meňzeş maglumaty) görkezmeginiň zerur däldine ýene-de bir gezek şaýatlyk edýär. Ykdysady nukdaý nazardan bu düşnüklidir. Ýöne, bu mysal ykdysady maglumaty özünde saklaýan matrisanyň rangynyň onuň setirleriniň sanyndan kiçi bolmagynyň, onuň käbir setirlerindäki maglumatlaryň beýleki setirlerdäki maglumatlardan hem alnyp bilinjekdigini, ýa-da onuň beýleki setirlerdäki malumatlary gaýtalaýandygyny görkezýär.

Soraglar:

1. Martisa diýilip nämä düşünilýär?
2. Matrisalaryyñ üstünde ýerine ýetirilýän amallar.
3. Berlen matrisa ters bolan matrisany nähili kesgitlemeli?
4. Matrisanyñ rangy diýip nämä aýdylýar?